“十四五”职业教育国家规划教材
（中等职业学校公共基础课程教材）

数学

基础模块（上册）

高等教育出版社 教材发展研究所 组编

高等教育出版社

(1) $\frac{4}{5}$与$\frac{7}{9}$；　(2) $\frac{5}{8}$与$\frac{2}{3}$；　(3) $\frac{6}{7}$与0.83.

2. 若$a>b$，比较$2a-1$与$2b-1$的大小.

3. 比较x^2-1与$2x^2+3$的大小.

2.1.2　不等式的性质

情境与问题

比较两个实数大小的作差比较法为研究不等关系奠定了基础.那么，如何用这个方法研究不等式的性质呢？

在义务教育阶段，我们学习过一些不等式的性质，如：

性质1　如果$a>b$，那么$a+c>b+c$.

性质2　如果$a>b$，$c>0$，那么$ac>bc$；

如果$a>b$，$c<0$，那么$ac<bc$.

性质1表明，不等式两边同时加上（或减去）同一个数（或代数式），不等号的方向不变.因此性质1也称为不等式的加法法则.

利用不等式的加法法则，容易证明：

如果$a+b>c$，那么$a>c-b$.

这表明，不等式的任何一项可以从不等式的一边移到另一边，但同时要改变符号.这条结论也称为移项法则.

性质2表明，不等式两边同时乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变；不等式两边同时乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

性质2也称为不等式的乘法法则.

性质1的证明

由 $a>b$，得 $a-b>0$，于是

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b>0,$$

所以

$$a+c>b+c.$$

也可以借助数轴来看性质 1，如图 2-3 所示，实数 a、b 在数轴上分别对应点 A 和点 B，$a+c$ 和 $b+c$ 在数轴上分别对应点 A' 和点 B'. 当 $c>0$ 时，点 A 和点 B 同时向右平移 c 个单位，即可到达点 A' 和点 B' 的位置；当 $c<0$ 时，点 A 和点 B 同时向左平移 $|c|$ 个单位，即可到达点 A' 和点 B' 的位置.

试一试

用作差比较法证明性质 2.

显然，两种情况中，点 A' 和点 B' 的相对位置与点 A 和点 B 的情况相同.

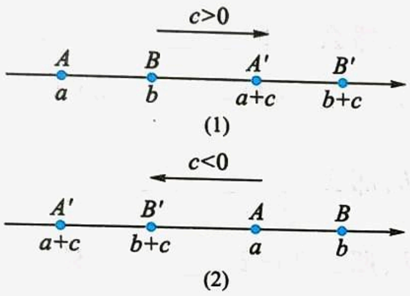

图 2-3

性质 3 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

证明 由 $a>b$，$b>c$，得

$$a-b>0, b-c>0,$$

所以

$$a-c=a-b+b-c=(a-b)+(b-c)>0,$$

由此得 $a>c$.

性质 3 称为不等式的**传递性**.

我们也可以借助数轴来看不等式的传递性. 如图 2-4 所示，对于实数 a、b 和 c，它们在数轴上分别对应点 A、点 B 和点 C，因为 $a>b$，所以点 A 在点 B 的右边，又因为 $b>c$，所以点 B 在点 C 的右边，因此，三个点从左到右依次为点 C、点 B 和点 A，即 $a>b>c$.

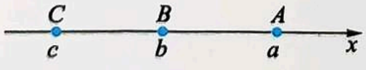

图 2-4

利用已有的性质可以证明如下结论：

性质 4 如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$.

性质 4 也称为**同向不等式的可加性**.

证明 因为 $a>b$，$c>d$，由性质 1，得

$$a+c>b+c, b+c>b+d,$$

由性质 3，得

$$a+c>b+d.$$

典型例题

例 3 用符号“>”或“<”填空，并说明利用了不等式的哪(几)条基本性质.

(1) 如果 $a<b$，那么 $a-5$ ________ $b-5$；

(2) 如果 $a>b$，那么 $a+4$ ________ $b+2$；

(3) 如果 $a<b$，那么 $-\frac{a}{2}$ ________ $-\frac{b}{2}$；

(4) 如果 $a>b$，那么 $3a-2$ ________ $3b-3$.

解 (1) 根据不等式的性质 1，不等式 $a<b$ 两边同时减去 5，不等号方向不变，即

$$a-5<b-5.$$

(2) 根据不等式的性质 1，不等式 $a>b$ 两边同时加上 4，不等号方向不变，即

$$a+4>b+4,$$

又因为 $b+4>b+2$，所以根据不等式的性质 3，可以得到

$$a+4>b+2.$$

(3) 根据不等式的性质 2，不等式 $a<b$ 两边同时除以 -2，不等号方向改变，即

$$-\frac{a}{2}>-\frac{b}{2}.$$

(4) 根据不等式的性质 2，不等式两边同时乘 3，不等号方向不变，即

$$3a>3b,$$

再仿照(2)的方法，可以得到

$$3a-2>3b-3.$$

读一读

第(2)小题利用不等式的性质 4 更加直接. 因为 $a>b$，$4>2$，所以 $a+4>b+2$.

例 4 若 $a>b>0$，$c>d>0$，试证明 $ac>bd$.

解 因为 $a>b$，$c>0$，由不等式的性质 2 得

$$ac>bc.$$

同理，由 $c>d$，$b>0$，得

$$bc>bd.$$

因此，由不等式的性质 3 可得 $ac>bd$.

读一读

例 4 也是不等式的性质之一：两边都是正数的同向不等式，两边分别相乘，所得到的不等式与原不等式同向.

例 5 如果代数式 $6x+7$ 与代数式 $3x-5$ 的差不大于 2，求 x 的取值范围.

解 由题可知

$$(6x+7)-(3x-5)\leqslant 2,$$

化简得

$$3x+12\leqslant 2,$$

因此

$$3x\leqslant 2-12,$$

故

$$x\leqslant -\frac{10}{3}.$$

所以 x 的取值范围是 $\left\{x \,\middle|\, x\leqslant -\frac{10}{3}\right\}$.

探究与发现

如果 $a>b$，$c>d$，是否有“$a-c>b-d$”成立呢？如果成立，请说明理由；否则，请举出反例.

练习 2.1.2

1. 已知 $a>b$，用符号“>”或“<”填空.

(1) $a+1$ ________ $b+1$； (2) $-5a$ ________ $-5b$；

(3) $3a+3$ ________ $3b+2$.

2. 判断下列结论是否正确，并说明理由.

（1）如果 $a<b$ 且 $b<c$，那么 $a<c$；

（2）如果 $a>b$，那么 $a^2>b^2$；

（3）若 $a>b$ 且 $c<d$，则 $a+c>b+d$.

3. 若代数式 $3x-5$ 与代数式 $x+2$ 的差不小于 3，求 x 的取值范围.

习题 2.1

A 知识巩固

1. 判断下列结论是否正确，并说明理由.

（1）如果 $a>b$，$c\in\mathbf{R}$，那么 $ac>bc$；

（2）如果 $ac>bc$，那么 $a>b$；

（3）如果 $a>b$，那么 $2a+5>2b+3$；

（4）如果 $a>b$ 且 $c<d$，那么 $a-c>b-d$.

2. 用符号“>”或“<”填空.

（1）$\dfrac{7}{8}$ ________ $\dfrac{8}{9}$，　$\dfrac{4\pi}{5}$ ________ $\dfrac{2\pi}{3}$；

（2）如果 $a>b$，那么，

$a-2$ ________ $b-2$，　$a+3$ ________ $b+2$，　$2a+1$ ________ $2b+1$，

$-a+2$ ________ $-b+2$.

3. 解下列不等式.

（1）$\dfrac{1+2x}{3}\geqslant x-1$；

（2）$2-4x<3(3x-1)$.

4. 若代数式 $2x-5$ 与代数式 $5x-1$ 之和不大于 2，求 x 的取值范围.

B 能力提升

1. 设 a、b 是两个不相等的实数，比较 $2ab-a^2$ 与 b^2 的大小.

2. 证明：不论 x 为何值，都有 $4x^2+10>12x$ 成立.

C 学以致用

图 2-5(1)(2)和(3)分别表示几种水果的重量比较情况，那么图 2-5(4)所示的天平会出现何种情况呢？

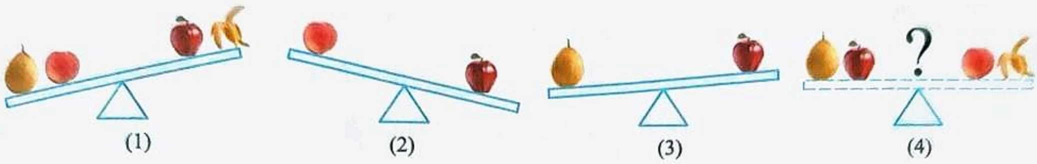

图 2-5