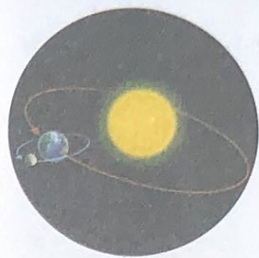


## 2 万有引力定律

### 问题 ?

各行星都围绕着太阳运行，说明太阳与行星之间的引力是使行星如此运动的主要原因。引力的大小和方向能确定吗？



开普勒定律发现之后，人们开始更深入地思考：是什么原因使行星绕太阳运动？历史上科学家们的探索之路充满艰辛。

伽利略、开普勒及笛卡儿都提出过自己的解释。牛顿时代的科学家，如胡克和哈雷等对此作出了重要的贡献。

胡克等人认为，行星绕太阳运动是因为受到了太阳对它的引力，甚至证明了如果行星的轨道是圆形的，它所受引力的大小跟行星到太阳距离的二次方成反比。但是由于关于运动和力的清晰概念是由牛顿建立的，当时没有这些概念，因此他们无法深入研究。

牛顿在前人对惯性研究的基础上，开始思考“物体怎样才会不沿直线运动”这一问题。他的回答是：以任何方式改变速度（包括改变速度的方向）都需要力。这就是说，使行星沿圆或椭圆运动，需要指向圆心或椭圆焦点的力，这个力应该就是太阳对它的引力。于是，牛顿利用他的运动定律把行星的向心加速度与太阳对它的引力联系起来了。

下面我们根据牛顿运动定律及开普勒行星运动定律来讨论太阳与行星间的引力。

### 行星与太阳间的引力

行星绕太阳的运动可以看作匀速圆周运动。行星做匀速圆周运动时，受到一个指向圆心（太阳）的引力，正是这个引力提供了向心力，由此可推知太阳与行星间引力的

► 哥白尼、第谷、开普勒这些科学家不畏艰辛、几十年如一日刻苦钻研的精神是成功的基石，值得我们学习。

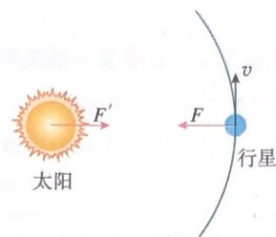


图 7.2-1 太阳与行星间的引力

方向沿着二者的连线 (图 7.2-1)。

设行星的质量为  $m$ , 速度为  $v$ , 行星与太阳间的距离为  $r$ , 则行星绕太阳做匀速圆周运动的向心力为

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

天文观测可以测得行星公转的周期  $T$ , 并据此可求出行星的速度

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

把这个结果代入向心力的表达式, 整理后得到

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

通过上节的学习我们知道周期  $T$  和半径  $r$  有一定的关系, 把开普勒第三定律  $\frac{r^3}{T^2} = k$  变形为  $T^2 = \frac{r^3}{k}$ , 代入上面的关系式得到

$$F = 4\pi^2 k \frac{m}{r^2}$$

上式等号右边除了  $m$ 、 $r$  以外, 其余都是常量, 对任何行星来说都是相同的, 因而可以说太阳对行星的引力  $F$  与行星的质量  $m$  成正比, 与  $r^2$  成反比, 即  $F \propto \frac{m}{r^2}$ 。

我们知道, 力的作用是相互的。太阳吸引行星, 行星也同样吸引太阳, 也就是说, 在引力的存在与性质上, 行星和太阳的地位完全相当, 因此, 行星与太阳的引力也应与太阳的质量  $m_{\text{太}}$  成正比, 即  $F \propto \frac{m_{\text{太}} m}{r^2}$ , 写成等式就是

$$F = G \frac{m_{\text{太}} m}{r^2}$$

式中量  $G$  与太阳、行星都没有关系。太阳与行星间引力的方向沿着二者的连线。

## 月一地检验

地球绕太阳运动, 月球绕地球运动, 它们之间的作用力是同一种性质的力吗? 这种力与地球对树上苹果的吸引力也是同一种性质的力吗 (图 7.2-2)?

图 7.2-2

► 从第谷的数千个数据到开普勒行星运动定律, 再到引力的表达式, 我们可以体会到认识越深刻, 表述就越简洁, 含义就越丰富。获得真知的愉悦和审美感受总是激励科学家不断探索。





假设地球与月球间的作用力和太阳与行星间的作用力是同一种力，它们的表达式也应该满足  $F = G \frac{m_{\text{月}} m_{\text{地}}}{r^2}$ 。根据牛顿第二定律，月球绕地球做圆周运动的向心加速度  $a_{\text{月}} = \frac{F}{m_{\text{月}}} = G \frac{m_{\text{地}}}{r^2}$ （式中  $m_{\text{地}}$  是地球质量， $r$  是地球中心与月球中心的距离）。

进一步，假设地球对苹果的吸引力也是同一种力，同理可知，苹果的自由落体加速度  $a_{\text{苹}} = \frac{F}{m_{\text{苹}}} = G \frac{m_{\text{地}}}{R^2}$ （式中  $m_{\text{地}}$  是地球质量， $R$  是地球中心与苹果间的距离）。

由以上两式可得  $\frac{a_{\text{月}}}{a_{\text{苹}}} = \frac{R^2}{r^2}$ 。由于月球与地球中心的距离  $r$  约为地球半径  $R$  的 60 倍，所以  $\frac{a_{\text{月}}}{a_{\text{苹}}} = \frac{1}{60^2}$ 。

### 思考与讨论

已知自由落体加速度  $g$  为  $9.8 \text{ m/s}^2$ ，月球中心与地球中心的距离为  $3.8 \times 10^8 \text{ m}$ ，月球公转周期为 27.3 d，约  $2.36 \times 10^6 \text{ s}$ 。根据这些数据，能否验证前面的假设？

在牛顿的时代，人们已经能够比较精确地测定自由落体加速度，当时也能比较精确地测定月球与地球的距离、月球公转的周期，从而能够算出月球运动的向心加速度。计算结果与预期符合得很好。这表明，地面物体所受地球的引力、月球所受地球的引力，与太阳、行星间的引力，真的遵从相同的规律！

► 牛顿深入思考了月球受到的引力与地面物体受到的引力的关系。正是在这个过程中，力与加速度的关系在牛顿的思想中明确起来了。

## 万有引力定律

我们的思想还可以更解放。既然太阳与行星之间、地球与月球之间，以及地球与地面物体之间具有“与两个物体的质量成正比、与它们之间距离的二次方成反比”的吸引力，是否任意两个物体之间都有这样的力呢？很可能有，只是由于身边物体的质量比天体的质量小得多，不易觉察罢了。于是我们大胆地把以上结论推广到宇宙中的一切物体之间：自然界中任何两个物体都相互吸引，引力的方向在它们的连线上，引力的大小与物体的质量  $m_1$  和  $m_2$  的乘积成正比、与它们之间距离  $r$  的二次方成反比，即

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

► 科学论证需要证据支持。开普勒根据第谷的观测数据提出了行星运动定律，行星运动定律又为万有引力定律提供了支持，“月—地检验”进一步验证了万有引力定律。

式中质量的单位用千克(kg)，距离的单位用米(m)，力的单位用牛(N)。G是比例系数，叫作**引力常量**(gravitational constant)，适用于任何两个物体。

尽管以上推广是十分自然的，但仍要接受事实的直接或间接的检验。本章后面的讨论表明，由此得出的结论与事实相符，于是，它成为科学史上最伟大的定律之一——**万有引力定律**(law of universal gravitation)。它于1687年发表在牛顿的传世之作《自然哲学的数学原理》中。

万有引力定律明确地向人们宣告，天上和地上的物体都遵循着完全相同的科学法则；它向人们揭示，复杂运动的后面可能隐藏着简洁的科学规律，正是这种对简洁性的追求启迪科学家不断探索物理理论的统一。

## 引力常量

牛顿得出了万有引力与物体质量及它们之间距离的关系，但却无法算出两个天体之间万有引力的大小，因为他不知道引力常量G的值。

一百多年以后，英国物理学家卡文迪什通过实验测量了几个铅球之间的引力。由这一实验结果可推算出引力常量G的值。国际科技数据委员会2014年的推荐值  $G = 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ，通常取  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 。

## 思考与讨论

一个篮球的质量为0.6 kg，它所受的重力有多大？试估算操场上相距0.5 m的两个篮球之间的万有引力。

引力常量是自然界中少数几个最重要的物理常量之一。在对一些物体间的引力进行测量并算出引力常量G以后，人们又测量了多种物体间的引力，所得结果与利用引力常量G按万有引力定律计算所得的结果相同。引力常量的普适性成了万有引力定律正确性的有力证据。



## 引力常量的测量

牛顿虽然发现了万有引力定律，却没能给出引力常量 $G$ 的值。这是因为一般物体间的引力非常小，很难用实验的方法将它测量出来。

1798年，卡文迪什巧妙地利用扭秤装置，第一次在实验室里比较准确地测出了引力常量 $G$ 的值。卡文迪什扭秤的主要部分是一个轻而坚固的T形架，倒挂在一根石英丝 $N$ 的下端。T形架水平部分的两端各装一个质量是 $m$ 的小球，T形架的竖直部分装一面小平面镜 $M$ ，它能把射来的光线反射到刻度尺上（图7.2-3），这样就能比较精确地测量石英丝 $N$ 的扭转角度。

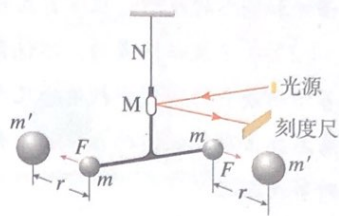


图7.2-3 卡文迪什实验示意图

实验时，把两个质量都是 $m'$ 的大球放在图中所示的位置，它们跟小球的距离相等，都为 $r$ 。由于 $m$ 受到 $m'$ 的吸引，T形架发生转动，使石英丝 $N$ 发生扭转，扭转的角度可以从平面镜 $M$ 反射的光点在刻度尺上移动的距离求出。根据石英丝的扭转角度，就可以求得 $m$ 与 $m'$ 的引力 $F$ 。最后根据万有引力公式，就可以算出引力常量 $G$ 。

引力常量 $G$ 的精确测量对于深入研究引力相互作用规律具有重要意义。自卡文迪什之后，其他科学家相继致力于这项工作。我国华中科技大学引力中心团队在引力常量的测量中作出了突出贡献，于2018年得到了当时最精确的引力常量 $G$ 的值。

## 牛顿的科学生涯

牛顿——伟大的科学家，牛顿力学理论体系的建立者，1643年1月4日<sup>①</sup>诞生在英格兰的林肯郡。牛顿于1661年进入剑桥大学三一学院，1665年获得学士学位。

1665~1666年伦敦鼠疫流行，学校停课，牛顿回到故乡。牛顿在剑桥受到数学和自然科学的培养和熏陶，对探索自然现象产生了极浓厚的兴趣。就在躲避鼠疫这两年内，他在自然科学领域思潮奔腾，思考了前人从未想过的问题，创建了惊人的业绩。

1665年初，牛顿创立了级数近似法和把任何幂的二项式化为一个级数的方法，同年11月创立了微分学。次年1月，牛顿研究颜色理论，5月开始研究积分学。这一年内，牛顿还开始研究重力问题，并把重力与月球的运动、行星的运动联系起来考虑。他从开普勒行星运动定律出发，通过数学推导发现：使行星保持在它们轨道上的力，必定与行星到转动中心的距离的二次方成反比。由此可见，牛顿一生中最重大的科学思想，是在他二十多岁时思想敏锐的短短两年期间孕育、

<sup>①</sup> 即英国旧历1642年12月25日。

萌发和形成的。

牛顿于1684年8~10月先后写了《论运动》《论物体在均匀介质中的运动》，1687年出版了《自然哲学的数学原理》，1704年出版了《光学》。在科学方法上，他以培根的实验归纳方法为基础，又吸收了笛卡儿的数学演绎体系，形成了以下比较全面的科学方法。

(1) 重视实验，从归纳入手。这是牛顿科学方法论的基础。牛顿本人在实验上具有高度的严谨性和娴熟的技巧，在《自然哲学的数学原理》一书中他描述了大量实验。

(2) 为了使归纳成功，不仅需要可靠的资料与广博的知识，而且要有清晰的逻辑头脑。首先要善于从众多的事实中挑选出几个最基本的要素，形成深刻反映事物本质的概念，然后才能以此为基石找出事物之间的各种联系并得出结论。牛顿在谈到自己的工作方法的奥秘时说，要“不断地对事物深思”。

伽利略、笛卡儿和惠更斯等已经用位移、速度、加速度、动量等一系列科学概念代替了古希腊人模糊不清的自然哲学概念；牛顿的功绩是，在把它们系统化的同时贡献出两个关键性的概念：“力”和“质量”。他把质量与重量区别开来，并把质量分别与惯性和引力联系起来。牛顿综合了天体和地面上物体的运动规律，形成了深刻反映事物本质的科学体系。

(3) 事物之间的本质联系只有通过数学才能归纳为能够测量、应用和检验的公式和定律。牛顿的数学才能帮助他解决了旁人解不开的难题。他把上述基本概念定义为严格的物理量，并且创造出新的数学工具来研究变量间的关系，从而建立了运动三定律和万有引力定律。

此外，牛顿勤奋学习的精神，积极思索、耐心实验，以及年复一年坚持不懈地集中思考某一问题等优秀品质，也是他取得伟大成就的内在因素。

1727年3月31日，牛顿在睡梦中溘然长逝，终年84岁。他被安葬在威斯敏斯特教堂，那是英国人安葬英雄的地方。



## 练习与应用

1. 既然任何物体间都存在着引力，为什么当两个人接近时他们不会吸在一起？我们通常分析物体的受力时是否需要考虑物体间的万有引力？请你根据实际情况，应用合理的数据，通过计算说明以上两个问题。

2. 大麦哲伦云和小麦哲伦云是银河系外离地球最近的星系（很遗憾，在北半球看不见）。大麦哲伦云的质量为太阳质量的 $10^{10}$ 倍，即 $2.0 \times 10^{40}$  kg，小麦哲伦云的质量为太阳质量的 $10^9$ 倍，两者相距 $5 \times 10^4$ 光年，求它们之间的引力。

3. 太阳质量大约是月球质量的 $2.7 \times 10^7$ 倍，太阳到地球的距离大约是月球到地球距离的

$3.9 \times 10^2$ 倍，试比较太阳和月球对地球的引力。

4. 木星的卫星中有4颗是伽利略发现的，称为伽利略卫星，其中三颗卫星的周期之比为 $1:2:4$ 。小华同学打算根据万有引力的知识计算木卫二绕木星运动的周期，她收集到了如下一些数据。

木卫二的数据：质量为 $4.8 \times 10^{22}$  kg、绕木星做匀速圆周运动的轨道半径为 $6.7 \times 10^8$  m。

木星的数据：质量为 $1.9 \times 10^{27}$  kg、半径为 $7.1 \times 10^7$  m、自转周期为9.8 h。

但她不知道应该怎样做，请你帮助她完成木卫二运动周期的计算。



### 3 动能和动能定理

#### 问题 ?

物体的动能跟物体的质量和速度都有关系。物体的质量越大，速度越大，它的动能就越大。炮弹在炮筒内推力的作用下速度越来越大，动能增加。这种情况下推力对物体做了功。

你还能举出其他例子，说明动能和力做的功有关吗？这对于定量研究动能有什么启发呢？



#### 动能的表达式

大量实例说明，物体动能的变化和力对物体做的功密切相关。因此，研究物体的动能离不开对力做功的分析。这与上一节研究重力势能的思路是一致的。

质量为  $m$  的某物体在光滑水平面上运动，在与运动方向相同的恒力  $F$  的作用下发生一段位移  $l$ ，速度由  $v_1$  增加到  $v_2$  (图 8.3-1)。

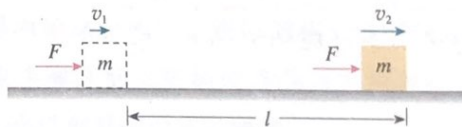


图 8.3-1 物体在恒力作用下运动

在这个过程中，恒力  $F$  做的功  $W = Fl$ ，根据牛顿第二定律，有

$$F = ma$$

再根据匀变速直线运动的速度与位移的关系式，有

$$l = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$

把  $F$ 、 $l$  的表达式代入  $W = Fl$  中，可得  $F$  做的功

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

从上式可以看出, “ $\frac{1}{2}mv^2$ ” 很可能是一个具有特定意义的物理量, 因为这个量在过程终了与过程开始时的差, 正好等于力对物体做的功。在物理学中就用 “ $\frac{1}{2}mv^2$ ” 这个量表示物体的**动能** (kinetic energy), 用符号  $E_k$  表示。于是我们说, 质量为  $m$  的物体, 以速度  $v$  运动时的动能是

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

动能是标量, 它的单位与功的单位相同, 在国际单位制中都是焦耳, 这是因为

$$1 \text{ kg} \cdot (\text{m/s})^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$$



### 思考与讨论

2016年8月16日, 我国成功发射首颗量子科学实验卫星“墨子号”, 它的质量为 631 kg, 某时刻它的速度大小为 7.6 km/s, 此时它的动能是多少?



### 动能定理

在得到动能的表达式后,  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$  可以写成

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

其中  $E_{k2}$  表示一个过程的末动能,  $E_{k1}$  表示这个过程的初动能。

这个关系表明, **力在一个过程中对物体做的功, 等于物体在这个过程中动能的变化**。这个结论叫作**动能定理** (theorem of kinetic energy)。

如果物体受到几个力的共同作用, 动能定理中的力对物体做的功  $W$  即为合力做的功, 它等于各个力做功的代数和。

这里, 动能定理是在物体受恒力作用, 并且做直线运动的情况下得到的。当物体受变力作用, 或做曲线运动时, 我们可以采用把整个过程分成许多小段, 认为物体在每小段运动中受到的是恒力, 运动的轨迹是直线, 把这些小段中力做的功相加, 这样也能得到动能定理。

► 因为动能定理适用于变力做功和曲线运动的情况, 所以在解决一些实际的力学问题时, 它得到了广泛的应用。



### 【例题1】

一架喷气式飞机，质量  $m$  为  $7.0 \times 10^4 \text{ kg}$ ，起飞过程中从静止开始滑跑。当位移  $l$  达到  $2.5 \times 10^3 \text{ m}$  时，速度达到起飞速度  $80 \text{ m/s}$ 。在此过程中，飞机受到的平均阻力是飞机所受重力的  $\frac{1}{50}$ 。 $g$  取  $10 \text{ m/s}^2$ ，求飞机平均牵引力的大小。

**分析** 本题已知飞机滑跑过程的始、末速度，因而能够知道它在滑跑过程中增加的动能。根据动

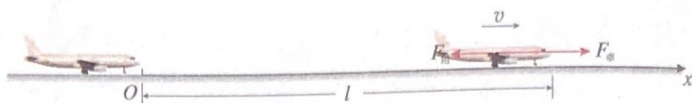


图 8.3-2

能定理，动能的增加等于牵引力做功和阻力做功的代数和。

如图 8.3-2，在整个过程中，牵引力对飞机做正功、阻力做负功。由于飞机的位移和所受阻力已知，因而可以求得牵引力的大小。

**解** 以飞机为研究对象，设飞机滑跑的方向为  $x$  轴正方向。飞机的初动能  $E_{k1} = 0$ ，末动能  $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$ ，合力  $F$  做的功

$$W = Fl$$

根据动能定理  $W = E_{k2} - E_{k1}$ ，有

$$Fl = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

由于

$$F = F_{\text{牵}} - F_{\text{阻}}, F_{\text{阻}} = kmg, k = \frac{1}{50}$$

则

$$F_{\text{牵}} = \frac{mv^2}{2l} + kmg$$

把数值代入后得到

$$F_{\text{牵}} = 1.04 \times 10^5 \text{ N}$$

飞机平均牵引力的大小是  $1.04 \times 10^5 \text{ N}$ 。

从这个例题可以看出，动能定理不涉及物体运动过程中的加速度和时间，因此用它处理问题常常比较方便。

在应用动能定理时还应该注意，力对物体做的功可以为正值，也可以为负值。合力做正功时，物体的动能增加；合力做负功时，物体的动能减少。

## 【例题2】

人们有时用“打夯”的方式把松散的地面夯实(图8.3-3)。设某次打夯符合以下模型:两人同时通过绳子对重物各施加一个力,力的大小均为320 N,方向都与竖直方向成 $37^\circ$ ,重物离开地面30 cm后人停止施力,最后重物自由下落把地面砸深2 cm。已知重物的质量为50 kg, $g$ 取 $10 \text{ m/s}^2$ , $\cos 37^\circ = 0.8$ 。求:(1)重物刚落地时的速度是多大?(2)重物对地面的平均冲击力是多大?



图8.3-3

**分析** 如图8.3-4,甲表示重物在地面上受到人的作用力,乙表示上升30 cm后人停止施力,丙表示刚落地,丁表示砸深地面2 cm后静止。

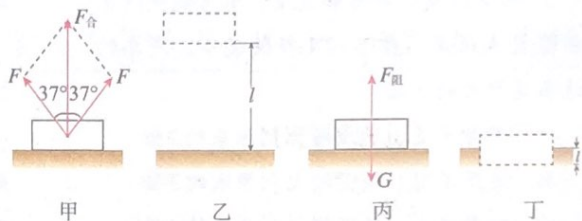


图8.3-4

重物落地时的速度,即丙中重物的速度,可以对从甲至丙这一过程应用动能定理来求解。重物对地面冲击力的大小与从丙至丁这一过程中重物所受阻力的大小相等,可以对这一过程应用动能定理来求解。

**解** (1) 两根绳子对重物的合力

$$F_{\text{合}} = 2F \cos 37^\circ = 2 \times 320 \times 0.8 \text{ N} = 512 \text{ N}$$

由甲至丙只有绳子的拉力做功,应用动能定理可得

$$F_{\text{合}} l = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2F_{\text{合}} l}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 512 \times 0.3}{50}} \text{ m/s} = 2.5 \text{ m/s}$$

(2) 由丙到丁的过程中,应用动能定理可得

$$mgl' - F_{\text{阻}} l' = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$F_{\text{阻}} = mg + \frac{mv^2}{2l'} = \left( 50 \times 10 + \frac{50 \times 2.5^2}{2 \times 0.02} \right) \text{ N} = 8.3 \times 10^3 \text{ N}$$

重物落地时的速度大小为 $2.5 \text{ m/s}$ ,对地面的平均冲击力的大小为 $8.3 \times 10^3 \text{ N}$ 。



演绎推理是从一般性结论推出个别性结论的方法，即从已知的某些一般原理、定理、法则、公理或科学概念出发，推出新结论的一种思维活动。

比如，在“动能定理”的推导过程中，其出发点是将牛顿第二定律作为已知的知识来考虑，然后经历一系列数学推导，从而得到新的结论——动能定理。

## 练习与应用

1. 改变汽车的质量和速度，都可能使汽车的动能发生改变。在下列几种情况下，汽车的动能各是原来的几倍？

- A. 质量不变，速度增大到原来的2倍
- B. 速度不变，质量增大到原来的2倍
- C. 质量减半，速度增大到原来的4倍
- D. 速度减半，质量增大到原来的4倍

2. 把一辆汽车的速度从10 km/h加速到20 km/h，或者从50 km/h加速到60 km/h，哪种情况做的功比较多？通过计算说明。

3. 质量为8 g的子弹，以300 m/s的速度射入厚度为5 cm的固定木板（图8.3-5），射穿后的速度是100 m/s。子弹射穿木板的过程中受到

的平均阻力是多大？

4. 我们曾在第四章中用牛顿运动定律解答过一个问题：民航客机机舱紧急出口的气囊是一条连接出口与地面的斜面，若斜面高3.2 m，斜面长6.5 m，质量为60 kg的人沿斜面滑下时所受的阻力是240 N，求人滑至底端时的速度大小， $g$ 取 $10 \text{ m/s}^2$ 。请用动能定理解答。

5. 运动员把质量为400 g的足球踢出后（图8.3-6），某人观察它在空中的飞行情况，估计上升的最大高度是5 m，在最高点的速度为20 m/s。不考虑空气阻力， $g$ 取 $10 \text{ m/s}^2$ 。请你根据这个估计，计算运动员踢球时对足球做的功。



图8.3-5



图8.3-6

## 4 机械能守恒定律

### 问题 ?

伽利略曾研究过小球在斜面上的运动。他发现：无论斜面 B 比斜面 A 陡些或缓些，小球的速度最后总会在斜面上的某点变为 0，这点距斜面底端的竖直高度与它出发时的高度基本相同。

在小球的运动过程中，有哪些物理量是变化的？哪些是不变的？你能找出不变的量吗？



### 追寻守恒量

能量对于科学研究和日常生活有着巨大的影响，但要句话说清楚能量究竟是什么却非易事。这也许是牛顿未能把“能量”这一概念留给我们的原因之一。但是在牛顿之前，我们就已经能在力学领域发现它的萌芽。

如果不采用能量的概念，我们也可以利用以前的语言来描述伽利略的斜面实验。我们可以说，为了把小球从桌面提高到斜面上的某个位置，伽利略施加了与重力相反的力；当他释放小球时，重力使小球滚下斜面 A；在斜面的底部，小球由于惯性而滚上斜面 B。

但是，这样的描述不能直接表达一个最重要的事实：如果空气阻力和摩擦力小到可以忽略，小球必将准确地终止于它开始运动时的高度，不会更高一点，也不会更低一点。这说明某种“东西”在小球运动的过程中是不变的。

其实，伽利略已经走到了机械能守恒的大门口，只是当时还没有“能量”的概念，因此，伽利略没有得出机械能守恒的结论。

能量概念的引入是科学前辈们追寻守恒量的一个重要事例。

► 科学概念的力量在于它具有解释和概括一大类自然现象的能力。在这方面能量概念的作用十分突出。



## 动能与势能的相互转化

物体沿光滑斜面滑下时，重力对物体做正功，物体的重力势能减少。减少的重力势能到哪里去了？

我们发现，在这个过程中，物体的速度增加了，表示物体的动能增加了。这说明，物体原来的重力势能转化成了动能。

具有一定速度的物体，由于惯性沿光滑斜面上升，这时重力对物体做负功，物体的速度减小，表示物体的动能减少了。但由于物体的高度增加，它的重力势能增加了。这说明，物体的动能转化成了重力势能。

竖直向上抛出一个物体，随着物体高度的增加，它的速度会减小；当物体到达最高点后会转而下降，同时速度逐渐增大。这一过程同样可以从动能和重力势能相互转化的角度来分析。

不仅重力势能可以与动能相互转化，弹性势能也可以与动能相互转化。例如，被压缩的弹簧具有弹性势能，当弹簧恢复原来形状时，就把跟它接触的物体弹出去。这一过程中，弹力做正功，弹簧的弹性势能减少，而物体得到一定的速度，动能增加。再如，运动员从跳板上弹起的过程中，跳板的弹性势能转化为运动员的动能（图8.4-1），也是这样一种过程。

重力势能、弹性势能与动能都是机械运动中的能量形式，统称为**机械能**（mechanical energy）。通过重力或弹力做功，机械能可以从一种形式转化成另一种形式。

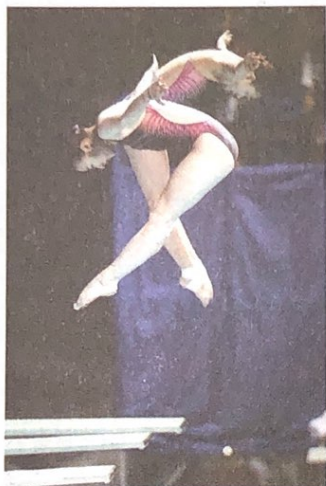


图8.4-1 跳板跳水

### 思考与讨论

一个小球在真空中做自由落体运动，另一个同样的小球在黏性较大的液体中由静止开始下落（图8.4-2）。它们都由高度为 $h_1$ 的地方下落到高度为 $h_2$ 的地方。在这两种情况下，重力做的功相等吗？重力势能的变化相等吗？动能的变化相等吗？重力势能各转化成什么形式的能？

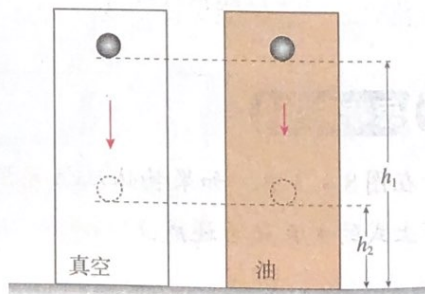


图8.4-2 小球在真空和油中的下落

## 机械能守恒定律

动能与势能的相互转化是否存在某种定量的关系?

这里以动能与重力势能的相互转化为例,讨论这个问题。我们讨论物体沿光滑曲面滑下的情形。这种情形下,物体受到重力和曲面支持力的作用,因为支持力方向与运动方向垂直,支持力不做功,所以,只有重力做功。

在图8.4-3中,物体在某一时刻处在高度为 $h_1$ 的位置A,这时它的速度是 $v_1$ 。经过一段时间后,物体下落到高度为 $h_2$ 的另一位置B,这时它的速度是 $v_2$ 。用 $W$ 表示这一过程中重力做的功。从动能定理知道,重力对物体做的功等于物体动能的增加,即

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

另一方面,重力对物体做的功等于物体重力势能的减少,即

$$W = mgh_1 - mgh_2$$

从以上两式可得

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

这就是说,重力做了多少功,就有多少重力势能转化为动能。把上式移项后得到

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1$$

等式左边为物体末状态动能与势能之和,等式右边为物体初状态动能与势能之和。

可见,在只有重力做功的系统内,动能与重力势能互相转化时总的机械能保持不变。

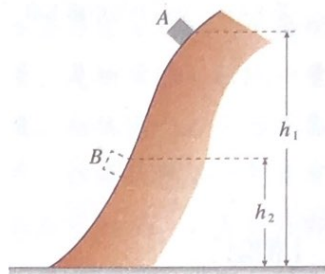


图8.4-3 物体沿光滑曲面滑下

### 思考与讨论

在图8.4-3中,如果物体从位置B沿光滑曲面上升到位置A,重力做负功。这种情况下上式的关系是否还成立?

同样可以证明,在只有弹力做功的系统内,动能和弹性势能互相转化时总的机械能也保持不变。在只有重力





图 8.4-4 滑雪者沿斜面下滑

或弹力做功的物体系统内，动能与势能可以互相转化，而总的机械能保持不变。这叫作机械能守恒定律 (law of conservation of mechanical energy)。它是力学中的一条重要定律，是普遍的能量守恒定律在力学范围内的表现形式。如图 8.4-4，滑雪者沿斜面下滑时，斜面的支持力与运动方向垂直，不做功；如果阻力做的功较少，可以忽略，则只有重力做功。此种情况下，动能与重力势能可以互相转化，总的机械能守恒。如果阻力做的功较大，不能忽略，则机械能不守恒。

### 【例题】

把一个小球用细线悬挂起来，就成为一摆（图 8.4-5），摆长为  $l$ ，最大偏角为  $\theta$ 。如果阻力可以忽略，小球运动到最低点时的速度大小是多少？

**分析** 在阻力可以忽略的情况下，小球摆动过程中受重力和细线的拉力。细线的拉力与小球的运动方向垂直，不做功，所以这个过程中只有重力做功，机械能守恒。

小球在最高点只有重力势能，动能为 0，计算小球在最高点和最低点重力势能的差值，根据机械能守恒定律就能得出它在最低点的动能，从而算出它在最低点的速度。

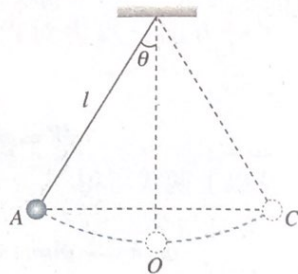


图 8.4-5

**解** 以小球为研究对象。设最低点的重力势能为 0，以小球在最高点的状态作为初状态，以小球在最低点的状态作为末状态。

在最高点的动能  $E_{k1} = 0$ ，重力势能是

$$E_{p1} = mg(l - l \cos \theta)$$

在最低点的重力势能  $E_{p2} = 0$ ，而动能可以表示为

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$$

运动过程中只有重力做功，所以机械能守恒，即

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}$$

把初末状态下动能、重力势能的表达式代入，得

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(l - l \cos \theta)$$

由此解出小球运动到最低点时的速度大小

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}$$

从得到的表达式可以看出, 初状态的 $\theta$ 角越大,  $\cos \theta$  越小,  $(1 - \cos \theta)$  就越大,  $v$  也就越大。也就是说, 最初把小球拉得越高, 它到达最低点时的速度也就越大。这与生活经验是一致的。

从这个例题可以看出, 如果研究对象在某一过程中满足机械能守恒的条件, 应用机械能守恒定律解决问题只需考虑运动的初状态和末状态, 不必考虑两个状态间过程的细节, 这样就简化了计算。如果直接用牛顿定律解决问题, 需要分析过程中各种力的作用, 而这些力又往往在变化着。因此, 一些难于用牛顿定律解决的问题, 应用机械能守恒定律则有可能易于解决。

守恒定律不仅给处理问题带来方便, 而且有更深刻的意义。物理世界是千变万化的, 但是, 人们发现有些物理量在一定条件下是守恒的, 可以用这些“守恒量”来表示物理世界变化的规律, 这就是守恒定律。机械能守恒定律就是其中一个。正因为自然界存在着“守恒量”, 而且, 某些守恒定律的适用范围很广, 所以, 在物理学中寻求“守恒量”已经成为物理学研究的一种重要思想方法。

► 能量是人们研究物质世界非常重要的一个物理量, 是物质运动的统一量度。物体运动虽然形式各异, 但是每种运动都具有相应的能量。能量及其转化将各种运动统一、联系起来。

## 练习与应用

1. 在下面列举的各个实例中 (除A外都不计空气阻力), 哪些过程中机械能是守恒的? 说明理由。

- A. 跳伞运动员带着张开的降落伞在空气中匀速下落
- B. 抛出的标枪在空中运动
- C. 拉着一个金属块使它沿光滑的斜面匀速上升
- D. 在光滑水平面上运动的小球碰到一个弹簧, 把弹簧压缩后, 又被弹回来

2. 如图8.4-6, 质量为 $m$ 的小球从光滑曲面上滑下。当它到达高度为 $h_1$ 的位置A时, 速度的大小为 $v_1$ ; 当它继续滑下到高度为 $h_2$ 的位置B时, 速度的大小为 $v_2$ 。在由高度 $h_1$ 滑到高度 $h_2$ 的过程中, 重力做的功为 $W$ 。

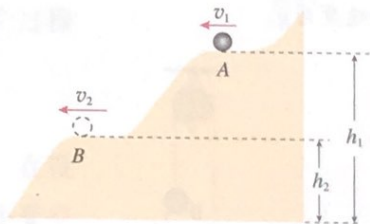


图8.4-6

(1) 根据动能定理列出方程, 描述小球在A、B两点间动能的关系。

(2) 根据重力做功与重力势能的关系, 把以上方程变形, 以反映出小球运动过程中机械能是守恒的。

3. 质量为0.5 kg的石块从10 m高处以 $30^\circ$ 角斜向上方抛出 (图8.4-7), 初速度 $v_0$ 的大小为5 m/s。不计空气阻力,  $g$ 取 $10 \text{ m/s}^2$ 。

(1) 石块落地时的速度是多大? 请用机械



能守恒定律和动能定理分别讨论。

(2) 石块落地时速度的大小与下列哪些量有关, 与哪些量无关? 说明理由。

- A. 石块的质量
- B. 石块的初速度
- C. 石块初速度的仰角
- D. 石块抛出时的高度

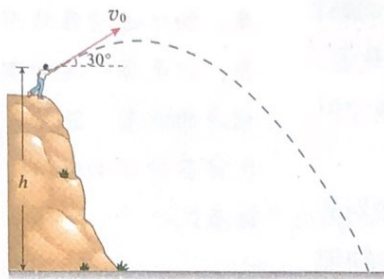


图 8.4-7

4. 一条轻绳跨过定滑轮, 绳的两端各系一个小球 A 和 B, B 球的质量是 A 球的 3 倍。用手托住 B 球, 当轻绳刚好被拉紧时, B 球离地面的高度是  $h$ , A 球静止于地面, 如图 8.4-8 所示。释放 B 球, 当 B 球刚落地时, 求 A 球的速度大小。定滑轮的质量及轮与轴间的摩擦均不计, 重力加速度为  $g$ 。

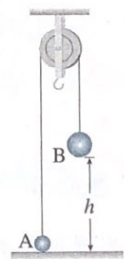


图 8.4-8

5. 把质量是  $0.2 \text{ kg}$  的小球放在竖立的弹簧上, 并把小球往下按至 A 的位置, 如图 8.4-9 甲

所示。迅速松手后, 弹簧把小球弹起, 小球升至最高位置 C (图 8.4-9 乙), 途中经过位置 B 时弹簧正好处于自由状态。已知 B、A 的高度差为  $0.1 \text{ m}$ , C、B 的高度差为  $0.2 \text{ m}$ , 弹簧的质量和空气的阻力均可忽略,  $g$  取  $10 \text{ m/s}^2$ 。

(1) 分别说出小球由位置 A 至位置 B、由位置 B 至位置 C 时, 小球和弹簧的能量转化情况。

(2) 小球处于位置 A 时, 弹簧的弹性势能是多少? 在位置 C 时, 小球的动能是多少?

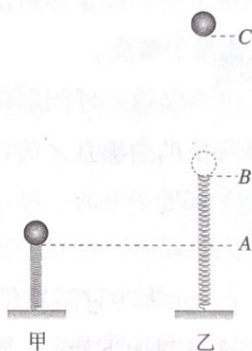


图 8.4-9

6. 图 8.4-10 是某城市广场喷泉喷出水柱的场景。从远处看, 喷泉喷出的水柱超过了 40 层楼的高度; 靠近看, 喷管的直径约为  $10 \text{ cm}$ 。请你据此估计用于给喷管喷水的电动机输出功率至少有多大?



图 8.4-10