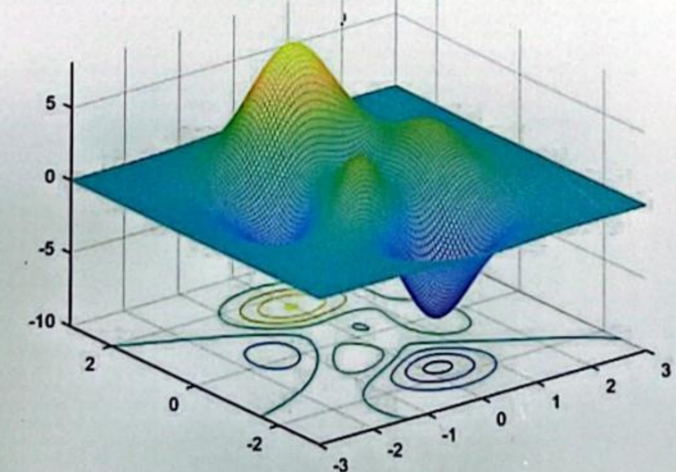
"十四五"职业教育国家规划教材

高等数学

（基础模块）

凌巍炜　谢良金 ◎ 主 编



东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

探访拉格朗日

第三章

导数的应用

上一章以几个实际问题的变化率为背景，抽象出函数导数的概念，讨论了导数的计算方法. 这一章将利用导数来研究函数. 由于函数在某一点的导数仅反映函数在这一点邻近的局部性态，所以要用导数研究函数的整体性态，首先必须在函数的定义区间内寻求联系因变量、自变量和导数之间的数量关系，这就是本章的微分中值定理. 本章先介绍微分中值定理的概念，然后在微分中值定理的基础上讨论不定式极限的求法、函数的单调性、极值和最值，以及曲线的一些性质，并进一步利用这些知识解决一些实际问题.

第一节　微分中值定理与洛必达法则

一、微分中值定理

微分中值定理是连接微分学理论与应用的桥梁，它是研究函数整体性质强有力的工具. 下面我们简要地介绍微分中值定理的主要内容.

1. 罗尔(Rolle)中值定理

引理(费马定理)　设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并且在 x_0 某邻域内 $U(x_0,\delta)$ 恒有：$f(x) \geqslant f(x_0)$(或 $f(x) \leqslant f(x_0)$)，则 $f'(x_0)=0$.

证明略.

罗尔中值定理

定理 1(罗尔中值定理)　如果函数 $f(x)$ 满足：

(1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) $f(a)=f(b)$.

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

证　由闭区间上连续函数的性质知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必能取到最小值 m 和最大值 M. 如果 $m=M$，那么 $f(x)\equiv C$，于是 $\forall x\in[a,b]$ 有，$f'(x)=0$.

否则，$M>m$，于是，$M\neq f(a)$ 或 $m\neq f(a)$ 至少有一个成立. 根据罗尔中值定理的条件(3)，在 (a,b) 内至少存在一个最值点 ξ，不妨设 $f(\xi)=M$，因为 $f(x)$ 在点 ξ 处可导，那

么，由费马定理得 $f'(\xi)=0$.

罗尔中值定理的几何意义是：

如果一条连续曲线 $y=f(x)$，除曲线端点之外每一点都存在切线，并且曲线的两个端点在同一水平线上，那么在该曲线上至少存在一点，使得过该点的切线为水平线(如图 3 - 1 所示).

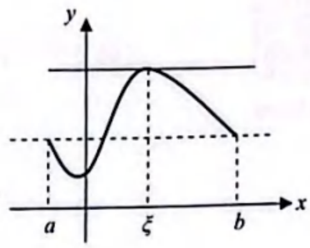


图 3 - 1

值得说明的是：此定理中的三个条件是充分条件，如果有一个条件不满足，结论只是有可能不成立.

2. 拉格朗日(Lagrange)中值定理

定理 2 (拉格朗日中值定理) 如果函数 $f(x)$ 满足：

(1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导.

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理

证 作辅助函数 $\Phi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，那么 $\Phi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足罗尔中值定理的条件(1)(2)，并且 $\Phi(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\Phi(b)$. 由罗尔中值定理，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\Phi'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，证毕.

值得注意的是：罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特殊情形.

拉格朗日(Lagrange)中值定理亦称微分中值定理.

拉格朗日中值公式：$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$

或 $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))\cdot(b-a)\quad(0<\theta<1)$.

拉格朗日中值定理的几何意义：

如果一条连续曲线 $y=f(x)$，除曲线端点之外每一点都存在切线，那么在该曲线上至少有一点，使得过该点的切线与过曲线端点的割线平行(如图 3 - 2 所示).

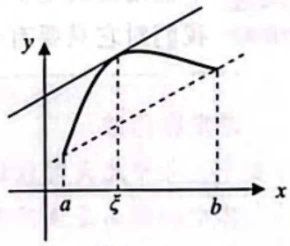


图 3 - 2

推论 1 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv 0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 为一常数.

证 任取 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，那么函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，所以存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\cdot f'(\xi).$$

由于 $f'(\xi)\equiv 0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即 $f(x_2)=f(x_1)$，由 x_1,x_2 在 (a,b) 内的任意性，可知 $f(x)$ 在 (a,b) 内为一常数.

推论 2 如果对 (a,b) 内的任意 x，有 $f'(x)=g'(x)$，则有 $f(x)-g(x)=C$. 其中 C 是常数.

证明 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)\equiv 0$. 由推论 1 知 $F(x)$ 在 (a,b) 内为一常数，即 $f(x)-g(x)=C$.

柯西中值定理

3. 柯西(Cauchy)中值定理

定理3(柯西中值定理) 如果函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) $F'(x)$ 在 (a,b) 内的每一点均不为零,那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

本定理不做理论证明,仅做几何解释如下:

若将定理3中的 x 看成参数,则可将

$$X=F(x),Y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$$

看作一条曲线的参数方程表达式,这时 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$ 表示连接曲线两端点 $A(F(a),f(a))$,$B(F(b),f(b))$ 的弦的斜率(如图3-3所示),而 $\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 表示该曲线上某一点 $C(F(\xi),f(\xi))$ 处切线的斜率,因此柯西中值定理的几何意义就是:在连续且除端点外处处有不垂直于 X 轴的切线的曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上,至少存在一点 C,在该点处的切线平行于两端点的连线.

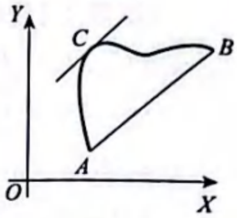


图3-3

注意到:在柯西中值定理中,令 $F(x)=x$,就得到拉格朗日中值定理.

通过上面的讨论我们知道,柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广,拉格朗日中值定理又是罗尔中值定理的推广. 对我们来说,柯西中值定理很少有直接的应用,我们对它只要有一个初步的了解就足够了.

本节数学家简介

课堂微思政:

文中几大定理均是以数学家名字命名,这是为了纪念他们开创性的研究成果。其中的费马是法国业余数学家,他的职业是律师,但他非常喜欢数学,常常利用业余时间研究高深的数学问题,结果取得了很大的成就,留下了著名的费马大定理、费马小定理等成果,被人称为"业余数学家之王"。数学家罗尔年轻时家境贫困潦倒,且只受过初等教育,他利用业余时间刻苦自学、勇于钻研,并且颇有建树,留下了著名的罗尔定理等。下面附上费马和罗尔的简介,希望能够从他们身上学到一种不畏困难、自学成才的精神。

二、洛必达(L'Hospital)法则

极限的计算是高等数学中最基本的运算,在前面已经讨论了求极限的多种方法,但是不定式的极限计算一般是比较困难的. 如不定式的两种基本情形"$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$"都不能用商的极限运算法则. 下面将以柯西(Cauchy)中值定理为基础,得到求这类极限的简便方法.

定理 4(洛必达法则)　若：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的某邻域内(点 x_0 可除外)可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$ 为有限数，也可为 $+\infty$ 或 $-\infty$)，

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证　由于我们要讨论的是函数在点 x_0 处的极限，而极限与函数在点 x_0 的值无关，所以我们可补充 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 的定义，而对问题的讨论不会产生任何影响，令 $f(x_0)=g(x_0)=0$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 就连续了. 在 x_0 附近任意一点 x 处，应用柯西中值定理得 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$　(ξ 在 x 与 x_0 之间)，由于 $x\to x_0$ 时，$\xi\to x_0$，所以对上式取极限便得要证的结果，证毕.

洛必达法则

注：上述定理对 $x\to\infty$ 时的“$\dfrac{0}{0}$”未定型同样适用，对于 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的未定型“$\dfrac{\infty}{\infty}$”也有相应的法则.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

解　这是“$\dfrac{0}{0}$”型，运用洛必达法则有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot 3}{\sec^2 5x\cdot 5}=\frac{3}{5}.$$

值得指出的是：在应用洛必达法则求极限的过程中，对等式进行合理的变换，有时是必要的. 请看下例！

例 2　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解　这是一个“$\dfrac{0}{0}$”型的极限问题，由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}},$$

算到这里，还是“$\dfrac{0}{0}$”型的极限问题，如果我们一直把它作为“$\dfrac{0}{0}$”型的极限继续往下算，我们将无法求得结果(读者不妨试一试).

但是，对它做一个适当的调整，把它变换成 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}$，这时，问题又转换成“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极

限了,再继续使用洛必达法则,便有:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2x}=1$,所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=1.$$

到此,问题自然迎刃而解了.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

除未定型"$\dfrac{0}{0}$"与"$\dfrac{\infty}{\infty}$"之外,还有"$0\cdot\infty$""$\infty-\infty$""0^0""1^∞""∞^0"等未定型,这里不一一介绍,有兴趣的读者可参阅相应的书籍,下面就"$\infty-\infty$"未定型再举一例.

例 4 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解 这是一个"$\infty-\infty$"型的极限,直接通分后变成"$\dfrac{0}{0}$"型.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

在使用洛必达法则时,应注意如下几点:

(1) 使用洛必达法则之前,必须严格检查极限的类型,只有"$\dfrac{0}{0}$"型或者"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的极限,才可以使用洛必达法则;

(2) 如果有可约因子,或有非零极限值的乘积因子,则可先约去或提出,以简化演算步骤;

(3) 当 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(不包括 ∞ 的情形)时,并不能断定 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在,此时应使用其他方法求极限.

例 5 证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$存在,但不能用洛必达法则求解.

解 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1+0=1$,

所以所给极限存在. 又因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 该极限不存在,所以所给极限不能用洛必达法则求出.

习题 3-1

典型例题与难点突破

1. 下列函数在给定的区间上是否满足罗尔中值定理的条件？若满足，试求出相应 ξ 的值.

(1) $y=\sqrt{x}, x\in[0,1]$；　　(2) $y=1-x^2, x\in[-1,1]$.

2. 下列函数在给定的区间上是否满足拉格朗日中值定理的条件？若满足，试求出相应 ξ 的值.

(1) $f(x)=\dfrac{3}{2x^3}, x\in[-1,1]$；　　(2) $f(x)=\arctan x, x\in[0,1]$.

3. 用洛必达法则求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2^x}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$；$(a,b\neq 0)$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}.(a\neq 0, n\neq 0)$

第二节　函数的单调性

函数的单调性

一、函数的单调性

如何较好地判定函数的单调性，这是本节的主要任务之一.

对于一个单调递增函数来说，如果曲线上每一点都存在切线的话，这些切线有何特征呢？通过图 3-4 我们可以看到：**切线与 x 轴的夹角成锐角**. 理论上也不难验证这一点.

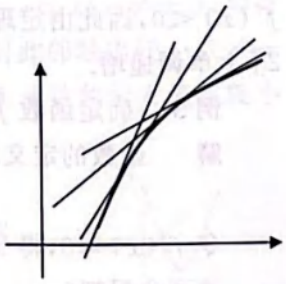


图 3-4

夹角都是锐角意味着什么？它意味着：

$$f'(x)=\tan\alpha\geqslant 0.$$

当然，对于单调递减的可导函数，自然有：$f'(x)\leqslant 0$.

反过来说，如果 $f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$）是否一定能够得到函数单调递增（或单调递减）的结论呢？下面的定理将回答这一问题.

定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内，恒有 $f'(x)\geqslant 0$，那么函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调递增；在 (a,b) 内如果恒有 $f'(x)>0$，那么函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调递增；

(2) 如果在 (a,b) 内，恒有 $f'(x)\leqslant 0$，那么函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调递减；在 (a,b) 内如果恒有 $f'(x)<0$，那么函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调递减.

证　(1) 任取 $x_1,x_2\in[a,b]$，且 $x_1<x_2$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)\geqslant 0,$$