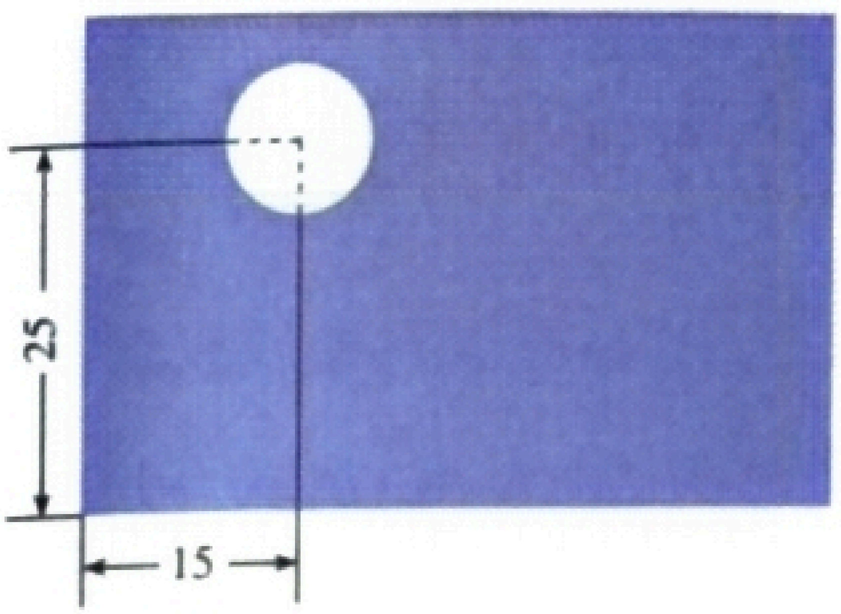
过来，用南偏西 60°，35 n mile 就可以确定遇险船相对于救生船的位置.

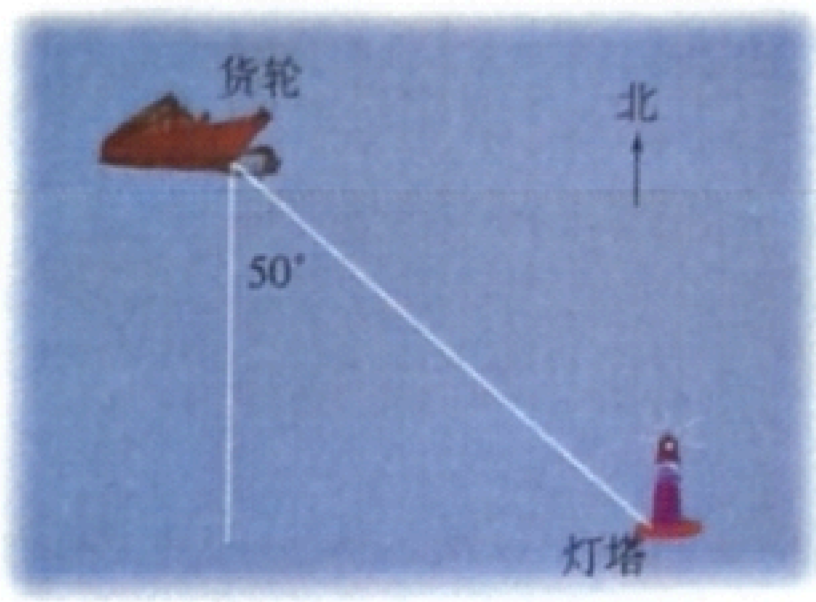
一般地，可以建立平面直角坐标系，用坐标表示地理位置. 此外，还可以用方向和距离表示平面内物体的位置.

练习

1. 长方形零件如图（单位：mm），建立适当的坐标系，用坐标表示孔心的位置.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，货轮与灯塔相距 40 n mile，如何用方向和距离描述灯塔相对于货轮的位置？反过来，如何用方向和距离描述货轮相对于灯塔的位置？

7.2.2 用坐标表示平移

在平面直角坐标系中，对一个图形进行平移，图形上点的位置发生了变化，坐标也发生了变化.

探究

如图 7.2-4，将点 $A(-2, -3)$ 向右平移 5 个单位长度，得到点 A_1，在图上标出这个点，并写出它的坐标. 观察坐标的变化，你能从中发现什么规律吗？把点 A 向上平移 4 个单位长度呢？把点 A 向左或向下平移呢？

再找几个点，对它们进行平移，观察它们的坐标是否按你发现的规律变化.

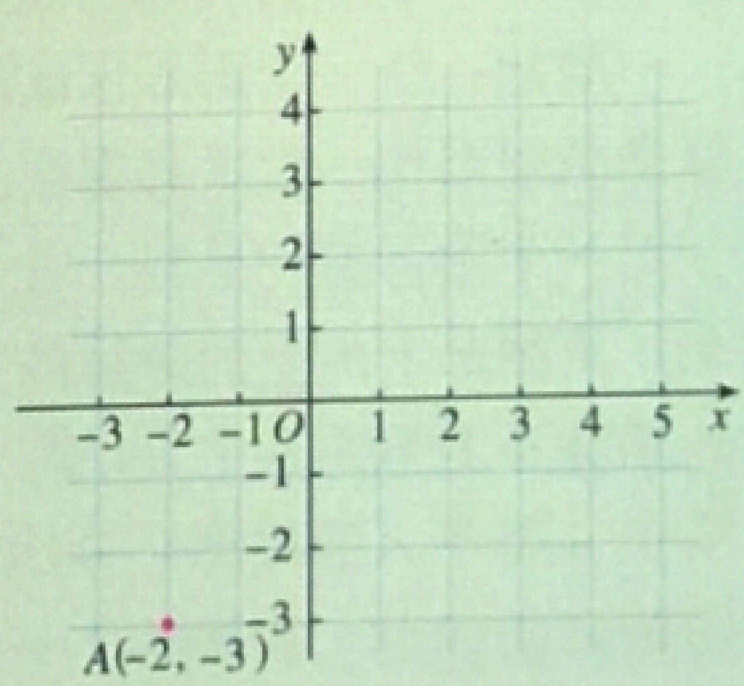


图 7.2-4

一般地，在平面直角坐标系中，将点 (x, y) 向右（或左）平移 a 个单位长度，可以得到对应点 $(x+a, y)$（或 $(x-a, y)$）；将点 (x, y) 向上（或下）平移 b 个单位长度，可以得到对应点 $(x, y+b)$（或 $(x, y-b)$）.

探究

如图 7.2-5，正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(-2, 4)$，$B(-2, 3)$，$C(-1, 3)$，$D(-1, 4)$，将正方形 $ABCD$ 向下平移 7 个单位长度，再向右平移 8 个单位长度，两次平移后四个顶点相应变为点 E，F，G，H，它们的坐标分别是什么？如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和我们前面得到的正方形位置相同吗？

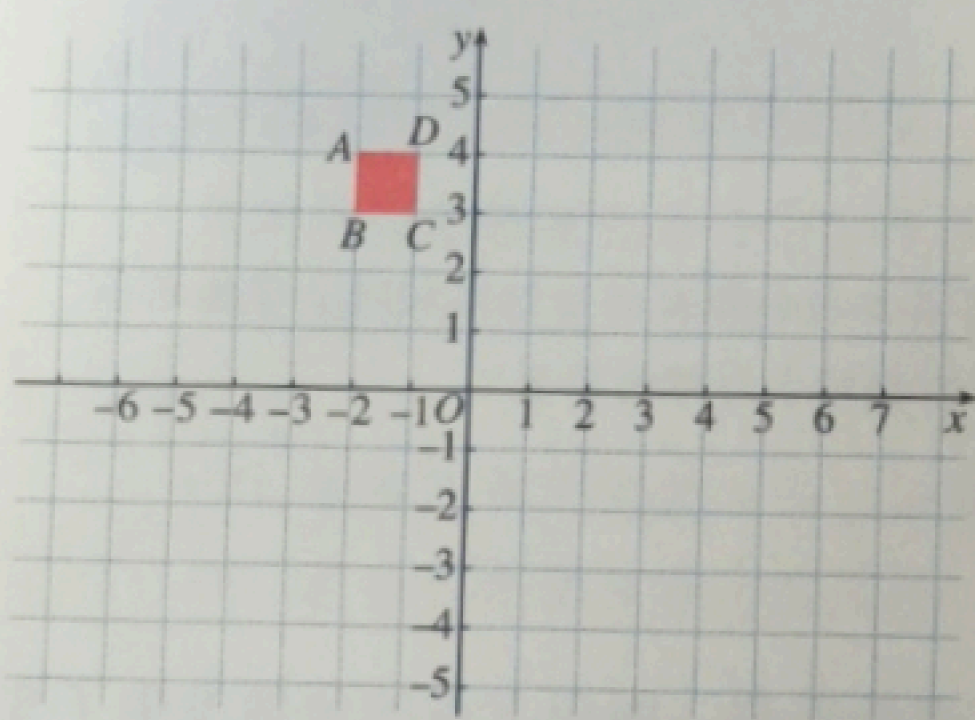


图 7.2-5

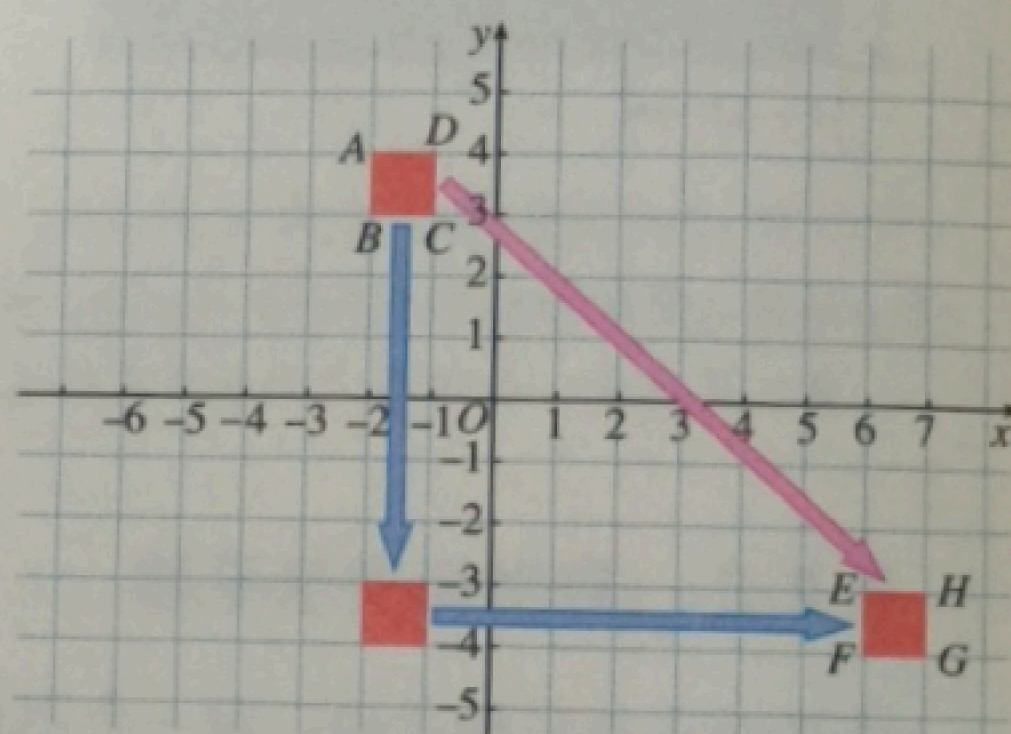


图 7.2-6

可求出点 E，F，G，H 的坐标分别是 $(6, -3)$，$(6, -4)$，$(7, -4)$，$(7, -3)$. 如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和我们前面得到的正方形位置相同（图 7.2-6）.

一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到.

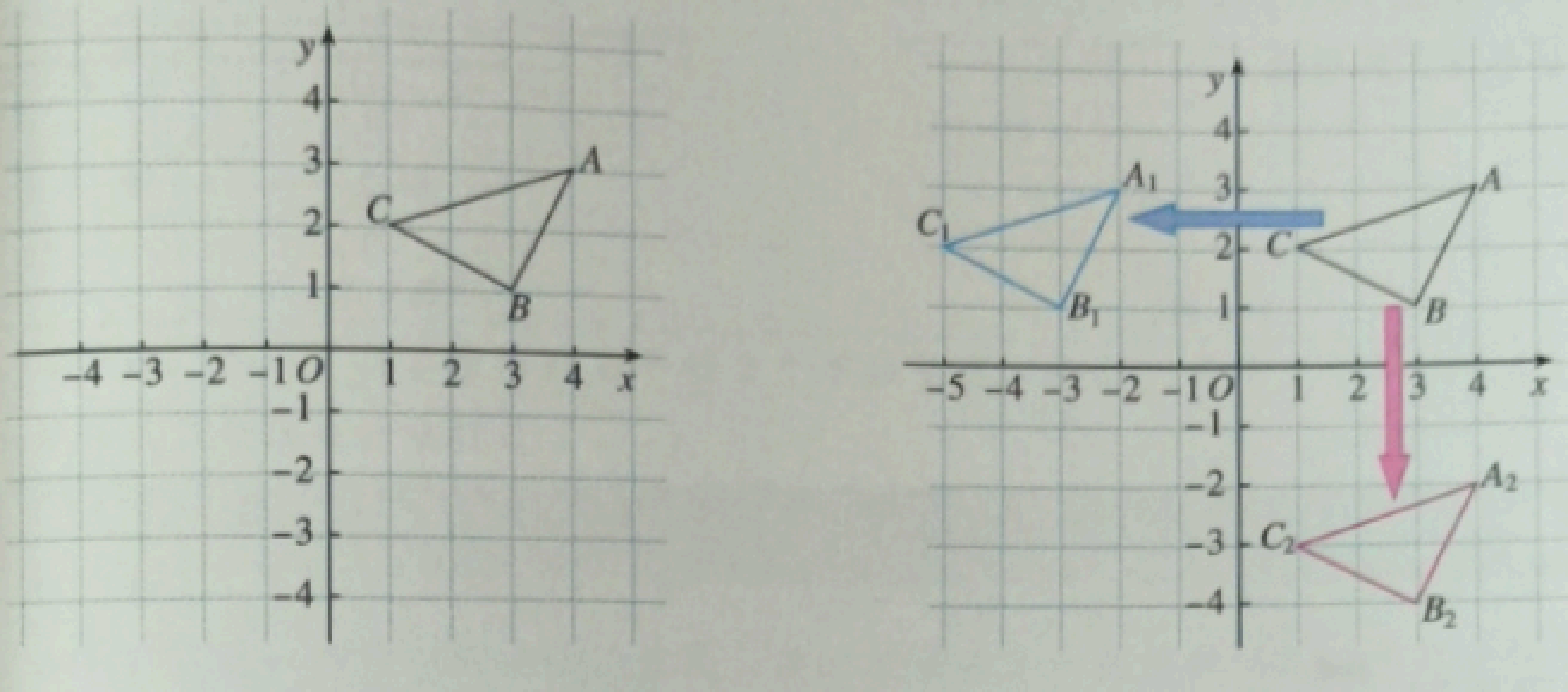
对一个图形进行平移，这个图形上所有点的坐标都要发生相应的变化；反过来，从图形上的点的坐标的某种变化，我们也可以看出对这个图形进行了怎样的平移.

例 如图 7.2-7 (1)，三角形 ABC 三个顶点的坐标分别是 $A(4, 3)$，$B(3, 1)$，$C(1, 2)$.

(1) 将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，纵坐标不变，分别得到

点 A_1，B_1，C_1，依次连接 A_1，B_1，C_1 各点，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？

（2）将三角形 ABC 三个顶点的纵坐标都减去 5，横坐标不变，分别得到点 A_2，B_2，C_2，依次连接 A_2，B_2，C_2 各点，所得三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？



（1）　　　　（2）

图 7.2-7

解：如图7.2-7（2），所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，三角形 $A_1B_1C_1$ 可以看作将三角形 ABC 向左平移 6 个单位长度得到．类似地，三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，它可以看作将三角形 ABC 向下平移 5 个单位长度得到．

思考

（1）如果将这个问题中的“横坐标都减去 6”“纵坐标都减去 5”相应地变为“横坐标都加 3”“纵坐标都加 2”，分别能得出什么结论？画出得到的图形．

（2）如果将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，同时纵坐标都减去 5，能得到什么结论？画出得到的图形．

一般地，在平面直角坐标系内，如果把一个图形各个点的横坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形就是把原图形向右（或向左）平移 a 个单位长度；如果把它各个点的纵坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形就是把原图形向上（或向下）平移 a 个单位长度．

19.1 函数

19.1.1 变量与函数

先请思考下面几个问题：

（1）汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶，行驶路程为 s km，行驶时间为 t h. 填写表 19-1，s 的值随 t 的值的变化而变化吗？

表 19-1

t / h	1	2	3	4	5
s / km					

（2）电影票的售价为 10 元/张. 第一场售出 150 张票，第二场售出 205 张票，第三场售出 310 张票，三场电影的票房收入各多少元？设一场电影售出 x 张票，票房收入为 y 元，y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

（3）你见过水中涟漪吗？如图 19.1-1，圆形水波慢慢地扩大. 在这一过程中，当圆的半径 r 分别为 10 cm，20 cm，30 cm 时，圆的面积 S 分别为多少？S 的值随 r 的值的变化而变化吗？

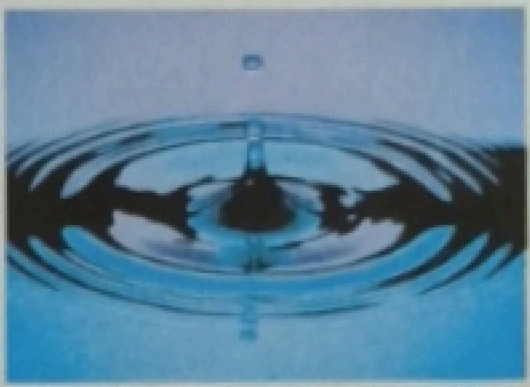


图 19.1-1

（4）用 10 m 长的绳子围一个矩形. 当矩形的一边长 x 分别为 3 m，3.5 m，4 m，4.5 m 时，它的邻边长 y 分别为多少？y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

这些问题反映了不同事物的变化过程. 其中有些量的数值是变化的，例如时间 t，路程 s；售出票数 x，票房收入 y……有些量的数值是始终不变的，例如速度 60 km/h，票价 10 元/张……在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为**变量**（variable），数值始终不变的量为**常量**（constant）.

练习

指出下列问题中的变量和常量：

（1）某市的自来水价为 4 元/t. 现要抽取若干户居民调查水费支出情况，记某户月用水量为 x t，月应交水费为 y 元.

(2) 某地手机通话费为 0.2 元/min. 李明在手机话费卡中存入 30 元，记此后他的手机通话时间为 t min，话费卡中的余额为 w 元.

(3) 水中涟漪（圆形水波）不断扩大，记它的半径为 r，圆周长为 C，圆周率（圆周长与直径之比）为 π.

(4) 把 10 本书随意放入两个抽屉（每个抽屉内都放），第一个抽屉放入 x 本，第二个抽屉放入 y 本.

思考

问题 (1) ～ (4) 中是否各有两个变量？同一个问题中的变量之间有什么联系？

在问题 (1) 中，观察填出的表格，可以发现：t 和 s 是两个变量，每当 t 取定一个值时，s 就有唯一确定的值与其对应. 例如 $t=1$，则 $s=60$；$t=2$，则 $s=120$……$t=5$，则 $s=300$.

在问题 (2) 中，可以发现：x 和 y 是两个变量，每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对应. 例如，若 $x=150$，则 $y=1\ 500$；若 $x=205$，则 $y=2\ 050$；若 $x=310$，则 $y=3\ 100$.

在问题 (3) 中，可以发现：r 和 S 是两个变量，每当 r 取定一个值时，S 就有唯一确定的值与其对应. 它们的关系式为 $S=\pi r^2$. 据此可以算出 r 分别为 10 cm，20 cm，30 cm 时，S 分别为 $100\pi\ \text{cm}^2$，$400\pi\ \text{cm}^2$，$900\pi\ \text{cm}^2$.

在问题 (4) 中，可以发现：x 和 y 是两个变量，每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对应. 它们的关系式为 $y=5-x$. 据此可以算出 x 分别为 3 m，3.5 m，4 m，4.5 m 时，y 分别为 2 m，1.5 m，1 m，0.5 m.

归纳

上面每个问题中的两个变量互相联系，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就有唯一确定的值与其对应.

一些用图或表格表达的问题中，也能看到两个变量之间有上面那样的关系.

思考

(1) 图 19.1-2 是体检时的心电图，其中图上点的横坐标 x 表示时间，纵坐标 y 表示心脏部位的生物电流，它们是两个变量. 在心电图中，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应吗？

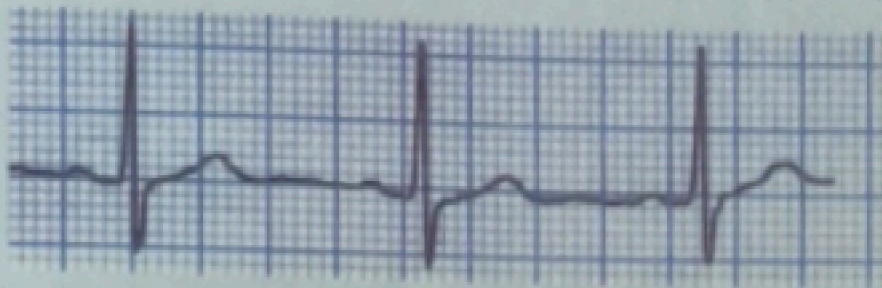


图 19.1-2

(2) 下面的我国人口数统计表（表 19-2）中，年份与人口数可以分别记作两个变量 x 与 y. 对于表中每一个确定的年份 x，都对应着一个确定的人口数 y 吗？

表 19-2　中国人口数统计表

年　份	人口数/亿
1984	10.34
1989	11.06
1994	11.76
1999	12.52
2010	13.71

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是**自变量**(independent variable)，y 是 x 的**函数**（function）. 如果当 $x=a$ 时 $y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的**函数值**.

可以认为：在前面问题（1）中，时间 t 是自变量，路程 s 是 t 的函数，当 $t=1$时，函数值 $s=60$，当 $t=2$ 时，函数值 $s=120$；在心电图中，时间 x 是自变量，心脏部位的生物电流 y 是 x 的函数；在人口数统计表中，年份 x 是自变量，人口数 y 是 x 的函数，当 $x=2010$ 时，函数值$y=13.71$.

从上面可知，函数是刻画变量之间对应关系的数学模型，许多问题中变量之间的关系都可以用函数来表示.

例 1　汽车油箱中有汽油50 L. 如果不再加油，那么油箱中的油量 y(单

28.2 解直角三角形及其应用

28.2.1 解直角三角形

我们回到本章引言提出的比萨斜塔倾斜程度的问题.

1972年的情形：设塔顶中心点为 B，塔身中心线与垂直中心线的夹角为 $\angle A$，过点 B 向垂直中心线引垂线，垂足为点 C（图 28.2-1）. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=5.2\ \mathrm{m}$，$AB=54.5\ \mathrm{m}$，因此

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5.2}{54.5}\approx 0.095\,4,$$

利用计算器可得 $\angle A\approx 5^\circ 28'$.

类似地，可以求出 2001 年纠偏后塔身中心线与垂直中心线的夹角. 你能求出来吗?

图 28.2-1

如果将上述实际问题抽象为数学问题，就是已知直角三角形的斜边和一条直角边，求它的锐角的度数.

一般地，直角三角形中，除直角外，共有五个元素，即三条边和两个锐角. 由直角三角形中的已知元素，求出其余未知元素的过程，叫做**解直角三角形**.

探究

（1）在直角三角形中，除直角外的五个元素之间有哪些关系?

（2）知道五个元素中的几个，就可以求其余元素?

如图 28.2-2，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c，那么除直角 $\angle C$ 外的五个元素之间有如下关系：

（1）三边之间的关系

$$a^2+b^2=c^2\text{（勾股定理）};$$

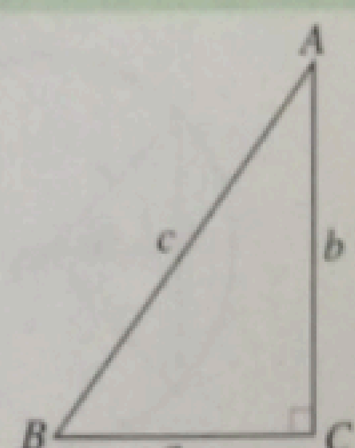


图 28.2-2

(2) 两锐角之间的关系

$$\angle A+\angle B=90^\circ;$$

(3) 边角之间的关系

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},$$

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},$$

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

上述 (3) 中的 A 都可以换成 B，同时把 a，b 互换.

利用这些关系，知道其中的两个元素（至少有一个是边），就可以求出其余三个未知元素.

例 1 如图 28.2-3，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{6}$，解这个直角三角形.

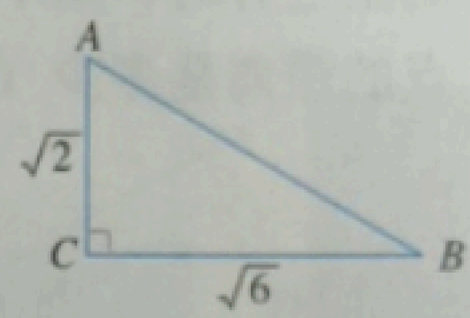


图 28.2-3

解： ∵ $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，

∴ $\angle A=60^\circ$，

$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

$AB=2AC=2\sqrt{2}$.

例 2 如图 28.2-4，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=35^\circ$，$b=20$，解这个直角三角形（结果保留小数点后一位）.

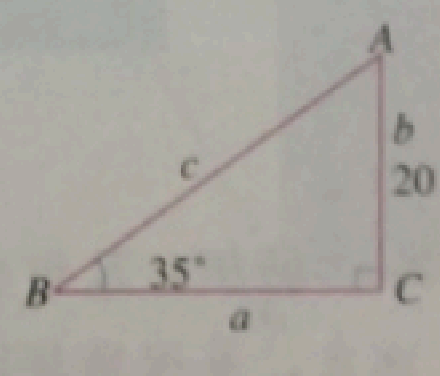


图 28.2-4

解： $\angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-35^\circ=55^\circ$.

∵ $\tan B=\dfrac{b}{a}$，

∴ $a=\dfrac{b}{\tan B}=\dfrac{20}{\tan 35^\circ}\approx 28.6$.

∵ $\sin B=\dfrac{b}{c}$，

∴ $c=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{20}{\sin 35^\circ}\approx 34.9$.

你还有其他方法求出 c 吗？