11.2 与三角形有关的角

11.2.1 三角形的内角

我们在小学就已经知道，任意一个三角形的内角和等于 180°. 我们是通过度量或剪拼得出这一结论的.

通过度量或剪拼的方法，可以验证三角形的内角和等于 180°. 但是，由于测量常常有误差，这种“验证”不是“数学证明”，不能完全让人信服；又由于形状不同的三角形有无数个，我们不可能用上述方法一一验证所有三角形的内角和等于 180°. 所以，需要通过推理的方法去证明：任意一个三角形的内角和一定等于 180°.

探究

在纸上任意画一个三角形，将它的内角剪下拼合在一起，就得到一个平角. 从这个操作过程中，你能发现证明的思路吗？

上面的拼合中，有不同的方法. 你用了图 11.2-1 中的哪种方法？

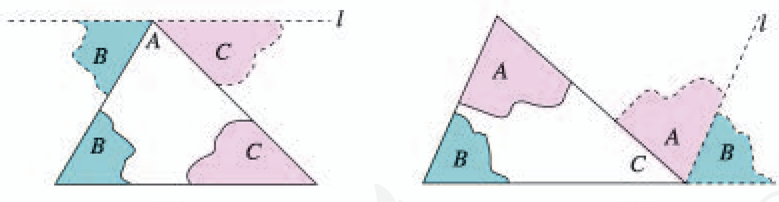


图 11.2-1

在图 11.2-1（1）中，$\angle B$ 和 $\angle C$ 分别拼在 $\angle A$ 的左右，三个角合起来形成一个平角，出现一条过点 A 的直线 l，移动后的 $\angle B$ 和 $\angle C$ 各有一条边在直线 l 上. 想一想，直线 l 与 $\triangle ABC$ 的边 BC 有什么关系？由这个图你能想出证明“三角形的内角和等于 180°”的方法吗？

由上述拼合过程得到启发，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l 平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC（图 11.2-2），那么由平行线的性质与平角的定义就能证明“三角形的内角和等于 180°”这个结论.

已知：$\triangle ABC$（图 11.2-2）.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

证明： 如图 11.2-2，过点 A 作直线 l，使 $l /\!/ BC$.

∵ $l /\!/ BC$，

∴ $\angle 2=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

同理 $\angle 3=\angle 5$.

∵ $\angle 1$，$\angle 4$，$\angle 5$ 组成平角，

∴ $\angle 1+\angle 4+\angle 5=180^\circ$（平角定义）.

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$（等量代换）.

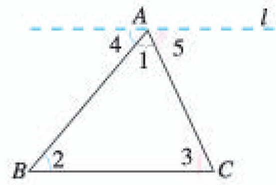


图 11.2-2

由图 11.2-1(2)，你能想出这个定理的其他证法吗？

以上我们就证明了任意一个三角形的内角和都等于 180°，得到如下定理：

三角形内角和定理 **三角形三个内角的和等于 180°.**

例 1 如图 11.2-3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=40^\circ$，$\angle B=75^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 求 $\angle ADB$ 的度数.

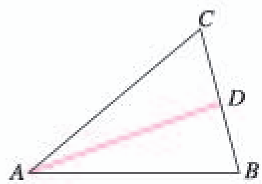


图 11.2-3

解： 由 $\angle BAC=40^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，得

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=20^\circ.$$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$\begin{aligned}\angle ADB &=180^\circ-\angle B-\angle BAD\\ &=180^\circ-75^\circ-20^\circ=85^\circ.\end{aligned}$$

例 2 图 11.2-4 是 A，B，C 三岛的平面图，C 岛在 A 岛的北偏东 50° 方向，B 岛在 A 岛的北偏东 80° 方向，C 岛在 B 岛的北偏西 40° 方向. 从 B 岛看 A，C 两岛的视角 $\angle ABC$ 是多少度？从 C 岛看 A，B 两岛的视角 $\angle ACB$ 呢？

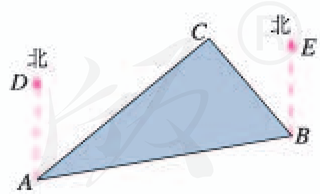


图 11.2-4

分析： A，B，C 三岛的连线构成 $\triangle ABC$，所求的 $\angle ACB$ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角. 如果能求出 $\angle CAB$，$\angle ABC$，就能求出 $\angle ACB$.

解： $\angle CAB=\angle BAD-\angle CAD=80^\circ-50^\circ=30^\circ$.

由 $AD /\!/ BE$，得

$$\angle BAD+\angle ABE=180^\circ.$$

所以

$\angle ABE=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-80^\circ=100^\circ$,

$\angle ABC=\angle ABE-\angle EBC=100^\circ-40^\circ=60^\circ$.

在$\triangle ABC$中,

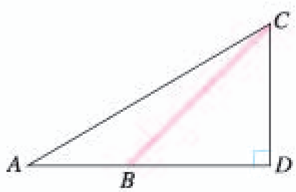
$$\begin{aligned}\angle ACB&=180^\circ-\angle ABC-\angle CAB\\&=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ.\end{aligned}$$

你还能想出其他解法吗?

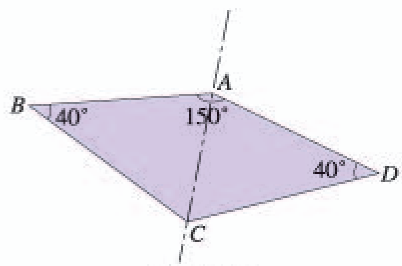
答:从 B 岛看 A,C 两岛的视角$\angle ABC$是60°,从 C 岛看 A,B 两岛的视角$\angle ACB$是90°.

练习

1. 如图,从 A 处观测 C 处的仰角$\angle CAD=30^\circ$,从 B 处观测 C 处的仰角$\angle CBD=45^\circ$. 从 C 处观测 A,B 两处的视角$\angle ACB$是多少度?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,一种滑翔伞的形状是左右对称的四边形 $ABCD$,其中$\angle A=150^\circ$,$\angle B=\angle D=40^\circ$. 求$\angle C$的度数.

如图 11.2-5,在直角三角形 ABC 中,$\angle C=90^\circ$,由三角形内角和定理,得

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,$$

即

$$\angle A+\angle B+90^\circ=180^\circ,$$

所以

$$\angle A+\angle B=90^\circ.$$

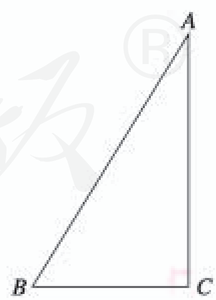


图 11.2-5

也就是说,**直角三角形的两个锐角互余.**

直角三角形可以用符号“Rt△”表示,直角三角形 ABC 可以写成 Rt$\triangle ABC$.

19.2 一次函数

19.2.1 正比例函数

问题 1 2011 年开始运营的京沪高速铁路全长 1 318 km. 设列车的平均速度为 300 km/h. 考虑以下问题：

（1）乘京沪高铁列车，从始发站北京南站到终点站上海虹桥站，约需多少小时（结果保留小数点后一位）？

（2）京沪高铁列车的行程 y（单位：km）与运行时间 t（单位：h）之间有何数量关系？

（3）京沪高铁列车从北京南站出发 2.5 h 后，是否已经过了距始发站 1 100 km 的南京南站？

分析：（1）京沪高铁列车全程运行时间约需

$$1\,318 \div 300 \approx 4.4\ (\text{h}).$$

（2）京沪高铁列车的行程 y 是运行时间 t 的函数，函数解析式为

$$y = 300t\ (0 \leqslant t \leqslant 4.4).$$

（3）京沪高铁列车从北京南站出发 2.5 h 的行程，是当 $t=2.5$ 时函数 $y=300t$ 的值，即

$$y = 300 \times 2.5 = 750\ (\text{km}).$$

这时列车尚未到达距始发站 1 100 km 的南京南站.

以上我们用函数 $y=300t$（$0 \leqslant t \leqslant 4.4$）对京沪高铁列车的行程问题进行了讨论. 尽管实际情况可能会与此有一些小的不同，但这个函数基本上反映了列车的行程与运行时间之间的对应规律.

思考

下列问题中，变量之间的对应关系是函数关系吗？如果是，请写出函数解析式. 这些函数解析式有哪些共同特征？

（1）圆的周长 l 随半径 r 的变化而变化.

（2）铁的密度为 7.9 g/cm³，铁块的质量 m（单位：g）随它的体积 V

（单位：cm^3）的变化而变化.

（3）每个练习本的厚度为0.5 cm，一些练习本摞在一起的总厚度h（单位：cm）随练习本的本数n的变化而变化.

（4）冷冻一个0 ℃的物体，使它每分下降2 ℃，物体的温度T（单位：℃）随冷冻时间t（单位：min）的变化而变化.

上面问题中，表示变量之间关系的函数解析式分别为：

（1）$l=2\pi r$；　　（2）$m=7.9V$；

（3）$h=0.5n$；　　（4）$T=-2t$.

正如函数$y=300t$一样，上面这些函数都是常数与自变量的积的形式.

一般地，形如$y=kx$（k是常数，$k\neq0$）的函数，叫做**正比例函数**（proportional function），其中k叫做比例系数.

练习

1. 下列式子中，哪些表示y是x的正比例函数？

（1）$y=-0.1x$；　（2）$y=\frac{x}{2}$；　（3）$y=2x^2$；　（4）$y^2=4x$.

2. 列式表示下列问题中的y与x的函数关系，并指出哪些是正比例函数.

（1）正方形的边长为x cm，周长为y cm；

（2）某人一年内的月平均收入为x元，他这年（12个月）的总收入为y元；

（3）一个长方体的长为2 cm，宽为1.5 cm，高为x cm，体积为y cm^3.

下面我们研究正比例函数的图象.

例1　画出下列正比例函数的图象：

（1）$y=2x$，$y=\frac{1}{3}x$；　　（2）$y=-1.5x$，$y=-4x$.

解：（1）函数$y=2x$中自变量x可为任意实数. 表19-7是y与x的几组对应值.

表 19-7

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…

第二十一章　一元二次方程

在设计人体雕像时，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，可以增加视觉美感．按此比例，如果雕像的高为 2 m，那么它的下部应设计为多高？

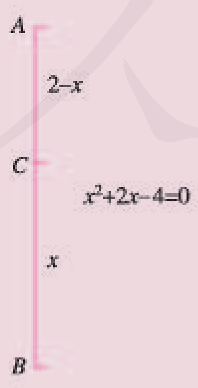
如图，雕像的上部高度 AC 与下部高度 BC 应有如下关系：

$$AC : BC = BC : 2，即 BC^2 = 2AC.$$

设雕像下部高 x m，可得方程 $x^2 = 2(2 - x)$，整理得

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

这个方程与我们学过的一元一次方程不同，其中未知数 x 的最高次数是 2．如何解这类方程？如何用这类方程解决一些实际问题？这就是本章要学习的主要内容．



21.1 一元二次方程

方程

$$x^2+2x-4=0 \qquad ①$$

中有一个未知数 x，x 的最高次数是 2. 像这样的方程有广泛的应用，请看下面的问题.

问题 1 如图 21.1-1，有一块矩形铁皮，长 100 cm，宽 50 cm，在它的四角各切去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为 3 600 cm²，那么铁皮各角应切去多大的正方形？

图 21.1-1

设切去的正方形的边长为 x cm，则盒底的长为 $(100-2x)$ cm，宽为 $(50-2x)$ cm. 根据方盒的底面积为3 600 cm²，得

$$(100-2x)(50-2x)=3\ 600.$$

整理，得

$$4x^2-300x+1\ 400=0.$$

化简，得

$$x^2-75x+350=0. \qquad ②$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸.

方程②中未知数的个数和最高次数各是多少？

问题 2 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队之间都要比赛一场. 根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，比赛组织者应邀请多少个队参赛？

全部比赛的场数为 $4\times7=28$.

设应邀请 x 个队参赛，每个队要与其他 $(x-1)$ 个队各赛一场，因为甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以全部比赛共 $\frac{1}{2}x(x-1)$ 场.

列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1)=28.$$

整理，得

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=28.$$

化简，得

$$x^2-x=56. \qquad ③$$

由方程③可以得出参赛队数.

方程③中未知数的个数和最高次数各是多少？

思考

方程①②③有什么共同点？

可以发现，这些方程的两边都是整式，方程中只含有一个未知数，未知数的最高次数是 2. 同样地，方程 $4x^2=9$，$x^2+3x=0$，$3y^2-5y=7-y$ 等也是这样的方程. 像这样，等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，叫做**一元二次方程**（quadratic equation with one unknown）.

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0).$$

其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项.

为什么规定 $a\neq 0$？

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的**根**（root）.

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

解： 去括号，得

$$3x^2-3x=5x+10.$$

移项，合并同类项，得一元二次方程的一般形式

$$3x^2-8x-10=0.$$

其中二次项系数为 3，一次项系数为 -8，常数项为 -10.