国家教材委员会专家委员会审核通过
2019

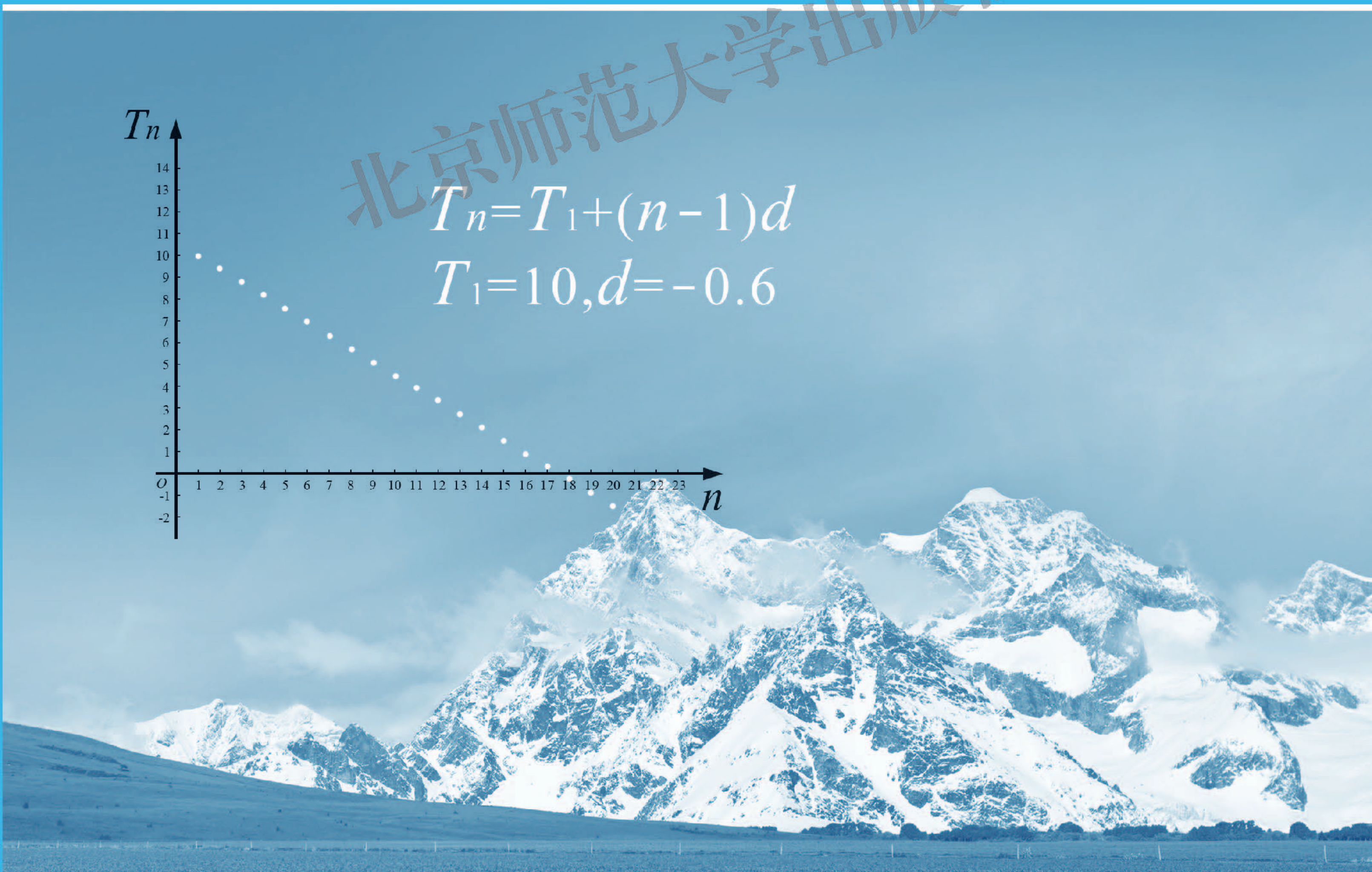
普通高中教科书

数学

SHUXUE

选择性必修

第二册



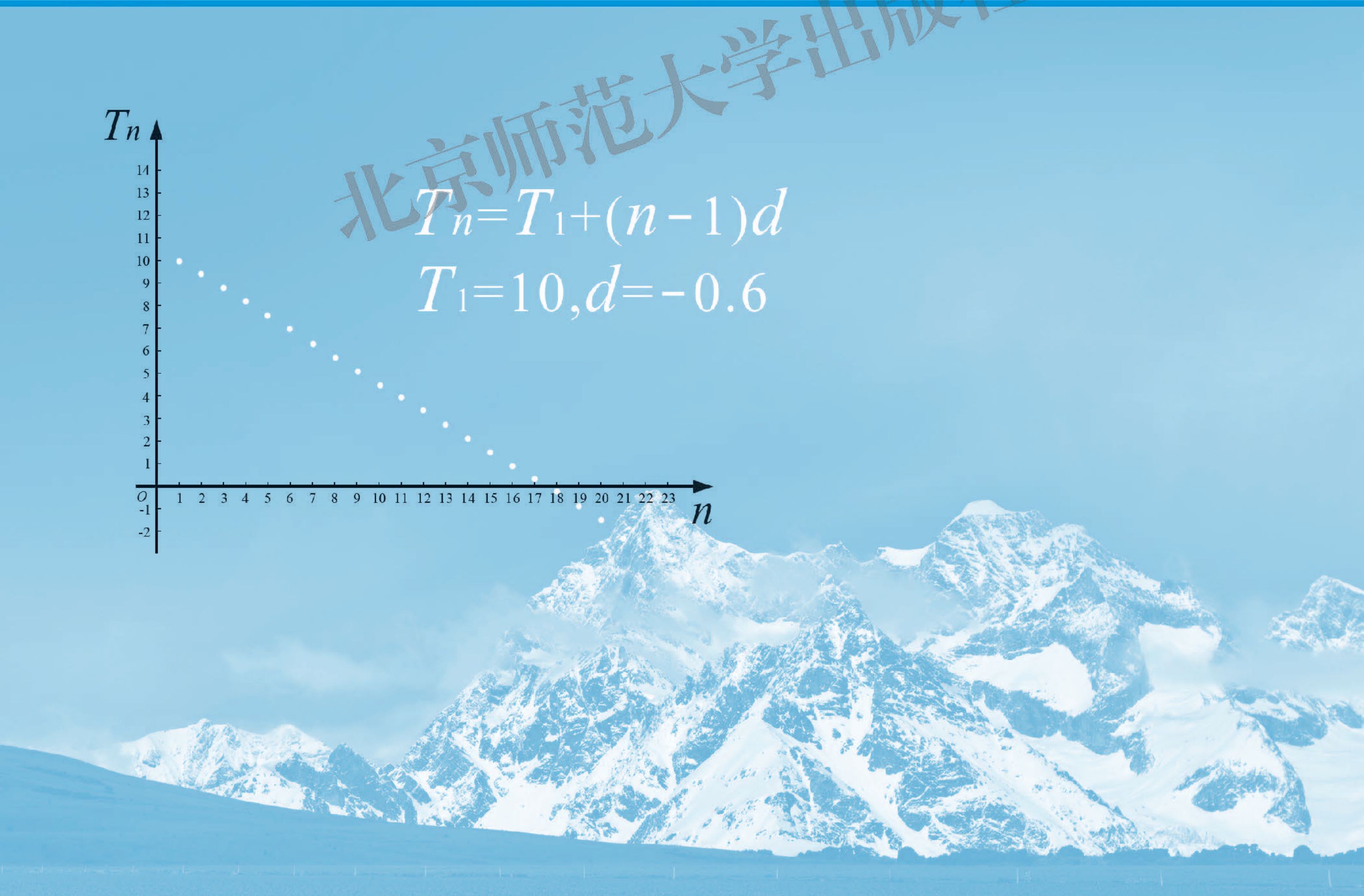
北京师范大学出版社

普通高中教科书

数学

选择性必修 第二册

主编 王尚志 保继光



北京师范大学出版社

主编寄语

亲爱的同学们：

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更重要的数学知识和应用.

你们将获得更多的数学能力和素养.

你们将感受到更深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授人以鱼，不如授人以渔.”学会打渔的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

“在数学中，什么是重要的(What is the key in Mathematics)？”20 世纪六七十年代，很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics). 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅要提高思考问题的能力，提高解决问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是很重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，它会给你带来乐趣.

本套教材由 2 册必修教材和 2 册选择性必修教材组成. 习题分为三类：一类是可供课堂学习时使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两个层级；还有一类是章复习题，分为 A，B，C 三个层级.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出、抽象概括、分析理解、思考交流等研究性学习过程.

根据课程标准的要求，数学建模活动与数学探究活动是高中阶段数学课程的重要内容. 本套教材从感悟数学应用、学习数学模型、掌握建模过程和实践数学建模四个层次整体设计了数学建模活动，在必修第一册、第二册和选择性必修第一册分别安排了一章的内容. 另外，在选择性必修第一册、第二册分别从几何和代数两个方面各安排了一次数学探究活动. 数学建模活动与数学探究活动有助于引导同学们递进地思考问题，充分地动手实践. 我们更希望

同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

重视数学的文化价值是数学教育发展的趋势，本套教材整体设计了“数学文化”栏目，包括：名人名言、阅读材料、拓展窗口、建模选材等，并在习题中呈现了对数学文化理解的要求. 教材在必修第一册第一章初步学习“数学文化”内容的基础上，特别设计“学习指导：数学文化”，对同学们后续学习数学文化有重要的指导意义.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、互联网都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多学多用，“技多不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”栏目，为同学们使用信息技术提供了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 特别地，在借助信息技术手段较多的必修第一册第四章，教材设计了“学法指导：利用信息技术学习数学”，引导同学们在学习时从具体学习对象中“跳”出来，利用信息技术手段发现数学规律. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的学校，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容有所了解. 教材中有关信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

目录

第一章 数列 / 1

第二章 导数及其应用 / 45

第一章

1 数　列

这是科学史上的一个真实故事！

下面一列数

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \cdots$$

同学们可能并不在意，但普鲁士天文学家提丢斯（Titius，1729—1796）却把它和下面的表格联系起来，推导出从太阳到行星距离的经验定律，并探明了一些新的行星（或小行星）！

1766 年，他发现：

1. 每个数字恰好是前一个数字的 2 倍；

2. 如果把 0 加在这一列数字的最前面，再在每个数上加上 4，然后除以 10，就得出另一列数字

$$0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10.0, 19.6, \cdots$$

这可不是一列简单的数字：第一个数字表示了太阳到其最近的行星——水星的近似距离；第二个数字表示太阳到金星的近似距离……依此类推，他得到了一张出色的表：

距离类别 \ 行星	水星	金星	地球	火星	?	木星	土星	?	?
实际距离	0.39	0.72	1.0	1.52	?	5.2	9.5	?	?
计算距离	0.4	0.7	1.0	1.6	2.8	5.2	10.0	19.6	…

注：表中数据的单位为天文单位，1 天文单位等于太阳到地球的平均距离，约为149 597 870 km.

表中留下了一些空格. 1781 年发现的天王星（19.2），差不多恰好处在定律所预言的轨道（19.6）上. 于是，天文学家们开始在距离太阳约为 2.8 天文单位的区域寻找一个尚未被发现的行星. 1801 年意大利天文学家皮亚齐（Giuseppe Piazzi，1746－1826）果然在这个距离发现了谷神星，它与太阳的近似距离为 2.7 天文单位，预测偏差约为 3.7%.

上面所说的一列数 3，6，12，24，48，96，192，…，就是一个数列.

本章主要学习有关数列的基本知识，建立等差数列和等比数列两种模型，探索它们的基本数量关系，感受它们的应用，提升数学运算、数学建模、逻辑推理等核心素养.

§ 1 数列的概念及其函数特性

1.1 数列的概念

实例分析

我们来看下面的例子:

(1) 一个工厂把所生产的钢管堆成图 1-1 的形状.

从最上面的一排起,各排钢管的数量依次是

$$3,4,5,6,7,8,9. \quad ①$$

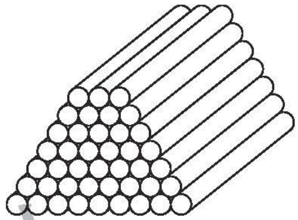


图 1-1

(2) 分析各年国内生产总值(Gross Domestic Product,GDP)数据,找出增长规律,是国家制定国民经济和社会发展规划的重要依据. 如图 1-2,是中华人民共和国国家统计局官网发布的数据.

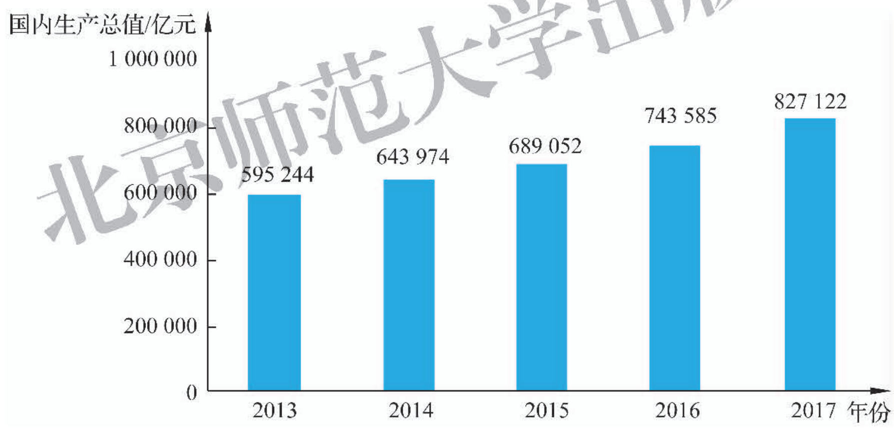


图 1-2

2013 年—2017 年我国国内生产总值依次排列为

$$595\ 244,643\ 974,689\ 052,743\ 585,827\ 122. \quad ②$$

(3) 如图 1-3,正弦函数 $y=\sin x$ 的图象在 y 轴左侧所有最低点从右向左,它们的横坐标依次排成一列数为

$$-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{2},-\frac{9\pi}{2},-\frac{13\pi}{2},\cdots \quad ③$$

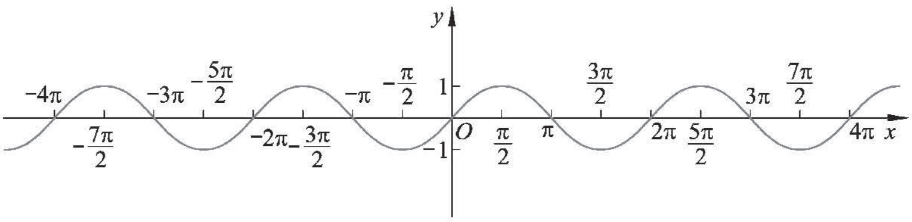


图 1-3

(4) 正奇数 1,3,5,7,…的倒数依次排成一列数为

$$1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots \quad ④$$

(5) 某人 2017 年 1 月—12 月的工资,按月依次排列为

$$5\ 300,5\ 300,5\ 300,\cdots,5\ 300. \quad ⑤$$

抽象概括

按一定次序排列的一列数叫作**数列**,数列中的每一个数叫作这个数列的**项**. 数列的一般形式可以写成

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

或简记为数列$\{a_n\}$,其中 a_1 是数列的第 1 项,也叫数列的**首项**;a_n 是数列的第 n 项,也叫数列的**通项**.

像数列①,②,⑤这样的项数有限的数列,称为**有穷数列**;像数列③,④这样的项数无限的数列,称为**无穷数列**.

上面的数列④中,每一项的序号 n 与这一项 a_n 有下面的对应关系:

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{序号} & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\text{项} & 1, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{7}, & \cdots, & \frac{1}{2n-1}, & \cdots
\end{array}$$

可以看出,这个数列的每一项的序号 n 与这一项 a_n 的对应关系可用如下公式表示:

$$a_n=\frac{1}{2n-1}.$$

于是,只要依次用序号 1,2,3,…代替公式中的 n,就可以求出该数列相应的项.

实际上,对任意数列$\{a_n\}$,其每一项的序号与该项都有对应关系,见表 1-1.

表 1-1

序　号	1	2	3	4	…	n	…
项	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n	…

因此,数列也可以看作定义域为正整数集 $\mathbf{N}_+$(或其子集)的函数.

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个式子表示成 $a_n=f(n)$,那么这个式子就叫作这个数列的**通项公式**,数列的通项公式就是相应函数的解析式.

注　意

(1)不是所有数列都能写出通项公式.

(2)通项公式的形式也不是唯一的.

例如,数列①的一个通项公式是

$$a_n=n+2,n\in\{1,2,3,\cdots,7\};$$

数列③的一个通项公式是

$$a_n=-2(n-1)\pi-\frac{\pi}{2}.$$

例 1 根据下面数列的通项公式，分别写出各数列的前 5 项.

(1) $a_n=\frac{n}{n+2}$； (2) $a_n=(-1)^n\cos\frac{n\pi}{4}$.

解 (1) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2 写出下面各数列的一个通项公式.

(1) 3,5,7,9,… (2) 1,2,4,8,…

(3) 9,99,999,9 999,…

解 (1) 观察知，这个数列的前 4 项都是序号的 2 倍加 1，所以它的一个通项公式为

$$a_n=2n+1;$$

(2) 这个数列的前 4 项可以写成 $2^0,2^1,2^2,2^3$，所以它的一个通项公式为

$$a_n=2^{n-1};$$

(3) 这个数列的前 4 项可以写成 10－1,100－1,1 000－1,10 000－1，所以它的一个通项公式为

$$a_n=10^n-1.$$

练 习

1. (口答)根据下面数列的通项公式，分别说出各数列的前 5 项.

(1) $a_n=2n-1$； (2) $a_n=\frac{3+(-1)^n}{n}$.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=25-2n$，在下列各数中，(　　)不是数列$\{a_n\}$的项，并说明理由.

A. 1 B. －1 C. 2 D. 3

3. 若数列$\{a_n\}$的前 4 项依次是 20,11,2,－7，则数列$\{a_n\}$的一个通项公式是(　　)，并说明理由.

A. $a_n=9n+11$ B. $a_n=-9n+29$

C. $a_n=15.5+(-1)^{n+1}\times4.5$ D. $a_n=9n-16$

4. 写出下面各数列的一个通项公式：

(1) 2,4,6,8,… (2) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$

1.2 数列的函数特性

可以把一个数列视作定义在正整数集(或其子集)上的函数,因此可以用图象(平面直角坐标系内的一串点)来表示数列,图象中每个点的坐标为(k,a_k),$k=1,2,3,\cdots$这个图象也称为数列的图象.

图 1-4 是数列①:3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的图象;

图 1-5 是数列④:$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\frac{1}{7},\ \cdots$的图象;

图 1-6 是数列⑤:5 300,5 300,…,5 300 的图象.

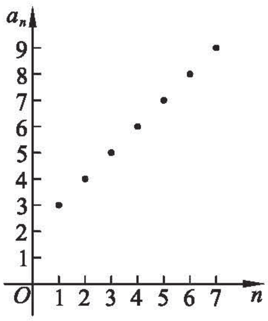


图 1-4

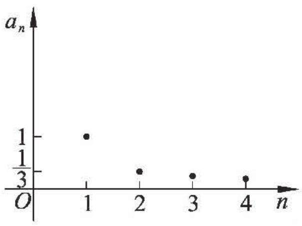


图 1-5

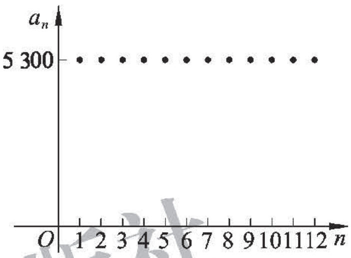


图 1-6

从图中可以看出,数列的图象是由一些点组成的,数列①对应的函数图象是上升的,数列④对应的函数图象是下降的,数列⑤对应的函数图象,这些点在与 x 轴平行的一条直线上.

抽象概括

一般地,一个数列$\{a_n\}$,如果从第 2 项起,每一项都大于它的前一项,即 $a_{n+1}>a_n$,那么这个数列叫作**递增数列**.

如果从第 2 项起,每一项都小于它的前一项,即 $a_{n+1}<a_n$,那么这个数列叫作**递减数列**.

如果数列$\{a_n\}$的各项都相等,那么这个数列叫作**常数列**.

例 3 写出下面数列的一个通项公式,并判断数列的增减性.

(1) $2,1,0,-1,\cdots,3-n,\cdots$ (2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

解 (1) $a_n=3-n$ 可以作为这个数列的一个通项公式,那么

$$a_{n+1}=3-(n+1)=2-n,$$

$$a_{n+1}-a_n=(2-n)-(3-n)=-1<0,$$

所以 $a_{n+1}<a_n$,因此数列$\{a_n\}$是递减数列.

(2) $b_n=\frac{n}{n+1}$可以作为这个数列的一个通项公式,那么

$$b_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)+1}=\frac{n+1}{n+2},$$

$$b_{n+1}-b_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$

所以 $b_{n+1}>b_n$，因此数列$\{b_n\}$是递增数列.

例 4 作出数列$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\cdots$的图象，并分析数列的增减性.

解 图 1－7 是这个数列的图象，数列各项的值负正相间，表示数列的各点相对于横轴上下摆动. 因此，它既不是递增的，也不是递减的.

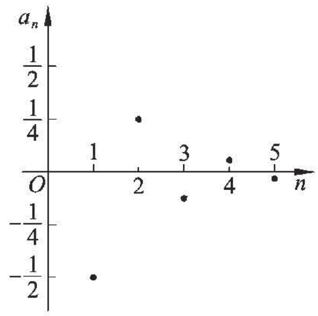


图 1－7

例 5 一辆邮车每天从 A 地往 B 地运送邮件，沿途(包括 A，B)共有 8 站. 从 A 地出发时，装上发往后面 7 站的邮件各 1 件，到达后面各站后卸下前面各站发往该站的邮件，同时装上该站发往后面各站的邮件各 1 件. 试写出邮车在各站装卸完毕后剩余邮件数所成的数列，画出该数列的图象，并判断该数列的增减性.

解 将 A，B 之间所有站按 1，2，3，4，5，6，7，8 依次编号，通过计算，上面各站剩余邮件数依次排成数列：

$$7,12,15,16,15,12,7,0.$$

根据题意，列表，如表 1－2.

表 1－2

站　号	1	2	3	4	5	6	7	8
剩余邮件数	7	12	15	16	15	12	7	0

该数列的图象如图 1－8.

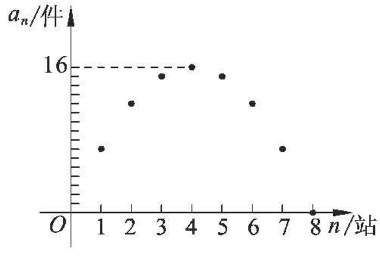


图 1－8

在该数列中，从 a_1 到 a_4 递增，从 a_4 到 a_8 递减. 因此，它既不是递增的，也不是递减的.

练　习

1. 在 1984 年到 2016 年的 9 届夏季奥运会上，我国获得的金牌数依次排成数列：15，5，16，16，28，32，51，38，26. 试画出该数列的图象.

2. 已知下列数列$\{a_n\}$的通项 a_n，画出数列的图象，并判断数列的增减性.

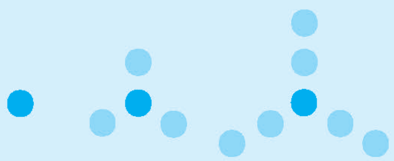
　(1) $a_n=-n+1$；　　　　(2) $a_n=2^{n-1}$.

习题 1－1

A　组

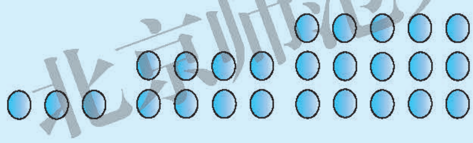
1. 根据下面图形排列的规律，继续画下去，在括号里填上对应的点数，并写出点数的一个通项公式.

(1)



(1)　(4)　(7)　________ (　)　________ (　)

(2)

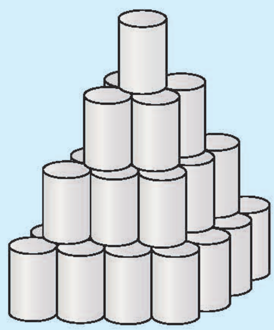


(3)　(8)　(15)　________ (　)　________ (　)

2. 根据数列的通项公式填写下表：

n	1	2	…	10	…		…	n	…
a_n			…		…	420	…	$n(n+1)$	…

3. 在商店里，如图分层堆砌易拉罐，最顶层放 1 个，第二层放 4 个，第三层放 9 个. 如此下去，第六层放几个？



（第 3 题）

4. 求下列数列的一个通项公式：

(1) 2，7，12，17，…

(2) 5，50，500，5 000，…

5. 已知数列$\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=n^2-3n-28$，画出该数列的图象. 并根据图象，判断从第几项起，这个数列是递增的.

6. 已知 $a_n=2n^2-15n+3$，画出该数列的图象，并求数列$\{a_n\}$的最小项.

B 组

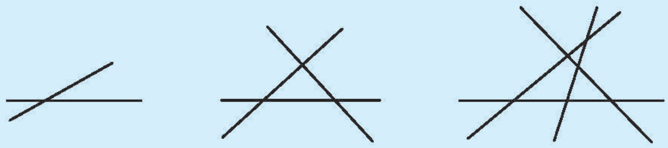
1. 求下列数列的一个通项公式：

(1) $-1,2,-3,4,\cdots$

(2) $\frac{1}{2},-\frac{4}{5},\frac{9}{10},-\frac{16}{17},\cdots$

2. 观察下列各图，并阅读图形下面的文字表述，则当图中有 10 条直线相交时，交点的个数最多是(　　).

A. 40　　B. 45　　C. 50　　D. 55



2条直线相交最多有1个交点　　3条直线相交最多有3个交点　　4条直线相交最多有6个交点

(第 2 题)

阅读材料

斐波那契数列

斐波那契数列出现在意大利数学家斐波那契(Leonardo Fibonacci,约 1170—约 1250)于 1202 年出版的《算盘书(Liber Abaci)》中. 这部书的第一版没有保存下来,在 1228 年的第二版中,提出了特别有趣的兔子繁殖问题:

一对成年兔子每个月可以生下一对小兔子. 在年初时,只有一对小兔子. 在第 1 个月结束时,它们成长为成年兔子,并且在第 2 个月结束时,这对成年兔子将生下一对小兔子. 这种成长与繁殖过程会一直持续下去. 繁殖的过程可以用图 1-9 来表示.

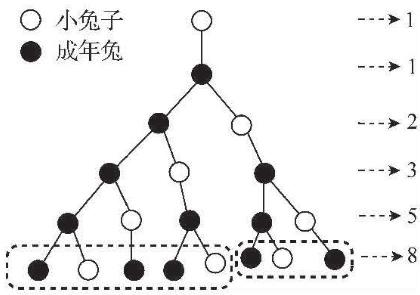


图 1-9　各月存在的兔子的对数

由图 1-9 可知:在第 5 个月结束时总共有 8 对兔子,其中左边虚框里的兔子数量等于上一层的兔子数量,右边虚框里的兔子数量等于上上层里的兔子数量.

于是,由这个问题可以得到下面有趣的数列:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\cdots$$

它被称为斐波那契数列.

斐波那契数列可以用 $f(n)$ 表示,其中 $f(1)=1$, $f(2)=1$,则 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$, $n>2$, $n\in\mathbf{N}_+$.

一、斐波那契数列的性质

1. 黄金比

如果把斐波那契数列从第一项起每一项与后一项的比值作为数列的项,得到

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\cdots$$

即 1.000,0.500,0.667,0.600,0.625,0.615,0.619,0.618,0.618,0.618,…

显然这个比值接近了一个非常著名的数——黄金比. 所以斐波那契数列又称为黄金比数列.

2. 整除性

每 n 个连续的斐波那契数有且只有一个被 $f(n)$ 整除.

例如,每 3 个连续的斐波那契数有且只有一个被 2 整除,每 4 个连续的斐波那契数有且只有一个被 3 整除,每 5 个连续的斐波那契数有且只有一个被 5 整除,每 6 个连续的斐波那契数有且只有一个被 8 整除.

二、斐波那契数列的应用

1. 自然界植物的生长

球蓟的头部具有 13 条顺时针旋转和 21 条逆时针旋转的螺旋,恰为斐波那契数列的

相邻两项，这样的螺旋被称为“斐波那契螺旋”．此外，向日葵、松果、菠萝等也是以“斐波那契螺旋”的形式排列种子或鳞片的，向日葵的种子排列形成的斐波那契螺旋有时能达到 89 条，甚至 144 条．

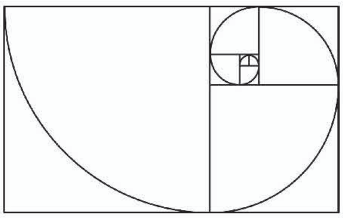
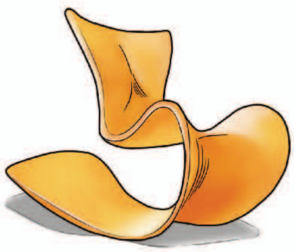


当然，这些植物不可能懂得斐波那契数列，它们只是按照自然的规律才进化成这样．斐波那契螺旋似乎是植物排列种子的“优化方式”，这种排列方式能使所有种子具有差不多的大小却又疏密得当．

叶子的生长方式也是如此．对于许多植物来说，每片叶子从中轴附近生长出来，为了在生长的过程中一直都能最佳地利用空间(要考虑到叶子是一片一片逐渐地生长出来，而不是一下子同时出现的)，我们从某种植物的顶端往下看，便会发现上下层相邻的两片叶子之间所构成的角约为 137.5°．如果每层叶子只画一片来表示，第一层和第二层的相邻两叶之间的角度约为 137.5°，以后二层到三层、三层到四层、四层到五层……两叶之间大致都成这个角度，这个角度对叶子的通风和采光最为有利．那么叶子之间的 137.5°角与黄金比又有什么联系呢？我们知道，一周为 360°，360°－137.5°＝222.5°，137.5°∶222.5°≈0.618．也就是说，各种植物叶子的生长规律中隐藏着黄金比．

2．其他应用

波浪理论、贝壳螺旋轮廓线等有斐波那契数列的影子，斐波那契数列在建筑学上也有应用，人们还利用斐波那契数列制造出了漂亮的家具．

感兴趣的同学可以查阅资料，更全面地了解和研究斐波那契数列．

参考文献

TONY CRILLY．你不可不知的 50 个数学知识[M]．王悦，译．北京：人民邮电出版社，2016．

§ 2 等差数列

2.1 等差数列的概念及其通项公式

实例分析

考察下列 3 个数列的共同特征：

(1) 一个剧场设置了 20 排座位，从第 1 排起各排的座位数组成数列：

$$38,40,42,44,46,\cdots,76. \qquad ①$$

这个剧场座位安排有何规律？

(2) 全国统一鞋号中，鞋的各种尺码(表示以 mm 为单位的鞋底的长度)由大至小可排列为

$$250,245,240,235,230,225,220,215,210, \qquad ②$$

这种尺码的排列有何规律？

(3) 蓝白两种颜色的正六边形地面砖，按图 1 - 10 的规律拼成若干个图案，前 4 个图案中白色地面砖的块数依次为多少？

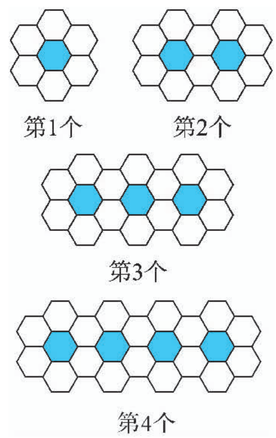


图 1 - 10

研究这些数列的特征及变化规律，可以发现：

对于数列①，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都是 2；

对于数列②，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都是 -5；

对于问题(3)，前 4 个图案中白色地面砖的块数依次为

$$6,10,14,18. \qquad ③$$

因此，对于数列③，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都是 4.

抽象概括

对于一个数列，如果从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都是同一个常数，那么称这样的数列为**等差数列**，称这个常数为等差数列的**公差**，通常用字母 d 表示.

由此定义可知，对等差数列 $\{a_n\}$，有

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots=d.$$

因此，数列①的公差 $d=2$；数列②的公差 $d=-5$；数列③的公差 $d=4$.

例 1 判断下面数列是否为等差数列.

(1) $a_n=2n-1$； (2) $a_n=(-1)^n$.

解 (1) 由 $a_n=2n-1$，得 $a_{n+1}=2(n+1)-1$，于是

$$a_{n+1}-a_n=[2(n+1)-1]-(2n-1)=2.$$

由 n 的任意性知，这个数列是等差数列.

(2)
$$a_2-a_1=1-(-1)=2,$$
$$a_3-a_2=-1-1=-2.$$

因为 $a_2-a_1\neq a_3-a_2$，所以这个数列不是等差数列.

如果等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1，公差是 d(如图 1－11)，那么根据等差数列的定义得到

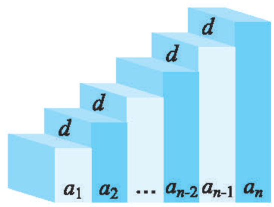


图 1－11

$$a_n-a_{n-1}=d,$$
$$a_{n-1}-a_{n-2}=d,$$
$$\cdots$$
$$a_2-a_1=d.$$

把以上各式相加，得

$$a_n-a_1=(n-1)d.$$

由此得到
$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

当 $n=1$ 时，$a_1=a_1+(1-1)d$. 所以这个公式对于 $n=1$ 时也成立 .

这就是说：

若首项是 a_1，公差是 d，则等差数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

例 2 (1) 求等差数列 9，5，1，…的第 10 项；

(2) 已知等差数列$\{a_n\}$，$a_n=4n-3$，求 a_1 和 d.

解 (1) 由 $a_1=9$，$d=5-9=-4$，得

$$a_{10}=a_1+(n-1)d=9+(10-1)\times(-4)=-27.$$

(2) 由 $a_n=4n-3$，得

$$a_1=4\times1-3=1,$$

且
$$d=a_2-a_1=(4\times2-3)-1=4.$$

所以等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，公差 $d=4$.

例 3 已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=-20$，$a_{20}=-35$. 试求出此数列的通项公式.

解 设数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$，

由已知，得
$$\begin{cases}a_5=a_1+4d=-20,\\ a_{20}=a_1+19d=-35.\end{cases}$$

这是一个以 a_1 和 d 为未知数的二元一次方程组. 解这个方程组，得
$$\begin{cases}a_1=-16,\\ d=-1.\end{cases}$$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为
$$a_n=-16+(n-1)(-1)=-n-15.$$

练 习

1. 全国统一鞋号中，成年男鞋共有 14 种尺码，其中最小的尺码是 235 mm，相邻的两个尺码都相差 5 mm. 把全部尺码从小到大列出.
2. 求下列等差数列的第 n 项：

   (1) 2，5，8，… (2) 13，9，5，…

   (3) $1，\frac{1}{3}，-\frac{1}{3}，\cdots$
3. 对于本节开始的问题(3)，第 9 个图案中有白色地面砖多少块？第 n 个图案中有白色地面砖多少块？

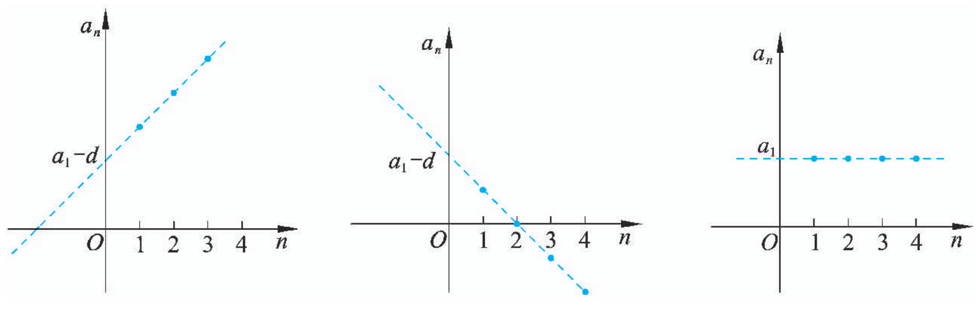
下面从函数角度研究等差数列$\{a_n\}$.

对于 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$，可将 a_n 记作 $f(n)$，它是定义在正整数集(或其子集)上的函数. 其图象是直线 $y=dx+(a_1-d)$上的一些等间隔的点，这些点的横坐标是正整数，其中公差 d 是该直线的斜率，即自变量每增加 1，函数值增加 d.

当 $d>0$ 时，数列$\{a_n\}$为递增数列(如图 1-12(1))；

当 $d<0$ 时，数列$\{a_n\}$为递减数列(如图 1-12(2))；

当 $d=0$ 时，数列$\{a_n\}$为常数列 (如图 1-12(3)).



(1) (2) (3)

图 1-12

例 4 已知(1,1),(3,5)是等差数列$\{a_n\}$图象上的两点.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 画出数列$\{a_n\}$的图象;

(3) 判断数列$\{a_n\}$的增减性.

解 (1) 因为(1,1),(3,5)是等差数列$\{a_n\}$图象上的两点,所以

$$a_1=1, a_3=5.$$

由 $$a_3=a_1+(3-1)d=1+2d=5,$$

解得 $$d=2,$$

于是 $$a_n=1+2(n-1)=2n-1.$$

(2) 数列$\{a_n\}$的图象是直线$y=2x-1$上一些等间隔的点,如图1-13.

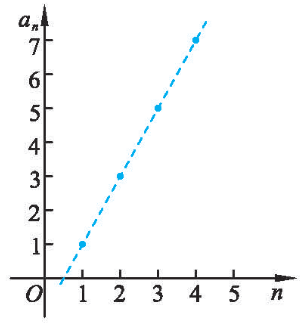


图 1-13

(3) 由(1)可知$d>0$,所以数列$\{a_n\}$是递增数列.

如果在a与b之间插入一个数A,使a,A,b成等差数列,那么A叫作a与b的**等差中项**.

如果A是a与b的等差中项,那么$A-a=b-A$,所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

显然,在一个等差数列中,从第2项起,每一项(有穷等差数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项.

例 5 一个木制梯形架的上、下两底边分别为33 cm,75 cm,把梯形的两腰各6等分,用平行木条连接各对应分点,构成梯形架的各级.试计算梯形架间各级的宽度.

解 记梯形架自上而下各级宽度所构成的数列为$\{a_n\}$,则由梯形中位线的性质,易知相邻三项均成等差数列,即数列$\{a_n\}$成等差数列.依题意,有

$$a_1=33\text{ cm}, a_7=75\text{ cm}.$$

现要求$a_2, a_3, \cdots, a_6$,即中间5级的宽度.

> 连接梯形两腰中点的线段叫作梯形的中位线,梯形的中位线平行于两底,并且等于两底和的一半.

依等差数列的定义,有

$$d=\frac{a_7-a_1}{7-1}=\frac{75-33}{6}=7(\text{cm}),$$

所以$a_2=33+7=40(\text{cm})$, $a_3=40+7=47(\text{cm})$, $a_4=47+7=54(\text{cm})$,

$a_5=54+7=61(\text{cm})$, $a_6=61+7=68(\text{cm})$.

因此,梯形架中间各级的宽度自上而下依次是40 cm, 47 cm, 54 cm, 61 cm, 68 cm.

练 习

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，填写下表：

题 号	a_1	d	n	a_n
(1)	8	-3	20	
(2)	2		9	18
(3)		$\frac{3}{4}$	30	$15\frac{3}{4}$
(4)	3	2		21

思考填表的过程，你能得出什么结论？

2. 求下列各题中两个数的等差中项.

(1) 100 与 180；　　(2) -2 与 6.

3. 已知等差数列的通项公式为 $a_n=-2n+7$.

(1) 求首项 a_1 和公差 d；

(2) 画出数列$\{a_n\}$的图象；

(3) 判断数列$\{a_n\}$的增减性.

4. 已知$\triangle ABC$ 的三个内角的度数成等差数列，求中间的角的度数.

5. 在通常情况下，从海平面到 10 km 高空，海拔每增加 1 km，气温就下降一固定数值. 如果海拔1 km 高空的气温是 9 ℃，海拔 5 km 高空的气温是-15 ℃，那么海拔 2 km，4 km 和 8 km 高空的气温各是多少？

2.2 等差数列的前 n 项和

实例分析

如图 1－14，有 200 根相同的圆木料，要把它们堆放成正三角形垛，并使剩余的圆木料尽可能的少，那么将剩余多少根圆木料？

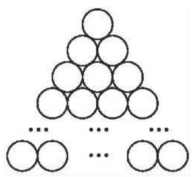


图 1－14

根据题意，各层圆木料数比上一层多一根，故其构成等差数列：

$$1,2,3,\cdots$$

设共堆放了 n 层，能构成正三角形垛的圆木料数为 S_n，则

$$S_n=1+2+3+\cdots+n,$$

这是一个等差数列的求和问题．如何计算该等差数列的和呢？

对于这个问题，高斯在小学时就巧妙地求出了 $n=100$ 时的结果.

小高斯回答说：“我不是按照 1，2，3 的次序一个一个往上加的. 老师，您看，一头一尾两个数的和都是一样的：1 加 100 是 101，2 加 99 是 101，3 加 98 是 101……把一前一后的数相

加，一共有 50 个 101，101 乘 50，得 5 050.”

高斯的算法是

$$S_{100}=\underbrace{(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51)}_{50\text{个}}$$

$$=101\times 50=5\ 050.$$

高 斯（Carl Friedrich Gauss，1777—1855），德国数学家，近代数学奠基者之一．与阿基米德、牛顿、欧拉并列为世界四大数学家．

抽象概括

对首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$，设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \qquad ①$$

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \qquad ②$$

①+②，得

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}}$$

$$=n(a_1+a_n).$$

因此，等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.} \qquad ③$$

这个公式表明：等差数列前 n 项的和等于首末两项的和与项数乘积的一半．示意图如图 1－15．

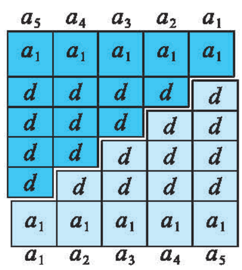


图 1－15

将 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入③式，得

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.} \qquad ④$$

特别地，当 $a_1=1$，$d=1$ 时，n 个连续正整数的和

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

思考交流

等差数列的前 n 项和公式中共涉及哪几个相关量？这几个量分别表示什么？这几个相关量中，已知几个可以求出其他几个？判断的依据是什么？

本节开始提出的圆木堆放问题，可转化为求满足 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}\leqslant 200$ 的最大自然数 n. 易知当 $n=19$ 时，$S_n=190$；当 $n=20$ 时，$S_n=210$. 故 n 的最大值为 19. 此时，将堆放 19 层，剩余 10 根圆木料 .

例 6 求从 1 开始的连续 n 个正奇数的和.

解 因为正奇数数列是首项为 1、公差为 2 的等差数列. 由等差数列前 n 项和公式，得

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2.$$

故从 1 开始的连续 n 个正奇数的和为 n^2.

你能看出图 1 - 16 与本题的关系吗?

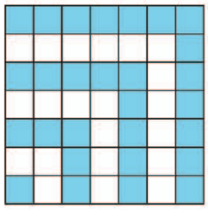


图 1 - 16

例 7 在我国古代，9 是数字之极，代表尊贵之意，所以中国古代皇家建筑中包含许多与 9 相关的设计. 例如，北京天坛圆丘的地面由扇环形的石板铺成(如图 1 - 17)，最高一层的中心是一块天心石，围绕它的第一圈有 9 块石板；从第二圈开始，每一圈比前一圈多 9 块，共有 9 圈. 请问：

(1) 第 9 圈共有多少块石板?

(2) 前 9 圈一共有多少块石板?

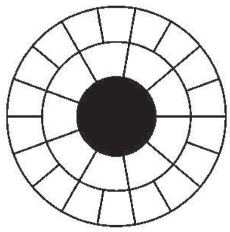


图 1 - 17

解 (1) 设从第 1 圈到第 9 圈的石板数所成数列为 $\{a_n\}$，由题意可知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其中首项 $a_1=9$，公差 $d=9$，项数 $n=9$.

由等差数列的通项公式，得

$$a_9=a_1+(n-1)d=9+(9-1)\times 9=81(\text{块}).$$

(2) 由等差数列的前 n 项和公式，得

$$S_9=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=9\times 9+\frac{9\times 8}{2}\times 9=405(\text{块}).$$

因此，第 9 圈共有 81 块石板，前 9 圈一共有 405 块石板.

练 习

1. 在本节开始的问题(1)中，求剧场共有多少个座位?
2. 求从 2 开始的连续 n 个正偶数的和.
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：

   (1) 已知 $S_8=48$，$S_{12}=168$，求 a_1 和 d；

   (2) 已知 $a_6=10$，$S_5=5$，求 a_8 和 S_8.

例 8 在数列$\{a_n\}$中，$a_n=2n+3$，求这个数列从第 100 项到第 200 项的和 S 的值.

解 因为 $a_{n+1}-a_n=[2(n+1)+3]-(2n+3)=2$，所以数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，此数列自第 100 项到第 200 项仍是等差数列. 共有 101 项，所求和为

$$\begin{aligned}S&=\frac{a_{100}+a_{200}}{2}\times 101\\&=\frac{(2\times 100+3)+(2\times 200+3)}{2}\times 101\\&=30\ 603.\end{aligned}$$

因此，这个数列自第 100 项到第 200 项的和 S 的值为 30 603.

例 9 在新城大道一侧 A 处，运来 20 棵新树苗. 一名工人从 A 处起沿大道一侧路边每隔 10 m 栽一棵树苗，这名工人每次只能运一棵. 要栽完这 20 棵树苗，并返回 A 处，植树工人共走了多少路程?

解 植树工人每种一棵树并返回 A 处所要走的路程(单位:m)组成了一个数列

$$0,20,40,60,\cdots,380,$$

这是首项 $a_1=0$，公差 $d=20$，项数 $n=20$ 的等差数列，其和

$$S_{20}=20a_1+\frac{20\times(20-1)}{2}d=0+\frac{20\times(20-1)}{2}\times 20=3\ 800(\mathrm{m}).$$

因此，植树工人共走了 3 800 m 的路程.

例 10 某抗洪指挥部接到预报，24 h 后有一洪峰到达. 为确保安全，指挥部决定在洪峰来临前筑一道堤坝作为第二道防线. 经计算，需调用 20 台同型号翻斗车，平均每辆工作 24 h 后方可筑成第二道防线. 但目前只有一辆车投入施工，其余的需从高速公路沿线抽调，每隔 20 min 能有一辆车到达，指挥部最多可调集 25 辆车，那么在 24 h 内能否构筑成第二道防线?

解 从第一辆车投入工作算起，各车工作时间(单位:h)依次设为

$$a_1,a_2,\cdots,a_{25}.$$

这是一个等差数列，其中首项 $a_1=24$，公差 $d=-\frac{1}{3}$.

25 辆车可以完成的工作量为

$$a_1+a_2+\cdots+a_{25}=25a_1+\frac{25\times(25-1)}{2}d=25\times 24+\frac{25\times(25-1)}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=500.$$

需要完成的工作量为 $24\times 20=480$.

因此，在 24 h 内能构筑成第二道防线.

练 习

1. 已知数列$\{a_n\}$，通项公式为$a_n=2n-11$，那么S_n的最小值是(　　)，并说明理由.

A. S_1　　B. S_5　　C. S_6　　D. S_{11}

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_3+a_{15}=40$，求S_{17}.

3. 一凸n边形($n\geqslant 3$，且$n\in\mathbf{N}_+$)，各内角的度数成等差数列，公差是$10°$，最小内角$100°$，则边数$n=$______.

4. 某车间全年共生产2 250个零件，又已知1月生产了105个零件，每月生产零件的个数按等差数列递增. 平均每月比前一个月多生产多少个零件？12月生产多少个零件？

习题 1－2

A 组

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的前3项分别为$a-1$，$a+1$，$2a+3$，则此数列的通项为(　　)，并说明理由.

A. $2n-5$　　B. $2n+1$

C. $2n-3$　　D. $2n-1$

2. 已知数列$1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},3,\sqrt{11},\cdots,\sqrt{2n-1},\cdots$，则$\sqrt{21}$是这个数列的(　　)，并说明理由.

A. 第10项　　B. 第11项

C. 第12项　　D. 第21项

3. 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是项数相同的等差数列，若$a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，则数列$\{a_n+b_n\}$的第37项为(　　)，并说明理由.

A. 1　　B. 0

C. 100　　D. 3 700

4. 夏季高山上气温从山脚起每升高100 m降低0.6 ℃，已知山顶的气温是15.8 ℃，山脚的气温是26 ℃. 那么，此山相对于山脚的高度是(　　)，并说明理由.

A. 1 500 m　　B. 1 600 m

C. 1 700 m　　D. 1 800 m

5. (1) 求等差数列8，5，2，…的第20项；

(2) －401是否为等差数列－5，－9，－13，…的项？如果是，是该数列的第几项？如果不是，说明理由.

6. 某城市环境噪声平均值见下表：

年　份	2014	2015	2016	2017
噪声/dB	57.8	57.2	56.6	56.0

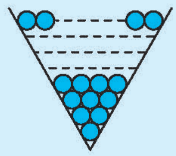
如果噪声平均值依此规律逐年减少，那么从2017年起，至少经过多少年，噪声平均值将小于42 dB？

7. 在下表的等差数列$\{a_n\}$中，根据已知的 3 个数，求未知的两个数.

题 号	a_1	d	n	a_n	S_n	题 号	a_1	d	n	a_n	S_n
(1)	5.2	0.4	43			(5)	0.2			5.2	137.7
(2)	$-37\frac{1}{2}$	4		$46\frac{1}{2}$		(6)		2	15	-10	
(3)	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$			$-158\frac{2}{3}$	(7)		3	31		0
(4)	5		26	105		(8)		2.5		27	157.5

8. 在 10 与 100 之间插入 50 个数，使之成等差数列. 求插入的数之和.

9. 如图，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支，最上面一层放 120 支. 这个 V 形架上共放着多少支铅笔?



(第 9 题)

10. 一个物体第 1 s 下落 4.90 m，以后每秒比前一秒多下落 9.80 m.

(1) 如果它从山顶下落，经过 5 s 到达地面，那么这山的高度是多少米?

(2) 如果它从 1 960 m 的高空下落到地面，要经过多长时间?

11. 甲、乙两物体分别从相距 70 m 的两处相向运动，甲第 1 min 运动 2 m，以后每分钟比前 1 min 多运动 1 m，乙每分钟运动 5 m. 问：甲、乙开始运动后多长时间相遇?

B 组

1. 有一个阶梯教室，共有座位 25 排，第一排离教室地面高度为17 cm，前 16 排前后两排高度差8 cm，从第 17 排起，前后两排高度差是 10 cm(含 16，17 排之间高度差). 求最后一排离教室地面的高度.

2. 将由 3，8，13，18，…组成的等差数列，按顺序写在练习本上，已知每行写 13 个，每页写 21 行. 求 33 333所在的页和行.

3. 在编号为 1～9 的九个盒子中，共放有 351 粒米，已知每个盒子都比它前一号盒子多放同样粒数的米.

(1) 如果 1 号盒子内放了 11 粒米，那么后面的盒子比它前一号的盒子多放几粒米?

(2) 如果 3 号盒子内放了 23 粒米，那么后面的盒子比它前一号的盒子多放几粒米?

4. 你能通过画图来表示数列 1，8，16，24，32，40 的和吗 (参考本节例 6)?

5. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，其中 $a_1=31$，$d=-8$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式，并画出它的图象;

(2) 数列$\{a_n\}$从哪一项开始小于 0?

(3) 求数列$\{a_n\}$前 n 项和的最大值，并求出对应 n 的值.

6. 已知数列$\{a_n\}$前 n 项和为 $S_n=n^2+1$.

(1) 试写出数列$\{a_n\}$的前 5 项;

(2) 数列$\{a_n\}$是等差数列吗?

(3) 你能写出数列$\{a_n\}$的通项公式吗?

§ 3 等比数列

3.1 等比数列的概念及其通项公式

实例分析

下列问题中的数列有什么共同特征?

(1) 你吃过拉面吗? 拉面馆的师傅将一根很粗的面条拉抻、捏合、再拉抻、再捏合,如此反复几次,就拉成了许多根细面条.

这样拉抻、捏合 8 次后可拉出多少根细面条?

第 1 次是 1 根,后面每次捏合都将 1 根变为 2 根,故有

第 2 次捏合成 $2\times1=2$(根);

第 3 次捏合成 $2\times2=2^2=4$(根);

……

第 8 次捏合成 $2\times2^6=2^7=128$(根).

前 8 次捏合成的面条根数构成一个数列

$$1,2,4,8,16,32,64,128. \qquad ①$$

对于数列①,从第 2 项起,每一项与它的前一项的比值都是 2.

(2) 星火化工厂今年产值为 a 万元,计划在以后 5 年中每年比上一年产值增长 10%,试列出从今年起 6 年的产值(单位:万元).

第 1 年产值:a;

第 2 年产值:$a+a\times10\%=a(1+10\%)$;

第 3 年产值:$a(1+10\%)+a(1+10\%)\times10\%=a(1+10\%)^2$;

……

第 6 年产值:$a(1+10\%)^4+a(1+10\%)^4\times10\%=a(1+10\%)^5$.

故这 6 年的产值构成一个数列

$$a,a(1+10\%),a(1+10\%)^2,a(1+10\%)^3,a(1+10\%)^4,a(1+10\%)^5. \qquad ②$$

对于数列②,从第 2 项起,每一项与它的前一项的比值都是 $1+10\%=1.1$.

经比较,可以看出数列①,②有如下的共同特征:从第 2 项起,每一项与它的前一项的比值都是一个与项数 n 无关的常数.

抽象概括

如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比值都是同一个常数，那么称这样的数列为**等比数列**，称这个常数为等比数列的**公比**，通常用字母 q 表示($q\neq 0$).

因此，数列①，②都是等比数列，它们的公比分别是 2，1.1.

例 1 以下数列中，哪些是等比数列？

(1) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16}$;

(2) $1,1,1,\cdots,1$;

(3) $1,2,4,8,12,16,20$;

(4) $a,a^2,a^3,\cdots,a^n$.

解 (1) 是等比数列，公比 $q=-\frac{1}{2}$;

(2) 是公比 $q=1$ 的等比数列；

(3) 因为 $\frac{8}{4}\neq\frac{12}{8}$，所以该数列不是等比数列；

(4) 当 $a\neq 0$ 时，它是公比 $q=a$ 的等比数列；当 $a=0$ 时，它不是等比数列.

如果已知一个数列是等比数列，且已知它的首项 a_1 和公比 q，怎样求出它的通项公式？

设这个等比数列是

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

由等比数列的定义，可知：

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=q.$$

从而，

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$
$$\cdots$$

由此得到

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

当 $n=1$ 时，

$$a_1=a_1q^{1-1}=a_1q^0=a_1.$$

所以，这个公式对 $n=1$ 时也成立. 这就是说：

若首项是 a_1，公比是 q，则等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}\quad(a_1\neq0,\ q\neq0).}$$

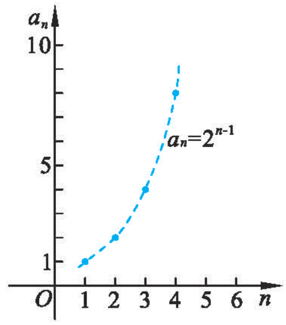


图 1－18

于是，本节开始给出的数列①，②的通项公式依次是

$a_n=2^{n-1}$（如图 1－18）；

$a_n=a(1+10\%)^{n-1}=a\times1.1^{n-1}$.

例 2　一个等比数列的首项是 2，第 2 项与第 3 项的和是 12. 求该数列的第 8 项的值.

解　设等比数列的首项为 a_1，公比为 q，则由已知，得

$$\begin{cases}a_1=2, & ①\\ a_1q+a_1q^2=12. & ②\end{cases}$$

将①式代入②式，得　$q^2+q-6=0$.

解得　$q=-3$ 或 $q=2$.

当 $q=-3$ 时，　$a_8=a_1q^7=2\times(-3)^7=-4\ 374$，

当 $q=2$ 时，　$a_8=2q^7=2\times2^7=2^8=256$.

故该数列的第 8 项是 $-4\ 374$ 或 256.

练　习

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，填写下表.

题　号	a_1	q	n	a_n
(1)	3	-2	5	
(2)		$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{16}$
(3)	4		4	256
(4)	3		5	48
(5)	3	2		24

2. 在等比数列中，公比 q 为什么不为 0？能否有某一项为 0？

思考交流

根据指数函数的单调性，分析等比数列 $a_n=a_1q^{n-1}(q>0)$ 的增减性，填写表 1－3.

表 1－3

a_1	$a_1>0$			$a_1<0$		
q 的范围	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
数列 $\{a_n\}$ 的增减性						

例 3 在各项为负数的数列$\{a_n\}$中，已知$2a_n=3a_{n+1}$，且$a_2\cdot a_5=\frac{8}{27}$.

(1) 求证：数列$\{a_n\}$是等比数列，并求出它的通项公式；

(2) 试问$-\frac{16}{81}$是数列$\{a_n\}$中的项吗？如果是，指出是$\{a_n\}$中的第几项；如果不是，请说明理由.

解 (1)因为 $2a_n=3a_{n+1}$，且$a_n\neq 0$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$，

故数列$\{a_n\}$是公比$q=\frac{2}{3}$的等比数列.

又 $a_2\cdot a_5=\frac{8}{27}$， 则 $a_1q\cdot a_1q^4=\frac{8}{27}$，

即
$$a_1^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

又数列各项均为负数，则 $a_1=-\frac{3}{2}$，

所以
$$a_n=-\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

(2) 设$a_n=-\frac{16}{81}$，由等比数列的通项公式得
$$-\frac{16}{81}=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2},$$

即
$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

根据指数函数的性质，得$4=n-2$，即$n=6$.

因此，$-\frac{16}{81}$是数列$\{a_n\}$的第 6 项.

例 4 据报载，在 20 世纪 80 年代末，中美洲地区毁林严重，还剩1.9×10^7 hm^2. 请你回答以下几个问题：

(1) 如果以每小时平均毁林约 48 hm^2 计算，剩下的森林经过多少年将被毁尽？(1 年按 365 天计)

(2) 根据(1)计算出的年数n，如果以每年 3.6%～3.9%的速度减少，计算n年后还剩的森林面积(结果写成$a\times10^n(1\leqslant a<10,n\in\mathbf{N}_+)$的形式，$a$精确到 0.01).

(3) 若按 3.6%的速度减少，计算经过 150 年后、经过 200 年后、经过 250 年后及经过 300 年后森林面积的情况，经过多少年森林将被毁尽？

说 明

hm^2 表示公顷，

$1\ hm^2=10\ 000\ m^2$.

解 (1) 如果每时平均毁林约 48 hm^2，则每年平均毁林
$$48\times24\times365=420\ 480(hm^2),$$

列出比式 $\frac{1.9\times10^{7}}{420\ 480}\approx45.2$，故剩下的森林大约经过 45 年将被毁尽.

(2) 若以 3.6%的速度减少，用计算器计算 45 年后还剩的森林面积为

$$1.9\times10^{7}\times(1-3.6\%)^{45}\approx3.65\times10^{6}(\text{hm}^2)；$$

若以 3.9%的速度减少，45 年后还剩的森林面积为

$$1.9\times10^{7}\times(1-3.9\%)^{45}\approx3.17\times10^{6}(\text{hm}^2).$$

(3) $1.9\times10^{7}\times(1-3.6\%)^{150}\approx77\ 680(\text{hm}^2)$；

$1.9\times10^{7}\times(1-3.6\%)^{200}\approx12\ 421(\text{hm}^2)$；

$1.9\times10^{7}\times(1-3.6\%)^{250}\approx1\ 986\ (\text{hm}^2)$；

$1.9\times10^{7}\times(1-3.6\%)^{300}\approx318\ (\text{hm}^2)$；

$1.9\times10^{7}\times(1-3.6\%)^{512}\approx0.134\ (\text{hm}^2)$.

经过 150 年后，还剩约 77 680 hm^2；经过 200 年后，约剩 12 421 hm^2；经过 250 年后，约剩 1 986 hm^2；经过 300 年后，约剩 318 hm^2；经过 512 年后，约剩 0.134 hm^2，森林几乎毁尽.

与等差中项类似，如果在 a 与 b 之间插入一个数 G，使得 a,G,b 成等比数列，那么根据等比数列的定义，$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$，$G^2=ab$，$G=\pm\sqrt{ab}$. 我们称 G 为 a,b 的**等比中项**.

显然，在一个等比数列中，从第 2 项起，每一项(有穷等比数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等比中项.

思考交流

若 $G^2=ab$，则 a,G,b 是否必成等比数列？

练　习

1. 已知数列 $a,a(1-a),a(1-a)^2,\cdots$是等比数列，则实数 a 的取值范围是(　　)，并说明理由.

   A. $a\neq1$　　B. $a\neq0$ 或 $a\neq1$　　C. $a\neq0$　　D. $a\neq0$ 且 $a\neq1$

2. 将公比为 q 的等比数列 $a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$依次取相邻两项的乘积组成新的数列 $a_1a_2,a_2a_3,a_3a_4,\cdots$. 此数列是(　　)，并说明理由.

   A. 公比为 q 的等比数列　　B. 公比为 q^2 的等比数列

   C. 公比为 q^3 的等比数列　　D. 不一定是等比数列

3. 求下列各组数的等比中项：

   (1) -45 和 -80；　　(2) $7+3\sqrt{5}$和 $7-3\sqrt{5}$；

   (3) $(a+b)^2$ 和$(a-b)^2$.

3.2 等比数列的前 n 项和

实例分析

一天，小林和小明做“贷款”游戏，签订了一份合同. 从签订合同之日起，在整整一个月(30 天)中，小明第一天贷给小林 1 万元，第二天贷给小林 2 万元，第三天贷给小林 3 万元……以后每天比前一天多贷给小林 1 万元. 而小林按这样的方式还贷:小林第一天只需还 1 分钱，第二天还 2 分钱，第三天还 4 分钱……以后每天还的钱数是前一天的 2 倍.

合同开始生效了，第一天小林支出 1 分钱，收入 1 万元;第二天，他支出 2 分钱，收入 2 万元;第三天，他支出 4 分钱，收入 3 万元……到了第 10 天，他共得到 55 万元，付出的总数只有 10 元 2 角 3 分. 到了第 20 天，小林共得 210 万元，而小明才得到 1 048 575 分，共 1 万元多一点. 小林想:要是合同订两个月、三个月那该多好!

果真是这样吗?

下面我们来计算一下双方得到的钱数.

设 30 天后，小林得到的钱数为 T_{30}(单位:万元)，小明得到的钱数为 S_{30}(单位:分)，则根据合同，有

$$T_{30}=1+2+3+\cdots+30=\frac{(1+30)\times 30}{2}=465(\text{万元}),$$

$$S_{30}=1+2+2^2+\cdots+2^{29}. \qquad ①$$

如何计算 S_{30} 呢?

由①式，可得

$$2S_{30}=2+2^2+\cdots+2^{29}+2^{30}. \qquad ②$$

②−①，得 $S_{30}=2^{30}-1.$

而 $S_{30}=2^{30}-1$ 可不是一个小数目! 利用计算器计算，得

$$S_{30}=1\ 073\ 741\ 823(\text{分})=1\ 073.741\ 823(\text{万元}).$$

小林听到这个结果，肯定会吓出一身冷汗!

抽象概括

将上述方法推广到一般的等比数列求和问题的解决过程中.

对首项为 a_1，公比为 $q(q\neq 0)$ 的等比数列 $\{a_n\}$，设

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}, \quad ①$$

①式的两边同乘 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \quad ②$$

①－②，得

$$S_n-qS_n=a_1(1-q^n),$$

即

$$S_n(1-q)=a_1(1-q^n).$$

当 $q\neq 1$ 时，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

很明显，当 $q=1$ 时，由①式可得 $S_n=na_1$.

从而，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$\boxed{S_n=\begin{cases} na_1, & q=1, \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1 \text{ 且 } q\neq 0. \end{cases}}$$

思考交流

等比数列前 n 项和的有关公式中涉及哪几个相关量？这几个量有什么实际意义？这几个相关量中，已知其中几个相关量可以求出其他几个？

例 5 (1) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$q=3$. 求 S_3；

(2) 求等比数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ 的前 10 项的和.

解 (1) 由等比数列的前 n 项和公式，得

$$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{2\times(1-3^3)}{1-3}=26;$$

(2) 因为公比 $q=\frac{1}{2}$，所以

$$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1\,023}{512}.$$

例 6 五洲电扇厂去年实现利润 300 万元，计划在以后 5 年中每年比上一年利润增长 10%. 问从今年起第 5 年的利润是多少？这 5 年的总利润是多少？(结果精确到 1 万元)

解 根据题意，可知每年的利润组成一个首项 $a_1=300$、公比 $q=1+10\%=1.1$ 的等比数列. 所以从今年起第 5 年的利润为

$$a_6=a_1q^{6-1}=300\times(1+10\%)^5=300\times1.1^5\approx483(\text{万元});$$

这 5 年的总利润为

$$S=\frac{a_2(1-q^5)}{1-q}=300\times1.1\times\frac{1.1^5-1}{1.1-1}\approx2\ 015(\text{万元}).$$

练 习

1. 求下列等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和：

(1) $a_1=1, q=3, n=10$；

(2) $a_1=\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{3}, n=6$；

(3) $a_1=\frac{1}{3}, q=\frac{1}{3}, a_n=\frac{1}{6\ 561}$；

(4) $a_1=6, q=2, a_n=192$.

2. 某超市去年的销售额为 a 万元，计划在今后 10 年内每年比上一年增加 10%. 从今年起 10 年内这家超市的总销售额为(　　)万元，并说明理由.

A. 1.1^9a

B. 1.1^5a

C. $10\times(1.1^{10}-1)a$

D. $11\times(1.1^{10}-1)a$

例 7 一个热气球在第 1 min 上升了 25 m 的高度，在以后的每 1 min 里，它上升的高度都是它在前 1 min 上升高度的 80%. 这个热气球上升的高度能达到 125 m 吗？

解 用 a_n 表示热气球在第 n min 上升的高度. 由题意，得

$$a_{n+1}=80\%a_n=\frac{4}{5}a_n.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=25$、公比 $q=\frac{4}{5}$ 的等比数列.

热气球在 n min 里上升的总高度为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{25\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{5}}$$

$$=125\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]<125.$$

所以这个热气球上升的高度不可能超过 125 m.

例 8 如图 1－19，作边长为 a 的正三角形的内切圆，在这个圆内作内接正三角形，然后，再作新三角形的内切圆. 如此下去，求前 n 个内切圆的面积和.

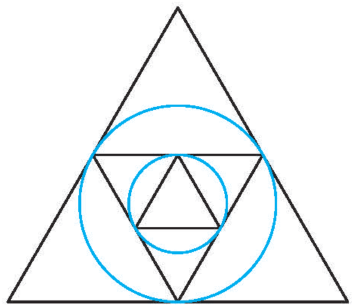


图 1－19

解 设第 n 个正三角形的内切圆的半径为 a_n.

因为从第 2 个正三角形开始，每一个正三角形的边长是前一个正三角形边长的 $\frac{1}{2}$，每一个正三角形内切圆的半径也是前一个正三角形内切圆半径的 $\frac{1}{2}$，故

$$a_1=\frac{1}{2}a\tan 30^\circ=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}a,$$

$$a_2=\frac{1}{2}a_1,$$

$$\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}.$$

即数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=\frac{\sqrt{3}}{6}a$、公比 $q=\frac{1}{2}$ 的等比数列. 所以

$$a_n=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}a.$$

设前 n 个内切圆的面积和为 S_n，则

$$\begin{aligned}S_n&=\pi(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)\\&=\pi[a_1^2+(a_1q)^2+(a_1q^2)^2+\cdots+(a_1q^{n-1})^2]\\&=\pi a_1^2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2^2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2\right]\\&=\pi a_1^2\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]\\&=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}\\&=\frac{a^2}{9}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\pi.\end{aligned}$$

因此，前 n 个内切圆的面积和为 $\frac{a^2}{9}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\pi$.

思考交流

在等差数列的学习中，研究了等差数列与函数的关系，请类比等差数列与函数的研究方法，从函数的角度研究等比数列的通项公式.

练 习

1. 求等比数列 1,2,4,…从第 5 项到第 10 项的和.
2. 一个球从 a m 高处自由落下,每次着地后,又跳回到原高度的$\frac{2}{3}$.那么当它第 5 次着地时,共经过了多少米?

习题 1-3

A 组

1. 等比数列 $x,2x+2,3x+3,\cdots$的第 4 项为(　　),并说明理由.

   A. $-\frac{27}{2}$　　B. $\frac{27}{2}$　　C. -27　　D. 27

2. 计算机的价格不断降低,若每年计算机的价格降低$\frac{1}{3}$,现在价格为8 100元的计算机 3 年后的价格可降低为(　　),并说明理由.

   A. 300 元　　B. 900 元　　C. 2 400 元　　D. 3 600 元

3. 一个各项均为正数的等比数列,其每一项都等于它后面的相邻两项之和,则公比 $q=$(　　),并说明理由.

   A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4. 若等比数列$\{a_n\}$中,首项为 a_1,公比为 q,则下列条件中,使数列$\{a_n\}$一定为递减数列的条件是(　　),并说明理由.

   A. $|q|<1$　　B. $a_1>0$, $q<1$

   C. $a_1>0$, $0<q<1$ 或 $a_1<0$, $q>1$　　D. $q>1$

5. 已知单摆第 1 次摆动摆过的弧长为 36 cm,在连续的每次摆动中,每次摆动的弧长是前一次的 90%.请写出它每次摆动弧长的表达式,并写出第 6 次摆动的弧长.(结果精确到 1 cm)
6. 培育水稻新品种,如果第 1 代得到 120 粒种子,并且从第 1 代起,以后各代的每一粒种子都可以得到下一代的 120 粒种子,那么到第 5 代可以得到这个新品种的种子多少粒?
7. 在下表的等比数列$\{a_n\}$中,由已知的三个数,求未知的两个数.

题　号	a_1	q	n	a_n	S_n	题　号	a_1	q	n	a_n	S_n
(1)	3	2	6			(5)	1			4	7
(2)	8	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$		(6)		$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{8}$	
(3)	5	2			35	(7)		$\frac{2}{3}$	4		65
(4)	2		4	54		(8)		2		96	189

8. 如果某人在听到喜讯后的 1 h 内将这一喜讯传给 2 个人，这 2 个人又以同样的速度各传给未听到喜讯的另 2 个人……如果每人只传 2 人，这样继续下去，要把喜讯传遍一个有 2 047 人(包括第一个人)的小镇，所需时间为（　　），并说明理由.

A. 8 h　　B. 9 h　　C. 10 h　　D. 11 h

9. 某工厂 2016 年产值为 200 万元，计划从 2017 年开始，每年的产值比上一年增长 20%. 问至少从哪年开始，该厂的年产值可超过 1 200 万元?

10. 某制糖厂第 1 年制糖 5 万吨，如果平均每年的产量比上一年增加 10%，那么从第 1 年起，至少几年内可使总产量达到 30 万吨?

B　组

1. 被称为“世界屋脊”的喜马拉雅山的主峰——珠穆朗玛峰，海拔 8 848.86 m，是世界第一高峰. 但一张报纸却不服气，它说：“别看我薄，只有0.01 cm厚，但假如把我连续对折 30 次后，我的厚度就会远远超过珠穆朗玛峰的高度.”你认为这张报纸是不是在吹牛? 你不妨算算看.

2. 一个等比数列前 n 项的和为 48，前 $2n$ 项的和为 60，则前 $3n$ 项的和为（　　），并说明理由.

A. 83　　B. 108　　C. 75　　D. 63

3. 设数列$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，公比 $q=2$，且 $a_1a_2a_3\cdots a_{30}=2^{30}$，那么 $a_3a_6\cdots a_{30}=$（　　），并说明理由.

A. 2^{10}　　B. 2^{15}　　C. 2^{20}　　D. 2^{16}

4. 碘-131 是一种放射性物质，在医疗诊断中常会用到它. 下表是 20 g 碘-131在 4 天内每天衰减的实验数据：

时间/天	0	1	2	3	4
剩余/g	20.0	18.34	16.82	15.42	14.14

按此规律衰减，问 7 天后还能不能保证有 10 g 该物质用于治疗，说明你的理由.

§ 4 数列在日常经济生活中的应用

等差数列、等比数列是日常经济生活中的重要数学模型．例如，存款、贷款、购物(房、车)分期付款、保险、资产折旧等问题都与其相关.

以银行存款为例，它是老百姓日常生活中最基本的经济活动. 银行存款计息方式有两种:单利和复利，它们分别以等差数列和等比数列为数学模型. 下面分别举例说明.

例 1　零存整取模型　银行有一种叫作零存整取的储蓄业务，即每月定时存入一笔相同数目的现金，这是零存;到约定日期，可以取出全部本利和，这是整取(现在有一年、三年、五年 3 种，年利率分别为 1.35%，1.55%，1.55%). 规定每次存入的钱不计复利.

(1) 若每月存入金额为 x 元，月利率 r 保持不变，存期为 n 个月，试推导出到期整取时本利和的公式;

(2) 若每月初存入 500 元，到第 3 年整取时的本利和是多少?(精确到 0.01 元)

(3) 若每月初存入一定金额，希望到 1 年后整取时取得本利和 2 000 元，则每月初应存入的金额是多少?(精确到 0.01 元)

> **说　明**
>
> 单利　单利的计算是仅在原有本金上计算利息，对本金所产生的利息不再计算利息. 其公式为
>
> 利息＝本金×利率×存期
>
> 以符号 P 代表本金，n 代表存期，r 代表利率，S 代表本金与利息和(以下简称**本利和**)，则有
>
> $$S=P(1+nr).$$
>
> 复利　复利是指一笔资金除本金产生利息外，在下一个计息周期内，以前各计息周期内产生的利息也计算利息的计息方法. 复利的计算公式是
>
> $$S=P(1+r)^n.$$

解　(1) 根据题意，第 1 个月存入的金额为 x 元，到期利息为 xrn 元;第 2 个月存入的金额为 x 元，到期利息为 $xr(n-1)$ 元……第 n 个月存入的金额为 x 元，到期利息为 xr 元. 不难看出，这是一个等差数列求和的问题.

各月利息之和为

$$xr(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)r}{2}x,$$

而本金为 nx 元，这样就得到本利和公式

$$y=nx+\frac{n(n+1)r}{2}x,$$

即

$$y=x\left[n+\frac{n(n+1)r}{2}\right],n=12,36,60. \qquad ①$$

(2) 根据题意知，$x=500$，$r=\frac{1.55\%}{12}$，$n=36$，代入①式，本利和为

$$y=500\times\left(36+\frac{36\times37}{2}\times\frac{1.55\%}{12}\right)\approx18\ 430.13(元).$$

(3) 根据题意知，$y=2\ 000$，$r=\frac{1.35\%}{12}$，$n=12$，代入①式，得

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{n+\frac{n(n+1)}{2}r} \\ &= \frac{2\ 000}{12+6\times 13\times \frac{1.35\%}{12}} \\ &\approx 165.46(\text{元}). \end{aligned}$$

所以每月初应存入 165.46 元.

例 2 **定期自动转存模型** 银行有另一种储蓄业务为定期存款自动转存．例如，储户某日存入一笔 1 年期定期存款，1 年后，如果储户不取出本利和，则银行按存款到期时的 1 年期定期存款利率自动办理转存业务，第 2 年的本金就是第 1 年的本利和. 按照定期存款自动转存的储蓄业务，假定无利率变化调整因素[①]，我们来讨论以下问题：

(1) 如果储户存入定期为 1 年的 P 元存款，定期年利率为 r，连存 n 年后，再取出本利和. 试求出储户 n 年后所得本利和的公式；

(2) 如果存入 1 万元定期存款，存期 1 年，年利率为 1.75%，那么 5 年后共得本利和多少元？(精确到 0.01 元)

解 (1) 记 n 年后得到的本利和为 a_n. 根据题意知：

第 1 年存入的本金 P 元，1 年后到期利息为 Pr 元，1 年后本利和为

$$\begin{aligned} a_1 &= P+Pr \\ &= P(1+r)(\text{元}); \end{aligned}$$

2 年后到期利息为 $P(1+r)r$ 元，2 年后本利和为

$$\begin{aligned} a_2 &= P(1+r)+P(1+r)r \\ &= P(1+r)^2(\text{元}); \end{aligned}$$

……

不难看出，各年的本利和是一个首项 $a_1=P(1+r)$、公比 $q=1+r$ 的等比数列 $\{a_n\}$，故 n 年后到期的本利和为

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 q^{n-1} \\ &= P(1+r)(1+r)^{n-1} \\ &= P(1+r)^n(\text{元}). \end{aligned}$$

(2) 由(1)可知，5 年后本利和为

$$a_5 = 10\ 000\times(1+0.017\ 5)^5$$

① 全书下同，即假定无利率变化调整因素，不涉及浮动利率因素.

$$\approx 10\ 906.17(\text{元}).$$

因此，5 年后得本利和约为 10 906.17 元.

思考交流

银行整存整取定期储蓄年利率如表 1 - 4.

表 1 - 4 (2015 年 10 月 24 日)

存　期	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率/%	1.75	2.25	2.75	2.75

某公司欲将 10 万元存入银行 5 年，可按以下方案办理：

(1) 直接存入 5 年定期；

(2) 先存 2 年定期，取出本利和后再存 3 年定期.

问题 1 计算出不同存法到期后的本利和，哪种存款方式更合算？

问题 2 你能设计出更好的存款方案吗？

信息技术建议

尝试设计"寻找最好存款方式"的算法程序，并上机实现.

练　习

1. 小蕾 2018 年 1 月 31 日存入银行若干万元，年利率为 1.75%，到 2019 年 1 月 31 日取款时，银行按国家规定给付利息 469 元，则小蕾存入银行的本金介于(　　)元之间，并说明理由.

   A. 1 万～2 万　　B. 2 万～3 万　　C. 3 万～4 万　　D. 4 万～5 万

2. 小峰 2019 年元旦在银行存款 1 万元，办理一年定期储蓄，年利率为 1.75%，以后按约定自动转存. 请计算小峰到 2023 年元旦得到的本利和.（精确到 0.01 元）

例 3 **分期付款模型** 小华准备购买一台售价为 5 000 元的电脑，采用分期付款方式，并在一年内将款全部付清. 商场提出的付款方式为：购买后 2 个月的月末第 1 次付款，再过 2 个月第 2 次付款……购买后第 12 个月末第 6 次付款，每次付款金额相同，约定月利率为 0.6%，每月利息按复利计算. 求小华每期应付的金额是多少？（精确到 0.01 元）

解 假定小华每期还款 x 元，第 k 个月末还款后的本利欠款数为 A_k 元，则

$A_2=5\ 000\times(1+0.006)^2-x$；

$A_4=A_2(1+0.006)^2-x$

$\quad=5\ 000\times1.006^4-1.006^2x-x$；

$A_6=A_4(1+0.006)^2-x$

$=5\ 000\times1.006^{6}-1.006^{4}x-1.006^{2}x-x$；

…

$A_{12}=5\ 000\times1.006^{12}-(1.006^{10}+1.006^{8}+1.006^{6}+1.006^{4}+1.006^{2}+1)x$；

由题意年底还清，则 $A_{12}=0$.

解得

$$x=\frac{5\ 000\times1.006^{12}}{1+1.006^{2}+1.006^{4}+1.006^{6}+1.006^{8}+1.006^{10}}$$

$$\approx868.79(\text{元}).$$

因此，小华每期应付的金额为 868.79 元.

思考交流

商场出售电脑，提出了如表 1-5 的 3 种付款方式，以供顾客选择. 请分别算出各种付款方式每次应付金额，并填在表中. 选择一种你喜欢的付款方式，与同学交流，并说明选择的理由.

表 1-5

方案类别	分几次付清	付款方法	每期所付款额
1	3 次	购买后第 4 个月末第 1 次付款， 再过 4 个月第 2 次付款， 购买后第 12 个月末第 3 次付款	
2	6 次	购买后第 2 个月末第 1 次付款， 再过 2 个月第 2 次付款…… 购买后第 12 个月末第 6 次付款	
3	12 次	购买后第 1 个月末第 1 次付款， 再过 1 个月第 2 次付款…… 购买后第 12 个月末第 12 次付款	

注：(1)每种方案中每次所付款额相同；

(2)规定月利率为 0.6%，每月利息按复利计算.

练　习

1. 小杨 2017 年向银行贷款 20 万元用于购房，银行住房贷款的年利率为 4.9%，并按复利计息. 若双方协议自 2018 年元月起生效，每年年底还银行相同金额的贷款，到 2027 年年底全部还清(即用 10 年时间等额还款). 则小杨每年年底还银行贷款的金额是多少元？(精确到 1 元)

习题 1－4

1. 一架摄像机售价为 1 万元. 若采取分期付款，则需在 1 年内将款全部还清，商家提供下表所示的几种付款方案：

方案类别	分几次付清	付款方法	每期所付款额
1	3 次	购买后第 4 个月末第 1 次付款， 再过 4 个月第 2 次付款， 购买后第 12 个月末第 3 次付款	
2	6 次	购买后第 2 个月末第 1 次付款， 再过 2 个月第 2 次付款…… 购买后第 12 个月末第 6 次付款	
3	12 次	购买后第 1 个月末第 1 次付款， 再过 1 个月第 2 次付款…… 购买后第 12 个月末第 12 次付款	

注：(1) 每种方案中每次所付款额相同；

(2) 规定月利率为 0.6% ，每月利息按复利计算.

按各种方案付款每次需付款额分别是多少？(精确到 0.01 元)

2. 小王想用分期付款的方式购买一套价值 90 万元的商品房. 首付 40 万元，贷款期限为 20 年，银行住房贷款的年利率为4.9%，按复利计息. 如果小王按年还款，每年还款的数额相同，那么每年需要还款多少元？小王为购买此房共要付房款多少元？(精确到 0.01 元)

*§5 数学归纳法

在数列的学习过程中，我们得到过一些公式：

等差数列的通项公式　$a_n=a_1+(n-1)d$；

等差数列的求和公式　$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$；

等比数列的通项公式　$a_n=a_1q^{n-1}$；

等比数列的求和公式　$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1$，且 $q\neq0)$.

这些都是与正整数 n 有关的命题.

对于与正整数 n 有关的命题，怎样证明它们对每一个正整数 n 都正确呢？

数学归纳法是用来证明某些与正整数 n 有关的数学命题的一种方法. 它的基本步骤是：

(1) 证明：当 n 取第一个值 n_0（n_0 是一个确定的正整数，如 $n_0=1$ 或 2 等）时，命题成立；

(2) 假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+, k\geqslant n_0)$ 时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

根据(1)(2)可以断定命题对一切从 n_0 开始的正整数 n 都成立.

数学归纳法为什么能保证命题对所有的正整数都成立？

下面以 $n_0=1$ 时的情况加以说明. 根据(1)，证明了当 $n=1$ 时命题成立；根据(2)可知，当 $n=1+1=2$ 时命题成立. 由于 $n=2$ 时命题成立，再根据(2)可知，当 $n=2+1=3$ 时命题也成立，这样递推下去，就可以知道当 $n=4,5,\cdots$ 时命题也成立. 即命题对任意正整数 n 都成立.

例 1　用数学归纳法证明：首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}.$$

证明　(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=S_1=a_1$，右边 $=1\cdot a_1+\frac{1\cdot(1-1)d}{2}=a_1$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k(k\geqslant1)$ 时，等式成立，即 $S_k=ka_1+\frac{k(k-1)d}{2}$ 成立.

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+a_{k+1}\\&=\left[ka_1+\frac{k(k-1)d}{2}\right]+\{a_1+[(k+1)-1]d\}\\&=(k+1)a_1+\frac{k(k-1)d+2kd}{2}\\&=(k+1)a_1+\frac{k(k+1)d}{2}\end{aligned}$$

* 前加“*”者为选学内容，不作考试要求.

$$=(k+1)a_1+\frac{(k+1)[(k+1)-1]d}{2}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)和(2)，可知等式对任意正整数 n 都成立.

例 2 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$，$a_1=0$，试猜想数列$\{a_n\}$的通项公式，并用数学归纳法证明.

解 由 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$和 $a_1=0$，得

$$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

$$a_4=\frac{1}{2-a_3}=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4},\quad a_5=\frac{1}{2-a_4}=\frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{4}{5},$$

…

归纳上述结果，可得猜想 $a_n=\frac{n-1}{n}$.

下面用数学归纳法证明这个猜想.

(1) 当 $n=1$ 时，左边$=a_1=0$，右边$=\frac{1-1}{1}=0$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k(k\geqslant1)$时，等式成立，即 $a_k=\frac{k-1}{k}$成立.

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\frac{k-1}{k}}=\frac{k}{k+1}=\frac{(k+1)-1}{k+1}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)和(2)，可知猜想 $a_n=\frac{n-1}{n}$对于任意正整数 n 都成立.

我们可以通过例 2 体会归纳和数学归纳法的区别. 在数学上，在归纳出结论后，还需给出严格证明. 在学习和使用数学归纳法时，需要特别注意：

(1) 用数学归纳法证明的对象是与正整数 n 有关的命题；

(2) 在用数学归纳法证明中，两个基本步骤缺一不可.

例 3 用数学归纳法证明：$(1+\alpha)^n\geqslant1+n\alpha$(其中 $\alpha>-1$，$n\in\mathbf{N}_+$).

证明 (1) 当 $n=1$ 时，左边$=1+\alpha$，右边$=1+\alpha$，命题成立.

(2) 假设当 $n=k(k\geqslant1)$时，命题成立，即$(1+\alpha)^k\geqslant1+k\alpha$.

那么，当 $n=k+1$ 时，因为 $\alpha>-1$，所以 $1+\alpha>0$.

根据假设知，$(1+\alpha)^k\geqslant1+k\alpha$，所以

$$(1+\alpha)^{k+1}=(1+\alpha)^k(1+\alpha)$$

$$\geqslant(1+k\alpha)(1+\alpha)$$
$$=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2.$$

因为 $k\alpha^2\geqslant0$,所以

$$1+(k+1)\alpha+k\alpha^2\geqslant1+(k+1)\alpha.$$

从而

$$(1+\alpha)^{k+1}\geqslant1+(k+1)\alpha.$$

这表明,当 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据(1)和(2),该命题对于任意正整数 n 都成立.

练 习

1. 用数学归纳法证明:$x^{2n}-y^{2n}$能被 $x+y$ 整除($n\in\mathbf{N}_+$).

*习题 1-5

1. 用数学归纳法证明:$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$($n\in\mathbf{N}_+$).
2. 平面内有 n($n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+$)条直线,其中任何两条都不平行,任何三条都不经过同一点,用数学归纳法证明:交点的个数 $f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$.
3. 用数学归纳法证明:$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$($n\in\mathbf{N}_+$).

本章小结

一、知识结构

- 数　列
  - 数列的概念及其函数特性
    - 数列的概念
    - 数列的函数特性
  - 等差数列
    - 等差数列的概念与通项公式
    - 等差数列的前n项和公式
  - 等比数列
    - 等比数列的概念与通项公式
    - 等比数列的前n项和公式
  - 数列在日常经济生活中的应用
  - *数学归纳法

二、学习要求

本章的学习，可以帮助同学们通过对日常生活中实际问题的分析，了解数列的概念；探索并掌握等差数列和等比数列的变化规律，建立通项公式和前 n 项和公式；能运用等差数列、等比数列解决简单的实际问题和数学问题，感受数学模型的现实意义与应用；了解等差数列与一元一次函数、等比数列与指数函数的联系，感受数列与函数的共性与差异，体会数学的整体性.

1. 数列概念

通过日常生活和数学中的实例，了解数列的概念和表示方法(列表、图象、通项公式)，了解数列是一种特殊函数.

2. 等差数列

(1) 通过生活中的实例，理解等差数列的概念和通项公式的意义.

(2) 探索并掌握等差数列的前 n 项和公式，理解等差数列的通项公式与前 n 项和公式的关系.

(3) 能在具体的问题情境中，发现数列的等差关系，并解决相应的问题.

(4) 体会等差数列与一元一次函数的关系.

3. 等比数列

(1) 通过生活中的实例，理解等比数列的概念和通项公式的意义.

(2) 探索并掌握等比数列的前 n 项和公式，理解等比数列的通项公式与前 n 项和公式的关系.

(3) 能在具体的问题情境中，发现数列的等比关系，并解决相应的问题.

(4) 体会等比数列与指数函数的关系.

*4. 数学归纳法

了解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明数列中的一些简单命题.

三、需要关注的问题

1. 等差数列和等比数列有哪些公式和性质？

2. 本章有哪些地方体现了函数思想？等差数列、等比数列分别与一元一次函数和指数函数的关系是什么？

3. 求等比数列前 n 项和公式的推导体现了怎样的解决问题的思路？

复习题一

A 组

1. 在数列$\{a_n\}$中，

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2n-1}, & n\text{为奇数；}\\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

试写出这个数列的前 5 项.

2. 生物学指出：生态系统中，在输入一个营养级的能量中，大约 10%的能量能够流到下一个营养级. 在 $H_1 \to H_2 \to H_3$ 这个生物链中，若能使 H_3 获得 10 kJ 的能量，则需 H_1 提供的能量为( )，并说明理由.

A. 10^5 kJ B. 10^4 kJ C. 10^3 kJ D. 10^2 kJ

3. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，且 $a_1=1$，则这个数列的第 10 项为( )，并说明理由.

A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，$a_n=33$，则 $n=$( )，并说明理由.

A. 48 B. 49 C. 50 D. 51

5. 在 a 和 b 两数之间插入 n 个数，使它们与 a，b 组成等差数列，则该数列的公差为( )，并说明理由.

A. $\dfrac{b-a}{n}$ B. $\dfrac{b-a}{n+1}$ C. $\dfrac{a-b}{n+1}$ D. $\dfrac{b-a}{n+2}$

6. 一张报纸，其厚度为 a，面积为 b，现将此报纸对折(即沿对边中点的连线折叠)7 次. 这时报纸的厚度和面积分别为( )，并说明理由.

A. $8a$，$\dfrac{1}{8}b$ B. $64a$，$\dfrac{1}{64}b$ C. $128a$，$\dfrac{1}{128}b$ D. $256a$，$\dfrac{1}{256}b$

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $d=\dfrac{1}{2}$，且 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=$( )，并说明理由.

A. 170 B. 150 C. 145 D. 120

8. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_n=2\times 3^{n-1}$，则由这个数列的偶数项所组成的新数列的前 n 项和为( )，并说明理由.

A. 3^n-1 B. $3(3^n-1)$ C. $\dfrac{1}{4}(9^n-1)$ D. $\dfrac{3}{4}(9^n-1)$

9. 某城市的绿化建设有如下统计数据：

年 份	2015	2016	2017	2018
绿化覆盖率/%	17.0	17.8	18.6	19.4

如果以后的几年继续依此速度发展绿化，那么至少到哪一年该城市的绿化覆盖率可超过 23.4%？

10. 某国有企业随着体制改革和技术创新,给国家创造的利税逐年增加．下面是近四年的利税值(万元):

$$1\,000,1\,100,1\,210,1\,331.$$

如果按照这个规律发展下去,下一年应给国家创造多少利税?

11. (1) 若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是等差数列,公差分别为d_1,d_2,则数列$\{a_{2n}\}$,$\{a_n+2b_n\}$是不是等差数列?如果是,公差是多少?

(2) 若数列$\{a_n\}$是等差数列,$m+n=p+q$,$m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$,试分析a_m+a_n与a_p+a_q的关系.

12. (1) 若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等比数列,则数列$\{a_{2n}\}$,$\{a_nb_n\}$是等比数列吗?

(2) 已知数列$\{a_n\}$是等比数列,且$m+n=p+q$,$m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$,试比较a_ma_n与a_pa_q的关系.

13. 观察下面的数阵,容易看出,第n行最右边的数是n^2,那么第20行最左边的数是几?第20行所有数的和是多少?

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & 3 & 4 & & & \\
 & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\
 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \\
17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

14. 小明玩投放石子游戏,从A处出发先走1 m放下1枚石子,再继续走4 m放下3枚石子,第3次走7 m再放下5枚石子,再走10 m放下7枚石子……照此规律最后走到B处放下35枚石子.小明从A处到B处的路程有多远?

15. (1) 求数列$1\frac{1}{2},2\frac{1}{4},3\frac{1}{8},\cdots$的前$n$项的和;

(2) 求数列5,55,555,…的前n项的和.

*16. 用数学归纳法证明:$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\cdots+n)^2(n\in\mathbf{N}_+)$.

*17. 用数学归纳法证明:$-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n(n\in\mathbf{N}_+)$.

*18. 证明:凸n边形的对角线的条数$f(n)=\dfrac{n(n-3)}{2}$ $(n\geqslant4$,且$n\in\mathbf{N}_+)$.

*19. 证明:凸n边形的内角和等于$(n-2)\pi(n\geqslant3$,且$n\in\mathbf{N}_+)$.

B 组

1. 一个蜂巢里有1只蜜蜂,第一天,它飞出去带回了5个伙伴;第二天,这6只蜜蜂飞出去各自带回了5个伙伴……如果这个过程继续下去,那么第六天所有的蜜蜂归巢后,蜂巢中共有蜜蜂(　　)只,并说明理由．

A. $\dfrac{6(6^6-1)}{6-1}$　　B. 6^6　　C. 6^3　　D. 6^2

2. 若数列$\{a_n\}$为等差数列,S_n为前n项和,$S_5<S_6$,$S_6=S_7$,$S_7>S_8$,则下列说法错误的是(　　),并说明理由．

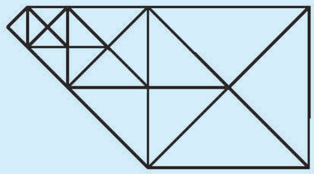
A. $d<0$　　B. $a_7=0$　　C. $S_9>S_5$　　D. S_6和S_7均为S_n的最大值

3. 计算机是将信息转换成二进制数进行处理的，二进制即“逢二进一”. 如$(1101)_2$表示二进制的数，将它转换成十进制的形式是$1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=13$，那么将二进制数$\underbrace{11\cdots1}_{16位}$转换成十进制数的形式是（　　），并说明理由.

A. $2^{17}-2$　　B. $2^{16}-1$　　C. $2^{16}-2$　　D. $2^{15}-1$

4. 假设一对成年老鼠每个月生子一次，每次生 12 只小老鼠，均雌雄各半. 小老鼠在第 1 个月末成长为成年老鼠，并且在第 2 个月结束时，每对成年老鼠将生下 12 只小老鼠，均雌雄各半. 现在有一对成年老鼠，在 1 月生小老鼠 12 只，2 月亲代和子代每对又生 12 只，此后每月，子又生孙，孙又生子……那么到 12 月，你能算出总共有多少只老鼠吗?

5. 如图，有边长为 1 的正方形，取其对角线的一半，构成新的正方形，再取新正方形对角线的一半，构成正方形……如此形成一个边长不断缩小的正方形系列.



(第 5 题)

(1) 求这一系列正方形的面积所构成的数列，并证明它是一个等比数列；

(2) 从原始的正方形开始，到第 9 次构成新正方形时，共有 10 个正方形，求这 10 个正方形面积的和；

(3) 如果把这一过程无限制地延续下去，你能否预测一下，全部正方形面积相加“最终”会达到多少?

6. 摄影胶片绕在盘上，空盘时盘心直径 80 mm，满盘时直径为160 mm，已知胶片厚度是 0.1 mm. 则满盘时，一盘胶片长约为多少?（以胶片外侧为半径计算，结果保留 π）

7. 在一次人才招聘会上，甲、乙两家公司开出的工资标准分别是：

甲公司：第一年月工资 1 500 元，以后每年的月工资比上一年的月工资增加 230 元；

乙公司：第一年月工资 2 000 元，以后每年的月工资在上一年的月工资基础上递增 5%.

设某人年初想从甲、乙两公司中选择一家公司去工作.

(1) 若此人分别在甲公司或乙公司连续工作 n 年，则他在两公司第 n 年的月工资分别为多少?

(2) 若此人在一家公司连续工作 10 年，则从哪家公司得到的报酬较多?（结果精确到 1 元）

*8. 用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}(n\in\mathbf{N}_+)$.

C　组

1. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为 S_n，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q. 已知 $b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$.

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 当 $d>1$ 时，若数列$\{c_n\}$满足 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

2. 甲、乙两大超市同时开业，第一年的全年销售额为 a 万元，由于经营方式不同，甲超市前 n 年的总销售额为$\frac{a}{2}(n^2-n+2)$万元，乙超市第 n 年的销售额比前一年销售额多$a\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$万元.

(1) 求甲、乙两超市第 n 年销售额的表达式；

(2) 若其中某一超市的年销售额不足另一超市的年销售额的 50%，则该超市将被另一超市收购，判断哪一超市有可能被收购? 如果有这种情况，至少会出现在第几年?

2 第二章
导数及其应用

在日常生活中，我们有时会得到这样的信息：

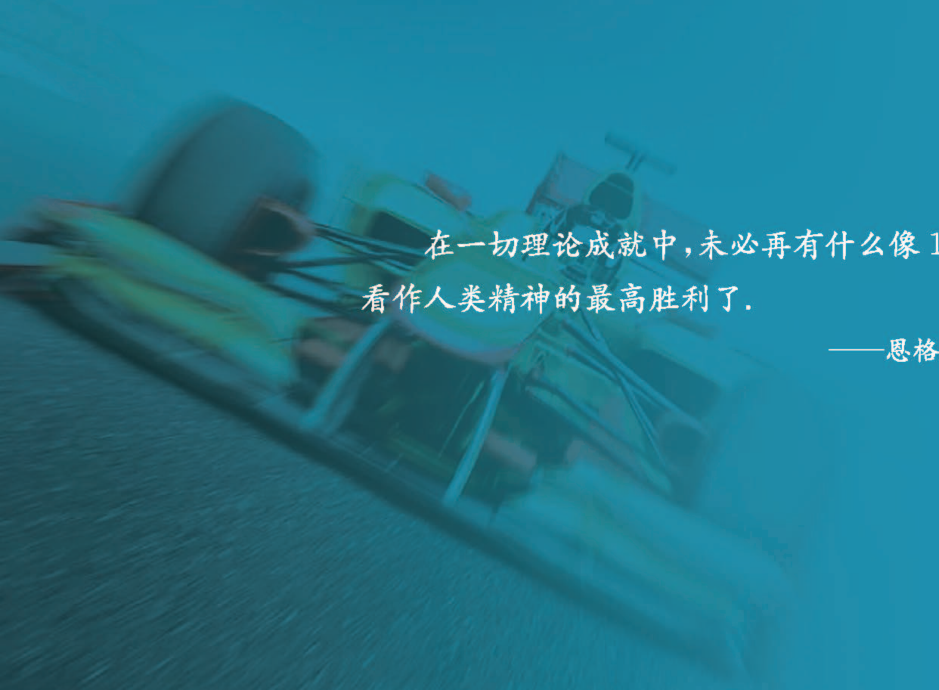
中国研发的歼 20 战斗机的最大飞行速度是 3 060 km/h.

据某气象台报道，某市在 20 日凌晨 1:00～2:00 时降雨强度达 72 mm/h；局部地区瞬间降雨强度达99 mm/h.

……

“飞行速度”“降雨强度”刻画的都是瞬时变化的情况，也是数学中导数概念的原型. 导数是数学中最重要、最基本的概念之一，在日常生活和科学研究中有广泛的应用.

本章将讨论导数概念及其几何意义，学习导数的运算，解决相关的应用问题，发展数学抽象、直观想象、数学运算等核心素养.



在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了.

——恩格斯(Friedrich Engels，1820—1895)

§1 平均变化率与瞬时变化率

1.1 平均变化率

世界上的变化无处不在，人们经常关心变化的快慢问题. 如何刻画事物变化的快慢呢？

实例分析

实例 1 物体从某一时刻开始运动，设 s 表示此物体经过时间 t 走过的路程，显然 s 是时间 t 的函数，表示为 $s=s(t)$.

在运动的过程中测得了一些数据，见表 2－1.

表 2－1

t/s	0	2	5	10	13	15
s/m	0	6	9	20	32	44

物体在 0 s 到 2 s 和 10 s 到 13 s 这两段时间内，哪一段时间运动得快？如何刻画物体运动的快慢？

解 通常用平均速度(即路程相对于时间的平均变化率)来比较运动的快慢.

在 0 s 到 2 s 这段时间内，物体的平均速度为 $\frac{6-0}{2-0}=3(\mathrm{m/s})$；

在 10 s 到 13 s 这段时间内，物体的平均速度为 $\frac{32-20}{13-10}=4(\mathrm{m/s})$.

显然，物体在后一段时间比前一段时间运动得快.

实例 2 某病人吃完退烧药，他的体温变化如图 2－1.

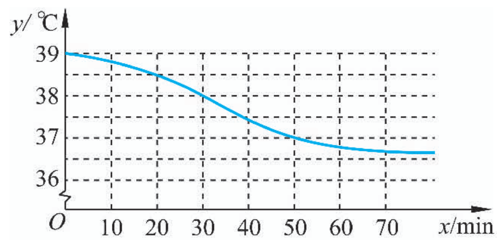


图 2－1

比较时间 x 从 0 min 到 20 min 和从 20 min 到 30 min 体温的变化情况，哪段时间体温变化较快？如何刻画体温变化的快慢？

解 根据图象可以看出：

当时间 x 从 0 min 到 20 min 时，体温 y 从 39 ℃变为 38.5 ℃，下降了 0.5 ℃；

当时间 x 从 20 min 到 30 min 时，体温 y 从 38.5 ℃变为 38 ℃，下降了 0.5 ℃.

两段时间下降了相同的体温，而后一段时间比前一段短，所以体温从 20 min 到 30 min 这段时间下降得比从 0 min 到 20 min 这段时间快.

也可以比较在这两段时间内，体温的平均变化率（单位时间内体温的平均变化量），于是当时间 x 从 0 min 变到 20 min 时，体温 y 相对于时间 x 的平均变化率为

$$\frac{38.5-39}{20-0}=\frac{-0.5}{20}=-0.025(℃/\text{min});$$

当时间 x 从 20 min 变到 30 min 时，体温 y 相对于时间 x 的平均变化率为

$$\frac{38-38.5}{30-20}=\frac{-0.5}{10}=-0.05(℃/\text{min}).$$

这里出现了负号，它表示体温下降了. 显然，绝对值越大，下降得越快. 因此，体温从 20 min到 30 min 这段时间下降得比 0 min 到 20 min 这段时间要快.

实例 1 中，用一段时间内物体的平均速度刻画了物体运动的快慢，当时间从 t_0 变为 t_1 时，物体所走的路程从 $s(t_0)$变为 $s(t_1)$，这段时间内物体的

$$\text{平均速度}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}.$$

实例 2 中，用一段时间内体温的平均变化率刻画了体温变化的快慢，当时间从 x_0 变为 x_1 时，体温从 $y(x_0)$变为 $y(x_1)$，这段时间内体温的

$$\text{平均变化率}=\frac{y(x_1)-y(x_0)}{x_1-x_0}.$$

抽象概括

对一般的函数 $y=f(x)$来说，当自变量 x 从 x_1 变为 x_2 时，函数值从$f(x_1)$变为$f(x_2)$，它在区间$[x_1,x_2]$的

$$\text{平均变化率}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

通常我们把自变量的变化 x_2-x_1 称作自变量 x 的改变量，记作 Δx，函数值的变化 $f(x_2)-f(x_1)$称作函数值 y 的改变量，记作 Δy. 这样，函数的平均变化率就可以表示为函数值的改变量与自变量的改变量之比，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

用它来刻画函数值在区间$[x_1,x_2]$上变化的快慢.

练 习

1. 某人服药后，吸收药物的情况可以用血液中药物的质量浓度 c（单位：μg/mL）来表示，它是时间 t（单位：min）的函数，表示为 $c=c(t)$. 下表给出了 $c(t)$ 的一些函数值：

t/min	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$c(t)$/(μg/mL)	0.84	0.89	0.94	0.98	1.00	1.00	0.97	0.90	0.79	0.63	0.41

(1) 求服药后 30 min 内，30 min 到 40 min，80 min 到 90 min 这 3 段时间内，血液中药物质量浓度的平均变化率；

(2) 讨论刻画血液中的药物质量浓度变化快慢的方法，并说明上述 3 段时间中，药物质量浓度变化最快的时间段.

1.2 瞬时变化率

问题提出

上面用平均速度刻画了物体在一段时间内运动的快慢.

在实际中，还常常要考虑物体在某一瞬间的速度. 比如，我们看到汽车在行驶过程中不断变化的速度表，每个时刻指针指向的数字就是汽车在该时刻的瞬时速度.

如何理解瞬时速度？它与平均速度有何关系呢？

实例分析

实例 1 一个小球从高空自由下落，其下落的高度 h（单位：m）与时间 t（单位：s）的函数关系为

$$h=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，g 为重力加速度（g 取 9.8 m/s^2）. 估算小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度.

分析 当时间 t 从 t_0 变到 t_1 时，根据平均速度公式

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{h(t_1)-h(t_0)}{t_1-t_0},$$

可以求出从 5 s 到 6 s 这段时间内小球的平均速度

$$\frac{h(6)-h(5)}{6-5}=\frac{\frac{1}{2}\times 9.8\times 6^2-\frac{1}{2}\times 9.8\times 5^2}{1}=\frac{176.4-122.5}{1}=53.9(\text{m/s}).$$

有时用它来近似表示小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度.

为了提高精度,可以缩短时间间隔,如求出 5 s 到 5.1 s 这段时间内的平均速度

$$\frac{h(5.1)-h(5)}{5.1-5}=\frac{\frac{1}{2}\times 9.8\times 5.1^2-\frac{1}{2}\times 9.8\times 5^2}{5.1-5}=\frac{127.449-122.5}{0.1}=49.49(\mathrm{m/s}),$$

用它来近似表示小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度,这样更接近实际情况.

如果时间间隔进一步缩短,那么可以想象,平均速度就更接近小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度.

解 将时间间隔每次缩短为上次的 $\frac{1}{10}$,计算出相应的平均速度,得到表 2-2.

表 2-2

t_0/s	t_1/s	时间 t 的改变量 (Δt)/s	高度 h 的改变量 (Δh)/m	平均速度 $\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)$/(m/s)
5	5.1	0.1	4.949	49.49
5	5.01	0.01	0.490 49	49.049
5	5.001	0.001	0.049 004 9	49.004 9
5	5.000 1	0.000 1	0.004 900 049	49.000 49
5	…	…	…	…

可以看出,当时间 t_1 趋于 $t_0=5$ s 时,平均速度趋于 49 m/s,因此,可以认为小球在 $t_0=5$ s 这个时刻的瞬时速度为 49 m/s. 从上面的分析和计算可以看出,瞬时速度为 49 m/s 的物理意义是:如果小球保持这一时刻的速度进行运动,每秒将要运动 49 m.

同学们可以动手计算当 t_1 从"左侧"趋近于 $t_0=5$ s 时的平均速度.

动手计算

根据 $h=\frac{1}{2}gt^2$,解决下面的问题:

填写表 2-3,估计小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度.

表 2-3

t_0/s	t_1/s	时间 t 的改变量 (Δt)/s	高度 h 的改变量 (Δh)/m	平均速度 $\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)$/(m/s)
4.9	5			
4.99	5			
4.999	5			
4.999 9	5			

实例 2 如图 2-2，一根质量分布不均匀的合金棒，长为10 m. 设 x(单位：m)表示 OX 这段棒的长，y(单位：kg)表示 OX 这段棒的质量，它们满足以下函数关系：

图 2-2

$$y=f(x)=2\sqrt{x}.$$

估计该合金棒在 $x=2$ m 处的线密度(物理学的“线密度”定义为单位长度的质量).

分析 我们还是从一段合金棒的平均线密度开始考虑. 一段合金棒的质量除以这段合金棒的长度，就是这段合金棒的平均线密度.

求出 $x_0=2$ m 到 $x_1=3$ m 这段合金棒的平均线密度

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3-2}\approx 2\times(1.732-1.414)=0.636(\text{kg/m}),$$

它可以近似表示 $x_0=2$ m 处合金棒的线密度.

与实例 1 类似，为了提高精度，可以缩短计算线密度所需距离间隔，如取原长度的 $\frac{1}{10}$，即求出 2 m 到2.1 m 这段合金棒的平均线密度

$$\frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2}=\frac{2\sqrt{2.1}-2\sqrt{2}}{2.1-2}=20(\sqrt{2.1}-\sqrt{2})\approx 20\times(1.449-1.414)=0.700(\text{kg/m}),$$

用它来近似表示合金棒在 $x_0=2$ m 处的线密度.

如果合金棒的长度进一步缩小，那么可以想象，平均线密度就会更接近合金棒在 $x=2$ m 处的线密度.

解 由 $y=f(x)=2\sqrt{x}$，可以计算出相应的平均线密度，得到表 2-4.

表 2-4

x_0/m	x_1/m	长度 x 的改变量 (Δx)/m	质量 y 的改变量 (Δy)/kg	平均线密度 $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$/(kg/m)
2	2.1	0.1	0.070 0	0.700
2	2.01	0.01	0.007 062	0.706
2	2.001	0.001	0.000 707 0	0.707
2	2.000 1	0.000 1	0.000 0707 1	0.707
2	…	…	…	…

可以看出，当 x_1 趋于 $x_0=2$ m 时，平均线密度趋于 0.707 kg/m.

与实例 1 类似，同学们也可以动手计算当 x_1 从“左侧”趋近于 $x_0=2$ m 时的平均线密度，会发现也趋于 0.707 kg/m.

据此，可以认为合金棒在 $x_0=2$ m 处的线密度约为 0.707 kg/m.

从上面的分析和计算可以看出，线密度为 0.707 kg/m 的物理意义是：如果有 1 m 长的这种线密度的质量均匀的合金棒，其质量将为 0.707 kg.

实例 1 和实例 2 都是通过减小自变量的改变量(为计算方便选取$\frac{1}{10}$,也可以选取$\frac{1}{20}$等),用平均变化率"逼近"瞬时变化率.

抽象概括

对于一般的函数 $y=f(x)$,在自变量 x 从 x_0 变到 x_1 的过程中,若设 $\Delta x=x_1-x_0$,$\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$,则该函数的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果当 Δx 趋于 0 时,平均变化率趋于某个值,那么这个值就是 $f(x)$在点 x_0 的**瞬时变化率**. 瞬时变化率刻画的是函数在某一点处变化的快慢.

练　习

1. 在自由落体运动中,根据 $h=\frac{1}{2}gt^2$,仿照实例 1,估算当 $t=2$ s 时的瞬时速度.

2. 已知函数 $y=\frac{1}{x}$,求自变量 x 在以下的变化过程中,该函数的平均变化率:

(1) 自变量 x 从 1 变到 1.1;

(2) 自变量 x 从 1 变到 1.01;

(3) 自变量 x 从 1 变到 1.001.

估算当 $x=1$ 时,该函数的瞬时变化率.

习题 2-1

A　组

1. 下表为 3 名运动员 1 500 m 跑的分段成绩:

分段/m 运动员	[0,800]	[800,1 200]	[1 200,1 500]
1	1 min 57.92 s	1 min 0.04 s	39.83 s
2	1 min 58.24 s	59.88 s	39.69 s
3	1 min 58.76 s	59.36 s	39.74 s

(1) 这 3 名运动员谁全程跑得最快?

(2) 这 3 名运动员谁在最后 300 m 的冲刺阶段跑得最快?

2. 已知函数 $y=f(x)=-2x+1$.

(1) 当 x 从 1 变为 2 时，函数值 y 改变了多少？此时该函数的平均变化率是多少？

(2) 当 x 从 -1 变为 1 时，函数值 y 改变了多少？此时该函数的平均变化率是多少？

(3) 该函数变化的快慢有何特点？求该函数在 $x=1$，$x=3$ 处的瞬时变化率.

3. 某物体走过的路程 s(单位：m)与时间 t(单位：s)的函数关系为 $s=t^2-1$，通过平均速度估计物体在下列各时刻的瞬时速度：

(1) $t=0$；　(2) $t=2$；　(3) $t=4$.

4. 通过平均变化率估计函数 $y=2x^2$ 在下列各点处的瞬时变化率：

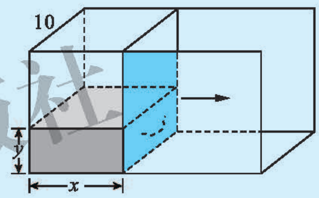
(1) $x=1$；　(2) $x=-1$；　(3) $x=0$.

5. 通过平均变化率估计函数 $y=\dfrac{1}{x}+2$ 在下列各点处的瞬时变化率：

(1) $x=-1$；　(2) $x=1$；　(3) $x=2$.

B　组

1. 有一个长方体的容器(如图)，它的宽为 10 cm，高为 100 cm. 右侧面为一活塞，容器中装有 1 000 mL 的水. 活塞的初始位置(距左侧面)为 $x_0=1$ cm，水面高度为 100 cm. 当活塞位于距左侧面 x cm 的位置时，水面高度为 y cm.



(第 1 题)

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式 $y=f(x)$，$x\leqslant 200$ cm；

(2) 活塞的位置 x 从 1 cm 变为 2 cm，水面高度 y 改变了多少？活塞的位置 x 从 8 cm 变为 10 cm，水面高度 y 改变了多少？以上哪个过程水面高度的变化较快？

(3) 试估计当 $x=10$ cm 时，水面高度 y 的瞬时变化率.

2. 圆的面积 S 随着半径 r 的变化而变化. 试分析 S 随半径 r 变化的快慢情况.

§ 2 导数的概念及其几何意义

2.1 导数的概念

本章 §1 中讨论了平均变化率与瞬时变化率的关系，本节将进一步研究函数的瞬时变化率问题.

设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 变到 x_1 时，函数值 y 从 $f(x_0)$变到 $f(x_1)$，函数值 y 关于 x 的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

当 x_1趋于 x_0，即 Δx 趋于 0 时，如果平均变化率趋于一个固定的值①，那么这个值就是函数 $y=f(x)$在点 x_0 的瞬时变化率. 在数学中，称瞬时变化率为函数$y=f(x)$在点 x_0处的**导数**，通常用符号$f'(x_0)$表示，记作

$$f'(x_0)=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

例 1 一条水管中流过的水量 y(单位：$\mathrm{m^3}$)与时间 x(单位：s)的函数关系为 $y=f(x)=3x$. 求函数 $y=f(x)$在 $x=2$ 处的导数 $f'(2)$，并解释它的实际意义.

解 当 x 从 2 变到 $2+\Delta x$ 时，函数值从 3×2 变到 $3(2+\Delta x)$，函数值 y 关于 x 的平均变化率为

$$\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{3(2+\Delta x)-3\times 2}{\Delta x}=\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3(\mathrm{m^3/s}).$$

当 x 趋于 2，即 Δx 趋于 0 时，平均变化率总是 3，所以

$$f'(2)=3\ \mathrm{m^3/s}.$$

导数 $f'(2)$表示当 $x=2$ s 时水量的瞬时变化率，即水流的瞬时速度. 也就是说，如果水管中的水保持以 $x=2$ s 时的瞬时速度流动的话，每经过 1 s，水管中流过的水量为 3 $\mathrm{m^3}$.

例 2 一名食品加工厂的工人上班后开始连续工作，生产的食品量 y(单位：kg)与其工作时间 x(单位：h)的函数关系为 $y=f(x)$. 假设函数$y=f(x)$在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的导数分别为$f'(1)=4$ 和 $f'(3)=3.5$，试解释它们的实际意义.

解 $f'(1)=4$ 表示该工人上班后工作 1 h 的时候，其生产速度(即工作效率)为 4 kg/h.

---

① 这个值称为：当 x_1 趋于 x_0 时，平均变化率的极限. 记作 $\lim\limits_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

也就是说，如果保持这一生产速度，那么他每时可以生产 4 kg 的食品.

$f'(3)=3.5$ 表示该工人上班后工作 3 h 的时候，其生产速度为 3.5 kg/h. 也就是说，如果保持这一生产速度，那么他每时可以生产 3.5 kg 的食品.

例 3 服药后，人体血液中药物的质量浓度 c(单位：μg/mL)是时间 t(单位：min)的函数 $c=c(t)$. 假设函数 $c=c(t)$在 $t=10$ 和 $t=100$ 处的导数分别为 $c'(10)=1.5$ 和 $c'(100)=-0.6$，试解释它们的实际意义.

解 $c'(10)=1.5$ 表示服药后 10 min 时，血液中药物的质量浓度上升的速度为 1.5 μg/(mL·min). 也就是说，如果保持这一速度，每经过 1 min，血液中药物的质量浓度将上升 1.5 μg/mL.

$c'(100)=-0.6$ 表示服药后 100 min 时，血液中药物的质量浓度下降的速度为 0.6 μg/(mL·min). 也就是说，如果保持这一速度，每经过 1 min，血液中药物的质量浓度将下降 0.6 μg/mL.

思考交流

举出生活中 2 个函数的实例，结合具体问题讨论它们在某一点处导数的实际意义.

练 习

1. 根据例 1 中的函数 $y=f(x)=3x$，求 $f'(4)$，并解释它的实际意义.
2. 设 x(单位：km)表示从一条河流的某一处到其源头的距离，y(单位：km)表示这一点的海拔高度，y 与 x 的函数关系为 $y=f(x)$. 若函数 $y=f(x)$在 $x=100$ 处的导数 $f'(100)=-0.1$，试解释它的实际意义.

2.2 导数的几何意义

分析理解

设函数 $y=f(x)$的图象是一条光滑的曲线，且函数 $y=f(x)$在区间$[x_0, x_0+\Delta x]$的平均变化率为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，如图 2－3，它是经过 $A(x_0, f(x_0))$和 $B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$两点的直线的斜率. 这条直线称为曲线 $y=f(x)$在点 A 处的一条割线.

如图 2－4，设函数 $y=f(x)$的图象是一条光滑的曲线，从图象上可以看出：当 Δx 取不同的值时，可以得到不同的割线；当 Δx 趋于 0 时，点 B 将沿着曲线 $y=f(x)$趋于点 A，割线

AB 将绕点 A 转动趋于直线 l. 称直线 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线，或称直线 l 和曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处相切. 该切线的斜率就是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$.

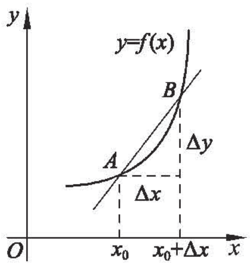


图 2-3

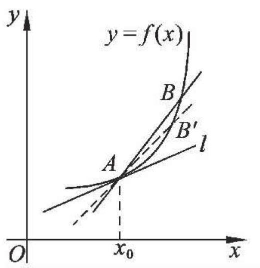


图 2-4

抽象概括

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率反映了导数的几何意义.

例 4 已知函数 $y=x^2$ 及自变量 $x_0=-2$.

(1) 分别对 $\Delta x=1, 0.5, 0.1$ 求 $y=x^2$ 在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率，并画出过点 $(x_0, f(x_0))$ 的相应割线；

(2) 求函数 $y=x^2$ 在 x_0 处的导数，并画出曲线 $y=x^2$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线.

解 (1) 当 $\Delta x=1, 0.5, 0.1$ 时，区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 相应为 $[-2,-1]$，$[-2,-1.5]$，$[-2,-1.9]$. $y=x^2$ 在这些区间上的平均变化率分别为

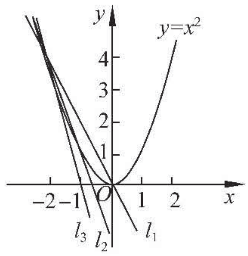


图 2-5

$$\frac{f(-1)-f(-2)}{1}=\frac{(-1)^2-(-2)^2}{1}=-3,$$

$$\frac{f(-1.5)-f(-2)}{0.5}=\frac{(-1.5)^2-(-2)^2}{0.5}=-3.5,$$

$$\frac{f(-1.9)-f(-2)}{0.1}=\frac{(-1.9)^2-(-2)^2}{0.1}=-3.9.$$

如图 2-5，其相应割线分别是经过点 $(-2,4)$ 和点 $(-1,1)$ 的直线 l_1，经过点 $(-2,4)$ 和点 $(-1.5,2.25)$ 的直线 l_2，经过点 $(-2,4)$ 和点 $(-1.9,3.61)$ 的直线 l_3.

(2) $y=x^2$ 在区间 $[-2,-2+\Delta x]$ 上的平均变化率为

$$\frac{(-2+\Delta x)^2-(-2)^2}{\Delta x}=\frac{-4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=-4+\Delta x.$$

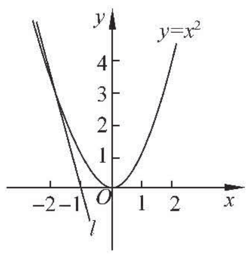


图 2-6

令 Δx 趋于 0，知函数 $y=x^2$ 在 $x_0=-2$ 处的导数为 -4.

因此，曲线 $y=x^2$ 在点 $(-2,4)$ 处的切线为经过点 $(-2,4)$，斜率为 -4 的直线 l，如图 2-6.

例 5 求函数 $y=f(x)=2x^3$ 在 $x=1$ 处的切线的方程.

解
$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{2(1+\Delta x)^3-2\times1^3}{\Delta x}$$
$$=\frac{2[1+3\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]-2}{\Delta x}$$
$$=6+6\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

令 Δx 趋于 0,可知 $y=2x^3$ 在 $x=1$ 处的导数为 $f'(1)=6$.

于是,函数 $y=2x^3$ 在点 $(1,f(1))$ 即 $(1,2)$ 处的切线斜率为 6,所以即该切线经过点 $(1,2)$,且斜率为 6.

因此,函数 $y=f(x)=2x^3$ 在 $x=1$ 处的切线方程为
$$y-2=6(x-1),$$
即
$$y=6x-4.$$

切线如图 2-7.

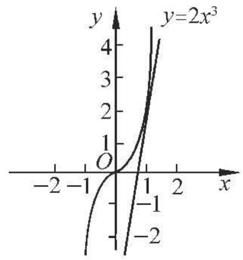


图 2-7

练 习

1. 求函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=2$ 处切线的斜率.
2. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

习题 2-2

A 组

1. 已知物体运动的路程 s(单位:m)与时间 t(单位:s)的函数关系为 $s=2t+1$. 求该函数在下列各点处的导数,并解释它们的实际意义:

   (1) $t=1$;　(2) $t=2$;　(3) $t=5$.

2. 已知球的体积 V 与半径 r 的函数关系为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,用定义求 V 在 $r=5$ 处的导数,并对 $V'(5)$ 的意义进行解释.

3. 求函数 $f(x)=-2x^2$ 在下列各点处的导数,并说明它们的几何意义:

   (1) $x=-1$;　(2) $x=0$;　(3) $x=2$.

4. 求函数 $y=\frac{5}{x}$ 在下列各点处的导数:

   (1) $x=-1$;　(2) $x=1$;　(3) $x=5$.

5. 求函数 $y=\frac{1}{x}+2x$ 在 $x=1$ 处的切线 l 的斜率及切线 l 的方程.

B 组

1. 根据导数的几何意义，求函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在 $x=1$ 处的导数.

2. 求函数 $y=\dfrac{1}{2-x}$ 在 $x=-1$ 处的导数，及曲线在点 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ 处的切线的方程.

信息技术应用

用割线逼近切线

在函数 $y=0.3x^2-1.3x+3.4$ 的图象上任取两点 P,Q，则割线 PQ 的斜率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$（如图 2－8）. 利用 GeoGebra 可以动态地展现出用割线逼近切线的过程.

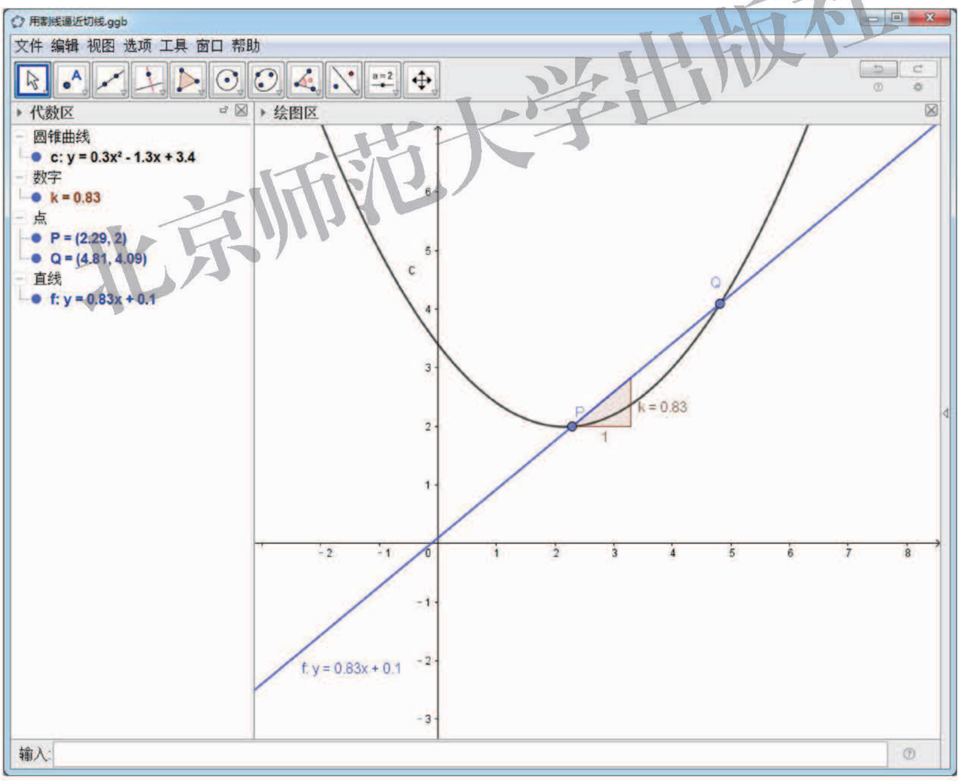


图 2－8

如图 2－8，拖动点 Q 沿着曲线逐渐靠近点 P，割线 PQ 将绕着点 P 逐渐转动. 当点 Q 沿着曲线趋于点 P，即 Δx 趋于 0 时，割线 PQ 就趋于过点 P 的切线.

观察、比较割线 PQ 在点 Q 的变化下，其斜率值的变化情况(如图 2－9、图 2－10).

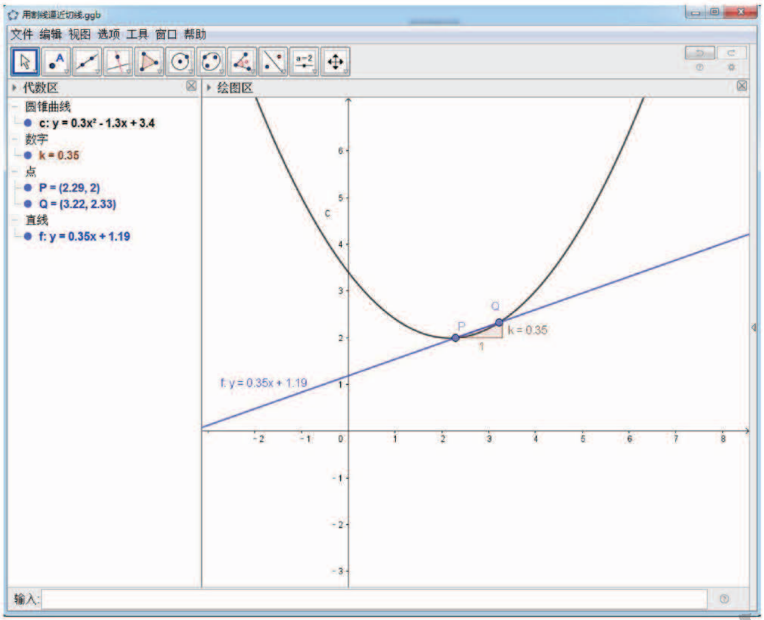


图 2－9

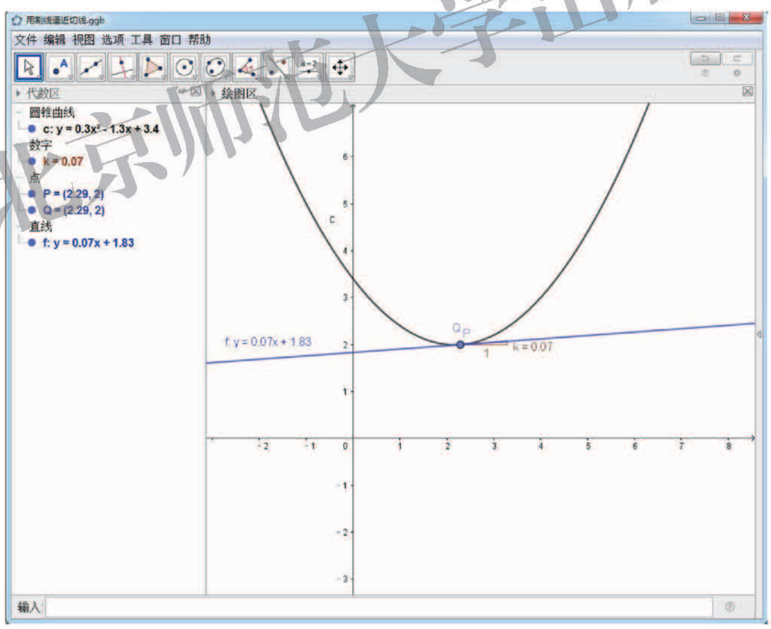


图 2－10

§ 3 导数的计算

例 1 已知一个运动物体走过的路程 s(单位:m)与时间 t(单位:s)的函数关系为 $s=s(t)=2t^2$. 求 $s'(5)$,并解释它的实际意义.

解 $\Delta s=s(5+\Delta t)-s(5)=2(5+\Delta t)^2-2\times 5^2=2[10\Delta t+(\Delta t)^2]$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2[10\Delta t+(\Delta t)^2]}{\Delta t}=2(10+\Delta t).$$

当 Δt 趋于 0 时,得到导数

$$s'(5)=20(\mathrm{m/s}).$$

导数 $s'(5)$表示的是物体在第 5 秒时的瞬时速度,即物体在第 5 秒时的瞬时速度为 20 m/s.

抽象概括

计算函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数的步骤如下:

(1) 通过自变量在 $x=x_0$ 处的改变量 Δx,确定函数值在 x_0 处的改变量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

(2) 确定函数 $y=f(x)$从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 处的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

(3) 当 Δx 趋于 0 时,得到导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

例 2 求函数 $y=f(x)=\frac{2}{x}+x$ 在下列各点处的导数:

(1) $x=1$; (2) $x=x_0$.

解 (1) $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)$

$$=\frac{2}{1+\Delta x}+(1+\Delta x)-\left(\frac{2}{1}+1\right)$$

$$=\frac{-2\Delta x}{1+\Delta x}+\Delta x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{1+\Delta x}+1.$$

当 Δx 趋于 0 时,得到导数

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-2}{1+\Delta x}+1\right)=-1.$$

(2)$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$$=\frac{2}{x_0+\Delta x}+(x_0+\Delta x)-\left(\frac{2}{x_0}+x_0\right)$$

$$=-\frac{2\Delta x}{x_0^2+x_0\Delta x}+\Delta x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2}{x_0^2+x_0\Delta x}+1.$$

当 Δx 趋于 0 时，得到导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{2}{x_0^2+x_0\Delta x}+1\right)=-\frac{2}{x_0^2}+1.$$

例 2 中的函数 $f(x)=\frac{2}{x}+x$ 对于定义域中的每一个自变量的取值 x_0，都有唯一一个导数值 $f'(x_0)=-\frac{2}{x_0^2}+1$ 与之对应，所以 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1$ 是 x 的函数.

抽象概括

一般地，如果一个函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 的每一点 x 处都有导数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

那么 $f'(x)$ 是关于 x 的函数，称 $f'(x)$ 为 $y=f(x)$ 的**导函数**，也简称为**导数**，有时也将导数记作 y'.

例如，由例 2 可知函数 $f(x)=\frac{2}{x}+x$ 的导数为

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1.$$

显然，前面求 $f(x)=\frac{2}{x}+x$ 在 $x=1$，x_0 各点的导数就是导数 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1$ 在各点处的函数值.

例 3 求 $y=f(x)=3x^2-x$ 的导数 $f'(x)$，并利用 $f'(x)$ 求 $f'(1)$，$f'(-2)$，$f'(0)$.

解 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$$=3(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-(3x^2-x)$$

$$=3(\Delta x)^2+6x\Delta x-\Delta x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3(\Delta x)^2+6x\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=3\Delta x+6x-1.$$

当 Δx 趋于 0 时，得到导数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3\Delta x+6x-1)=6x-1.$$

可得

$$f'(1)=6\times 1-1=5,$$
$$f'(-2)=6\times(-2)-1=-13,$$
$$f'(0)=6\times 0-1=-1.$$

我们通过导数的定义求出了一些简单函数的导数. 如何系统地求函数的导数要用到更进一步的数学知识，中学阶段不作系统讨论. 对我们来说，重要的是理解导数概念及其实际意义，并利用它们去思考、分析和解决一些问题.

为了解决可能遇到的导数计算问题，下面给出了一个简单的导数公式表（表 2-5），列出了学过的基本初等函数的导数. 以后，遇到求这些函数导数的问题时，可以直接查表.

表 2-5　导数公式表

函　数	导　数	函　数	导　数
$y=c$（c 是常数）	$y'=0$	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=x^{\alpha}$（α 是实数）	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=a^{x}$（$a>0, a\neq 1$）	$y'=a^{x}\ln a$ 特别地 $(e^{x})'=e^{x}$	$y=\tan x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$
$y=\log_{a}x$（$a>0, a\neq 1$）	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ 特别地 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$		

练　习

1. 求下列函数的导数：

   (1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　　(2) $y=3^{x}$；　　(3) $y=6\tan x$.

2. 已知自由下落的物体下落的高度 h（单位：m）与时间 t（单位：s）的函数关系为 $h=h(t)=\dfrac{1}{2}gt^{2}$，取 $g=10\ \mathrm{m/s^{2}}$. 求 $h'(3)$，并解释它的实际意义.

3. 求函数 $y=\dfrac{100}{x}$ 的导数 $f'(x)$，并求 $f'(1)$，$f'(2)$，$f'(3)$.

4. 求函数 $y=\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的导数.

习题 2-3

A 组

1. 求 $f(x)=3x^2+x$ 的导数 $f'(x)$，并求 $f'(2)$，$f'(-2)$，$f'(3)$.
2. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-3$ 的导数 $f'(x)$，并求 $f'(1)$，$f'(-1)$，$f'(5)$.
3. 求函数 $f(x)=2x-3$ 的导数 $f'(x)$，并求 $f'(0)$，$f'(-1)$，$f'(3)$.
4. 分别求出函数 $f(x)=-2x$ 与 $g(x)=-2x+1$ 的导数，并画出导数的图象.
5. 求曲线 $f(x)=x^2$ 的一条与直线 $y=2x+1$ 平行的切线的方程.

B 组

1. 利用二项式定理，根据定义求函数 $y=x^5$ 的导数.
2. 根据定义，结合表 2-5 导数公式表求函数 $y=3^x+3$ 的导数.

§4 导数的四则运算法则

4.1 导数的加法与减法法则

实例分析

求函数 $y=f(x)=x+x^2$ 的导数.

给定自变量 x_0 的一个改变量 Δx，则函数值 y 的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=(x_0+\Delta x)+(x_0+\Delta x)^2-(x_0+x_0^2)\\&=\Delta x+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

相应的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=1+2x_0+\Delta x.$$

当 Δx 趋于 0 时，得到函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数

$$f'(x_0)=1+2x_0.$$

于是有导数 $$f'(x)=1+2x.$$

另一方面，设 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2$，则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. 根据导数公式表，可得

$$f'_1(x)=(x)'=1，f'_2(x)=(x^2)'=2x，\text{于是有 } f'(x)=f'_1(x)+f'_2(x).$$

即 $$(x+x^2)'=x'+(x^2)'.$$

抽象概括

两个函数和(或差)的导数等于这两个函数导数的和(或差)，即

$$\boxed{\begin{aligned}&[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x),\\&[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x).\end{aligned}}$$

例 1 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+2^x$；　　(2) $y=\sqrt{x}-\ln x$.

解 (1) 函数 $y=x^2+2^x$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=2^x$ 的和，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=2^x\ln 2.$$

根据求导的加法法则，可得

$$(x^2+2^x)'=f'(x)+g'(x)$$
$$=2x+2^x\ln 2.$$

(2) 函数 $y=\sqrt{x}-\ln x$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\ln x$ 的差，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

根据求导的减法法则，可得

$$(\sqrt{x}-\ln x)'=f'(x)-g'(x)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}.$$

例 2 求曲线 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线的方程.

解 首先求出函数 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

函数 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 是函数 $f(x)=x^3$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 的差，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=3x^2,\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

根据求导的减法法则，可得

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)'=(x^3)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=3x^2-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3x^2+\frac{1}{x^2}.$$

将 $x=1$ 代入导数，得

$$3\times 1+\frac{1}{1}=4.$$

即曲线 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 4，从而其切线的方程为

$$y=4(x-1)，即\ y=4x-4.$$

练 习

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+2x$；　　(2) $y=3^x-x^3$；

(3) $y=x^{\frac{1}{3}}+\ln x$；　　(4) $y=e^x-\dfrac{1}{x}+x^{\frac{1}{5}}$.

4.2 导数的乘法与除法法则

设函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数为 $f'(x_0)$，$g(x)=x^2$. 求函数 $y=f(x)g(x)$在 $x=x_0$ 处的导数.

分析理解

给定自变量 x_0 的一个改变量 Δx，可以得到函数值的改变量

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2 f(x_0+\Delta x)-x_0^2 f(x_0).$$

相应的平均变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{(x_0+\Delta x)^2 f(x_0+\Delta x)-x_0^2 f(x_0)}{\Delta x}\\&=\frac{(x_0+\Delta x)^2[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]+[(x_0+\Delta x)^2-x_0^2]f(x_0)}{\Delta x}\\&=(x_0+\Delta x)^2\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}f(x_0).\end{aligned}$$

令 Δx 趋于 0，由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)^2=x_0^2$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=g'(x_0)=2x_0,$$

可知函数 $y=f(x)g(x)=x^2 f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数为 $x_0^2 f'(x_0)+2x_0 f(x_0)$.

于是，$[x^2 f(x)]'=x^2 f'(x)+(x^2)'f(x)$.

即 $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

抽象概括

一般地，若两个函数 $f(x)$和 $g(x)$的导数分别是 $f'(x)$和 $g'(x)$，则

$$\boxed{\begin{aligned}&[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\\&\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},g(x)\neq 0.\end{aligned}}$$

特别地，

$$\boxed{[kf(x)]'=kf'(x),k\in\mathbf{R}.}$$

例 3 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2\mathrm{e}^x$； (2) $y=\sqrt{x}\sin x$； (3) $y=x\ln x$.

解 (1) 函数 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 的积，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\mathrm{e}^x.$$

根据求导的乘法法则，可得

$$(x^2\mathrm{e}^x)'=2x\cdot\mathrm{e}^x+x^2\cdot\mathrm{e}^x=(2x+x^2)\mathrm{e}^x.$$

(2) 函数 $y=\sqrt{x}\sin x$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\sin x$ 的积，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad g'(x)=\cos x.$$

根据求导的乘法法则，可得

$$(\sqrt{x}\sin x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x+\sqrt{x}\cdot\cos x.$$

(3) 函数 $y=x\ln x$ 是函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\ln x$ 的积，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=1,\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

根据求导的乘法法则，可得

$$(x\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

例 4 求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{\sin x}{x}$； (2) $y=\frac{x^2}{\ln x}$.

解 (1) 函数 $y=\frac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=x$ 的商，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=\cos x,\quad g'(x)=1.$$

根据求导的除法法则，可得

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

(2) 函数 $y=\frac{x^2}{\ln x}$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\ln x$ 的商，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

根据求导的除法法则，可得

$$\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)'=\frac{2x\cdot\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}.$$

练　习

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3\sin x$；　　(2) $y=\sqrt{x}\ln x$；

(3) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$；　　(4) $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$.

2. 设 $f(x)=x^3$，$g(x)=x^2$，试说明：

$$[f(x)g(x)]'\neq f'(x)g'(x),\quad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'\neq\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 5　求下列函数的导数：

(1) $y=x^2(\ln x+\sin x)$；　　(2) $y=\dfrac{\cos x-x}{x^2}$.

解　(1) 函数 $y=x^2(\ln x+\sin x)$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\ln x+\sin x$ 的积. 根据导数公式表及求导的加法法则分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\frac{1}{x}+\cos x.$$

根据求导的乘法法则，可得

$$\begin{aligned}&[x^2(\ln x+\sin x)]'\\&=2x(\ln x+\sin x)+x^2\left(\frac{1}{x}+\cos x\right)\\&=x+2x\ln x+2x\sin x+x^2\cos x.\end{aligned}$$

(2) 函数 $y=\dfrac{\cos x-x}{x^2}$ 是函数 $f(x)=\cos x-x$ 与 $g(x)=x^2$ 的商.

根据导数公式表及求导的减法法则分别得出

$$f'(x)=-\sin x-1,\quad g'(x)=2x.$$

根据求导的除法法则，可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos x-x}{x^2}\right)'&=\frac{(-\sin x-1)\cdot x^2-(\cos x-x)\cdot 2x}{(x^2)^2}\\&=-\frac{(1+\sin x)x+2\cos x-2x}{x^3}\\&=-\frac{x\sin x+2\cos x-x}{x^3}.\end{aligned}$$

例 6 求曲线 $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+2^x\ln x$ 在点$(1,0)$处的切线的方程.

解 先求出函数 $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+2^x\ln x$ 的导数.

根据导数公式表及导数的四则运算法则,可得

$$f'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}+(2^x)'\ln x+2^x(\ln x)'$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}+(2^x\ln 2)\ln x+\frac{2^x}{x}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}+2^x\ln 2\ln x+\frac{2^x}{x}.$$

将 $x=1$ 代入 $f'(x)$,得所求切线的斜率为

$$f'(1)=\frac{7}{4}.$$

所以曲线 $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+2^x\ln x$ 在点$(1,0)$处的切线的方程为

$$y=\frac{7}{4}(x-1)\text{即 }y=\frac{7}{4}x-\frac{7}{4}.$$

练 习

1. 求下列函数的导数:

(1) $y=x\cos x-(\ln x)\sin x$;　　(2) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}+\frac{\cos x+x}{\ln x}$.

2. 求曲线 $y=\frac{2\ln x+1}{x^2}$在点$(1,1)$处的切线的方程.

习题 2－4

A 组

1. 已知 $f(1)=1,f'(1)=2,g(1)=-2,g'(1)=1$,求下列函数在$x=1$处的导数值:

(1) $f(x)+g(x)$;　　(2) $f(x)-g(x)$;

(3) $-2f(x)$;　　(4) $3g(x)$;

(5) $f(x)g(x)$;　　(6) $\frac{f(x)}{g(x)}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$；

(2) $y=\tan x+\ln x$；

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$；

(4) $y=2^x-\cos x+4$.

3. 求曲线 $y=x-\frac{1}{x}$在点(1,0)处的切线的方程.

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3\cos x$；

(2) $y=(\log_3 x)\sin x$；

(3) $y=x\tan x-2\ln x$；

(4) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$；

(5) $y=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$；

(6) $y=\frac{x^2}{x+1}$；

(7) $y=\frac{x\sin x}{\ln x}$；

(8) $y=\frac{e^x\cos x}{x}$.

5. 求下列函数在给定点处的导数值：

(1) $y=\sin x\cos x$，$x=0$，$x=\frac{\pi}{4}$；

(2) $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$,$x=2$,$x=4$；

(3) $f(x)=x\ln x+3x^2-1$，$x=1$,$x=2$.

B 组

1. 以初速度 10 m/s 向上抛出一个物体，其上升的高度 h(单位:m)与时间 t(单位:s)的函数关系为 $h=10t-5t^2$，求：

(1) 物体被抛出 t s 时的速度；

(2) 物体在 $t=2$ s 时的速度.

2. 求曲线 $y=x^3+x-2$ 与直线 $y=4x-1$ 平行的切线的方程.

§5 简单复合函数的求导法则

实例分析

海上一艘油轮发生了泄漏事故.泄出的原油在海面上形成一个圆形油膜,油膜的面积 S(单位:m^2)与油膜的半径 r(单位:m)的函数关系为

$$S=f(r)=\pi r^2.$$

油膜的半径 r 随着时间 t(单位:s)的增加而扩大,假设 r 关于 t 的函数解析式为

$$r=\varphi(t)=2t+1.$$

油膜的面积 S 关于时间 t 的瞬时变化率是多少?

分析 由题意知,时间 t 决定油膜的半径 r,进而决定油膜的面积 S,所以可得 S 关于 t 的函数解析式为

$$S=f(\varphi(t))=\pi(2t+1)^2.$$

油膜的面积 S 关于时间 t 的瞬时变化率就是函数 $S=f(\varphi(t))$ 的导数.

因为 $f(\varphi(t))=\pi(2t+1)^2=\pi(4t^2+4t+1)$,根据导数公式表和导数的四则运算法则,可得

$$[f(\varphi(t))]'=\pi(8t+4)=4\pi(2t+1).$$

所以油膜的面积 S 关于时间 t 的瞬时变化率为 $4\pi(2t+1)$.

另外, $$f'(r)=2\pi r,\ \varphi'(t)=2,$$

我们可以观察到 $$4\pi(2t+1)=2\pi r\cdot 2,$$

即 $$[f(\varphi(t))]'=f'(r)\cdot\varphi'(t).$$

抽象概括

一般地,对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)=ax+b$,如果给定 x 的一个值,就得到了 u 的值,进而确定了 y 的值,那么 y 可以表示成 x 的函数,称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**,记作 $y=f(\varphi(x))$,其中 u 为中间变量.

复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 对 x 的导数为

$$\boxed{y'_x=[f(\varphi(x))]'=f'(u)\varphi'(x),\text{其中 } u=\varphi(x).}$$

> **说　明**
>
> y'_x 表示 y 对 x 的导数.

例 1 求函数 $y=\sqrt{3x+1}$ 的导数.

解 引入中间变量 $u=\varphi(x)=3x+1$，则函数 $y=\sqrt{3x+1}$ 是由函数 $f(u)=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$ 与 $u=\varphi(x)=3x+1$ 复合而成的.

由复合函数的求导法则，可得

$$y'_x=(\sqrt{3x+1})'=f'(u)\varphi'(x)=(\sqrt{u})'\cdot(3x+1)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

例 2 求函数 $y=(2x-1)^{30}$ 的导数.

解 引入中间变量 $u=\varphi(x)=2x-1$，则函数 $y=(2x-1)^{30}$ 是由函数 $f(u)=u^{30}$ 与 $u=\varphi(x)=2x-1$ 复合而成的.

由复合函数的求导法则，可得

$$y'_x=[(2x-1)^{30}]'=f'(u)\varphi'(x)=(u^{30})'\cdot(2x-1)'=30u^{29}\cdot 2=60(2x-1)^{29}.$$

例 3 一个港口的某一观测点的水位在退潮的过程中，水面高度 h（单位：cm）关于时间 t（单位：s）的函数解析式为 $h=h(t)=\frac{100}{2t+1}$，求函数在 $t=3$ 时的导数，并解释它的实际意义.

解 函数 $h=\frac{100}{2t+1}$ 是由函数 $f(u)=\frac{100}{u}$ 和函数 $u=\varphi(t)=2t+1$ 复合而成的，其中 u 是中间变量.

由复合函数的求导法则，可得

$$\begin{aligned}h'_t&=h'(t)=f'(u)\varphi'(t)=\left(\frac{100}{u}\right)'\cdot(2t+1)'\\&=-\frac{100}{u^2}\cdot 2=-\frac{200}{(2t+1)^2}.\end{aligned}$$

将 $t=3$ 代入 $h'(t)$，得

$$h'(3)=-\frac{200}{49}(\text{cm/s}).$$

它表示当 $t=3$ 时，水面高度下降的速度为 $\frac{200}{49}$ cm/s.

练 习

1. 写出下列函数的中间变量，并利用复合函数的求导法则分别求出函数的导数：

(1) $y=\frac{1}{(2x-1)^2}$；　　(2) $y=\sin(-x+1)$；

(3) $y=e^{-2x+1}$；　　(4) $y=\cos(x+3)$.

习题 2－5

1. 写出下列函数的中间变量，并利用复合函数的求导法则分别求出函数的导数：

(1) $y=(x+1)^{10}$；　　(2) $y=e^{3x+1}$；

(3) $y=\sin(-2x+5)$；　　(4) $y=\ln(3x-1)$；

(5) $y=\sqrt[3]{2x-1}$；　　(6) $y=\tan(-x+1)$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=e^{-x+2}(2x+1)^5$；　　(2) $y=\cos(3x-1)-\ln(-2x-1)$；

(3) $y=\sin 2x+\cos^2 x$；　　(4) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$.

3. 求曲线 $y=\ln(3x-2)$ 在 $x=1$ 处的切线的方程.

4. 一小球做简谐振动，其运动方程为 $x=20\sin\left(3t-\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中 x（单位：cm）是小球相对于平衡点的距离，t（单位：s）为运动时间，分别求小球在(1) $t=0$ s，(2) $t=\dfrac{\pi}{6}$ s，(3) $t=\dfrac{\pi}{12}$ s 时刻的速度.

5. 汽水放入冰箱后，其摄氏温度 x（单位：℃）与时间 t（单位：h）的函数关系为：$x=4+16e^{-2t}$.

(1)求汽水温度 x 在 $t=1$ 处的导数；

(2) 已知摄氏温度 x 与华氏温度 y（单位：℉）的函数关系为 $x=\dfrac{5}{9}y-32$. 写出 y 关于 t 的函数解析式，并求 y 对 t 的导数.

§ 6 用导数研究函数的性质

6.1 函数的单调性

问题提出

我们知道，对于函数 $y=f(x)$来说，导数 $f'(x)$刻画的是函数 $y=f(x)$在点 x 的瞬时变化率，函数的单调性描述的是函数值 y 随自变量 x 取值的增加而增加，或函数值 y 随自变量 x 取值的增加而减少. 两者都在刻画函数的变化，那么，导数与函数的单调性之间有何关系呢?

实例分析

1. 计算下面几个一次函数的导数，并讨论这些一次函数的单调性.

(1) $y=f(x)=x$, $f'(x)=1$;

(2) $y=f(x)=2x+5$, $f'(x)=2$;

(3) $y=f(x)=-3x+4$, $f'(x)=-3$.

函数的图象如图 2-11.

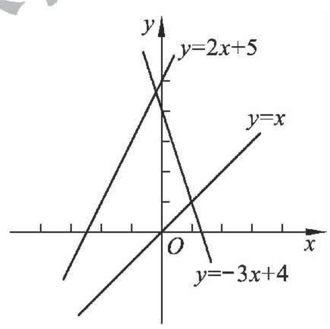


图 2-11

函数(1)(2)的导数都是正的，在定义域$(-\infty,+\infty)$内函数值都是随 x 的增加而增加的；函数(3)的导数是负的，在定义域$(-\infty,+\infty)$内函数值是随 x 的增加而减少的.

2. 计算下面指数函数、对数函数的导数，并讨论这些函数的单调性.

(1) $y=f(x)=2^x$, $f'(x)=2^x\ln 2$;

(2) $y=f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $f'(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln\dfrac{1}{2}$;

(3) $y=f(x)=\log_3 x$, $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$;

(4) $y=f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln\dfrac{1}{2}}$.

对于函数(1)和(3)，相应的定义域内的每一个 x 都满足$f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$在其定义域内是增函数；对于函数(2)和(4)，相应的定义域内的每一个 x 都满足 $f'(x)<0$，函数

$y=f(x)$在其定义域内是减函数(图 2-12).

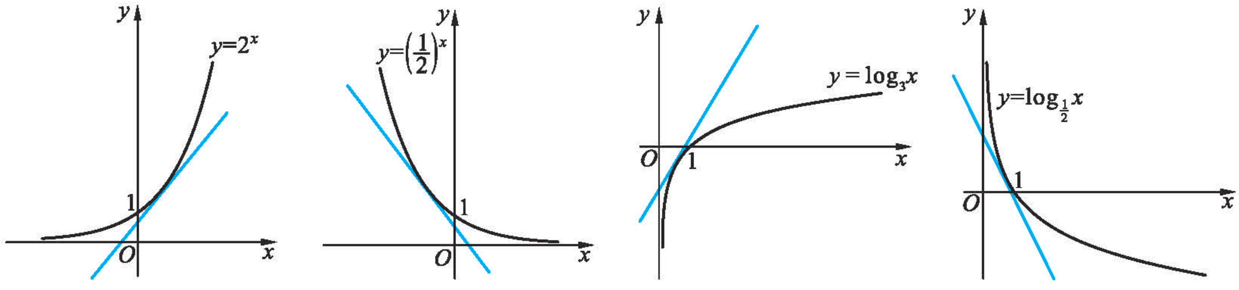


图 2-12

3. 最后再看幂函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数及其单调性.

函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数是 $f'(x)=2x$,其图象如图 2-13.

当自变量 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)=2x>0$,函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$内单调递增;

当自变量 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)=2x<0$,函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内单调递减.

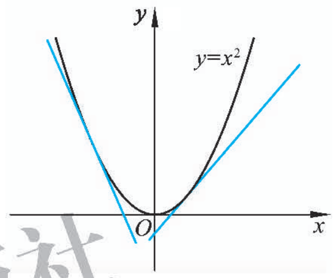


图 2-13

抽象概括

导数的符号与函数的单调性之间具有如下的关系:

(1) 若在某个区间内,函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)>0$,则在这个区间内,函数 $y=f(x)$单调递增;

(2) 若在某个区间内,函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)<0$,则在这个区间内,函数 $y=f(x)$单调递减.

若在某个区间内,$f'(x)\geqslant 0$,且只在有限个点为 0,则在这个区间内,函数 $y=f(x)$单调递增;若在某个区间内,$f'(x)\leqslant 0$,且只在有限个点为 0,则在这个区间内,函数 $y=f(x)$单调递减.

例 1 讨论函数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+16$ 的单调性.

解 $$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3).$$

设 $f'(x)>0$,则 $6(x+2)(x-3)>0$,即 $x<-2$ 或 $x>3$.

故当 $x\in(-\infty,-2)$或 $x\in(3,+\infty)$时,$f'(x)>0$,因此,在这两个区间内,函数 $f(x)$均单调递增;

当 $x\in(-2,3)$时,$f'(x)<0$,因此,在这个区间内,函数 $f(x)$单调递减.

函数的单调性决定了函数图象的大致形状. 因此，当确定了函数的单调性后，再通过描出一些特殊的点，如$(-2,60)$，$(3,-65)$等，就可以画出函数的大致图象. 图 2-14 即为函数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+16$ 的大致图象.

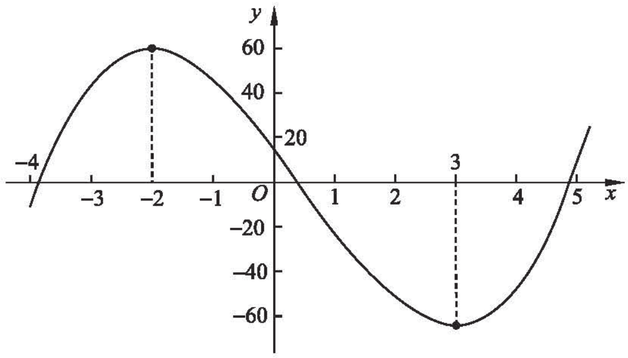


图 2-14

练　习

1. 讨论下列函数的单调性：

(1) $y=2x^2-5x+4$；　　(2) $y=3x-x^3$.

2. 讨论函数 $y=2x-\sin x$ 在区间$(0,2\pi)$内的单调性.

6.2　函数的极值

如图 2-15(1)，在包含 x_0 的一个区间(a,b)内，函数 $y=f(x)$在任何不为 x_0 的一点处的函数值都小于点 x_0 处的函数值，称点 x_0 为函数 $y=f(x)$的**极大值点**，其函数值 $f(x_0)$为函数的**极大值**.

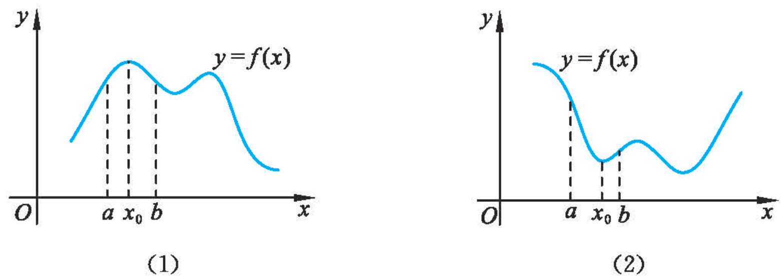


图 2-15

如图 2-15(2)，在包含 x_0 的一个区间(a,b)内，函数 $y=f(x)$ 在任何不为 x_0 的一点处的函数值都大于点 x_0 处的函数值，称点 x_0 为函数 $y=f(x)$的**极小值点**，其函数值 $f(x_0)$为函数的**极小值**.

函数的极大值点与极小值点统称为**极值点**，极大值与极小值统称为**极值**.

极值是函数的一种局部性质，如图 2－16 中，x_1，x_3，x_5 都是函数 $y=f(x)$ 的极大值点，x_2，x_4 都是函数 $y=f(x)$ 的极小值点. 从图中可以看出，函数的某些极大值有时候比其他极大值小，如 $f(x_1)<f(x_3)$，甚至可能比一些极小值还小，如 $f(x_1)<f(x_4)$.

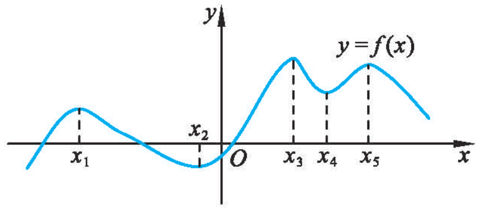


图 2－16

关于极大值与极小值有以下结论：

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,x_0) 内单调递增，在区间 (x_0,b) 内单调递减，则 x_0 是极大值点，$f(x_0)$ 是极大值.

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,x_0) 内单调递减，在区间 (x_0,b) 内单调递增，则 x_0 是极小值点，$f(x_0)$ 是极小值.

利用前面得出的导数与函数单调性的关系，观察发现：图 2－17 的极大值问题可以通过表 2－6 表示出来；图 2－18 的极小值问题可以通过表 2－7 表示出来.

表 2－6

x	(a,x_0)	x_0	(x_0,b)
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$y=f(x)$	↗(增加)	极大值	↘(减少)

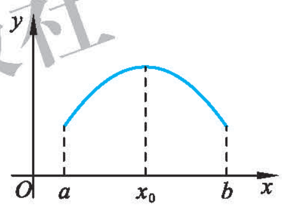


图 2－17

表 2－7

x	(a,x_0)	x_0	(x_0,b)
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	↘	极小值	↗

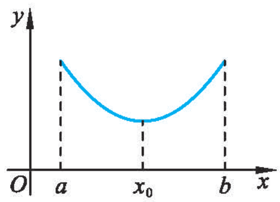


图 2－18

例 2 求函数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+16$ 的极值点.

解
$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3).$$

通过解方程 $f'(x)=0$ 得到了两个实数根 $x_1=-2$ 和 $x_2=3$.

当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 内单调递增；当 $-2<x<3$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(-2,3)$ 内单调递减，因此，$x_1=-2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

当 $-2<x<3$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(-2,3)$ 内单调递减；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 内单调递增，所以 $x_2=3$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

这个判断过程可以通过表 2－8 直观地反映出来.

表 2-8

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

抽象概括

一般情况下，在极值点 x_0 处，函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x_0)=0$. 因此，可以通过如下步骤求出函数 $y=f(x)$ 的极值点：

1. 求出导数 $f'(x)$.
2. 解方程 $f'(x)=0$.
3. 对于方程 $f'(x)=0$ 的每一个实数根 x_0，分析 $f'(x)$ 在 x_0 附近的符号（即 $f(x)$ 的单调性），确定极值点：

(1) 若 $f'(x)$ 在 x_0 附近的符号"左正右负"，则 x_0 为极大值点；

(2) 若 $f'(x)$ 在 x_0 附近的符号"左负右正"，则 x_0 为极小值点；

(3) 若 $f'(x)$ 在 x_0 附近的符号相同，则 x_0 不是极值点.

设 x_0 是 $f(x)$ 的一个极值点，并求出了 $f(x)$ 的导数 $f'(x_0)$，则 $f'(x_0)=0$. 反之不一定成立. 例如，对于 $f(x)=x^3$，虽然 $f'(0)=0$，但是 $x=0$ 不是极值点.

例 3 求函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极值，并画出函数的大致图象.

解 $$f'(x)=9x^2-3.$$

解方程 $$f'(x)=0,$$

得 $$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

根据 x_1，x_2 列出表 2-9，分析 $f'(x)$ 的符号、$f(x)$ 的单调性和极值点.

表 2-9

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

根据表 2-9 可知，$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极大值点，函数 $f(x)$ 在该点的取值（极大值）为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；$x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极小值点，函数 $f(x)$ 在该点的取值（极小值）为 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的大致图象如图 2-19.

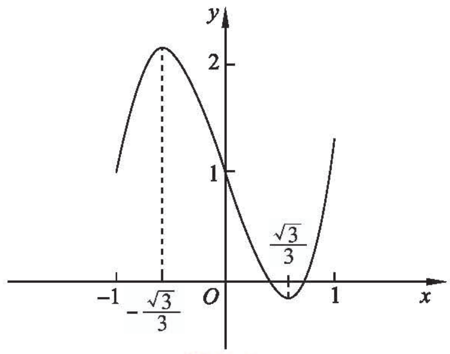


图 2-19

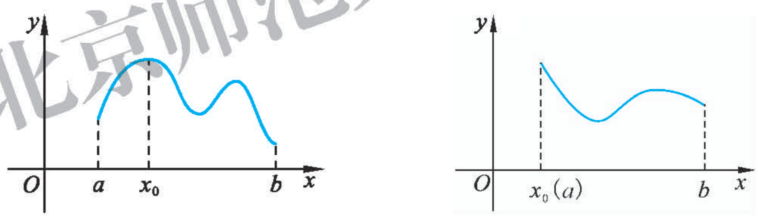
练 习

1. 求下列函数的极值,并画出大致图象.

(1) $y=3x-x^3$;　　(2) $y=x^4-6x^3+21x^2-6$.

6.3 函数的最值

函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内的最大值点 x_0 指的是:函数 $f(x)$ 在这个区间内所有点处的函数值都不超过 $f(x_0)$(如图 2-20).



(1)　　(2)

图 2-20

由图 2-20 可以看出,最大值或者在极大值点(也是导数的零点)取得,或者在区间的端点取得. 因此,要想求函数的最大值,一般首先求出函数导数的零点,然后将所有导数零点与区间端点的函数值进行比较,其中最大的值即为函数的最大值.

函数的最小值也具有类似的意义和求法. 函数的最大值和最小值统称为**最值**.

例 4 求函数 $f(x)=x^3-2x^2+5$ 在区间 $[-2,2]$ 内的最值.

解
$$f'(x)=3x^2-4x.$$
解方程
$$f'(x)=0,$$
得
$$x_1=0,\quad x_2=\frac{4}{3}.$$

计算函数 $f(x)$ 在导数零点 $x_1=0$ 和 $x_2=\frac{4}{3}$、区间端点 $x_3=-2$ 和 $x_4=2$ 处的值:

$$f(0)=5,f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{103}{27},f(-2)=-11,f(2)=5.$$

比较这 4 个数的大小，可知：

函数 $f(x)=x^3-2x^2+5$ 在区间$[-2,2]$内的最大值是 5，最小值是-11.

例 5 研究函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$的性质，并画出它的大致图象.

解 函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，由 $f(-x)=-f(x)$知，函数 $f(x)$为奇函数且经过原点，函数图象关于原点对称.

在 $x>0$ 时，$f(x)>0$，函数 $f(x)$的图象恒在 x 轴上方；在 $x<0$ 时，$f(x)<0$，函数 $f(x)$的图象恒在 x 轴下方.

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

令 $f'(x)=0$，解方程，得 $x=\pm1$.

令 $f'(x)>0$，解得$-1<x<1$，因此，$(-1,1)$为函数 $f(x)$的单调递增区间.

令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$，因此，$(1,+\infty)$，$(-\infty,-1)$为函数 $f(x)$的单调递减区间. 于是列表 2－10.

表 2－10

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

因此，$x=-1$ 为函数 $f(x)$的极小值点，其对应的极小值 $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$；$x=1$ 为函数 $f(x)$的极大值点，其对应的极大值 $f(1)=\dfrac{1}{2}$；

由以上的分析，可以得到函数 $f(x)$的大致图象如图 2-21.

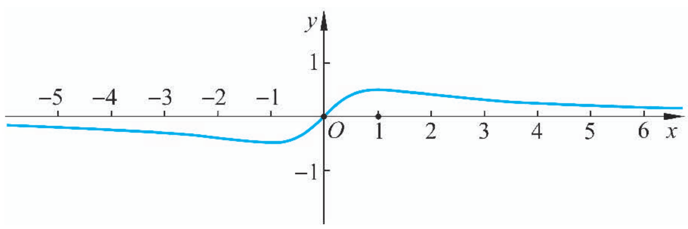


图 2-21

练　习

1. 求函数 $y=x^3-12x^2+45x-10$ 在区间$[0,10]$内的最值.

习题 2-6

A 组

1. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=-x^3-2x^2-4x+5$；　(2) $y=(x+1)(x^2-1)$；

(3) $y=4x^2+\frac{1}{x}$；　(4) $y=x\ln x$.

2. 讨论函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的单调性.

3. 讨论下列函数的单调性与最值：

(1) $y=6x^2-x-2$；　(2) $y=2-x-x^2$；

(3) $y=x^3-3x^2$；　(4) $y=2x^3+12x-5$.

4. 讨论下列函数的单调性，并画出大致图象.

(1) $y=(x-1)e^x$；　(2) $y=x+\sqrt{2+x}$.

5. 求下列函数在给定区间的最值：

(1) $f(x)=x^2+(1-x)^2, x\in[0,2]$；

(2) $f(x)=x^3-9x^2-48x+52, x\in[-2,2]$.

B 组

1. 求使函数 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+(x-a_4)^2$ 的值最小及相应自变量 x 的取值，其中 a_1,a_2,a_3,a_4 是实常数.

§ 7 导数的应用

7.1 实际问题中导数的意义

例 1　功与功率　如图 2－22，某人拉动一个物体前进，他所做的功 W（单位：J）是时间 t（单位：s）的函数，设这个函数可以表示为

$$W=W(t)=t^3-6t^2+16t.$$

(1) 求 t 从 1 s 变到 3 s 时，功 W 关于时间 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $W'(1)$，$W'(2)$，并解释它们的实际意义.

图 2－22

解　(1) 当 t 从 1 s 变到 3 s 时，功 W 从 $W(1)=11$ J 变到 $W(3)=21$ J，此时功 W 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{W(3)-W(1)}{3-1}=\frac{21-11}{3-1}=5\ (\mathrm{J/s}).$$

它表示从 1 s 到 3 s 这段时间内，这个人平均每秒做功 5 J.

(2) 首先求 $W'(t)$. 根据导数公式表和导数的运算法则，可得

$$W'(t)=3t^2-12t+16.$$

于是，$W'(1)=7$ J/s，$W'(2)=4$ J/s.

$W'(1)$ 和 $W'(2)$ 分别表示 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时，这个人每秒做的功为 7 J 和 4 J.

在物理学中，通常称力在单位时间内做的功为功率，它的单位是瓦特.

例 2　降雨强度　表 2－11 为一次降雨过程中一段时间内记录的降雨量数据.

表 2－11

时间 t/min	0	10	20	30	40	50	60
降雨量 y/mm	0	10	14	17	20	22	24

显然，降雨量 y（单位：mm）是时间 t（单位：min）的函数，用 $y=f(t)$ 表示.

(1) 分别计算当 t 从 0 min 变到 10 min，从 50 min 变到 60 min 时，降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率，比较它们的大小，并解释它们的实际意义；

(2) 假设得到降雨量 y 关于时间 t 的函数的近似表达式为 $f(t)=\sqrt{10t}$，求 $f'(40)$ 并解释它的实际意义.

解 (1) 当 t 从 0 min 变到 10 min 时，降雨量 y 从 0 mm 变到 10 mm，此时，降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{y(10)-y(0)}{10-0}=\frac{10-0}{10-0}=1(\text{mm/min}).$$

它表示从 0 min 到 10 min 这段时间内，平均每分钟降雨量为 1 mm.

当 t 从 50 min 变到 60 min 时，降雨量 y 从 22 mm 变到 24 mm，此时，降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{y(60)-y(50)}{60-50}=\frac{24-22}{60-50}=0.2(\text{mm/min}).$$

它表示从 50 min 到 60 min 这段时间内，平均每分钟降雨量为 0.2 mm.

$1>0.2$，说明这次降雨过程中，刚开始的 10 min 比后 10 min 的雨下得大.

在气象学中，通常把在单位时间(如 1 h，1 d 等)内的降雨量称作**降雨强度**. 它是反映一次降雨大小的一个重要指标. 因此，用气象学的知识解释，0 min 到 10 min 这段时间内的平均降雨强度是 1 mm/min，而 50 min 到 60 min 这段时间内的平均降雨强度为 0.2 mm/min.

(2)
$$f'(t)=\frac{5}{\sqrt{10t}}.$$

将 $t=40$ 代入 $f'(t)$，得

$$f'(40)=\frac{5}{20}=0.25(\text{mm/min}).$$

$f'(40)$ 表示当 $t=40$ min 时，降雨量 y 关于时间 t 的瞬时变化率(即瞬时降雨强度)为 0.25 mm/min.

例 3 建造一幢面积为 x(单位：m^2)的房屋需要成本 y(单位：万元)，y 与 x 的函数关系为 $y=f(x)=\frac{x}{10}+\frac{\sqrt{x}}{10}+0.3$.

(1) 当 x 从 100 m^2 变到 120 m^2 时，建筑成本 y 关于建筑面积 x 的平均变化率是多少？它代表什么实际意义？(结果精确到 0.001 万元/m^2)

(2) 求 $f'(100)$ 并解释它的实际意义.

解 (1) 当 x 从 100 m^2 变到 120 m^2 时，建筑成本 y 关于建筑面积 x 的平均变化率为

$$\begin{aligned}\frac{f(120)-f(100)}{120-100}&=\frac{\left(12+\frac{\sqrt{120}}{10}+0.3\right)-\left(10+\frac{\sqrt{100}}{10}+0.3\right)}{20}\\&=\frac{1}{20}+\frac{\sqrt{30}}{100}\\&\approx 0.105(\text{万元}/\text{m}^2).\end{aligned}$$

它表示在建筑面积从 100 m^2 增加到 120 m^2 的过程中，每增加 1 m^2 的建筑面积，建筑

成本平均约增加 1 050 元.

(2) $$f'(x)=\frac{1}{10}+\frac{1}{20\sqrt{x}}.$$

于是，$f'(100)=\frac{1}{10}+\frac{1}{200}=0.105$(万元/m²).

$f'(100)$表示当建筑面积为 100 m² 时，成本增加的速度为 1 050 元/m²，也就是说，保持这一增速，当建筑面积为 100 m² 时，每增加 1 m² 的建筑面积，成本就要增加 1 050 元.

说　明

在经济学中，通常把生产成本 y 关于产量 x 的函数$y=f(x)$的导函数称为**边际成本**. 边际成本$f'(x_0)$指的是当产量为 x_0 时，生产成本的增加速度，也就是当产量为 x_0 时，每增加一个单位的产量，需要增加$f'(x_0)$个单位的成本.

思考交流

在日常生活和科学领域中，有许多需要用导数概念来理解的量. 以中学物理为例，速度是路程关于时间的导数，线密度是质量关于长度的导数，功率是功关于时间的导数等. 请再举出 3 个实例，体会导数的实际意义，并与同学交流.

练　习

1. 一辆正在加速的汽车在 5 s 内速度从 0 km/h 提高到了 90 km/h. 下表给出了它在不同时刻的速度，为了方便起见，已将速度单位转化成了 m/s，时间单位为 s.

时间 t/s	0	1	2	3	4	5
速度 v/(m/s)	0	9	15	21	23	25

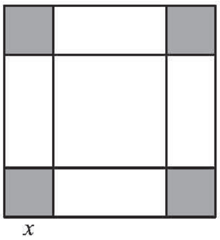
(1) 分别计算当 t 从 0 s 变到 1 s、从 3 s 变到 5 s 时，速度 v 关于时间 t 的平均变化率，并解释它们的实际意义；

(2) 根据上面的数据，可以得到速度 v 关于时间 t 的函数近似表示式为 $v=v(t)=-t^2+10t$，求 $v'(1)$，并解释它的实际意义.

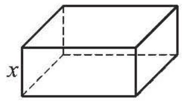
7.2 实际问题中的最值问题

在实际问题中，经常会遇到解决一些如面积最小、体积最大、成本最低、时间最少等问题，这些问题通称为**最优化问题**．导数是解决最优化问题的一个重要工具．

例 4 如图 2－23(1)，一边长为 48 cm 的正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后折起，可以做成一个无盖长方体容器，如图 2－23(2)．所得容器的容积 V(单位：cm^3)是关于截去的小正方形的边长x(单位：cm)的函数．



(1)



(2)

图 2－23

(1) 随着 x 的变化，容积 V 是如何变化的？

(2) 截去的小正方形的边长为多少时，容器的容积最大？最大容积是多少？

解 (1) 首先写出 V 关于 x 的函数解析式．根据题意，可得

$$V=V(x)=(48-2x)^2x.$$

由实际情况可知函数 $V(x)$的定义域为$\{x\mid 0<x<24\}$．

根据导数公式表及导数的运算法则，可得

$$\begin{aligned}V'(x)&=-4x(48-2x)+(48-2x)^2\\&=(48-2x)(-6x+48)\\&=12(x-24)(x-8).\end{aligned}$$

解方程

$$V'(x)=0,$$

得

$$x_1=8, x_2=24.$$

根据 x_1，x_2 列出表 2－12，分析 $V'(x)$的符号、$V(x)$的单调性和极值点．

表 2－12

x	$(0,8)$	8	$(8,24)$
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V=V(x)$	↗	极大值	↘

根据表 2－12 可知，$x=8$ 是函数 $V=V(x)$的极大值点，相应的极大值为

$$V=V(8)=(48-16)^2\times 8=8\ 192(\text{cm}^3).$$

$V=(48-2x)^2x$ 的大致图象如图 2-24.

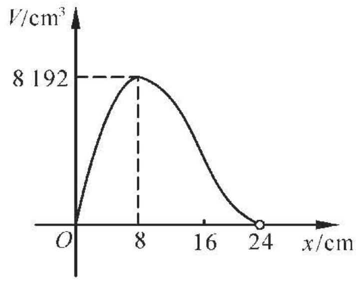


图 2-24

根据对函数变化规律的讨论可知：

当 $0<x\leqslant 8$ 时，函数 $V=V(x)$ 单调递增；

当 $8\leqslant x<24$ 时，函数 $V=V(x)$ 单调递减.

(2) 区间 $(0,24)$ 上任意点的函数值都不超过 $V(8)$，因此，$x=8$ 是函数的最大值点. 此时

$$V=V(8)=8\ 192(\text{cm}^3)$$

是函数 $V=V(x)$ 在区间 $(0,24)$ 内的最大值.

即当截去的小正方形的边长为 8 cm 时，得到的容器容积最大，最大容积为 8 192 cm^3.

例 5 对于企业来说，生产成本、销售收入和利润之间的关系是个重要的问题. 对一家药品生产企业的研究表明，该企业的生产成本 y(单位:万元)和生产收入 z(单位:万元)都是产量 x(单位:t)的函数，分别为

$$y=x^3-24x^2+225x+10,$$

$$z=180x.$$

(1) 试写出该企业获得的生产利润 w(单位:万元)与产量 x 之间的函数关系式；

(2) 当产量为多少时，该企业可获得最大利润？最大利润为多少？

解 (1) 因为总利润＝总收入－总成本，即 $w=z-y$，所以

$$w=w(x)=180x-(x^3-24x^2+225x+10),$$

即

$$w=-x^3+24x^2-45x-10\ (x\geqslant 0).$$

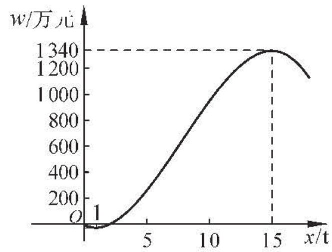


图 2－25

(2) 根据导数公式表及导数的运算法则，可得

$$w'(x)=-3x^2+48x-45=-3(x-1)(x-15).$$

解方程 $$w'(x)=0,$$

得 $$x_1=1,\quad x_2=15.$$

由图 2-25 可知，当 $x\geqslant 15$ 时，$w'(x)\leqslant 0$，所以 $w(x)\leqslant w(15)$. 比较 $x=0$，$x=1$ 和 $x=15$ 的函数值

$$w(0)=-10,\quad w(1)=-32,\quad w(15)=1\ 340$$

可知，函数 $w=w(x)$ 在 $x=15$ 处取得最大值，此时最大值为 1 340. 即该企业的产量为 15 t 时，可获得最大利润，最大利润为 1 340 万元.

练 习

1. 设计一种容积为 500 mL 的圆柱体易拉罐，使其表面积最小.

习题 2-7

A 组

1. 实验表明，将 1 kg 铁从 0 ℃加热到 t ℃需要的热量为 Q（单位：J），它们的函数关系为

$$Q(t)=0.000\,297t^2+0.440\,9t.$$

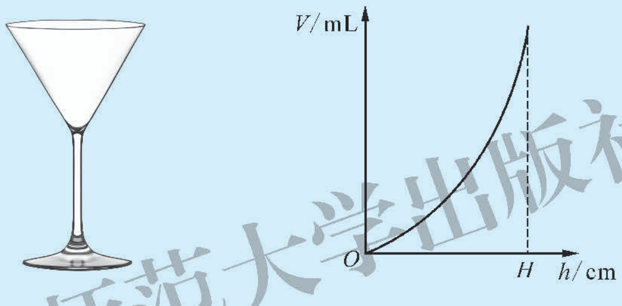
（1）当 t 从 10 ℃变到 20 ℃时，热量 Q 关于温度 t 的平均变化率是多少？它的实际意义是什么？

（2）求 $Q'(10)$，$Q'(100)$，并解释它们的实际意义.

2. 如图①为一个圆锥形酒杯，圆锥的顶角（即过圆锥的轴的平面截圆锥所得等腰三角形的顶角）为 60°，向酒杯中注水.

（1）写出注入杯中的水量 V（单位：mL）关于水面高度 h（单位：cm）的函数关系式 $V=f(h)$；

（2）图②的图象是否能反映第（1）问中的函数关系？说明理由.



① ②

（第 2 题）

3. 工厂需要围建一个面积为 512 m^2 的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁. 我们知道，砌起的新墙的总长度 y（单位：m）是利用原有墙壁长度 x（单位：m）的函数.

（1）写出 y 关于 x 的函数解析式，并确定 x 的取值范围；

（2）随着 x 的变化，y 的变化有何规律？

（3）当堆料场的长、宽比为多少时，需要砌起的新墙用的材料最省？

B 组

1. 对一名工人的研究表明，工作 t h 后生产出的产品量 Q（单位：t）可以近似表示为 $Q=Q(t)=-t^3+15t^2+12t$，该工人每天工作 8 h.

（1）求当 t 从 2 h 变到 4 h，该工人生产的产品量 Q 关于时间 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

（2）求 $Q'(2)$，$Q'(4)$，并解释它们的实际意义.

信息技术应用

利用导数研究函数

利用导数的符号，可以判断函数的单调区间，而导数零点可以用来求函数的极值或最值.

结合计算机软件的求导、求零点和因式分解等功能，研究函数 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-1$ 的极值问题.

具体操作步骤如下：

(1) 在输入框中输入函数 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-1$，画出该函数的图象.

(2) 在输入框中输入 $f'(x)$ 或者 derivative[f]，得到 $f'(x)=4x^3-24x^2+36x$，如图 2-26.

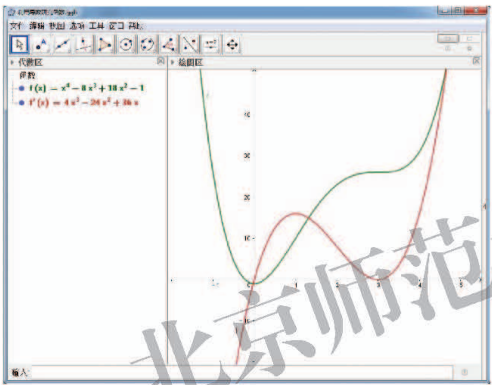


图 2-26

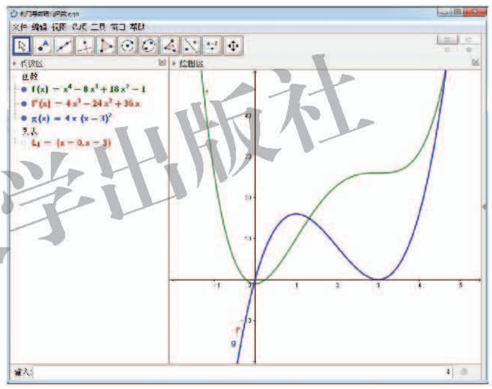


图 2-27

(3) 在输入框中输入 factor[f′]，给出 $f'(x)$ 的因式分解表达式

$$g(x)=4x(x-3)^2.$$

由此得到 $f'(x)$ 的两个零点：0，3.

也可以通过在输入框中输入命令：

solve[f′]，

直接求出函数 $f'(x)$ 的零点，如图 2-27.

(4) 结合函数及其导数的图象，可知：当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，由此可判断 0 是一个极小值点(也是最小值点). 而在 $x_0=3$ 附近，无论是在其左边还是右边，都有 $f'(x)>0$，因此，3 不是极值点.

§ 8 数学探究活动(二):探究函数性质

实例分析

对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,我们已经充分了解了它的性质与图象. 曾经运用的研究方法是:

先讨论 a 为正数或负数(不妨设 $a>0$),当 x 取充分小的负值时,$f(x)$都是正的,当 x 取充分大的正值时,$f(x)$也都是正的;然后讨论根的判别式,得出函数有没有根,在哪个区间函数值为正数,哪个区间函数值为负数;再经过配方,得到函数的最大值点或最小值点以及值域.

现在我们采取另一种方法研究 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的性质与图象. 不妨设 $a>0$,显见,当 x 取充分小的负值时,$f(x)$都是正的,当 x 取充分大的正值时,$f(x)$也都是正的.

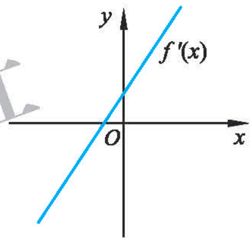


图 2-28

对函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 求导,得到导数

$$f'(x)=2ax+b$$

显然,$f'(x)$的图象是一条直线,如图 2-28.

(1)当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时,$f'(x)=0$,即 $f(x)$至多有一个极值.

(2)当 $x<-\dfrac{b}{2a}$时,$f'(x)<0$,表明 $f(x)$单调递减;当 $x>-\dfrac{b}{2a}$时,$f'(x)>0$,表明 $f(x)$单调递增.

(3)综合(1)和(2),可知当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时,$f(x)$取得最小值,$f(x)_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$;函数的值域为$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$.

(4)若$\dfrac{4ac-b^2}{4a}<0$,$f(x)$有两个不等的实数根,如图 2-29;若$\dfrac{4ac-b^2}{4a}=0$,$f(x)$有两个相等的实数根,如图 2-30;若$\dfrac{4ac-b^2}{4a}>0$,$f(x)$没有实数根,如图 2-31.

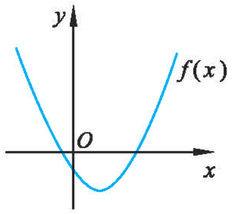


图 2-29

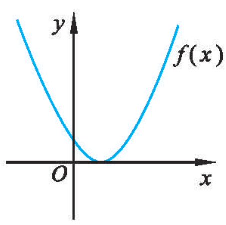


图 2-30

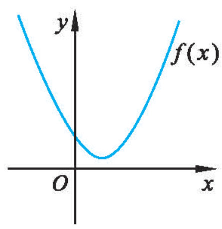


图 2-31

探究活动

请利用函数的导数，探究 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 的性质和图象.

习题 2-8

1. 研究函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的图象和性质，其中 a,b,c,d 都是实常数($ac\neq0$).
2. 研究函数 $y=ax+\dfrac{b}{x}$ 的图象和性质，其中 a,b 都是非零正实数.
3. 研究函数 $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ 的图象和性质，其中 $a\neq0$.
4. 利用函数的图象和性质，研究下列方程解的个数，其中 a 是实常数.

   (1) $\ln x=ax$；　　(2) $e^x=ax^2$.

阅读材料

微积分的创立与发展

微积分是现代科学技术的强有力工具，不掌握微积分就无法学习和掌握近代任何一门自然科学、工程技术和管理科学. 现在，人造卫星、自动控制、电路设计、弹道计算等都需要应用微积分. 那么，微积分的创立对数学和科学的发展产生了哪些影响?

一、微积分创立的时代背景

15—16 世纪的文艺复兴运动使欧洲的精神文化面貌发生了深刻的变化，对自然界的研究蓬勃开展. 1608 年，荷兰眼镜制作师发明了望远镜. 不久，意大利科学家伽利略(Galileo Galilei，1564—1642)将他制造的第一架天文望远镜对准星空，做出了令世人目不暇接、惊奇不已的天文发现. 1619 年，德国科学家开普勒(Johannes Kepler，1571—1630)通过观测归纳出了他的行星运动三大定律. 从数学上推证开普勒的经验定律，成为当时自然科学的中心课题之一. 1638 年，伽利略建立了自由落体定律、动量定律等，为动力学奠定了基础，以力学方面的需要为中心，当时至少有以下 4 类问题直接导致微积分的诞生.

1. 运动问题

已知物体移动的距离表示为时间的函数关系式，求物体在任意时刻的速度与加速度；反之，已知物体的加速度表示为时间的函数关系式，求速度与距离. 因为运动物体的速度与加速度每时每刻都在变化，所以瞬时速度的求法超出常规的范围.

2. 切线问题

17 世纪，透镜的设计吸引了许多数学家. 要研究光线通过透镜的通道，必须知道射线射入透镜的角度，以便应用光的反射定律，这就需要求出光线在入射点的法线或切线. 另外，运动物体在它的轨迹上任意一点处的运动方向都是轨迹的切线方向. 从几何本身看，切线的定义与求法也都没有解决. 对于 17 世纪出现的复杂曲线求切线更是无从下手.

3. 最值问题

即求函数的最大值与最小值. 例如，炮弹能获得最大射程的发射角，行星离开太阳的最远距离等.

4. 求面积、体积问题

包括求曲线的长度(例如，行星在椭圆轨道上运行的距离)、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心等.

令人惊讶的是，不同领域的问题却归结为相同模式的数学问题：求因变量在某一时刻对自变量的变化率；因变量在一定时间过程中所积累的变化. 前者导致了微分概念的出现，后者导致了积分概念的出现. 两者都包含了极限与无穷小的思想. 微积分是微分学和积分学的统称，它的萌芽、发生与发展经历了漫长的时期. 早在古希腊时期，欧多克索斯(Eudoxus，前 400—前 347)就提出了穷竭法，这是微积分的雏形.

二、牛顿和莱布尼茨创立微积分

1669年英国科学家牛顿(Isaac Newton，1642—1727)提出微积分学说存在正反两个方面的运算，如面积计算和切线斜率计算就是互逆的两种运算，即微分和积分互为逆运算，从而完成了微积分运算的决定性步骤. 直到1687年，牛顿才出版了他的著作《自然哲学的数学原理》. 在这一著作中，他陈述了他的伟大创造——微积分，并应用微积分理论，从开普勒关于行星的三大定律导出了万有引力定律. 牛顿还将微积分广泛应用于声学、光学、流体运动等学科，充分显示了微积分理论的巨大威力.

在微积分的创立上，牛顿需要与德国数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716)分享荣誉. 莱布尼茨致力于研究切线问题和面积问题，并探索两类问题之间的关系. 他把有限量的运算与无穷小量的运算进行类比，创立了无穷小量求商法和求积法，即微分和积分运算. 1684年，他发表了论文《求极大值和极小值以及切线的新方法》. 这是数学史上正式发表的第一篇微积分论文. 两年后他又发表了他在积分学上的早期结果.

微积分的诞生具有划时代的意义，它是数学史上的分水岭与转折点. 这个伟大发明所产生的新数学与旧数学有本质的区别：旧数学是关于常量的数学，新数学是关于变量的数学；旧数学是静态的，新数学是动态的；旧数学只涉及固定的和有限的量，新数学则包含了运动、变化和无限.

恩格斯这样评论："在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了."18世纪被称为数学史上的英雄世纪. 数学家们把微积分应用于天文学、力学、光学、热学等各个领域，获得了丰硕的成果. 在数学本身，他们把微积分作为工具，发展出微分方程、微分几何、无穷级数等理论分支，大大扩展了数学研究的范围.

三、微积分理论的完善

牛顿的微积分是一项划时代的科学成就，蕴含着巨大的智慧和创新，但也有逻辑上的问题，以致受到多方面的非议.

例如，设物体做自由落体运动，在时间 t 下落的距离为 $h(t)$，有公式 $h(t)=\frac{1}{2}gt^2$，其中 g 是重力加速度. 考虑物体在 t_0 的瞬时速度，先求

$$\begin{aligned}\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{h(t_1)-h(t_0)}{t_1-t_0}&=\frac{\frac{1}{2}gt_1{}^2-\frac{1}{2}gt_0{}^2}{t_1-t_0}\\&=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0{}^2}{\Delta t}\\&=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t.\end{aligned}$$

当 Δt 变成无穷小时，右端的 $\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$ 也变成无穷小，因而上式右端就可以认为是 gt_0，这就是在 t_0 时的瞬时速度，它是两个无穷小之比. 牛顿的这一处理方法解决了大量过去无法解决的科技问题，但是逻辑上不严格，遭到责难.

微积分的基础是极限论，究竟极限是什么，无穷小是什么，这在当时是带有根本性质的难题，由此展开了一场关于微积分奠基问题的论战.

1734 年英国哲学家、红衣主教贝克莱(George Berkeley，1685—1753)发表文章猛烈攻击牛顿的理论. 从而引发了第二次数学危机(数学史的第一次危机是无理数的产生，第三次危机是集合论悖论).

贝克莱问道："无穷小作为一个量，究竟是不是 0？ 如果是 0，$\frac{\Delta h}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$ 等式左端当 Δt 变成无穷小后分母为 0，就没有意义了；如果不是 0，等式右端的 $\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$ 就不能任意去掉. 在推出上式时，假定了 $\Delta t\neq0$ 才能作除法，所以上式的成立是以 $\Delta t\neq0$ 为前提的. 那么，为什么又可以让 $\Delta t=0$ 而求得瞬时速度呢？"

因此，牛顿的这一套运算方法，就如同从 $5\times0=3\times0$ 出发，两端同除以 0，得到 $5=3$ 一样的荒谬.

贝克莱还讽刺挖苦说：既然 Δt 和 Δs 都变成"无穷小"了，而无穷小作为一个量，既不是 0，又不是非 0，那它一定是"量的鬼魂"了. 这就是著名的"贝克莱悖论".

贝克莱的质问是击中要害的，数学家在将近 200 年的时间里，不能彻底反驳贝克莱的责难. 为了克服微积分运算在逻辑上的矛盾，建立严格的数学基础，数学家们又经历了长期而艰苦的努力. 1750 年法国数学家达朗贝尔(Jean le Rond D'Alembert，1717—1783)用极限方法取代无穷小量方法；后来法国数学家柯西(Augustin-Louis Cauchy，1789—1857)在达朗贝尔通俗的极限基础上，从变量和函数角度出发给出极限的定义，从而把微积分的基础严格地奠定在极限概念之上，才较好地反驳了贝克莱的责难. 最后德国数学家魏尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass，1815—1897)用静态的语言来刻画动态的极限与连续概念，使极限的定义达到了最清晰、最严密的程度. 直到如今，人们仍然在使用他的定义.

第二次数学危机的要害，是极限理论的逻辑基础不完善，而极限正是"有穷过渡到无穷"的重要手段. 贝克莱的责难，也集中在"无穷小量"上. 因为无穷与有穷有本质的区别，所以极限的严格定义、极限的存在性、无穷级数的收敛性，这样一些理论问题就显得特别重要. 总之，第二次数学危机的核心是微积分的基础不稳固. 柯西和魏尔斯特拉斯等人为稳固微积分的基础作出了贡献.

练 习

1. 物理学中经常会出现有关于极值情况的描述，比如，“平衡”“距离最大”或者“距离最小”“能量最大”“能量最小”“速度最大”“速度最小”等情况. 这些都表示可以利用某个函数的导数求解. 请你结合所学物理学的相关内容，找出一个利用导数解决问题的具体的物理实例，并与同学交流.
2. 数学发展历史上，三次数学危机产生的历史背景和起因是什么？如何解决的？请查找相关资料，将三次数学危机的历史背景和解决的过程整理成一篇论文，并与同学交流.
3. 查阅牛顿和莱布尼茨有关微积分的工作，比较两个人创立的微积分理论的相同点与不同点.
4. 阅读微积分的创立和发展起重大作用的有关资料，了解微积分发明的过程、重要结果、微积分发展中的主要人物(牛顿、莱布尼茨、柯西、魏尔斯特拉斯等)、关键事件及其对人类文明的贡献. 请从中选取一个角度，如历史人物或历史事件，完成一篇有关微积分创立与发展的研究报告.

本章小结

一、知识结构

二、学习要求

本章的学习，可以帮助同学们通过丰富的实际背景理解导数的概念，掌握导数的基本运算，运用导数研究函数的性质，并解决一些实际问题.

1. 导数概念及其意义

(1) 通过实例分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，体会导数的内涵与思想.

(2) 体会极限思想.

(3) 通过函数图象直观理解导数的几何意义.

2. 导数运算

(1) 能根据导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$ 的导数.

(2) 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则，求简单函数的导数；能求简单的复合函数(限于形如 $f(ax+b)$)的导数.

(3) 会使用导数公式表.

3. 导数在研究函数中的应用

(1) 结合实例,借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系;能利用导数研究函数的单调性,对于多项式函数,能求不超过三次的多项式函数的单调区间.

(2) 借助函数的图象,了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件;能利用导数求某些函数的极大值、极小值以及给定闭区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值;体会导数与单调性、极值、最大(小)值的关系.

*4. 微积分的创立与发展

收集、阅读对微积分的创立和发展起重大作用的有关资料,包括一些重要历史人物(牛顿、莱布尼茨、柯西、魏尔斯特拉斯等)和事件,采取独立完成或者小组合作的方式,完成一篇有关微积分创立与发展的研究报告.

三、需要关注的问题

1. 什么是导数?如何利用定义求函数的导数?举例解释导数的实际意义.

2. 如何用导数的四则运算法则求函数的导数?

3. 复合函数的中间变量的意义是什么?如何寻找中间变量?怎样求复合函数的导数?

4. 函数的极值和最值有何不同?如何利用导数求函数的极值和最值?如何用框图形式画出求最值的步骤?

复习题二

A 组

1. 下表为某水库存水量 y(单位:万 m^3)与水深 x(单位:m)的对照表:

水深 x/m	0	5	10	15	20	25	30	35
存水量 y/万 m^3	0	20	40	90	160	275	437.5	650

(1) 当 x 从 5 m 变到 10 m 时,存水量 y 关于 x 的平均变化率为多少? 解释它的实际意义;

(2) 当 x 从 25 m 变到 30 m 时,存水量 y 关于 x 的平均变化率为多少? 解释它的实际意义;

(3) 比较(1)与(2)的数值的大小,并联系实际情况解释意义.

2. 已知长方形的周长为 10,一边长为 x,其面积为 S.

(1) 写出 S 关于 x 的函数关系.

(2) 当 x 从 1 增加到 $1+\Delta x$ 时,面积 S 改变了多少? 此时,面积 S 关于 x 的平均变化率是多少? 解释它的实际意义.

(3) 当长从 x 增加到 $x+\Delta x$ 时,面积 S 改变了多少? 此时,面积 S 关于 x 的平均变化率是多少?

(4) 在 $x=1$ 处,面积 S 关于 x 的瞬时变化率是多少? 解释它的实际意义.

(5) 在 $x=x_0$ 处,面积 S 关于 x 的瞬时变化率是多少? 解释它的实际意义.

3. 利用导数定义求下列各函数的导数:

(1) $y=x+5$;
(2) $y=2x+3$;
(3) $y=x^2-3x$;
(4) $y=x^2+2x-1$;
(5) $y=\dfrac{2}{x}+2$;
(6) $y=\dfrac{1}{x}+3x$.

4. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^2+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$;
(2) $y=x\sin x-\sqrt{x}\ln x$;
(3) $y=\dfrac{\sin x\ln x}{x}$;
(4) $y=\sqrt{x}(x-1)\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$;
(5) $y=e^x\tan x$;
(6) $y=\dfrac{x^2-1}{x+\ln x}$;
(7) $y=x\sin x+e^x\ln x-2$;
(8) $y=\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{x\ln x}$;
(9) $y=(3x+2)^3$;
(10) $y=\sin 2x$;
(11) $y=\sqrt{4x-6}$;
(12) $y=\ln(4x+5)$.

5. 求下列函数在给定位置的切线的斜率:

(1) $y=x^3+2x$, $x=0$;
(2) $y=\sqrt{x}+\ln x$, $x=1$;
(3) $y=x^2\ln x$, $x=1$;
(4) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, $x=1$.

6. 求下列函数的单调区间和极值点：

(1) $y=2x^3-3x^2$；

(2) $y=x+\sqrt{x}$；

(3) $y=x-\ln x$；

(4) $y=\frac{1}{x}+4x^2$；

(5) $y=\tan x-\sin x$；

(6) $y=x+\sin x$；

(7) $y=x^3-x+6$；

(8) $y=\sin x+\cos x$.

7. 求下列函数的最值：

(1) $y=x^3-18x$，$x\in[0,10]$；

(2) $y=x^2+(2-x)^2$，$x\in[0,2]$.

8. 某体育馆要建造一个长方形游泳池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m. 如果建造池底的单价是建造池壁单价的 1.5 倍，怎样设计水池能使总造价最低？

9. 一辆家庭轿车在 x 年的使用过程中需要如下支出：购买时的费用 12 万元；保险费、养路费、燃油费等各种费用每年 1 万元；维修费用 $(0.1x^2+0.1x)$ 万元；使用 x 年后，汽车的价值为 $(10-0.8x)$ 万元. 显然，在这辆汽车上的年平均支出 y(单位：万元)是使用时间 x(单位：年)的函数.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 随着 x 的增加，函数值 y 的变化有何规律？

10. 一种质量为 1 kg 的物质，在化学分解中，经过时间 t(单位：min)后，所剩的质量 m(单位：kg)与时间 t 的函数关系为 $m=e^{-2t}$.

(1) 求当 t 从 1 变到 2 时，质量 m 关于 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $m'(2)$ 并解释它的实际意义.

B 组

1. 求曲线 $y=2x-\frac{1}{x}+1$ 在 $x=1$ 处的切线的方程.

2. 一个电路中，流过的电荷量 Q(单位：C)关于时间 t(单位：s)的函数为

$$Q(t)=3t^2-\ln t.$$

(1) 求当 t 从 1 s 变到 2 s 时，电路中流过的电荷量 Q 关于 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $Q'(2)$，并解释它的实际意义；

(3) 求 $Q'(t)$，并讨论 $Q'(t)$ 的变化规律；

(4) 当 t 为何值时 $Q'(t)$ 取得最大值？何时取得最小值？

3. 为了安全起见，高速公路同一车道上行驶的前后两辆汽车之间的距离不得小于 kx^2(单位：m)，其中 x(单位：km/h)是车速，k 为比例系数. 经测定，当车速为 60 km/h 时，安全车距为 40 m. 假设每辆车的平均车长为 5 m.

(1) 写出在安全许可的情况下，某路口同一车道的车流量 y(单位：辆/min)关于车速 x 的函数；

(2) 如果只考虑车流量，规定怎样的车速可以使得高速公路上的车流量最大？这种规定可行吗？

C 组

1. 参照 §8，举例说明如何利用 $y=f'(x)$ 的图象，研究 $y=f(x)$ 的图象和性质.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$. 若 $f'(x_0)=0$，讨论 $x=x_0$ 是否为函数 $f(x)$ 的一个极值点？若作肯定回答，则给出证明；若作否定回答，则举出反例.

附录

部分数学专业词汇中英文对照表

中　文	英　文
导　数	derivative
平均变化率	average rate of change
极大值	maximum
极小值	minimum
极　值	extremum
数　列	sequence
通项公式	general term formula
等差数列	arithmetic sequence
公　差	common difference
等比数列	geometric sequence
公　比	common ratio
数学归纳法	mathematical induction

后 记

为了全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，发展素质教育，推进教育公平，培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人，根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》，北师大版普通高中教科书《数学》教材编写组编写的普通高中教科书，强调了数学课程的基础性和整体性，突出了思想性和应用性，帮助学生掌握现代生活进一步学习必需的数学知识、技能、思想和方法；提升学生的数学素养，引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界；促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展，探寻事物变化规律，增强社会责任感；在学生形成正确的人生观、价值观、世界观等方面发挥独特作用.

本套教材力求尊重学生的认知特点，关注学生的学习过程，创造多层次的学习活动，满足学生多样化的学习需求，促进学生全面而有个性的发展，为学生的终身发展奠定基础.

本套教材由众多学科专家、教育专家、心理学专家和特级教师参与编写，研究基础深厚，教育理念先进，一边编写一边实验，实验教师提出了很好的建议，在此特别表示感谢. 教材的建设是长期、艰苦的任务，需要每一位教师在教学实践中自主开发资源，创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有力的支持.

本套教材主编王尚志、保继光，副主编张饴慈、李延林、张思明，编写组成员还有：董武、李红、关健、吴鹏、隋丽丽、汪香志、于伟东、白雪峰、黄延林、胡凤娟、薛文叙、梁丽平、李大永、任志瑜、赵春、顿继安、李军洪、马萍、吕建生、王建波、焦继红、赵敏.

本册教材由王尚志、张饴慈、张思明担任主编，参与本册教材编写的人员还有：李大永、梁丽平、关健、吴鹏、王建波、赵敏、焦继红、赵春；最终由保继光、张饴慈、李延林、张思明、薛文叙统稿，王尚志、保继光定稿.

本套教材是在原普通高中课程标准实验教科书的基础上进行的修订，在此向原实验教科书编写团队的各位专家、教师，特别是严士健教授，致以衷心的感谢. 很多地方教研员、一线教师为本次教材的修订提供了宝贵的意见，在此一并表示感谢.

在教材中可能会出现错误或不当之处，恳请广大使用者批评指正. 欢迎来电来函与我们联系：北京师范大学出版社基础教育国标教材出版中心(100088)，(010)58802811，shuxue3@bnupg. com.

北京师范大学出版社