23.3 方差

平均数刻画数据的"平均水平"，但评价选手的射击水平、机器加工零件的精度、手表的日走时误差等，只用平均数是不够的，还需要用一个新的数，即方差，来刻画一组数据的波动情况.

观察与思考

甲、乙两名业余射击选手参加了一次射击比赛，每人各射 10 发子弹，成绩如图 23 - 3 - 1 所示.

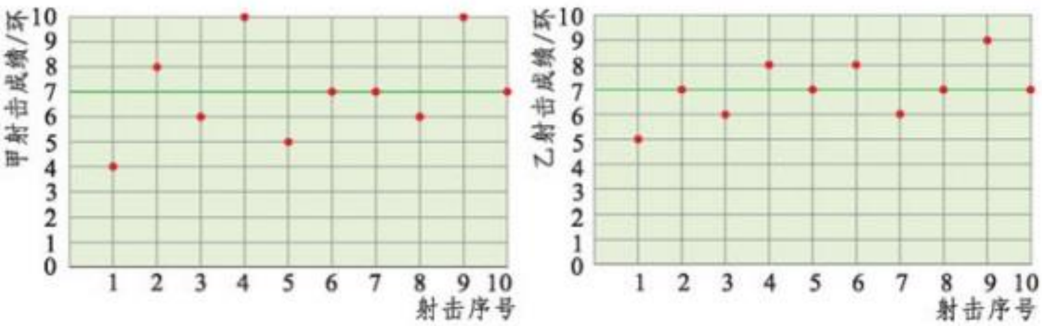

图 23 - 3 - 1

(1) 观察图 23 - 3 - 1，甲、乙射击成绩的平均数、中位数各是多少?

(2) 甲、乙射击成绩的平均数是否相同? 若相同，他们的射击水平就一样吗?

(3) 哪一组数据相对于其平均数波动较大? 波动大小反映了什么?

比较甲和乙的射击水平，自然想到比较射击成绩的平均数或中位数. 但是，甲和乙射击成绩的平均数和中位数都是 7 环. 两人相比，乙的成绩大多集中在 7 环附近，而甲的成绩相对于平均数波动较大.

我们在分析数据的特征时，仅考虑数据的平均数是不够的，还需要关注数据的波动情况.

一起探究

观察图 23-3-1，甲射击成绩的波动比乙大. 如何用一个数来描述一组数据的波动大小呢？

设 n 个数据 x_1，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，各个数据与平均数偏差的平方分别是 $(x_1-\bar{x})^2$，$(x_2-\bar{x})^2$，…，$(x_n-\bar{x})^2$. 偏差平方的平均数叫做这组数据的**方差**(variance)，用 s^2 表示，即

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2].$$

可以看出：当数据分布比较分散时，方差较大；当数据分布比较集中时，方差较小. 因此，方差的大小反映了数据波动(或离散程度)的大小.

例如，对于甲和乙的射击成绩数据，平均数都是 7，方差分别为：

$$s_{甲}^2=\frac{(4-7)^2+(5-7)^2+2(6-7)^2+3(7-7)^2+(8-7)^2+2(10-7)^2}{10}=3.4,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(5-7)^2+2(6-7)^2+4(7-7)^2+2(8-7)^2+(9-7)^2}{10}=1.2.$$

由于 $s_{乙}^2<s_{甲}^2$，所以乙的射击成绩比甲的波动小，乙的成绩更稳定些.

例 1 利用计算器计算下列数据的平均数和方差.（结果精确到 0.01）

66　　78　　81　　75　　86　　82

解：(1) 进入统计状态，选择一元统计.

(2) 输入数据.

(3) 显示结果.

按 $\boxed{\mathbf{Rcl}}$ $\boxed{\bar{x}}$ 键，显示结果为 78.

按 $\boxed{\mathbf{Rcl}}$ $\boxed{s_x^2}$ 键，显示结果为 40.333 33.

所以 $\bar{x}=78$，$s^2\approx40.33$.

练　习

有三组数据，每组 5 个数据的大小如图所示：

24.2 解一元二次方程

在本节中，我们来探究一元二次方程的解法.

配 方 法

试着做做

根据平方根的意义，解下列方程：

(1) $x^2=4$；　　(2) $(x+1)^2=4$；

(3) $x^2+2x+1=4$；　　(4) $x^2+2x-3=0$.

方程 $x^2+2x-3=0$ 可变形为 $x^2+2x+1=4$，即 $(x+1)^2=4$，开平方可得 $x+1=\pm 2$，于是可得方程的解为 $x_1=1$，$x_2=-3$.

这样，我们就得到了解方程 $x^2+2x-3=0$ 的一种方法：

$$x^2+2x-3=0 \xrightarrow{\text{配方}} (x+1)^2=4 \xrightarrow{\text{开平方}} x+1=\pm 2 \xrightarrow{\text{得根}} x_1=1,\ x_2=-3$$

做一做

先把下列方程化为 $(x+m)^2=n$（m，n 为常数，且 $n\geqslant 0$）的形式，再求出方程的根.

(1) $x^2+2x=48$；　　(2) $x^2-4x=12$；

(3) $x^2-6x+5=0$；　　(4) $x^2+x-\frac{3}{4}=0$.

通过配方，把一元二次方程变形为一边为含未知数的一次式的平方，另一边为常数，当常数为非负数时，利用开平方，将一元二次方程转化为两个一元一次方程，从而求出原方程的根. 这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**.

例 1　用配方法解下列方程：

(1) $x^2-10x-11=0$；　　(2) $x^2+2x-1=0$.

解：(1) 移项，得

$$x^2-10x=11.$$

配方，得

$$x^2-10x+5^2=11+5^2,$$

即

$$(x-5)^2=36.$$

配方时，先将常数项移至另一边，再在方程两边同时加上一次项系数一半的平方.

两边开平方，得

$$x-5=\pm 6.$$

所以

$$x_1=11,\ x_2=-1.$$

(2) 移项，得

$$x^2+2x=1.$$

配方，得

$$x^2+2x+1^2=1+1^2,$$

即

$$(x+1)^2=2.$$

两边开平方，得

$$x+1=\pm\sqrt{2}.$$

所以

$$x_1=-1+\sqrt{2},\ x_2=-1-\sqrt{2}.$$

做一做

对于方程 $2x^2+4x+1=0$，如何用配方法求解呢？试试看.

例 2 用配方法解方程：$2x^2+3=6x$.

解：移项，并将二次项系数化为 1，得

$$x^2-3x=-\frac{3}{2}.$$

配方，得

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2},$$

即

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

两边开平方，得

$$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以

$$x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

大家谈谈

用配方法解一元二次方程的一般步骤是什么？与同学交流你的想法.

练　习

1. 解下列方程：

(1) $(x+1)^2=49$；　　(2) $x^2+6x+9=25$；

(3) $x^2+8x-9=0$；　　(4) $x^2-2x+1=0$.

2. 解下列方程：

(1) $3x^2-6x=1$；　　(2) $5y^2-7y+2=0$.

习　题

A 组

1. 解下列方程：

(1) $x^2-4x=45$；　　(2) $x^2-6x-15=0$；

(3) $x(x+8)=-16$；　　(4) $2x^2-4x-5=0$.

2. 解下列方程：

(1) $6x^2+x=2$；

(2) $4x^2-3x-2=0$；

(3) $3y^2-y-5=0$；

(4) $5x=7x^2-1$.

3. 一个长方形的长比宽多 2 cm，面积是 15 cm^2. 求这个长方形的长和宽.

27.1 反比例函数

若将成正比例的两个量视为变量，则这两个量之间具有正比例函数关系．那么，当将两个成反比例的量视为变量时，它们之间又具有怎样的函数关系呢？

做一做

1. 要制作容积为 15 700 cm^3 的圆柱形水桶，水桶的底面积为 S cm^2，高为 h cm，则 $Sh=$________，用 h 表示 S 的函数表达式为________．

2. 自行车运动员在长为 10 000 m 的路段上进行骑车训练，行驶全程所用时间为 t s，行驶的平均速度为 v m/s，则 $vt=$________，用 t 表示 v 的函数表达式为________．

3. y 与 x 的乘积为 -2，用 x 表示 y 的函数表达式为____________．

大家谈谈

1. 上述三对量之间每对量都成反比例吗？
2. 这些函数表达式具有怎样的共同特征？
3. 请再举出几个具有这种特征的例子．

一般地，如果变量 y 和变量 x 之间的函数关系可以表示成 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）的形式，那么称 y 为 x 的**反比例函数**（inverse proportional function），k 称为比例系数．

容易看出，在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是不等于 0 的实数．

例 1 写出下列问题中 y 与 x 之间的函数关系式，指出其中的正比例函数和反比例函数，并写出它们的比例系数 k.

(1) y 与 x 互为相反数.

(2) y 与 x 互为负倒数.

(3) y 与 $2x$ 的积等于 a(a 为常数，且 $a\neq0$).

解：(1) 因为 $y+x=0$，即 $y=-x$，

所以 y 是 x 的正比例函数，比例系数 $k=-1$.

(2) 因为 $xy=-1$，即 $y=\frac{-1}{x}$，

所以 y 是 x 的反比例函数，比例系数 $k=-1$.

(3) 因为 $2xy=a$，即 $y=\frac{a}{2x}$，

所以 y 是 x 的反比例函数，比例系数 $k=\frac{1}{2}a$.

例 2 已知 y 是 x 的反比例函数，当 $x=4$ 时，$y=6$.

(1) 写出这个反比例函数的表达式.

(2) 当 $x=-2$ 时，求 y 的值.

解：(1) 设 $y=\frac{k}{x}$.

把 $x=4$，$y=6$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=24$.

所以这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{24}{x}$.

(2) 当 $x=-2$ 时，$y=\frac{24}{-2}=-12$.

练 习

1. 指出下列函数中，哪些是正比例函数，哪些是反比例函数.

(1) $y=\frac{8}{x}$；　(2) $y=2x$；　(3) $y=\frac{-5}{x}$；

(4) $y=\frac{1}{4}x$；　(5) $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$；　(6) $y=\frac{x}{5}$.

2. 星星电子集团接到了生产 4 000 个计算机零部件的任务，请写出生产这批零部件所需时间 t (h)与每小时生产零部件数量 n(个)之间的函数