7. 无穷远处的瞬铰

如果用两根平行的链杆1和2把刚片Ⅰ与基础相连接(图2-6b),则两根链杆的交点在无穷远处。因此,两根链杆所起的约束作用相当于无穷远处的瞬铰所起的约束作用。由于瞬铰在无穷远处,因此绕瞬铰的微小转动就退化为平动,即沿两根链杆的正交方向产生平动(在图2-6b中,A点和C点的微小位移都垂直于两根链杆)。

在几何构造分析中应用无穷远处瞬铰的概念时,可以采用射影几何中关于∞点和∞线的下列四点结论:

(1) 每个方向有一个∞点(即该方向各平行线的交点)。

(2) 不同方向有不同的∞点。

(3) 各∞点都在同一直线上,此直线称为∞线。

(4) 各有限点都不在∞线上。

关于上述四点结论的合理性,可结合几何构造分析的实例加以检验。

§2-2　平面几何不变体系的组成规律

本节讨论几何构造分析中的主要课题——无多余约束的几何不变体系的组成规律。这里只讨论平面杆件体系最基本的组成规律。(以后在§2-6和§4-3中还要讨论复杂体系的几何构造分析问题。)

1. 一个点与一个刚片之间的联结方式

一个点与一个刚片(或基础)之间应当怎样联结才能组成既无多余约束又是几何不变的整体呢?图2-5a中的联结方式符合上述要求,而图2-5b和c中的连接方式则不符合(图2-5b中有多余约束,图2-5c为几何可变)。由此可得下述规律(参看图2-7a):

规律1　一个刚片与一个点用两根链杆相连,且三个铰不在一直线上,则组成几何不变的整体,并且没有多余约束。

2. 两个刚片之间的联结方式

在图2-7a中,如果把链杆AB看作刚片Ⅱ,则得到图2-7b所示的体系,它表示两个刚片Ⅰ与Ⅱ之间的联结方式。这样,由规律1可得到下述规律:

规律2　两个刚片用一个铰和一根链杆相联结,且三个铰不在一直线上,则组成几何不变的整体,并且没有多余约束。

3. 三个刚片之间的联结方式

在图2-7b中,如果再把链杆AC看作刚片Ⅲ,则得到图2-7c所示的体系,它表示三个刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ之间的联结方式。这样,由规律2可得到下

述规律：

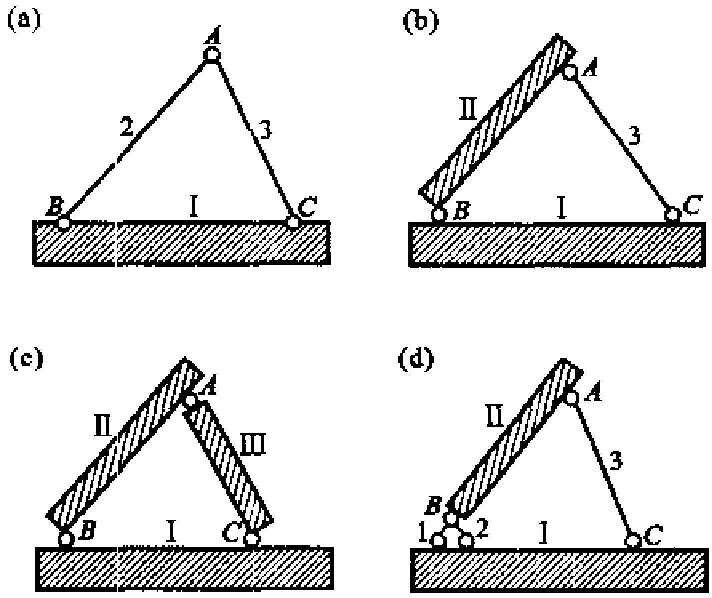

图 2 7

规律 3 三个刚片用三个铰两两相连，且三个铰不在一直线上，则组成几何不变的整体，并且没有多余约束。

上述三条规律虽然表述方式不同，但实际上可归纳为一个基本规律：如果三个铰不共线，则一个铰结三角形的形状是不变的，而且没有多余约束。这个基本规律可称为三角形规律。

在上述三条规律中，如果把图 2-7a、b、c 中的刚片 I 看作基础，则规律 1 说明一个点的固定方式，规律 2 说明一个刚片的固定方式，规律 3 说明两个刚片的固定方式。

前已指出，两根链杆的约束作用相当于一个瞬铰的约束作用。因此，三角形规律中的每一个铰，都可用相应的两根链杆来替换。这样，三角形规律还可用别的方式来表述。举例来说，如果把图 2-7b 中的铰 B 换成两根链杆 1 和 2，即得到图 2-7d 所示的体系(链杆 1 与 2 相交于 B 点)。这样，由规律 2 可得到下述规律：

规律 4 两个刚片用三根链杆相连，且三链杆不交于同一点，则组成几何不变的整体，并且没有多余约束。

注意，规律 4 中提到“三链杆不交于一点”，规律 2 中提到“三铰不在一直线上”，这两种提法实际上表示同一个条件。由图 2-7d 看出，如果三根链杆 1、2、3 不交于一点，则链杆 3 必不通过 1 与 2 的交点 B，因而三个铰 A、B、C 即不在一条直线上。因此，“三链杆不共点”与“三铰不共线”是完全等效的。

图2-8所示的体系不符合"三链杆不共点"的条件,它们都是瞬变体系。在图2-8a中,三链杆相交于同一点O,刚片Ⅱ相对于基础Ⅰ可以绕O点作瞬时转动。在图2-8b中,三链杆彼此平行(即相交于无限远的一点),刚片Ⅱ相对于基础Ⅰ可以在垂直链杆的方向作瞬时移动(即绕无限远的一点作瞬时转动)。

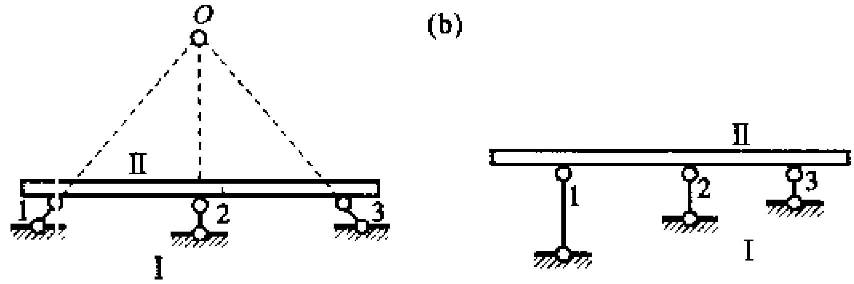

图 2-8

以上是平面杆件体系最基本的组成规律。虽然一共列了四条,但主要的是两点:三角形规律和瞬铰概念。

上述四种基本组成规律也可归结为三种基本装配格式:

(1) 固定一个结点的装配格式——在图2-7a中,用不共线的两根链杆2和3将结点A固定在基本刚片Ⅰ上,此格式简称为简单装配格式。

(2) 固定一个刚片的装配格式——在图2-7b、d中,用不共线的铰B和链杆3,或用不共点的三个链杆1,2,3将一个刚片Ⅱ固定在基本刚片Ⅰ上,此格式简称为联合装配格式。

(3) 固定两个刚片的装配格式——在图2-7c中,用不共线的三个铰A、B、C将两个刚片Ⅱ、Ⅲ固定在基本刚片Ⅰ上,此格式简称为复合装配格式。

多次应用上述基本组成规律或基本装配格式,可以组成各式各样的几何不变且无多余约束的体系。

装配的过程通常有两种:

(1) 从基础出发进行装配——先取基础作为基本刚片,将周围某个部件(一个结点,一个刚片或两个刚片)按照基本装配格式固定在基本刚片上,形成一个扩大的基本刚片。然后,由近及远地、由小到大地、逐个地按照基本装配格式进行装配,直至形成整个体系。图2-9是这种装配方式的例子。

图2-9a所示体系是从基础出发,多次应用简单装配格式所组成的,即用五对链杆(1,2)、(3,4)、(5,6)、(7,8)、(9,10)依次固定结点A、B、C、D、E,其中每一对链杆都不共线。因此,整个体系为无多余约束的几何不变体系。

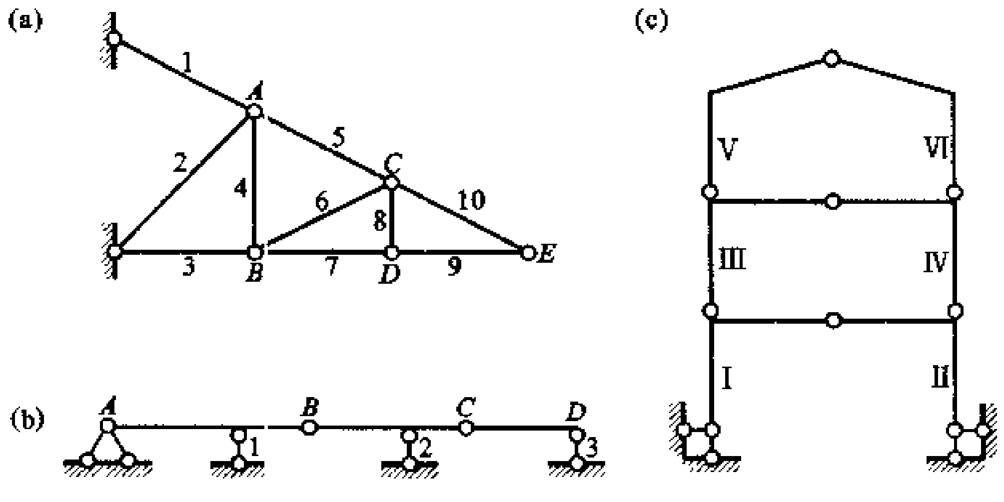

图 2-9

图 2-9b 所示体系是从基础出发，多次应用联合装配格式所组成的。组成的次序是先用铰 A 和链杆 1 将 AB 梁固定于基础，形成扩大的基本刚片。然后，再用铰 B 和链杆 2 将 BC 梁固定于扩大后的基本刚片。最后，用铰 C 和链杆 3 固定 CD 梁。在每个装配格式所用的约束中，链杆和铰都不共线。因此，整个体系为无多余约束的几何不变体系。

图 2-9c 所示体系是从基础出发，多次应用复合装配格式所组成的。组成的次序是先将刚片 Ⅰ、Ⅱ 固定于基础，由于所用的三个铰不共线，且在三个刚片间为两两相联，因此形成一个扩大的基本刚片，且无多余约束。然后，用同样格式依次固定（Ⅲ、Ⅳ）和（Ⅴ、Ⅵ）。因此，整个体系为无多余约束的几何不变体系。

(2) 从内部刚片出发进行装配——先在体系内部选取一个或几个刚片作为基本刚片，将其周围的部件按照基本装配格式进行装配，形成一个或几个扩大的基本刚片。最后，将扩大的基本刚片再与地基装配起来，从而形成整个体系。这种装配方式的例子如图 2-10 所示。

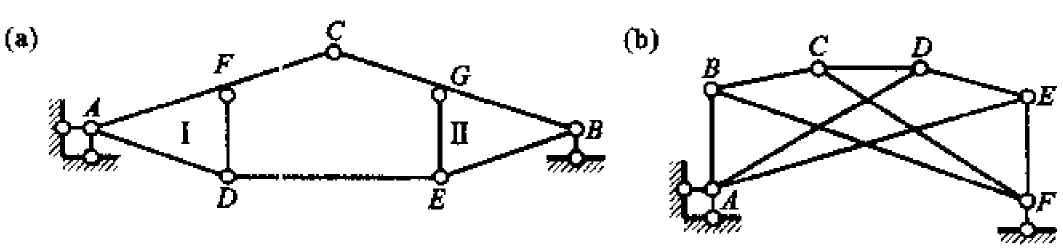

图 2-10

首先，分析图 2-10a 中的体系。左边三个刚片 AC、AD、DF 由不共线的三个铰 A、D、F 相连，组成一个无多余约束的大刚片，称为 Ⅰ。同理，右边

三个刚片 BC、BE、EG 组成一个大刚片，称为Ⅱ。大刚片Ⅰ与Ⅱ之间由不共线的铰 C 和链杆 DE 相连，组成一个无多余约束的更大的刚片。最后，用不共点的三根支杆固定于基础。因此，整个体系为几何不变，且无多余约束。

其次，分析图 2－10b 中的体系。三角形 BCF 和 EDA 可看作两个大刚片，它们之间由不共点的三根链杆 AB、CD、EF 相连，组成一个更大的刚片。最后，用不共点的三根支杆固定于基础。因此，整个体系为几何不变，且无多余约束。

例 2－1 试分析图 2－11 所示体系的几何构造。

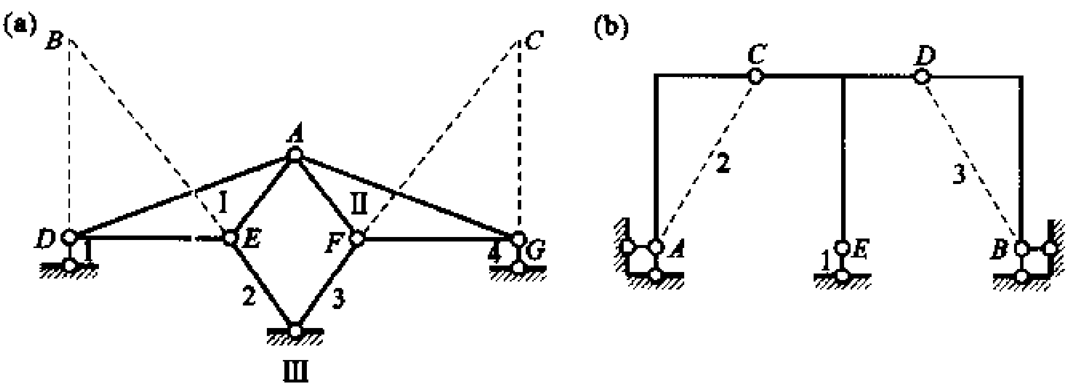

图 2－11

解 (1) 分析图 2－11a 中的体系

首先，三角形 ADE 和 AFG 是两个无多余约束的刚片，分别以Ⅰ和Ⅱ表示。Ⅰ与基础Ⅲ间的链杆 1、2 相当于瞬铰 B，Ⅱ与基础Ⅲ间的链杆 3、4 相当于铰 C。如 A、B、C 三个铰不共线，则体系为无多余约束的几何不变体系；否则为几何瞬变体系。

(2) 分析图 2－11b 中的体系

先把折线杆 AC 和 BD 用虚线表示的链杆 2 与 3 来替换，于是 T 形刚片 CDE 由三个链杆 1、2、3 与基础相连。如三链杆共点，则体系是瞬变的；否则为无多余约束的几何不变体系。

例 2－2 试分析图 2－12 所示体系的几何构造。

解 (1) 分析图 2－12a 中的体系

把刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ看作对象。Ⅰ与Ⅱ之间由链杆 AB 和 DE 连接，相当于一个瞬铰在 $O_{Ⅰ,Ⅱ}$ 点。同理，Ⅱ与Ⅲ之间由瞬铰 $O_{Ⅱ,Ⅲ}$ 相连，Ⅰ与Ⅲ之间由瞬铰 $O_{Ⅰ,Ⅲ}$ 相连。由于三个瞬铰不共线，因此体系内部为几何不变，且无多余约束。作为一个整体，体系对地面有三个自由度。

(2) 分析图 2－12b 中的体系

可采用同样方法进行分析。但是，由于三个瞬铰共线，故体系内部也是瞬变的。

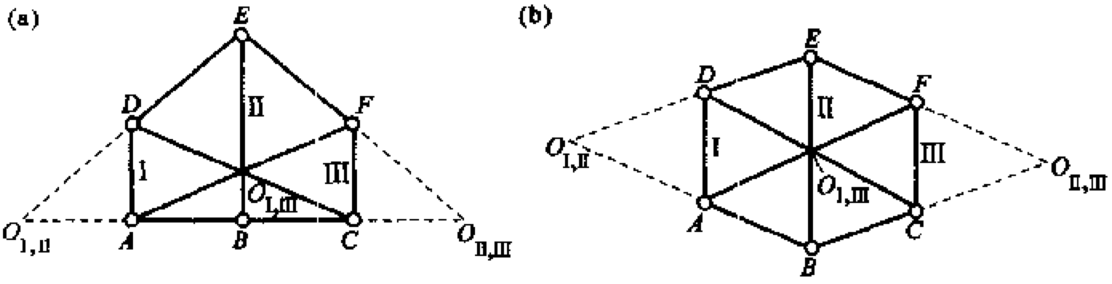

图 2-12

例 2-3 试利用无穷远瞬铰的概念，分析图 2-13 所示各三铰拱的几何不变性。

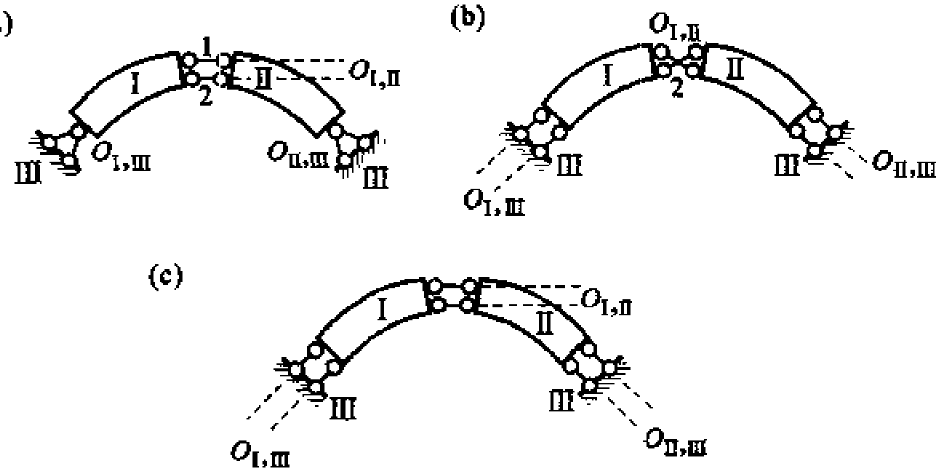

图 2-13

解 利用无穷远瞬铰分析几何构造时，可以应用射影几何中关于∞点和∞线的四点结论。

(1) 分析图 2-13a 中的体系

刚片Ⅰ、Ⅱ与基础Ⅲ之间用三个铰 $O_{Ⅰ,Ⅱ}$、$O_{Ⅱ,Ⅲ}$、$O_{Ⅰ,Ⅲ}$ 两两相联，其中 $O_{Ⅰ,Ⅱ}$ 是平行链杆 1、2 对应的无穷远瞬铰。如果铰 $O_{Ⅰ,Ⅲ}$ 与铰 $O_{Ⅱ,Ⅲ}$ 的连线与链杆 1、2 平行，则三个铰共线，体系是瞬变的。否则，体系为几何不变，且无多余约束。

(2) 分析图 2-13b 中的体系

刚片Ⅰ、Ⅱ与基础Ⅲ之间用三个铰相联，其中 $O_{Ⅰ,Ⅲ}$ 和 $O_{Ⅱ,Ⅲ}$ 是两个不同方向的无穷远瞬铰，它们对应于∞线上两个不同的点。铰 $O_{Ⅰ,Ⅱ}$ 对应于有限

点。由于有限点不在∞线上，因此三个铰不共线，体系为几何不变，且无多余约束。

(3) 分析图2-13c中的体系

刚片Ⅰ、Ⅱ与基础Ⅲ之间的三个铰都在无穷远点。由于各∞点都在同一直线上，因此体系是瞬变的。

通过以上几个例题，可以归纳出以下几点：

(1) 体系通常是由多个构造单元逐步形成的，即从第一个构造单元开始，然后按照某种顺序，把其他构造单元逐个地装配起来。在构造分析中，通常先找出一个几何不变的部分作为第一个构造单元，然后在其基础上扩大、装配，把由构造单元到体系的装配过程分析清楚。

每一个体系的装配过程都有自己的特点。在图2-9a、b、c中，装配过程是从地基上开始的，其中图2-9a、b的第一个构造单元是将刚片 AB 固定于地基上，图2-9c的第一个构造单元是将刚片Ⅰ和Ⅱ固定在地基上。在图2-10a、b中，体系有三根不共点的支杆与地基相联，正好约束了体系对地面的三个自由度。因此，装配过程是从体系内部开始的，其中图2-10a的第一个构造单元是刚片Ⅰ或Ⅱ，图2-10b的第一个构造单元是三角形 BCF 或 EDA。

(2) 要注意约束的等效替换。例如，在图2-11a和2-12a、b中，联系两个刚片的两链杆用相应的瞬铰来替换；图2-11b中，复杂形状的联结杆用直线链杆来替换。

(3) 有的体系只有一种装配方式，例如图2-9b、c。有的体系却可有几种装配方式，例如图2-9a。又如在图2-12a或b中，还可以把 AF、BE、CD 看作具有自由度的对象，或将 DE、AF、BC 看作具有自由度的对象，等等。还有一些体系的几何构造比较复杂，不是按图2-7所示的简单方式组成的（例如第3章中的复杂桁架），有关这类体系的构造分析可采用其他方法（例如§2-6中的计算机方法和§4-3中的零载法）。

§2-3 平面杆件体系的计算自由度

运用上节的三角形规律，对一些常见的体系能够进行构造分析，并对下面两个问题能够作出定量的回答：

(1) 体系是否几何可变？自由度 S 是多少？

(2) 体系有无多余约束？多余约束的个数 n 是多少？

实际上有一些复杂体系并不是按照三角形规律组成的，如何对它们进行构造分析，如何求出它们的 S 和 n，需要作进一步的讨论。为此，我们引进