数学考前 30 分

一、常见具体函数的定义域

（1）分式分母不为 0：$y=\frac{1}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

（2）偶次根式下整体非负：$y=\sqrt{x},x\in[0,+\infty)$；

（3）对数的真数部分大于 0：$y=\ln x,x\in(0,+\infty)$；

（4） $y=\tan x,x\in\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$；

（5） $y=\arcsin x,x\in[-1,1]$；$y=\arccos x,x\in[-1,1]$

二、求函数的表达式

（1）已知 $y=f(u)$ 和 $u=\phi(x)$ 求 $f[\phi(x)]$ ，用直接代入法.

（2）已知 $f[\phi(x)]$ 求 $f(u)$ ，用换元法.

三、函数的奇偶性

（1）奇函数：$f(-x)=-f(x)$.

（2）偶函数：$f(-x)=-f(x)$.

（3）常见的奇函数：x^{2n+1}，$\sin x$，$\arcsin x$，$\tan x$，$\arctan x$ ，$\ln\left(\sqrt{1+x^2}\pm x\right)$.

（4）常见的偶函数： x^{2n}，$\cos x$，$|x|$，C .

（5）乘除时奇偶性：同偶异奇.

（6）加减时奇偶性：同不变，异非奇非偶.

（7）常见的有界函数：$\sin x$，$\cos x$，$\arcsin x$，$\arccos x$ ，$\arctan x$.

四、两个极限

1. 第一重要极限

①公式：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

②描述：当 $x\to0$ 时，$\frac{\sin x}{x}$ 的极限为 1

③通式：$\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$，即当 $\Delta\to0$ 时，$\frac{\sin\Delta}{\Delta}$ 的极限为 1

2. 第二重要极限

①公式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

②描述：当 $x\to 0$ 时，1^{∞} 的极限为 e

③通式：$\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=\mathrm{e}$，即当 $\Delta\to 0$ 时，$(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$ 的极限为 e

五、等价无穷小关系

当 $x\to 0$ 时，有：

（1） $\sin x\sim x$	（5） $e^{x}-1\sim x$	（9） $\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})\sim x$
（2） $\arctan x\sim x$	（6） $\ln(1+x)\sim x$	（10） $(1+x)^{\alpha}\sim 1+\alpha x(\alpha\neq 0)$
（3） $\tan x\sim x$	（7） $1-\cos x\sim\dfrac{x^{2}}{2}$	（11） $a^{x}-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$
（4） $\arctan x\sim x$	（8） $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$	（12） $\log_{a}(1+x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln a}\sim\dfrac{x}{\ln a}$

六、无穷小的比较

设 α,β 是在同一自变量变化过程中的无穷小，且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}(\beta\neq 0)$ 也是在此变化过程中的极限.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是 β 的低阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，则称 α 和 β 是同阶无穷小，记作 $\alpha=O(\beta)$；

特别地，若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 和 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$；

七、定义求导技巧通式

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{ch}=\frac{a-b}{c}f'(x_0)$$

八、导数的几何意义

（1）切线方程.

$y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

（2）法线方程

$y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

九、不定积分运算性质

1. $\int (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

2. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, (k \neq 0)$

3. $(\int f(x)\mathrm{d}x)' = f(x)$ （先积后导=函数本身）

4. $\mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$

5. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ （先导后积=所有原函数）

十、导数的四则运算

定理：设 $u = u(x), v = v(x)$ 都可导，则

$(u \pm v)' = u' \pm v'$　　$(Cu)' = Cu'$ （C 是常数）

$(uv)' = u'v + uv'$　　$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}(v \neq 0)$

十一、隐函数求导

由二元方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的函数称为隐函数. 把 y 看成 x 的函数，并等式两边对 x 进行求导，用复合函数求导法则进行求导.

十二、参数方程求导

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 可确定一个 y 与 x 之间的函数关系.

一阶导数：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$，二阶导数：$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$

十三、幂指函数求导

对于一般形式的幂指函数 $y = f(x)^{g(x)}(f(x) > 0)$，在式子有意义前提下求导方法有：

法一：先在两边取对数，得：$\ln y = g \cdot \ln f$，上式两边对 x 求导，得：

$$\frac{y'}{y} = g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{1}{f} \cdot f'$$

于是

$$y' = y(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{1}{f} \cdot f') = f^g(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{1}{f} \cdot f')$$

法二：一般幂指函数也可以表示为：$y = f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，这样便可直接求得

$$y' = \mathrm{e}^{g\ln f}(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{1}{f} \cdot f') = f^g(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{1}{f} \cdot f')$$

十四、基本微分公式与微分法则

1. $\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}f(x)\pm \mathrm{d}g(x)$.

2. $\mathrm{d}[f(x)g(x)]=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x)$.

3. $\mathrm{d}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)}(g(x)\neq 0)$.

十五、第一充分条件判定极值点

第一充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0,\delta)$ 内可导.

①若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

②若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

③若 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

十六、第二充分条件判定极值点

若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则函数在 x_0 处取得极值.

①当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

②当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

十七、求拐点

（1）找出二阶导数为零的点或者二阶导数不存在的点；

（2）判断他们两侧的二阶导数的导数值是否为异号：异号则为拐点，同号则不是拐点；

（3）写出拐点：拐点是平面上的点，要写出其纵坐标，例如拐点 $y=x^3$ 的拐点为 $(0,0)$.

十八、曲率

若曲线方程为 $y=f(x)$，则 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

十九、洛必达法则

定理：设（1）当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零或趋于无穷大；

（2）在点 a 的某去心领域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

则：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

二十、不定积分概念

在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$.若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分，即 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. 注：$C$ 为常数，不可丢.