12.4 分式方程

我们在用方程解决一些实际问题时，会遇到一些分母中含有未知数的方程，这就是我们将要学习的分式方程.

小红家到学校的路程为 38 km. 小红从家去学校总是先乘公共汽车，下车后再步行 2 km，才能到学校，路途所用时间是 1 h. 已知公共汽车的速度是小红步行速度的 9 倍，求小红步行的速度.

一起探究

1. 上述问题中有哪些等量关系？
2. 根据你所发现的等量关系，设未知数并列出方程.

问题中的等量关系为：

(1) 小红乘公共汽车的时间＋小红步行的时间＝小红上学路上的时间；

(2) 公共汽车的速度＝9×小红步行的速度.

如果设小红步行的速度为 x km/h，那么公共汽车的速度为 $9x$ km/h，根据等量关系(1)，可得到方程

$$\frac{38-2}{9x}+\frac{2}{x}=1.$$

如果设小红步行的时间为 x h，那么她乘公共汽车的时间为$(1-x)$h，根据等量关系(2)，可得到方程

$$\frac{38-2}{1-x}=9\times\frac{2}{x}.$$

大家谈谈

上面得到的方程与我们已学过的方程有什么不同？这两个方程有哪些共同特点？

像$\frac{38-2}{1-x}=9\times\frac{2}{x}$ 和 $\frac{38-2}{9x}+\frac{2}{x}=1$ 这样，分母中含有未知数的方程叫做**分式方程**(fractional equation). 使得分式方程等号两端相等的未知数的值叫做分式方程的解(也叫做分式方程的根).

例 1 解方程：

(1) $\frac{38-2}{1-x}=9\times\frac{2}{x}$；　　(2) $\frac{38-2}{9x}+\frac{2}{x}=1$.

解：(1) 方程两边同乘 $x(1-x)$，得

$$36x=18(1-x).$$

解这个整式方程，得

$$x=\frac{1}{3}.$$

经检验，$x=\frac{1}{3}$是原分式方程的解.

(2) 方程两边同乘 $9x$，得

$$36+18=9x.$$

解这个整式方程，得

$$x=6.$$

经检验，$x=6$ 是原分式方程的解.

观察与思考

下面是小华解分式方程 $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-3}{1-x}+1$ 的过程：

方程两边同乘 $x-1$，得

$$x+1=-(x-3)+(x-1).$$

解这个整式方程，得

$$x=1.$$

你认为 $x=1$ 是方程$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-3}{1-x}+1$ 的解吗？为什么？

分式方程可能无解.

事实上，因为当 $x=1$ 时，$x-1=0$，即这个分式方程的分母为 0，方程

中的分式无意义，所以 $x=1$ 不是这个分式方程的解(根).

在解分式方程时，首先是通过去分母将分式方程转化为整式方程，并解这个整式方程，然后要将整式方程的根代入分式方程(或公分母)中检验．当分母的值不等于0时，这个整式方程的根就是分式方程的根；当分母的值为0时，分式方程无解，我们把这样的根叫做分式方程的**增根**.

例2 解方程：$\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2-x}{2+x}=3$.

解：方程两边同乘 $x+2$，得

$$2-(2-x)=3(x+2).$$

解这个整式方程，得

$$x=-3.$$

经检验，$x=-3$ 是原分式方程的解.

解分式方程一定要注意验根.

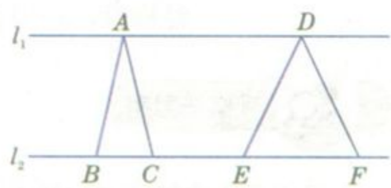
练习

1. 解下列方程：

(1) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{x-3}$；

(2) $\dfrac{x}{x-3}=2-\dfrac{3}{3-x}$.

2. 如图，已知直线 $l_1 /\!/ l_2$，点 A，D 和点 B，C，E，F 分别在直线 l_1，l_2 上，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积之比为 $1:2$，边 EF 比边 BC 长 3 cm，求 BC，EF 的长.



(第2题)

习题

A 组

1. 解下列方程：

(1) $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x+2}$；　　(2) $\dfrac{15}{x}-\dfrac{25}{2x}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\dfrac{x-8}{x-7}-\dfrac{1}{7-x}=8$；　　(4) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x-4}=0$.

2. 某玩具厂接到一份生产 2 400 件儿童玩具的订单. 如果由一车间生产这批玩具，那么恰好按规定时间完成；如果由二车间生产这批玩具，那么在规定时间内还差 400 件没有完成. 已知一车间和二车间每天一共生产 550 件玩具. 一车间和二车间平均每天各生产多少件?

B 组

解下列方程：

(1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{x}$；　　(2) $\dfrac{5}{x^2+x}-\dfrac{1}{x^2-x}=0$.

读 一 读

分式方程的增根

解分式方程为什么会出现增根呢?

事实上，解分式方程产生增根，主要是在去分母时造成的. 根据等式的性质，等式的两边同乘(或除以)一个不等于0的数，所得的结果仍是等式. 而在解分式方程时，由于去分母是将方程左右两边同乘公分母，但此时还无法知道所乘的公分母的值是不是0. 于是，未知数的取值范围可能就扩大了. 如果去分母后得到的整式方程的根使所乘的公分母的值为0，就产生了增根. 增根是整式方程的根，但不是原分式方程的根.

例如：解方程 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{4}{x^2-1}$.　　①

解:方程两边同乘$(x+1)(x-1)$,得整式方程

$$(x-1)+2(x+1)=4.\qquad ②$$

解这个整式方程,得

$$x=1.$$

检验:当 $x=1$ 时,$(x+1)(x-1)=0$.

所以 $x=1$ 是整式方程②的根，是原分式方程①的增根.

因为解分式方程时可能产生增根，所以解分式方程必须验根.