练习

1. 填表：

α	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{4}$
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

2. （口答）设 α 是三角形的一个内角，在 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 中，哪些有可能取负值？

3. 确定下列三角函数值的符号：

（1）$\sin 156°$；>0　　（2）$\cos\frac{16}{5}\pi$；<0　　（3）$\cos(-450°)$；$=0$

（4）$\tan\left(-\frac{17}{8}\pi\right)$；$<0$　　（5）$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$；$>0$　　（6）$\tan 556°$. >0

4. 对于 ①$\sin\theta>0$，②$\sin\theta<0$，③$\cos\theta>0$，④$\cos\theta<0$，⑤$\tan\theta>0$ 与 ⑥$\tan\theta<0$，选择恰当的关系式序号填空：

（1）角 θ 为第一象限角的充要条件是________；

（2）角 θ 为第二象限角的充要条件是________；

（3）角 θ 为第三象限角的充要条件是________；

（4）角 θ 为第四象限角的充要条件是________.

5. 求下列三角函数值（可用计算工具，第（1）题精确到 0.000 1）：

（1）$\cos 1\,109°$；　（2）$\tan\frac{19\pi}{3}$；　（3）$\sin(-1\,050°)$；　（4）$\tan\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$.

5.2.2 同角三角函数的基本关系

探究

公式一表明终边相同的角的同一三角函数值相等，那么，终边相同的角的三个三角函数值之间是否也有某种关系呢？

因为三个三角函数值都是由角的终边与单位圆交点所唯一确定的，所以终边相同的角的三个三角函数值一定有内在联系. 由公式一可知，我们不妨讨论同一个角的三个三角函数值之间的关系.

如图 5.2-7，设点 $P(x, y)$是角 α 的终边与单位圆的交点. 过 P 作 x 轴的垂线，交 x 轴于 M，则△OMP 是直角三角形，而且 $OP=1$. 由勾股定理有

$$OM^2+MP^2=1.$$

因此，$x^2+y^2=1$，即

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.}$$

显然，当 α 的终边与坐标轴重合时，这个公式也成立.

根据三角函数的定义，当 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，有

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.}$$

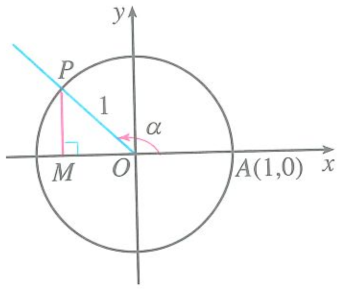

图 5.2-7

这就是说，**同一个角 α 的正弦、余弦的平方和等于 1，商等于角 α 的正切.**

例 6 已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

解： 因为 $\sin\alpha<0$，$\sin\alpha\neq-1$，所以 α 是第三或第四象限角.

由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}.$$

如果 α 是第三象限角，那么 $\cos\alpha<0$. 于是

$$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5},$$

从而

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{4}.$$

如果 α 是第四象限角，那么

$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\quad \tan\alpha=-\frac{3}{4}.$$

例 7 求证：$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$.

证法 1： 由 $\cos x\neq0$，知 $\sin x\neq-1$，所以 $1+\sin x\neq0$，于是

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\frac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\\
&=\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}\\
&=\frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}\\
&=\frac{1+\sin x}{\cos x}=\text{右边}.
\end{aligned}$$

> 今后，除特殊注明外，我们假定三角恒等式是在使两边都有意义的情况下的恒等式.

所以，原式成立.

证法 2：因为

$$\begin{aligned}&(1-\sin x)(1+\sin x)\\=&1-\sin^2 x=\cos^2 x\\=&\cos x\cos x,\end{aligned}$$

且 $1-\sin x\neq 0$，$\cos x\neq 0$，所以

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}.$$

练习

$-\frac{3}{5}$ $\frac{3}{4}$

1. 已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 为第三象限角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$

α为二象限 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知 $\tan\varphi=-\sqrt{3}$，求 $\sin\varphi$，$\cos\varphi$ 的值. α为四象限 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

3. 已知 $\sin\theta=0.35$，求 $\cos\theta$，$\tan\theta$ 的值（精确到 0.01）.

4. 化简：

(1) $\cos\theta\tan\theta$； $\sin\theta$　(2) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}$； 1　(3) $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$. 1

5. 求证：$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

习题 5.2

复习巩固

1. 用定义法、公式一求下列角的三个三角函数值（可用计算工具）：

(1) $-\frac{17\pi}{3}$；　(2) $\frac{21\pi}{4}$；　(3) $-\frac{23\pi}{6}$；　(4) $1\,500^\circ$.

2. 已知角 α 的终边上有一点 P 的坐标是 $(3a,\ 4a)$，其中 $a\neq 0$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

$a>0$ $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

$a<0$ $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

3. 计算：

(1) $6\sin(-90^\circ)+3\sin 0^\circ-8\sin 270^\circ+12\cos 180^\circ$； -10

(2) $10\cos 270^\circ+4\sin 0^\circ+9\tan 0^\circ+15\cos 360^\circ$； 15

(3) $2\cos\frac{\pi}{2}-\tan\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\tan^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{2}$； $-\frac{3}{2}$

(4) $\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^4\frac{3\pi}{2}-\tan^2\frac{\pi}{3}$. $-\frac{9}{4}$

4. 化简：

(1) $a\sin 0^\circ+b\cos 90^\circ+c\tan 180^\circ$； 0

(2) $-p^2\cos 180^\circ+q^2\sin 90^\circ-2pq\cos 0^\circ$； $(p-q)^2$

(3) $a^2\cos 2\pi - b^2\sin\frac{3\pi}{2} + ab\cos\pi - ab\sin\frac{\pi}{2}$； $(a-b)^2$

(4) $m\tan 0 + n\cos\frac{1}{2}\pi - p\sin\pi - q\cos\frac{3}{2}\pi - r\sin 2\pi$. 0

5. 确定下列三角函数值的符号：

(1) $\sin 186^\circ$； <0　(2) $\tan 505^\circ$； <0　(3) $\sin 7.6\pi$； <0

(4) $\tan\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$； >0　(5) $\cos 940^\circ$； <0　(6) $\cos\left(-\frac{59\pi}{17}\right)$. <0

6. (1) 已知 $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 为第四象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值； $\frac{1}{2}$　$-\sqrt{3}$

(2) 已知 $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$，且 α 为第二象限角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值； $\frac{12}{13}$　$-\frac{12}{5}$

(3) 已知 $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值；

α为二　$\sin\alpha = \frac{3}{5}$　$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$
α为四　$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$　$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

(4) 已知 $\cos\alpha = 0.68$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值（精确到 0.01）.

α为第一　$\sin\alpha \approx 0.73$　$\tan\alpha \approx 1.07$
α为第四　$\sin\alpha \approx -0.73$　$\tan\alpha \approx -1.07$

综合运用

7. 根据下列条件求函数 $f(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 4\cos 2x + 3\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ 的值：

(1) $x = \frac{\pi}{4}$； $f(\frac{\pi}{4}) = -2$　(2) $x = \frac{3\pi}{4}$. $f(\frac{3\pi}{4}) = 2$

8. 确定下列式子的符号：

(1) $\tan 125^\circ \sin 273^\circ$；　(2) $\frac{\tan 108^\circ}{\cos 305^\circ}$；

(3) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{5}\tan\frac{11\pi}{6}$；　(4) $\frac{\cos\frac{5\pi}{6}\tan\frac{11\pi}{6}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$.

9. 求下列三角函数值（可用计算工具，第 (1)(3)(4) 题精确到 0.000 1）：

(1) $\sin\left(-\frac{67\pi}{12}\right)$；　(2) $\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$；

(3) $\cos 398^\circ 13'$；　(4) $\tan 766^\circ 15'$.

10. 求证：

(1) 角 θ 为第二或第三象限角的充要条件是 $\sin\theta\tan\theta < 0$；

(2) 角 θ 为第三或第四象限角的充要条件是 $\cos\theta\tan\theta < 0$；

(3) 角 θ 为第一或第四象限角的充要条件是 $\frac{\sin\theta}{\tan\theta} > 0$；

(4) 角 θ 为第一或第三象限角的充要条件是 $\sin\theta\cos\theta > 0$.

11. 已知 $\sin x = -\frac{1}{3}$，求 $\cos x$，$\tan x$ 的值.

x为第三　$\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$　$\tan x = \frac{\sqrt{2}}{4}$
x为第四　$\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$　$\tan x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

12. 已知 $\tan\alpha = \sqrt{3}$，$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$，求 $\cos\alpha - \sin\alpha$ 的值.

$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

13. 已知角 α 的终边不在坐标轴上，

(1) 用 $\cos\alpha$ 表示 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$；

(2) 用 $\sin\alpha$ 表示 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$.

14. 求证：

(1) $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$；

(2) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$；

(3) $(\cos\beta-1)^2+\sin^2\beta=2-2\cos\beta$；

(4) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$.

15. 已知 $\tan\alpha=2$，求 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值.

拓广探索

16. 化简 $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$，其中 α 为第二象限角.

17. 从本节的例 7 可以看出，$\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ 就是 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 的一个变形. 你能利用同角三角函数的基本关系推导出更多的关系式吗？

18. (1) 分别计算 $\sin^4\dfrac{\pi}{3}-\cos^4\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\sin^2\dfrac{\pi}{3}-\cos^2\dfrac{\pi}{3}$ 的值，你有什么发现？

(2) 任取一个 α 的值，分别计算 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$，$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$，你又有什么发现？

(3) 证明：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin^4 x-\cos^4 x$.

阅读与思考

三角学与天文学

三角学的起源、发展与天文学密不可分，它是天文观察结果推算的一种方法. 在 1450 年以前的三角学主要是球面三角，这不但是因为航海、历法推算以及天文观测等人类实践活动的需要，而且也因为宇宙的奥秘对人类的巨大吸引力，这种“量天的学问”确实太诱人了. 后来，由于间接测量、测绘工作的需要而出现了平面三角.

在欧洲，最早将三角学从天文学中独立出来的数学家是德国人雷格蒙塔努斯(J. Regiomontanus，1436—1476). 他在 1464 年完成的 5 卷本的著作《论各种三角形》，是欧洲第一部独立于天文学的三角学著作，这部著作首次对三角学做出了完整、独立的阐述. 前 2 卷论述平面三角学，后 3 卷讨论球面三角学. 前 2 卷中，他采用印度人的正弦，即弧的半弦，明确使用了正弦函数，讨论了一般三角

形的正弦定理，提出了求三角形边长的代数解法；后3卷中，给出了球面三角的正弦定理和关于边的余弦定理. 他的工作为三角学在平面与球面几何中的应用奠定了牢固基础，对16世纪的数学家产生了极大影响，也对哥白尼等一批天文学家产生了很大影响.

由于雷格蒙塔努斯仅仅采用正弦函数和余弦函数，而且函数值也限定在正数范围内，因而不能推出应有的三角公式，导致计算的困难. 后来，哥白尼的学生雷提库斯（G. J. Rheticus，1514—1576）将传统的弧与弦的关系改进为角的三角函数关系，把三角函数定义为直角三角形的边长之比，从而使平面三角学从球面三角学中独立出来. 他还采用了六个函数（正弦、余弦、正切、余切、正割、余割），制定了更为精确的正弦、正切、正割表. 这些工作都极大推进了三角学的发展. 实际上，由于天文学研究的需要，制定更加精确的三角函数表一直是数学家奋斗的目标，这大大推动了三角学的发展.

法国数学家韦达（F. Viete，1540—1603）所做的平面三角与球面三角系统化工作，使得三角学得到进一步发展. 他总结了前人的三角学研究成果，将解平面直角三角形和斜三角形的公式汇集在一起，还补充了自己发现的新公式，如正切公式、和差化积公式等. 他将解斜三角形的问题转化为解直角三角形的问题. 对球面直角三角形，他给出了计算的方法和一套完整的公式及其记忆法则，并将这套公式表示成了代数形式，这是非常重要的工作.

16世纪，三角学从天文学中分离出来，成为数学的一个独立分支. 后来，在微积分、物理学的研究和应用（如对振动、声音传播等的研究）中，三角学又找到了新的用武之地.