23.2 中位数和众数

平均数是一组数据的代表值．但在有些情况下，用中位数或众数作为数据的代表值会更合理些．

大家谈谈

小琴的英语听力成绩一直很好，在六次测试中，前五次的得分(满分 30 分)分别为：28 分，25 分，27 分，28 分，30 分．第六次测试时，因耳机出现故障只得了 6 分．如何评价小琴英语听力的实际水平呢？

(1) 用 6 个分数的平均数评价小琴英语听力的实际水平合理吗？

(2) 如果不合理，那么应该用哪个数作为评价结果呢？

一组数据中，任何一个数的变动都会引起平均数的变动．当数据中有异常值(与其他数据的大小差异很大的数)时，平均数就不是一个好的代表值了．

在上述问题中，如果像有些体育比赛评分规则一样，去掉一个最高分和一个最低分，取其余 4 个成绩的平均数作为评价结果，那么可以部分消除异常值的影响．如果将这 6 个数由小到大排列为 6，25，27，28，28，30，取 $(27+28)\div 2=27.5$ 作为评价结果，也比较合理．

一般地，将 n 个数据按大小顺序排列，如果 n 为奇数，那么把处于中间位置的数据叫做这组数据的**中位数**(median)；如果 n 为偶数，那么把处于中间位置的两个数据的平均数叫做这组数据的中位数．如图 23－2－1，图(1)中 5 个数据的中位数为 x_3，图(2)中 6 个数据的中位数为 $\frac{1}{2}(x_3+x_4)$．

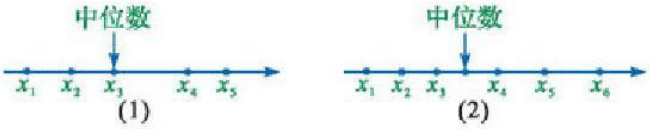


图 23－2－1

观察与思考

某班用无记名投票的方式选班长，5 名候选人分别编为 1 号，2 号，3 号，4 号，5 号．投票结果如下表：

候选人	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	合计
计票	正丅	正正正下	正正	正丅	正一	50
票数	7	18	10	9	6	50

在这个问题中，我们最关注的是什么？

参加投票的 50 人，每人选择一名候选人的号码，把这 50 个号码看成一组数据，由于 2 号出现的次数最多，按规则，2 号候选人应当选为班长．

一般地，把一组数据中出现次数最多的那个数据叫做**众数**(mode)．一组数据的众数可能不止一个，也可能没有众数．

例 1 统计全班 45 名学生每天上学路上所用的时间．如果时间取最接近 5 的倍数的整数，那么整理后的数据如下表：

所用时间/min	5	10	15	20	25	30	合计
人数/名	2	6	14	12	8	3	45

求所用时间的平均数、中位数和众数．

解：45 个数据的平均数为

$$\bar{x}=\frac{1}{45}\times(5\times2+10\times6+15\times14+20\times12+25\times8+30\times3)=18(\text{min}).$$

将这 45 个数据由小到大排序，第 23 个数据是 20 min，所以中位数是 20 min．

所用时间出现最多的是 15 min，所以众数是 15 min．

练　习

1．某中学由 6 名师生组成一个排球队，他们的年龄(单位：岁)如下：

15　16　17　17　17　40

(1) 这组数据的平均数为_____，中位数为_____，众数为_____．

(2) 用哪个值作为他们年龄的代表值较好？

24.1 一元二次方程

方程是一类重要的数学模型，在现实生活中具有广泛的应用．在学习了一元一次方程、二元一次方程组和分式方程的基础上，现在我们来学习一元二次方程．

观察与思考

如图 24－1－1，某学校要在校园内墙边的空地上修建一个长方形的存车处，存车处的一面靠墙（墙长 22 m），另外三面用 90 m 长的铁栅栏围起来．如果这个存车处的面积为 700 m^2，求这个长方形存车处的长和宽．

图 24－1－1

分析下面小明和小亮列方程的做法，思考所列方程的特征．

小明的做法

设长方形存车处的宽（靠墙的一边）为 x m，则它的长为 $\frac{90-x}{2}$ m．

根据题意，可得方程

$$\frac{90-x}{2}\cdot x=700,$$

整理，得

$$x^2-90x+1\ 400=0.$$

小亮的做法

设长方形存车处的长（与墙垂直的一边）为 x m，则它的宽为 $(90-2x)$ m．

根据题意，可得方程

$$(90-2x)\cdot x=700,$$

整理，得

$$x^2-45x+350=0.$$

做一做

如图 24－1－2，一个长为 10 m 的梯子斜靠在墙上，梯子的顶端 A 处到地面的距离为 8 m．如果梯子的顶端沿墙面下滑 1 m，那么梯子的底端 B 在地面上滑动的距离是多少米？

如果设梯子的底端 B 在地面上滑动的距离为 x m，请列出方程，并谈谈所列方程的特征．

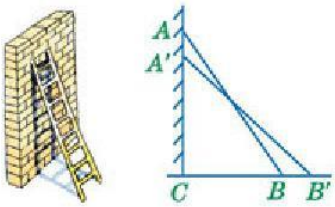


图 24－1－2

在上面的问题中，我们得到方程：

$$x^2-90x+1\ 400=0,\ x^2-45x+350=0,\ x^2+12x-15=0.$$

它们都是关于未知数 x 的整式方程，且 x 的最高次数都为 2. 像这样，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的整式方程，叫做**一元二次方程**(quadratic equation in one variable).

一元二次方程的一般形式为

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0).$$

其中，ax^2 是二次项，a 是二次项系数，bx 是一次项，b 是一次项系数，c 是常数项.

一元二次方程的解也叫做这个方程的根.

做一做

1. 将下列一元二次方程化为一般形式，并指出它们的二次项、一次项和常数项.

(1) $4x^2=3(x+4)$；　　(2) $(2x-3)(3x-2)=10$；

(3) $\frac{x+2}{2}\cdot\frac{2x-3}{3}=7$；　　(4) $(2x-1)(2x+1)=(3x+1)^2$.

2. 在下列各题中，括号内未知数的值，哪些是它前面方程的根？

(1) $x^2-3x-4=0(x=1,\ x=-1,\ x=4)$；

(2) $(x+2)(x-2)=12(x=-1,\ x=-4,\ x=4)$；

(3) $2y^2-y-1=0(y=0,\ y=1,\ y=-\frac{1}{2})$.

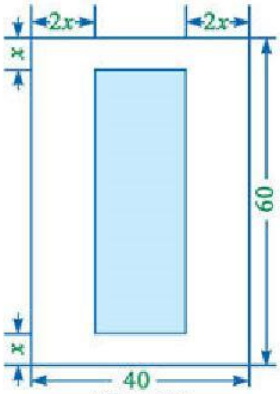
练　习

1. 在下列方程中，哪些是一元二次方程？是一元二次方程的，指出其二次项系数、一次项系数和常数项.

(1) $2x^2=1-x$；　　(2) $2x=1-x$；

(3) $3x^2=12$；　　(4) $(x-1)^2=2$.

2. 如图，大小两个四边形都是矩形，且阴影部分的面积为 800. 请列出关于 x 的方程.



(第 2 题)

25.3 相似三角形

对应角相等、对应边也相等的两个三角形为全等三角形．相仿地，我们来学习相似三角形的有关知识．

对应角相等、对应边成比例的两个三角形叫做**相似三角形**(similar triangles)．相似三角形对应边的比叫做它们的**相似比**(similar ratio)．

如图 25－3－1，在△ABC 和△$A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，即△$ABC$ 与△$A'B'C'$相似．△ABC 与△$A'B'C'$的相似比为 k．

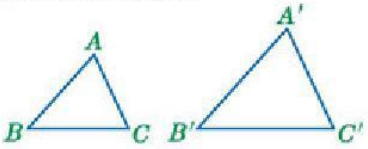


图 25－3－1

△ABC 与△$A'B'C'$相似记作“△ABC∽△$A'B'C'$”，读作“△ABC 相似于△$A'B'C'$”．

大家谈谈

1. 两个直角三角形相似吗？
2. 两个等腰三角形相似吗？两个等边三角形呢？
3. 相似三角形与全等三角形有什么区别和联系？

例 如图 25－3－2，△AEF∽△ABC．

(1) 若 $AE=3$，$AB=5$，$EF=2.4$，求 BC 的长．

(2) 求证：$EF\parallel BC$．

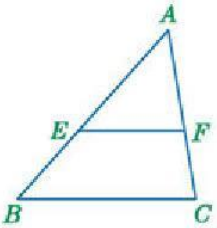


图 25－3－2

解：(1) ∵ △AEF∽△ABC，

∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}$．

又∵ $AE=3$，$AB=5$，$EF=2.4$，

∴ $BC=\frac{AB\cdot EF}{AE}=\frac{5\times 2.4}{3}=4$．

(2) ∵ △AEF∽△ABC，

$\therefore \quad \angle AEF=\angle B.$

$\therefore \quad EF /\!/ BC.$

我们知道，平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形与原三角形的对应边成比例. 进而可知，这样截得的三角形与原三角形相似.

已知：如图 25－3－3，$EF /\!/ BC$，与 AB，AC(或它们的延长线)相交于点 E，F.

求证：$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

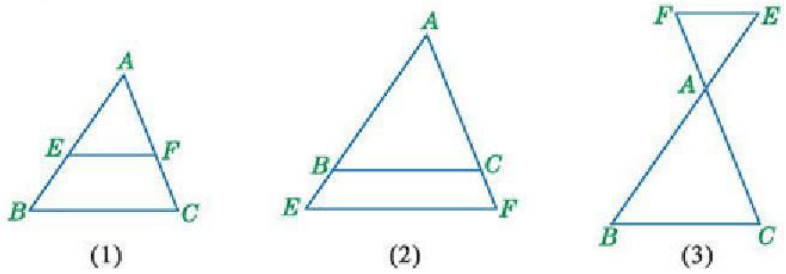


图 25－3－3

证明：如图 25－3－3(1)，在$\triangle AEF$ 和$\triangle ABC$ 中，

$\because \quad EF /\!/ BC,$

$\therefore \quad \angle AEF=\angle B,\ \angle AFE=\angle C,$ 且$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{EF}{BC}.$

又$\because \quad \angle A=\angle A,$

$\therefore \quad \triangle AEF \backsim \triangle ABC.$

同理可证其他两种情况.

平行于三角形一边的直线和其他两边(或它们的延长线)相交，所截得的三角形与原三角形相似.

做一做

已知：如图 25－3－4，在$\triangle ABC$ 中，E，F 分别为 AB，AC 的中点.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle AEF$.

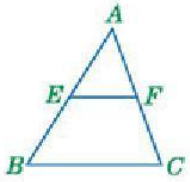


图 25－3－4