

高等数学入学测试卷

一、判断题 (共 10 题, 每题 4 分, 共 40 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{px} = e^{-2}$, 则 $p = \frac{2}{3}$. ()

2. 设 $y = y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos e^t \end{cases}$ 所确定的, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = -\sin 1$. () 3.

分段函数必存在间断点. ()

4. 设函数 $y = \sqrt{1-x^2} - 2 \sin \frac{\pi}{5}$, 则 $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$. ()

5. 函数 $f(x) = 3x - x^2$ 的极值点是 $x = 3$. ()

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 2x + 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{1} = 1$. ()

7. 设 $\int f(x)dx = e^x + C$, 则 $\int xf'(1-x^2)dx = \frac{1}{2}e^x + C$, ()

8. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 1$. ()

9. 对任意实数 a , 等式 $\int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(a-x)dx$. 总成立 ()

10. 函数 y_1, y_2 均是方程 $y'' + y' + 4y = 0$ 的解, 则函数 $y = 4y_1 + 7y_2$ 也是方程 $y'' + y' + 4y = 0$ 的解 ()

二、单项选择题 (共 20 题, 每题 4 分, 共 80 分)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax} - a, & x \leq 0 \\ x + a \cos 2x, & x > 0 \end{cases}$, 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a =$ ()

A. 0

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{5^n} =$ ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{5}{3}$ C. 1 D. 0

3. 下列那个式子是不正确的 ()

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$
 C. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ D. $\lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 2x$ 是 ()

- A. 比 $\sin 3x$ 高阶的无穷小 B. 比 $\sin 3x$ 低阶的无穷小
 C. 与 $\sin 3x$ 同阶的无穷小 D. 与 $\sin 3x$ 等价的无穷小

5. 设曲线 $y = x^3$ 与 $y = ax^2 + b$ 在点 $(1,1)$ 处相切, 则 ()

- A. $a = 3, b = -1$ B. $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$
 C. $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ D. $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$

6. 函数 $f(x) = \ln|x-1|$ 的导数是 ()

- A. $f'(x) = \frac{1}{|x-1|}$ B. $f'(x) = \frac{1}{x-1}$
 C. $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ D. 不存在

7. 设函数 $y = e^{x-2}$, 则 $dy =$ ()

- A. $2e^{x-2} dx$ B. $e^{x-2} dx$
 C. $-2e^{x-2} dx$ D. $e^x dx$

8. 区间_____是函数 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的单调递减的凸区间 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

9. 若函数 $y = e^{ax}$, 则 $y^{(n)}(1) =$ ()

- A. 0 B. 1 C. a^n D. $a^n e^a$

10. 下列结论错误的是 ()

- A. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
B. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分
C. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极大值, 则 $f'(x_0) = 0$ 或者不存在
D. 若点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$

11. 由方程 $xy + \ln y = 1$ 所确定的隐函数 $x = x(y)$ 的微分 dx ()

- A. $-\frac{y^2}{1+xy}$ B. $-\frac{y^2}{1+xy} dy$
C. $-\frac{1+xy}{y^2}$ D. $-\frac{1+xy}{y^2} dy$

12. 若 $f(x)$ 可导, 则不定积分 $\int \cos x f'(1-2\sin x) dx =$ ()

- A. $2f(1-2\sin x) + C$ B. $\frac{1}{2}f(1-2\sin x) + C$
C. $-2f(1-2\sin x) + C$ D. $-\frac{1}{2}f(1-2\sin x) + C$

13. 定积分 $\int_1^3 (x^2 - 1) dx =$ ()

A. $\frac{16}{3}$

B. $\frac{20}{3}$

C. $\frac{14}{3}$

D. 6

14. $\int_a^b dx =$ ()

A. $b-a$

B. $a-b$

C. $a+b$

D. ab

15. 不定积分 $\int \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ ()

A. $\frac{x}{4\sqrt{x^2-4}} + C$

B. $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} + C$

C. $\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$

D. $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C$

16. $f'(x)$ 为连续函数, 则 $\int f^2(x) f'(x) dx =$ ()

A. $\frac{1}{3} f^3(x) + C$

B. $\frac{1}{2} f^2(x) + C$

C. $-\frac{1}{3} f^3(x) + C$

D. $\frac{1}{3} f^3(x)$

17. 由曲线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$ 与 x 轴所围成的区域的面积为 ()

A. 1

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

18. 微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' = 0$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解是 ()

A. $y = \arcsin x$

B. $y = \arctan x$

C. $y = -\arcsin x$

D. $y = -\arctan x$

19. 微分方程 $\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = 2x+1$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = -1$ 的特解为 ()

A. $-\frac{1}{y} = x^2 + x + C$

B. $y = -\frac{1}{x^2 + x + 1}$

C. $-y = x^2 + x + C$

D. $-y = x^2 + x + 1$

20. 微分方程 $xy' + y = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ 的通解为 ()

A. $y = x(x^4 + x^3 + x^2 + x + C)$

B. $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + C$

C. $y = \frac{1}{x}(x^4 + x^3 + x^2 + x + C)$

D. $y = \frac{1}{x}(x^4 + x^3 + x^2 + x + C)$

三、多项选择题 (每题 6 分, 共 5 题, 共 30 分, 本大题多选、少选、错选、均不得分)

1. 若 $f(x) (x \in R)$ 为奇函数, 则下列函数为偶函数的是 ()

A. $y = \sqrt[3]{x^3 - 1}f(x), x \in [-1, 1]$

B. $y = f(x) + \tan^3 x, x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

C. $y = x^3 \sin x - f(|x|), x \in [-1, 1]$

D. $y = f(x)e^{x^2} \sin^5 x, x \in [-\pi, \pi]$

2. 下列等式中正确的是 ()

A. $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$

B. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^a f(t) dt = -2xf(x^2)$

C. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

D. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) - f(a)$

3. $\int x \sin^2 x dx =$ ()

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$

B. $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x \sin x \cos x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$

C. $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8}(\cos^2 x - \sin^2 x) + C$

D. $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x \sin x \cos x - \frac{1}{16} \cos 2x + C$

4. 已知方程 $y'' + y = 0$ ，下列哪些函数可以作为该方程的解 ()

- A. $y = \cos x$ B. $y = \sin x$ C. $y = \tan x$ D. $y = \cot x$

5. 下列说法中正确的有 ()

A. 设 $a > b > 0, n > 1$ ，则有 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9x}{\sqrt{x} - 3}$ 不存在

C. 若曲线 $f(x) = 2 \arctan x, g(x) = \ln x$ ，则 $f'(1) = g'(1)$

D. $\int_{-1}^1 \frac{x^{2021} \cos x}{1+x^2} dx = 0$