15.1 二次根式

我们已经学习了数的开平方，并用$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$表示非负数a的算术平方根. 现在，我们学习二次根式及其性质.

一起探究

1. (1) 2，18，$\frac{8}{15}$，$\frac{3}{10}$的算术平方根是怎样表示的?

(2) 非负数m，$p+q$，t^2-1的算术平方根又是怎样表示的?

2. 学校要修建一个占地面积为S m²的圆形喷水池，它的半径应为多少米? 如果在这个圆形喷水池的外围增加一个占地面积为a m²的环型绿化带，那么所成大圆的半径应为多少米?

在上面的问题中，我们得到了$\sqrt{2}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{\frac{8}{15}}$，$\sqrt{\frac{3}{10}}$，$\sqrt{m}$，$\sqrt{p+q}$，$\sqrt{t^2-1}$，$\sqrt{\frac{S}{\pi}}$，$\sqrt{\frac{S+a}{\pi}}$等式子，它们分别表示某个非负数的算术平方根.

一般地，我们把形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子叫做**二次根式**(quadratic surd expression).

大家谈谈

1. 小亮和小颖对二次根式“$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$”分别有如下的观点. 你认同小亮和小颖的观点吗? 请举例说明.

小亮的观点

因为$\sqrt{a}$表示的是非负数 a 的算术平方根，所以，根据算术平方根的意义，有

$$\sqrt{a}\geqslant 0.$$

小颖的观点

因为$\sqrt{a}$表示的是非负数 a 的算术平方根，所以，根据算术平方根和被开方数的关系，有

$$(\sqrt{a})^2=a.$$

2. 计算$\sqrt{a^2}(a\geqslant 0)$，并与大家交流你的结果.

事实上，对于二次根式，有

$$\sqrt{a}(a\geqslant 0)\text{是一个非负数，}$$
$$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0),$$
$$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0).$$

做一做

化简：

(1) $(\sqrt{3})^2$；　(2) $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$；　(3) $\sqrt{5^2}$；　(4) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$.

例 1 化简：

(1) $\sqrt{0.04}$；　(2) $\left(3\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2$.

解：(1) $\sqrt{0.04}=\sqrt{0.2^2}=0.2$.

(2) $\left(3\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2=\left[3\times\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right]^2=\left(3\times\frac{1}{3}\right)^2=1^2=1$.

练　习

化简：

(1) $(\sqrt{2})^2$；　(2) $\sqrt{0.04^2}$；　(3) $\sqrt{0.64}$；　(4) $\left(2\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2$.

习题

A 组

1. 化简：

(1) $\sqrt{\left(\frac{8}{17}\right)^2}$；　　(2) $\sqrt{121}$；　　(3) $\sqrt{225}$.

2. 化简：

(1) $4\sqrt{\left(\frac{3}{16}\right)^2}$；　　(2) $(10\sqrt{1.69})^2$；　　(3) $\left[\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^2$.

B 组

1. 做一个面积为 300 cm^2 的长方形镜框，使它长与宽的比为 3∶2. 镜框的宽应为多少厘米？

2. 有边长分别为 a cm 和 b cm 的两个正方形，还有一个大正方形，其面积为这两个正方形的面积之和. 这个大正方形的边长是多少？当 $a=3$ cm，$b=4$ cm 时，这个大正方形的边长又是多少？

一起探究

1. $\sqrt{4\times9}$与$\sqrt{4}\times\sqrt{9}$是否相等？$\sqrt{25\times49}$与$\sqrt{25}\times\sqrt{49}$呢？

2. 当 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时，对$\sqrt{a\cdot b}$和$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$的关系提出你的猜想，并说明理由.

3. $\sqrt{\frac{4}{9}}$与$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$是否相等？$\sqrt{\frac{25}{49}}$与$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}$呢？

4. 当 $a\geqslant0$，$b>0$ 时，对$\sqrt{\frac{a}{b}}$和$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$的关系提出你的猜想，并说明理由.

事实上，$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. 理由如下：

(1) 因为当 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时，

$$(\sqrt{a\cdot b})^2=a\cdot b,\ (\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=a\cdot b,$$