2.2 基本不等式

我们知道，乘法公式在代数式的运算中有重要作用. 那么，是否也有一些不等式，它们在解决不等式问题时有着与乘法公式类似的重要作用呢？下面就来研究这个问题.

前面我们利用完全平方公式得出了一类重要不等式：

$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，有

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

特别地，如果 $a>0$，$b>0$，我们用$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$分别代替上式中的 a，b，可得

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}, \tag{1}$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

通常称不等式（1）为**基本不等式**（basic inequality）. 其中，$\frac{a+b}{2}$叫做正数 a，b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$叫做正数 a，b 的几何平均数.

基本不等式表明：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

上面通过考察 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的特殊情形获得了基本不等式. 能否直接利用不等式的性质推导出基本不等式呢？下面我们来分析一下.

要证

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}, \quad ①$$

只要证

$$2\sqrt{ab}\leqslant a+b. \quad ②$$

要证②，只要证

$$2\sqrt{ab}-a-b\leqslant 0. \quad ③$$

要证③，只要证

$$-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\leqslant 0. \quad ④$$

要证④，只要证

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0. \quad ⑤$$

显然，⑤成立，当且仅当 $a=b$ 时，⑤中的等号成立.

只要把上述过程倒过来，就能直接推出基本不等式了.

探究

在图 2.2-1 中，AB 是圆的直径，点 C 是 AB 上一点，$AC=a$，$BC=b$. 过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE，连接 AD，BD. 你能利用这个图形，得出基本不等式的几何解释吗？

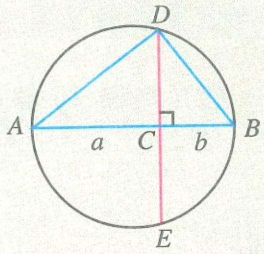


图 2.2-1

如图 2.2-1，可证$\triangle ACD \backsim \triangle DCB$，因而 $CD=\sqrt{ab}$. 由于 CD 小于或等于圆的半径，用不等式表示为

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

显然，当且仅当点 C 与圆心重合，即当 $a=b$ 时，上述不等式的等号成立.

例 1 已知 $x>0$，求 $x+\frac{1}{x}$的最小值.

分析： 求 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值，就是要求一个 $y_0\left(=x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，使 $\forall x>0$，都有 $x+\frac{1}{x}\geqslant y_0$. 观察 $x+\frac{1}{x}$，发现 $x\cdot\frac{1}{x}=1$. 联系基本不等式，可以利用正数 x 和$\frac{1}{x}$的算术平均数与几何平均数的关系得到 $y_0=2$.

解： 因为 $x>0$，所以

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2,$$

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x^2=1$，$x=1$ 时，等号成立，因此所求的最小值为 2.

在本题的解答中，我们不仅明确了$\forall x>0$，有 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，而且给出了“当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x^2=1$，$x=1$ 时，等号成立”，这是为了说明 2 是 $x+\frac{1}{x}(x>0)$的一个取值. 想一想，当 $y_0<2$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant y_0$ 成立吗？这时能说 y_0 是 $x+\frac{1}{x}(x>0)$的最小值吗？

例 2 已知 x，y 都是正数，求证：

(1) 如果积 xy 等于定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；

(2) 如果和 $x+y$ 等于定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值$\frac{1}{4}S^2$.

证明： 因为 x，y 都是正数，所以

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

(1) 当积 xy 等于定值 P 时，

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{P},$$

所以

$$x+y\geqslant2\sqrt{P},$$

当且仅当 $x=y$ 时，上式等号成立．于是，当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$.

(2) 当和 $x+y$ 等于定值 S 时，

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{S}{2},$$

所以

$$xy\leqslant\frac{1}{4}S^2,$$

当且仅当 $x=y$ 时，上式等号成立．于是，当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值$\frac{1}{4}S^2$.

练习

1. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.
2. 已知 x，y 都是正数，且 $x\neq y$，求证：

   (1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$；　　(2) $\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$.
3. 当 x 取什么值时，$x^2+\frac{1}{x^2}$取得最小值？最小值是多少？
4. 已知 $-1\leqslant x\leqslant1$，求 $1-x^2$的最大值．　$0\le x^2\le 1$　$-1\le -x^2\le 0$　$0\le 1-x^2\le 1$
5. 已知直角三角形的面积等于 50 cm^2，当两条直角边的长度各为多少时，两条直角边的和最小？最小值是多少？

基本不等式在解决实际问题中有广泛的应用，是解决最大（小）值问题的有力工具．

例 3　(1) 用篱笆围一个面积为 100 m^2的矩形菜园，当这个矩形的边长为多少时，所用篱笆最短？最短篱笆的长度是多少？

(2) 用一段长为 36 m 的篱笆围成一个矩形菜园，当这个矩形的边长为多少时，菜园

的面积最大？最大面积是多少？

分析：(1) 矩形菜园的面积是矩形的两邻边之积，于是问题转化为：矩形的邻边之积为定值，边长多大时周长最短.

(2) 矩形菜园的周长是矩形两邻边之和的 2 倍，于是问题转化为：矩形的邻边之和为定值，边长多大时面积最大.

解：设矩形菜园的相邻两条边的长分别为 x m，y m，篱笆的长度为$2(x+y)$m.

(1) 由已知得 $xy=100$.

由

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

可得

$$x+y\geqslant2\sqrt{xy}=20,$$

所以

$$2(x+y)\geqslant40,$$

当且仅当 $x=y=10$ 时，上式等号成立.

因此，当这个矩形菜园是边长为 10 m 的正方形时，所用篱笆最短，最短篱笆的长度为 40 m.

(2) 由已知得$2(x+y)=36$，矩形菜园的面积为 xy m^2.

由

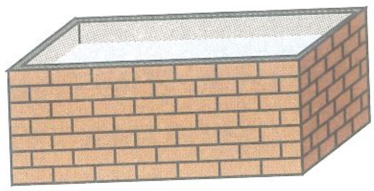
$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{18}{2}=9,$$

可得

$$xy\leqslant81,$$

当且仅当 $x=y=9$ 时，上式等号成立.

因此，当这个矩形菜园是边长为 9 m 的正方形时，菜园的面积最大，最大面积是 81 m^2.



例 4 某工厂要建造一个长方体形无盖贮水池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m. 如果池底每平方米的造价为 150 元，池壁每平方米的造价为 120 元，那么怎样设计水池能使总造价最低？最低总造价是多少？

分析：贮水池呈长方体形，它的高是 3 m，池底的边长没有确定. 如果池底的边长确定了，那么水池的总造价也就确定了. 因此，应当考察池底的边长取什么值时，水池的总造价最低.

解：设贮水池池底的相邻两条边的边长分别为 x m，y m，水池的总造价为 z 元. 根据题意，有

$$z=150\times\frac{4\ 800}{3}+120(2\times3x+2\times3y)$$
$$=240\ 000+720(x+y).$$

由容积为 4 800 m^3，可得

$$3xy=4\ 800,$$

因此

$$xy=1\ 600.$$

所以

$$z\geqslant240\ 000+720\times2\sqrt{xy},$$

当 $x=y=40$ 时，上式等号成立，此时 $z=297\ 600$.

所以，将贮水池的池底设计成边长为 40 m 的正方形时总造价最低，最低总造价是 297 600 元.

练习

1. 用 20 cm 长的铁丝折成一个面积最大的矩形，应当怎样折？
2. 用一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长 18 m. 当这个矩形的边长为多少时，菜园的面积最大？最大面积是多少？
3. 做一个体积为 32 m^3，高为 2 m 的长方体纸盒，当底面的边长取什么值时，用纸最少？
4. 已知一个矩形的周长为 36 cm，矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱. 当矩形的边长为多少时，旋转形成的圆柱的侧面积最大？

习题 2.2

复习巩固

1. (1) 已知 $x>1$，求 $x+\dfrac{1}{x-1}$ 的最小值；

   (2) 求 $\sqrt{x(10-x)}$ 的最大值.

2. (1) 把 36 写成两个正数的积，当这两个正数取什么值时，它们的和最小？

   (2) 把 18 写成两个正数的和，当这两个正数取什么值时，它们的积最大？

3. 某公司建造一间背面靠墙的房屋，地面面积为 48 m^2，房屋正面每平方米的造价为 1 200 元，房屋侧面每平方米的造价为 800 元，屋顶的造价为 5 800 元. 如果墙高为 3 m，且不计房屋背面和地面的费用，那么怎样设计房屋能使总造价最低？最低总造价是多少？

综合运用

4. 已知 x，y，z 都是正数，求证：$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz$.

5. 已知 $x>0$，求证：$2-3x-\dfrac{4}{x}$ 的最大值是 $2-4\sqrt{3}$.

6. 一家货物公司计划租地建造仓库储存货物，经过市场调查了解到下列信息：每月土地占地费 y_1（单位：万元）与仓库到车站的距离 x（单位：km）成反比，每月库存货物费 y_2（单位：万元）与 x 成正比；若在距离车站 10 km 处建仓库，则 y_1 和 y_2 分别为 2 万元和 8 万元. 这家公司应该把仓库建在距离车站多少千米处，才能使两项费用之和最小?

拓广探索

7. 一家商店使用一架两臂不等长的天平称黄金. 一位顾客到店里购买 10 g 黄金，售货员先将 5 g 的砝码放在天平左盘中，取出一些黄金放在天平右盘中使天平平衡；再将 5 g 的砝码放在天平右盘中，再取出一些黄金放在天平左盘中使天平平衡；最后将两次称得的黄金交给顾客. 你认为顾客购得的黄金是小于 10 g，等于 10 g，还是大于 10 g? 为什么?

8. 设矩形 $ABCD$（$AB>AD$）的周长为 24 cm，把$\triangle ABC$ 沿 AC 向$\triangle ADC$ 折叠，AB 折过去后交 DC 于点 P. 设 $AB=x$ cm，求$\triangle ADP$ 的最大面积及相应 x 的值.