练习6.3.1

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=-6$，$q=2$，试写出a_4、a_6.
2. 写出等比数列$3,-6,12,-24,\cdots$的第5项与第6项.

6.3.2 等比数列的通项公式

问题

如何写出一个等比数列的通项公式呢？

新知识

与等差数列相类似，我们通过观察等比数列各项之间的关系，分析、探求规律.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

说明

$a_1=a_1\cdot 1=a_1\cdot q^0$

以此类推，得到等比数列的**通项公式**：

$$a_n=a_1q^{n-1}. \tag{6.6}$$

知道了等比数列$\{a_n\}$中的a_1和q，利用公式(6.6)，可以直接计算出数列的任意一项.

想一想

等比数列的通项公式中，共有四个量：a_n、a_1、n和q，只要知道了其中的任意三个量，就可以求出另外的一个量. 针对不同情况，应该分别采用什么样的计算方法？

知识巩固

例2 求等比数列

$$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$$

的第10项.

解 由于

$$a_1=-1,q=-\frac{1}{2},$$

所以数列的通项公式为

$$a_n=a_1q^{n-1}=(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}},$$

所以

$$a_{10}=(-1)^{10}\frac{1}{2^{10-1}}=\frac{1}{512}.$$

例 3 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=-1, a_8=-\frac{1}{8}$，求 a_{13}.

注 意

本例题求解过程中，通过两式相除求出公比的方法是研究等比数列问题的常用方法.

解 由 $a_5=-1, a_8=-\frac{1}{8}$ 有

$$-1=a_1q^4, \tag{1}$$

$$-\frac{1}{8}=a_1q^7, \tag{2}$$

(2) 式的两边分别除以 (1) 式的两边，得

$$\frac{1}{8}=q^3,$$

由此得

$$q=\frac{1}{2}.$$

将 $q=\frac{1}{2}$ 代入 (1) 式，得

$$a_1=-2^4,$$

想一想

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7=\frac{1}{9}$，$q=\frac{1}{3}$. 求 a_3 时，你有没有比较简单的方法?

所以，数列的通项公式为

$$a_n=-2^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

故 $$a_{13}=a_1q^{12}=-2^4\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=-2^{-8}=-\frac{1}{256}.$$

例 4 小明、小刚和小强进行钓鱼比赛，他们三人钓鱼的数量恰好组成一个等比数列. 已知他们三人一共钓了 14 条鱼，而三个人钓鱼数量的积为 64. 并且知道，小强钓的鱼最多，小明钓的鱼最少，问他们三人各钓了多少条鱼?

分析 知道三个数构成等比数列，并且知道这三个数的积，可以将这三个数设为 $\frac{a}{q}, a, aq$，这样可以方便地求出 a，从而解决问题.

解 设小明、小刚和小强钓鱼的数量分别为 $\frac{a}{q}, a, aq$，则

$$\begin{cases}\frac{a}{q}+a+aq=14,\\ \frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=64.\end{cases}$$

注 意

将构成等比数列的三个数设为 $\frac{a}{q}, a, aq$，是求解等比数列问题经常使用的方法.

解得

$$\begin{cases}a=4,\\ q=2\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=4,\\ q=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

当 $q=2$ 时

$$\frac{a}{q}=\frac{4}{2}=2, aq=4\times 2=8,$$

此时三个人钓鱼的条数分别为 2、4、8.

当 $q=\frac{1}{2}$ 时

$$\frac{a}{q}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8, aq=4\times\frac{1}{2}=2,$$

此时三个人钓鱼的条数分别为 8、4、2.

由于小明钓的鱼最少，小强钓的鱼最多，故小明钓了 2 条鱼，小刚钓了 4 条鱼，小强钓了 8 条鱼.

练习 6.3.2

1. 求等比数列 $\frac{2}{3}$，2，6，…的通项公式与第 7 项.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=-\frac{1}{25}$，$a_5=-5$，判断 -125 是否为数列中的项，如果是，请指出是第几项.

3. 已知三个数的积为 27，且这三个数组成公比为 3 的等比数列，求这三个数.

6.3.3 等比数列的前 n 项和公式

趣味数学

传说国际象棋（图 6－1）的发明人是印度的大臣西萨·班·达依尔，舍罕王为了表彰大臣达依尔的功绩，准备对他进行奖赏.

图 6－1

国王问他："你想得到什么样的奖赏？"这位聪明的大臣达依尔说："陛下，请您在这张棋盘的第一个格子内放上 1 颗麦粒，在第二个格子内放上 2 颗麦粒，在第三个格子内放上 4 颗麦粒，在第四个格子内放上 8 颗麦粒……依照后一格子内的麦粒数是前一格子内的麦粒数的 2 倍的规律，放满棋盘的 64 个格子. 并把这些麦粒赏给您的仆人吧."

国王认为这样的奖赏很轻，于是爽快地答应了，命令如数付给达依尔麦粒.

计数麦粒的工作开始了，在第一个格内放 1 粒，第二个格内放 2 粒，第三个格内放 4 粒，第四个格内放 8 粒……国王很快就后悔了，因为他发现，即使把全国的麦子都拿来，也兑现不了他对这位大臣的奖赏承诺.

7.3.2 内积的坐标表示

新知识

设平面向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴、y 轴上的单位向量.由于 $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$，故 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$，又 $|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=1$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&=x_1x_2|\boldsymbol{i}|^2+y_1y_2|\boldsymbol{j}|^2\\&=x_1x_2+y_1y_2.\end{aligned}$$

说明

由于 $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$，故由内积的性质知，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$.

这就是说，两个向量的内积等于它们对应坐标乘积的和，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2. \tag{7.11}$$

利用公式(7.11)可以计算向量的模.设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{7.12}$$

由平面向量内积的定义可以得到，当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是非零向量时，

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \tag{7.13}$$

利用公式(7.13)可以方便地求出两个向量的夹角.

由于 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由公式(7.11)可知

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0.$$

因此

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0. \tag{7.14}$$

利用公式(7.14)可以方便地利用向量的坐标来研究向量垂直问题.

知识巩固

例3 求下列向量的内积：

(1) $\boldsymbol{a}=(2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(1,3)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(4,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-3)$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+(-3)\times3=-7$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+(-1)\times2=0$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times(-2)+2\times(-3)=-14$.

例 4 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

解

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times(-3)+2\times1=5,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5},$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10},$$

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=45°.$$

例 5 判断下列各组向量是否互相垂直：

(1) $\boldsymbol{a}=(-2,3)$， $\boldsymbol{b}=(6,4)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(0,-1)$， $\boldsymbol{b}=(1,-2)$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-2)\times6+3\times4=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(2) 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\times1+(-1)\times(-2)=2$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不垂直.

练习 7.3.2

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(5,-4)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(0,\sqrt{3})$，求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(3,-4)$，$\boldsymbol{c}=(-1,3)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.
4. 判断下列各组向量是否互相垂直：

(1) $\boldsymbol{a}=(-2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$；(2) $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,-3)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$.

5. 求下列向量的模：

(1) $\boldsymbol{a}=(2,-3)$；(2) $\boldsymbol{b}=(8,6)$.

习题 7.3

A 组

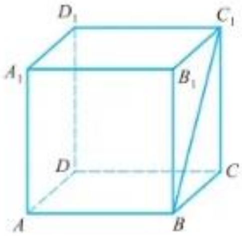
1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(-6,-8)$，求 $\cos\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle$.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，求 $5\boldsymbol{a}\cdot3\boldsymbol{b}$.
4. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$，$\overrightarrow{OB}=(3,m)$，若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，求 m 的值.
5. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$，k 为何值时，

(1) $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$；(2) $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

B 组

$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为点 $A(-1,2)$，$B(3,1)$，$C(2,-3)$. 判断 $\triangle ABC$ 是否为直角三角形.

（1）DD_1 与 BC；　（2）AA_1 与 BC_1.



（练习 9.3.1 题图）

9.3.2 直线与平面所成的角

1. 直线与平面垂直

观察

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中（图 9－33），直线 BB_1 与直线 AB、BC、CD、AD、AC 所成的角各是多少？

可以发现，这些角都是直角.

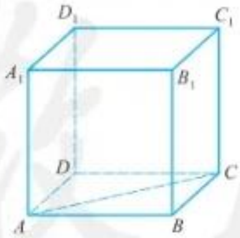


图 9－33

新知识

如果直线 l 和平面 α 内的任意一条直线都垂直，那么就称**直线 l 与平面 α 垂直**，记作 $l \perp \alpha$. 直线 l 叫做**平面 α 的垂线**，垂线 l 与平面 α 的交点叫做**垂足**.

画表示直线 l 和平面 α 垂直的图形时，要把直线 l 画成与平行四边形的横边垂直（图 9－34），其中交点 A 是垂足.

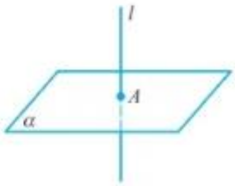


图 9－34

实验

将一根木棍 PA 直立在地面 α 上，用细绳依次度量点 P 与地面上的点 A、B、

C、D 的距离(图 9－35)，发现 PA 最短.

射影

新知识

如图 9－35 所示，$PA \perp \alpha$，线段 PA 叫做**垂线段**，垂足 A 叫做**点 P 在平面 α 内的射影**.

直线 PB 与平面 α 相交但不垂直，则称直线 PB 与平面 α **斜交**，直线 PB 叫做**平面 α 的斜线**，斜线和平面的交点叫做**斜足**. 点 P 与斜足 B 之间的线段叫做**点 P 到这个平面的斜线段**.

过垂足与斜足的直线叫做**斜线在平面内的射影**. 如图 9－35 中，直线 AB 是斜线 PB 在平面 α 内的射影.

从上面的实验中可以看到，从平面外一点向这个平面引垂线段和斜线段，垂线段最短. 因此，将从平面外一点 P 到平面 α 的垂线段的长叫做**点 P 到平面 α 的距离**.

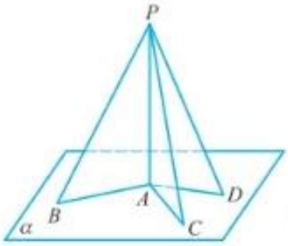


图 9－35

2. 直线与平面所成的角

观察

如图 9－36 所示，炮兵在发射炮弹时，为了击中目标，需要调整好炮筒与地面的角度.

直线与平面所成的角

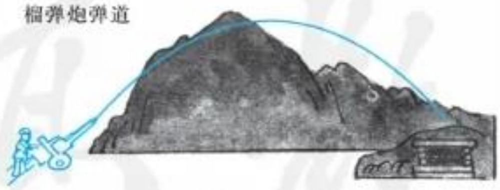


图 9－36

新知识

斜线 l 与它在平面 α 内的射影 l' 的夹角，叫做**直线 l 与平面 α 所成的角**. 如图 9－37 所示，$\angle PBA$ 就是直线 PB 与平面 α 所成的角.

规定：当直线与平面垂直时，所成的角是直角；当直线与平面平行或直线在平面内时，所成的角是零角. 显然，直线与平面所成角的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

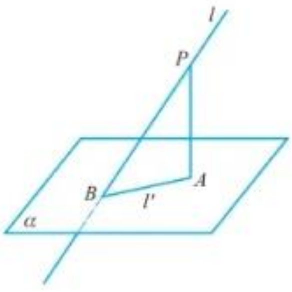


图 9－37

想一想

如果两条直线与一个平面所成的角相等，那么这两条直线一定平行吗?

知识巩固

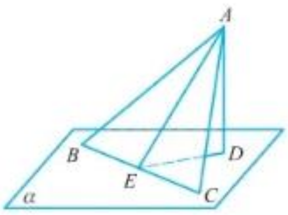


图 9－38

例 2　如图 9－38 所示，等腰$\triangle ABC$的顶点 A 在平面 α 外，底边 BC 在平面 α 内，已知底边长 $BC=16$，腰长 $AB=17$，又知点 A 到平面 α 的垂线段 $AD=10$. 求：

（1）等腰$\triangle ABC$的高 AE 的长；

（2）斜线 AE 和平面 α 所成的角的大小（精确到 $1°$）.

分析　三角形 AEB 是直角三角形，知道斜边和一条直角边，利用勾股定理可以求出 AE 的长；$\angle AED$ 是 AE 和平面 α 所成的角，三角形 ADE 是直角三角形，求出$\angle AED$的正弦值即可求出斜线 AE 和平面 α 所成的角.

解　（1）在等腰$\triangle ABC$中，$AE\perp BC$，故由 $BC=16$ 可得 $BE=8$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEB$ 中，$\angle AEB=90°$，因此

$$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15.$$

（2）连接 DE. 因为 AD 是平面 α 的垂线，AE 是 α 的斜线，所以 DE 是 AE 在 α 内的射影. 因此$\angle AED$是 AE 和平面 α 所成的角. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，

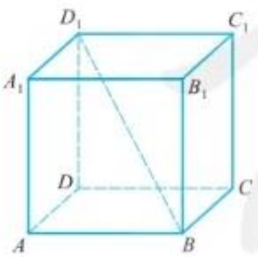
$$\sin\angle AED=\frac{AD}{AE}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3},$$

所以

$$\angle AED\approx 42°.$$

即斜线 AE 和平面 α 所成的角约为 $42°$.

练习 9.3.2



（练习 9.3.2 题图）

如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，高 $DD_1=4$ cm，底面是边长为 3 cm 的正方形，求对角线 D_1B 与底面 $ABCD$ 所成角的大小（精确到 $1'$）.

9.3.3　平面与平面所成的角

观察

在建筑房屋时，有时为了美观和排除雨水的方便，需要考虑屋顶面与地面形成适当的角度（图 9－39(1)）；在修筑河堤时，为使它经济且坚固耐用，需要考虑河堤的斜坡与地面形成适当的角度（图 9－39(2)）.