岗位代码：10101006303（数学）

教参《新编高等数学》，大连：大连理工大学出版社；

ISBN：978-7-5685-3140-5。

试教内容：一、微分的定义及几何意义（P48-P49）

(7) $y=\operatorname{arccot}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ (8) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$

(9) $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$ (10) $y=\sec^3 e^{2x}$

(11) $y=x^{2x}+(2x)^{\sqrt{x}}$ (12) $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2+2\ln y=x^4$ 所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$.

3. 设曲线方程为 $e^{xy}-2x-y=3$，求此曲线在纵坐标为 $y=0$ 的点处的切线方程.

第四节 函数的微分

导数表示函数相对于自变量的变化快慢程度. 在实际中还会遇到与此相关的另一类问题：当自变量作微小变化时，要求计算相应的函数的改变量 Δy. 可是由于 Δy 的表达式往往很复杂，因此计算函数 $y=f(x)$的改变量 Δy 的精确值就很困难，而且实际应用中并不需要它的精确值. 在保证一定精确度的情况下，只要计算出 Δy 的近似值即可，由此引出微分学中的另一个基本概念——函数的微分.

一、微分的定义及几何意义

1. 微分的定义

设正方形薄片边长为 x_0，受热后边长增加 Δx，如图 2-6 所示，那么面积 y 相应的增量 $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$.

上式中，Δy 由两部分组成，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数；第二部分$(\Delta x)^2$ 是 Δx 的高阶无穷小. 当$|\Delta x|$很小时，$(\Delta x)^2$ 可以忽略不计，面积 y 的增量 Δy 可以近似地用 $2x_0\Delta x$ 来代替，即 $\Delta y\approx 2x_0\Delta x$.

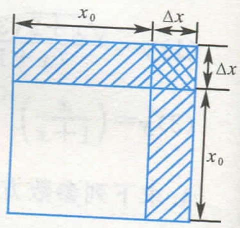

图 2-6

由于面积 $y=x^2$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=2x_0$，即 $f'(x_0)=2x_0$，所以 $\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$. 且这个结论具有一般性.

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$（我们不考虑 $f'(x_0)=0$ 的特殊情形），即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\neq 0$，根据函数的极限与无穷小的关系，得$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，其中 α 是$\Delta x\to 0$时的无穷小. 于是

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

其中，$f'(x_0)\cdot\Delta x$ 是与 Δx 同阶的无穷小；$\alpha\cdot\Delta x$ 是较 Δx 高阶的无穷小.

在函数的增量 Δy 中，起主要作用的是 $f'(x_0)\cdot\Delta x$，它与 Δy 仅相差一个较 Δx 高阶的无穷小. 因此，当$|\Delta x|$很小时，就可以用 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 近似代替 Δy. 即

$$\Delta y\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

我们把函数增量的线性部分 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 叫作函数在点 x_0 处的微分.

定义 1 若函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，且在 x_0 处具有导数$f'(x_0)$，x 在该

邻域内点 x_0 处的增量为 Δx，相应的函数增量为 Δy，若 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，且称 $f'(x_0)\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$，即 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$.

微分的概念

理论上可以证明：

函数 $f(x)$ 在 x_0 可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且当 $f(x)$ 在点 x_0 可微时，其微分一定是 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$.

【例 1】 判定 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处是否可微，若可微，求微分.

解 $\Delta y=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2$，$y'|_{x=1}=2x|_{x=1}=2$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-y'|_{x=1}\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$

所以函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处可微，且在 $x=1$ 处的微分为 $\mathrm{d}y|_{x=1}=2\Delta x$.

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$. 有

$$\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\Delta x$$

若 $y=x$，则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$.

这说明，自变量的微分等于自变量的增量. 于是函数 $y=f(x)$ 的微分又可记作

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } \mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

也就是说函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数，因此，导数也叫"微商".

【例 2】 求函数 $y=x^2$，当 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 时的微分.

解 先求函数在任意点 x 的微分：

$$\mathrm{d}y=(x^2)'\cdot\Delta x=2x\Delta x$$

将 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 代入上式，得

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=2x\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=2\times 2\times 0.02=0.08$$

【例 3】 求 $y=\sin(2x+1)$ 的微分 $\mathrm{d}y$.

解 $\mathrm{d}y=[\sin(2x+1)]'\mathrm{d}x=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x$.

2. 微分的几何意义

为了对微分有一个比较直观的了解，我们再来说明微分的几何意义.

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图像是一条曲线，对于某一固定的值 x_0，曲线上有一个确定点 $M(x_0,y_0)$ 与之对应，当自变量 x 有微小改变量 Δx 时，就得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，由图 2-7 可知

$$MQ=\Delta x, QN=\Delta y$$

过点 M 作曲线的切线 MT，其倾角为 α，则 $QP=MQ\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0)$，即 $\mathrm{d}y=QP$.

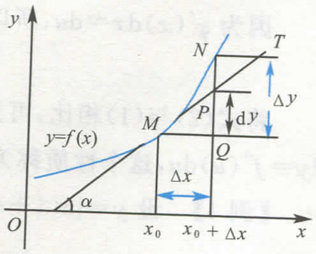

图 2-7

由此可知，微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 是当 x 有改变量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线的纵坐标的改变量. 用 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy，就是用点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线的纵坐标的改变量 QP 近似代替曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的改变量 QN，并且有 $|\Delta y-\mathrm{d}y|=PN$.