国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

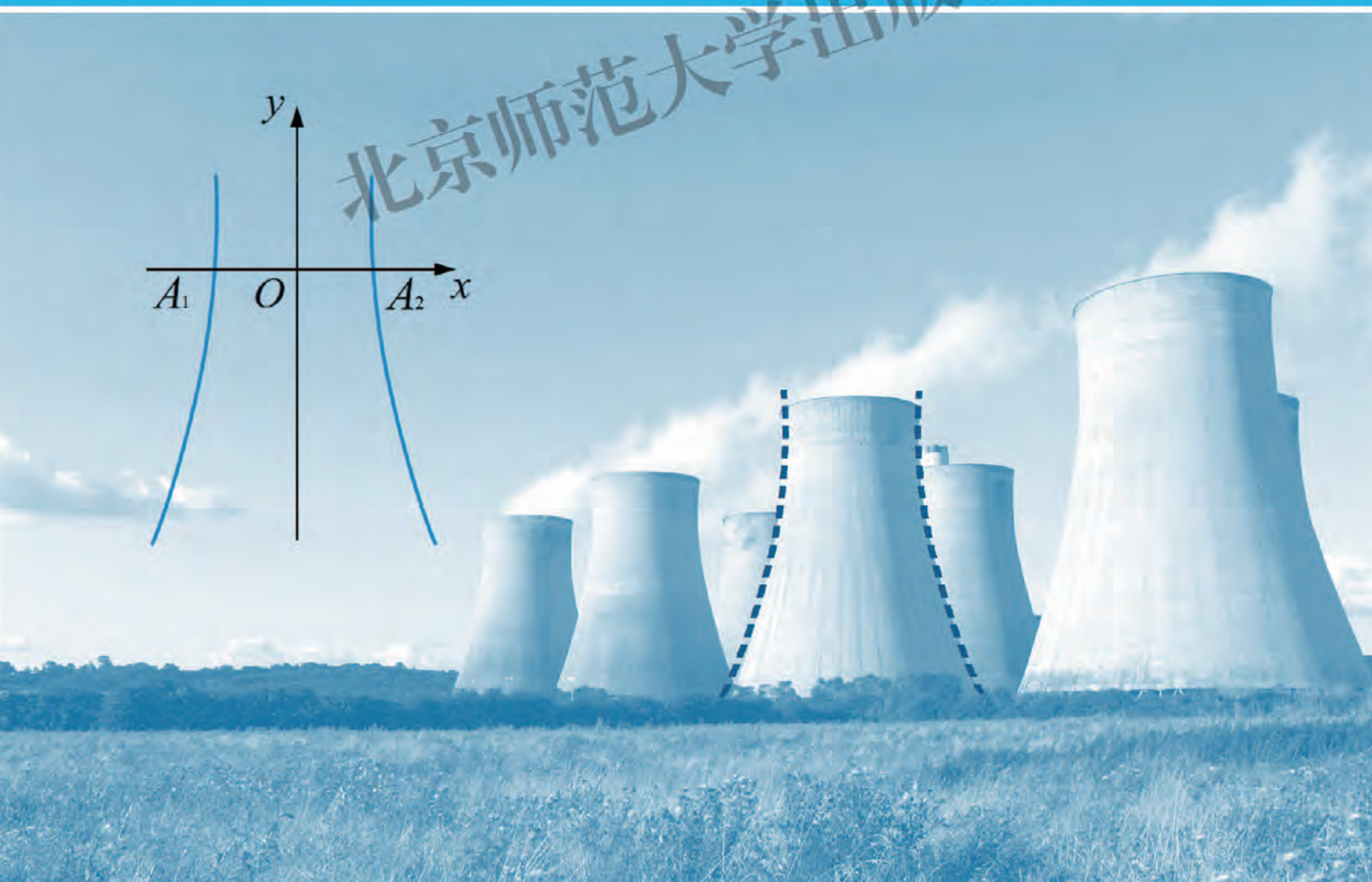
普通高中教科书

数学

选择性必修

第一册

SHUXUE



北京师范大学出版社

普通高中教科书

数学

选择性必修

第一册

主编　王尚志　保继光

主编寄语

亲爱的同学们：

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更重要的数学知识和应用.

你们将获得更多的数学能力和素养.

你们将感受到更深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授人以鱼，不如授人以渔."学会打渔的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

"在数学中，什么是重要的(What is the key in Mathematics) ?"20 世纪六七十年代，很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键 (The problem is the key in Mathematics). 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅要提高思考问题的能力，提高解决问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是很重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，它会给你带来乐趣.

本套教材由 2 册必修教材和 2 册选择性必修教材组成. 习题分为三类：一类是可供课堂学习时使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为 A，B 两个层级；还有一类是章复习题，分为 A，B，C 三个层级.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出、抽象概括、分析理解、思考交流等研究性学习过程.

根据课程标准的要求，数学建模活动与数学探究活动是高中阶段数学课程的重要内容. 本套教材从感悟数学应用、学习数学模型、掌握建模过程和实践数学建模四个层次整体设计了数学建模活动，在必修第一册、第二册和选择性必修第一册分别安排了一章的内容. 另外，在选择性必修第一册、第二册分别从几何和代数两个方面各安排了一次数学探究活动. 数学建模活动与数学探究活动有助于引导同学们递进地思考问题，充分地动手实践. 我们更希望

同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

重视数学的文化价值是数学教育发展的趋势，本套教材整体设计了“数学文化”栏目，包括：名人名言、阅读材料、拓展窗口、建模选材等，并在习题中呈现了对数学文化理解的要求. 教材在必修第一册第一章初步学习“数学文化”内容的基础上，特别设计“学习指导：数学文化”，对同学们后续学习数学文化有重要的指导意义.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、互联网都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多学多用，“技多不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”栏目，为同学们使用信息技术提供了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 特别地，在借助信息技术手段较多的必修第一册第四章，教材设计了“学法指导：利用信息技术学习数学”，引导同学们在学习时从具体学习对象中“跳”出来，利用信息技术手段发现数学规律. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的学校，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容有所了解. 教材中有关信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

目录

第一章　直线与圆 / 1

§1　直线与直线的方程 …… 2
1.1　一次函数的图象与直线的方程 …… 2
1.2　直线的倾斜角、斜率及其关系 …… 2
1.3　直线的方程 …… 8
1.4　两条直线的平行与垂直 …… 16
1.5　两条直线的交点坐标 …… 19
1.6　平面直角坐标系中的距离公式 …… 21
习题1-1 …… 25
§2　圆与圆的方程 …… 27
2.1　圆的标准方程 …… 27
2.2　圆的一般方程 …… 30
2.3　直线与圆的位置关系 …… 32
2.4　圆与圆的位置关系 …… 35
习题1-2 …… 37
阅读材料　笛卡儿与解析几何 …… 39
本章小结 …… 40
复习题一 …… 42

第二章　圆锥曲线 / 45

§1　椭圆 …… 46
1.1　椭圆及其标准方程 …… 46
1.2　椭圆的简单几何性质 …… 51
习题2-1 …… 55
阅读材料　圆与椭圆 …… 57
§2　双曲线 …… 59
2.1　双曲线及其标准方程 …… 59
2.2　双曲线的简单几何性质 …… 61
习题2-2 …… 66
§3　抛物线 …… 67

3.1　抛物线及其标准方程 …… 67
3.2　抛物线的简单几何性质 …… 70
习题 2-3 …… 73
阅读材料　圆锥的截线 …… 75
§4　直线与圆锥曲线的位置关系 …… 76
4.1　直线与圆锥曲线的交点 …… 76
4.2　直线与圆锥曲线的综合问题 …… 79
习题 2-4 …… 81
阅读材料一　圆锥曲线的共同特征 …… 82
阅读材料二　圆锥曲线的光学性质 …… 84
本章小结 …… 86
复习题二 …… 87

第三章　空间向量与立体几何 / 89

§1　空间直角坐标系 …… 90
1.1　点在空间直角坐标系中的坐标 …… 90
1.2　空间两点间的距离公式 …… 92
习题 3-1 …… 94
§2　空间向量与向量运算 …… 96
2.1　从平面向量到空间向量 …… 96
2.2　空间向量的运算 …… 97
习题 3-2 …… 103
信息技术应用　利用 GeoGebra 绘制空间向量 …… 105
§3　空间向量基本定理及空间向量运算的坐标表示 …… 108
3.1　空间向量基本定理 …… 108
3.2　空间向量运算的坐标表示及应用 …… 110
习题 3-3 …… 114
§4　向量在立体几何中的应用 …… 117
4.1　直线的方向向量与平面的法向量 …… 117
4.2　用向量方法研究立体几何中的位置关系 …… 121
4.3　用向量方法研究立体几何中的度量关系 …… 126
习题 3-4 …… 137
阅读材料　异面直线间的距离 …… 140
§5　数学探究活动(一):正方体截面探究 …… 141
习题 3-5 …… 142
本章小结 …… 143
复习题三 …… 145

第四章 数学建模活动(三) / 147

§1 数学建模实例 …… 148
习题 4-1 …… 150
§2 数学建模结题交流 …… 151
2.1 重温“结题” …… 151
2.2 整理数学建模研究成果 …… 151
习题 4-2 …… 152

第五章 计数原理 / 153

§1 基本计数原理 …… 154
1.1 分类加法计数原理 …… 154
1.2 分步乘法计数原理 …… 154
1.3 基本计数原理的简单应用 …… 156
习题 5-1 …… 158
§2 排列问题 …… 159
2.1 排列与排列数 …… 159
2.2 排列数公式 …… 162
习题 5-2 …… 164
§3 组合问题 …… 165
3.1 组合 …… 165
3.2 组合数及其性质 …… 166
习题 5-3 …… 169
§4 二项式定理 …… 170
4.1 二项式定理的推导 …… 170
4.2 二项式系数的性质 …… 171
习题 5-4 …… 172
阅读材料 杨辉三角 …… 173
本章小结 …… 175
复习题五 …… 176

第六章 概率 / 177

§1 随机事件的条件概率 …… 178
1.1 条件概率的概念 …… 178
1.2 乘法公式与事件的独立性 …… 181
1.3 全概率公式 …… 184
习题 6-1 …… 188

§2 离散型随机变量及其分布列 …… 190
2.1 随机变量 …… 190
2.2 离散型随机变量的分布列 …… 191
习题 6-2 …… 195
§3 离散型随机变量的均值与方差 …… 197
3.1 离散型随机变量的均值 …… 197
3.2 离散型随机变量的方差 …… 200
习题 6-3 …… 203
§4 二项分布与超几何分布 …… 205
4.1 二项分布 …… 205
4.2 超几何分布 …… 210
习题 6-4 …… 212
§5 正态分布 …… 214
习题 6-5 …… 217
信息技术应用 利用 GeoGebra 探究概率分布 …… 217
本章小结 …… 220
复习题六 …… 222

第七章 统计案例 / 225

§1 一元线性回归 …… 226
1.1 直线拟合 …… 226
1.2 一元线性回归方程 …… 227
习题 7-1 …… 233
§2 成对数据的线性相关性 …… 234
2.1 相关系数 …… 234
2.2 成对数据的线性相关性分析 …… 238
习题 7-2 …… 240
信息技术应用 借助 Excel 软件计算表 7-1 中两个随机变量之间的样本相关系数 …… 241
§3 独立性检验问题 …… 243
3.1 独立性检验 …… 243
3.2 独立性检验的基本思想 …… 246
3.3 独立性检验的应用 …… 247
习题 7-3 …… 249
本章小结 …… 251
复习题七 …… 252

附录 部分数学专业词汇中英文对照表 …… 253

第一章

直线与圆

中华人民共和国成立后，我国航天事业取得了巨大成就. 2017 年 4 月 20 日成功发射的“天舟一号”是我国自主研制的首艘货运飞船，被形象地称为中国航天的“快递小哥”. 在茫茫太空，让“快递小哥”顺利完成为“天宫二号”提供补给的任务，这就涉及如何确定和描述空间位置的问题.

在初中，我们就已经知道，通过数轴可以将实数和直线上的位置（点）建立一一对应关系，继而建立平面直角坐标系，将有序数对和平面上的位置（点）建立一一对应关系. 这样使我们能够用坐标研究图形，通常把这种方法叫作坐标法，也叫作解析几何法.

坐标法非常重要，在数学史上，它的产生不仅极大地推动了数学的发展，也给天文学、物理学等其他学科带来了深远的影响. 随着计算机技术的发展，坐标法在科学研究、工程设计、工艺美术、印刷乃至影视艺术等各领域都得到了广泛的应用.

在初中的平面几何中，已经学习了直线与圆的相关性质. 本章我们将用坐标法来讨论直线与圆的相关内容，促进数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的发展，为进一步学习圆锥曲线的方程、导数和微积分等知识打下思想和方法的基础.

代数不过是书写的几何，而几何不过是图形的代数.

——热尔曼（Marie-Sophie Germain，1776—1831）

§ 1 直线与直线的方程

1.1 一次函数的图象与直线的方程

在平面直角坐标系中，一次函数的图象是一条直线. 例如，函数$y=2x+1$的图象是直线l（如图 1－1）. 这时，满足函数解析式$y=2x+1$的每一对x,y的值都是直线l上点的坐标，如数对$(0,1)$满足函数解析式，那么在直线l上就存在一点A，它的坐标是$(0,1)$；而直线l上每一点的坐标都满足函数解析式$y=2x+1$，如直线l上点P的坐标是$(1,3)$，数对$(1,3)$同时也满足函数解析式$y=2x+1$.

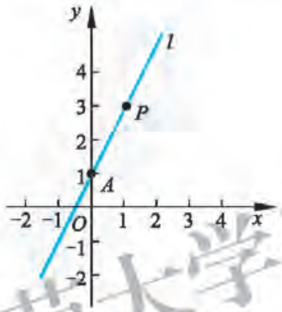


图 1－1

一般地，一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$的图象是一条直线，它是以满足$y=kx+b$的每一对x,y的值为坐标的点构成的. 同时函数解析式$y=kx+b$可以看作二元一次方程. 在解析几何中研究直线时，就是利用直线与方程的这种对应关系，建立直线的方程，并通过方程来研究直线的有关问题.

1.2 直线的倾斜角、斜率及其关系

一、直线的倾斜角和斜率

问题提出

由初中的平面几何知识，我们知道两点确定一条直线；由必修课程中的平面向量知识，我们知道一个点与一个方向也可以确定一条直线. 那么，怎样用代数方法刻画直线呢？

分析理解

我们发现,在图 1－2 中,经过平面直角坐标系原点的直线有无数条;在图 1－3 中,与 x 轴(正方向)所成的角为$\frac{\pi}{6}$的直线也有无数条,而经过原点、与 x 轴正方向所成的角为$\frac{\pi}{6}$的直线仅有一条. 也就是说,一个定点和与 x 轴的一个定夹角就唯一确定了一条直线.

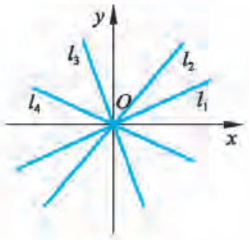


图 1－2

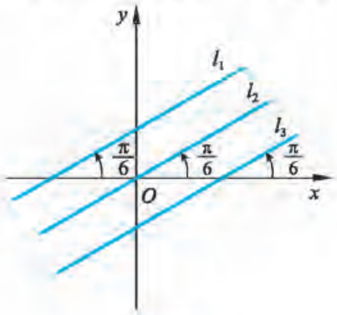


图 1－3

抽象概括

在平面直角坐标系中,对于一条与 x 轴相交的直线 l,把 x 轴(正方向)按逆时针方向绕着交点旋转到和直线 l 首次重合时所成的角,称为直线 l 的**倾斜角**. 通常倾斜角用 α 表示. 当直线 l 和 x 轴平行或重合时,规定它的倾斜角为 0. 因此,直线的倾斜角 α 的取值范围为$[0,\pi)$,如图 1－4. 这样,对于平面直角坐标系中的每一条直线 l,都有唯一确定的倾斜角 α 与之对应.

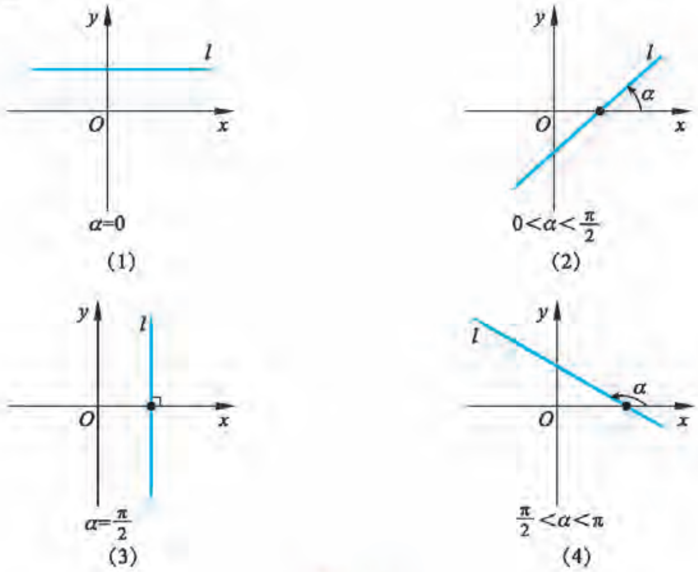


图 1－4

在平面直角坐标系中,直线的倾斜角刻画了直线的倾斜程度,倾斜角越接近$\frac{\pi}{2}$,倾斜程度越大.

在日常生活中，用坡度来刻画道路的倾斜程度，坡度即坡面的铅直高度和水平长度的比，这个比值反映了物体在水平方向的改变量和铅直方向的改变量的联系. 例如，坡度为0.01，说明物体沿着该坡道运动，在水平方向上移动 1 km，在铅直方向上上升或下降 0.01 km(示意图如图 1-5). 显然坡度越大，坡的倾斜程度就越大. 实际上，生活中这样的例子很多，如水库大坝、楼梯及屋顶的坡度等.

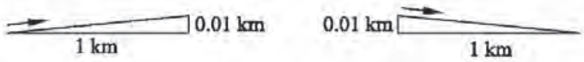


图 1-5

实际上，坡度是利用高度的平均变化率刻画道路的倾斜程度. 与坡度的意义类似，在平面直角坐标系中，直线的倾斜程度利用点的坐标表示如下：

如图 1-6，在直线 l 上任取两个不同的点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，记 $\Delta x=x_2-x_1$ $(\Delta x\neq 0)$，$\Delta y=y_2-y_1$，则在直线 l 上点 P_1 平移到点 P_2，相当于在横轴上改变了 Δx，即横坐标的改变量为 Δx，在纵轴上改变了 Δy，即纵坐标的改变量为 Δy. 因此，比值 $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 反映了直线 l 的倾斜程度.

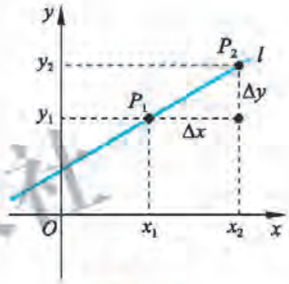


图 1-6

由图 1-6 可知，**$k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的大小与两点 P_1，P_2 在直线上的位置无关.** 称

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(\text{其中 } x_1\neq x_2)}$$

为经过不同两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的直线 l 的**斜率**.

显然，若直线 l 垂直于 x 轴，则它的斜率不存在；若直线 l 不与 x 轴垂直，则它的斜率存在且唯一. 因此，我们常用斜率来表示直线的倾斜程度.

例 1 求满足下列条件的直线的斜率：

(1) 经过点 $A(2,-8)$，$B(5,1)$；

(2) 经过点 $C(0,2)$，$D(2,-1)$；

(3) 经过点 $M(-1,3)$，$N(0,3)$.

解 由经过两点的直线斜率的计算公式，可得

(1) $$k_{AB}=\frac{1-(-8)}{5-2}=3.$$

(2) $$k_{CD}=\frac{-1-2}{2-0}=-\frac{3}{2}.$$

(3)
$$k_{MN}=\frac{3-3}{0-(-1)}=0.$$

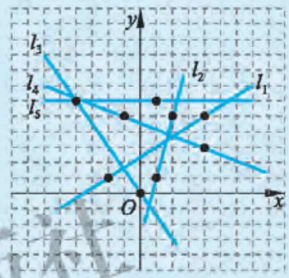
例 2 已知直线 l 经过点 $A(-1,2)$，且斜率 $k=-2$，判断 $B(1,-2)$，$C(0,4)$，$D(0,0)$ 中，哪些点在直线 l 上，哪些点不在直线 l 上.

解 因为 $k_{AB}=\frac{-2-2}{1-(-1)}=-2$，$k_{AC}=\frac{4-2}{0-(-1)}=2\neq-2$，$k_{AD}=\frac{0-2}{0-(-1)}=-2$，且直线 l 经过点 $A(-1,2)$，

所以点 B,D 在直线 l 上，点 C 不在直线 l 上.

练 习

1. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(-1,0)$，$B(1,2)$，$C(2,4)$，求$\triangle ABC$ 的三边所在直线的斜率.
2. 根据图中提供的信息，按从大到小的顺序排列图中各条直线 $l_i(i=1,2,3,4,5)$的斜率 k_i，并写出各条直线的斜率.
3. 判断下列三点是否在同一条直线上：
   (1) $A(1,2)$，$B(-1,3)$，$C(0,4)$；　(2) $D(-2,2)$，$E(2,0)$，$F(0,1)$.
4. 写出下列直线上不同于已知点的一个点的坐标：
   (1) 点 $P_1(1,3)$，斜率为 2；　(2) 点 $P_2(-1,2)$，斜率为 -1.



(第 2 题)

二、直线的斜率与倾斜角、方向向量的关系

由正切函数的概念可知，倾斜角不是 $\frac{\pi}{2}$ 的直线，它的斜率 k 和它的倾斜角 α 满足

$$\boxed{k=\tan\alpha\left(其中\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}\right).}$$

例如，倾斜角是 $\frac{\pi}{4}$ 的直线的斜率是 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，倾斜角是 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线的斜率是 $\tan\frac{3\pi}{4}=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$.

如图 1-7，结合正切函数的图象与性质，我们不难发现斜率 k 与倾斜角 α 有如下关系：

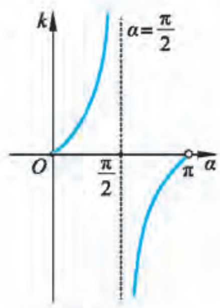


图 1-7

当 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时，斜率 $k\geqslant0$，且 k 随倾斜角 α 的增大而增大；

当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，斜率 $k<0$，且 k 随倾斜角 α 的增大而增大；

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，直线 l 与 x 轴垂直，此时直线 l 的斜率不存在.

思考交流

对于倾斜角不为$\frac{\pi}{2}$的两条直线，其倾斜角相等，斜率就相等吗？反之，其斜率相等，倾斜角就相等吗？

例 3 已知直线 l 的倾斜角为 α，斜率为 k.

(1) 若 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$，求斜率 k 的取值范围；

(2) 若$\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}$，求斜率 k 的取值范围；

(3) 若$-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$，求倾斜角 α 的取值范围；

(4) 若$-1\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$，求倾斜角 α 的取值范围.

解 (1) 由 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$及正切函数的性质，可得 $\tan 0\leqslant\tan\alpha\leqslant\tan\frac{\pi}{3}$，即 $0\leqslant\tan\alpha\leqslant\sqrt{3}$，所以斜率 k 的取值范围是$\{k\mid 0\leqslant k\leqslant\sqrt{3}\}$.

(2) 由正切函数的性质，可得当$\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$k=\tan\alpha\geqslant 1$；当$\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}$时，$k=\tan\alpha\leqslant-1$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，斜率 k 不存在.

综上，斜率 k 的取值范围是$\{k\mid k\leqslant-1$ 或 $k\geqslant 1\}$.

(3) 由$-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得$-\sqrt{3}\leqslant\tan\alpha\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以由正切函数的性质，得倾斜角 α 的取值范围是$\left\{\alpha\left|\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{5\pi}{6}\right.\right\}$.

(4) 由$-1\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$，可得$-1\leqslant\tan\alpha\leqslant\sqrt{3}$.

又 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以由正切函数的性质，得倾斜角 α 的取值范围是$\left\{\alpha\left|0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}\text{或}\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha<\pi\right.\right\}$.

例 4 已知直线 l_1 的倾斜角 $\alpha=30°$，且 $l_2\perp l_1$，求直线 l_1 和 l_2 的斜率.

解 依题意画图（如图 1－8），由于直线 l_1 的倾斜角 $\alpha=30°$，且 $l_2\perp l_1$，则直线 l_2 的倾斜角 $\beta=120°$.

于是，直线 l_1 的斜率 $k_1=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

直线 l_2 的斜率 $k_2=\tan 120°=-\sqrt{3}$.

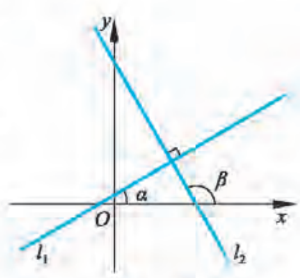


图 1－8

如图 1-9，在直线 l 上任取两个不同的点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$. 由平面向量的知识可知，向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 是直线 l 的方向向量，它的坐标是 (x_2-x_1,y_2-y_1)，直线的倾斜角 α、斜率 k、方向向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分别从不同角度刻画一条直线相对于平面直角坐标系中 x 轴的倾斜程度. 它们之间的关系是

图 1-9

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\alpha\text{（其中 } x_1\neq x_2\text{）.}}$$

若 k 是直线 l 的斜率，则 $\boldsymbol{v}=(1,k)$ 是它的一个方向向量；若直线 l 的一个方向向量的坐标为 (x,y)，其中 $x\neq0$，则它的斜率 $k=\dfrac{y}{x}$.

例 5 已知直线 l 的斜率为 2，求它的一个方向向量的坐标.

解 设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$）为直线 l 上的两点，则直线 l 的一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

由经过两点的直线斜率的计算公式，可得 $2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

即 $$y_2-y_1=2(x_2-x_1).$$

所以 $$\boldsymbol{v}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=(x_2-x_1)(1,2).$$

因此，$(1,2)$ 是直线 l 的一个方向向量的坐标.

例 6 根据下列条件，求直线 l 的倾斜角：

(1) 斜率为 $-\sqrt{3}$；

(2) 经过 $A(-2,0)$，$B(-5,3)$ 两点；

(3) 一个方向向量为 $\overrightarrow{P_1P_2}=\left(2,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

解 设直线 l 的倾斜角为 α.

(1) 因为直线 l 的斜率为 $-\sqrt{3}$，

所以 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$.

又因为 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) 由经过两点的直线斜率的计算公式，可得直线 l 的斜率 $k=\dfrac{3-0}{-5-(-2)}=-1$，

又因为 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

(3) 由直线 l 的一个方向向量为 $\overrightarrow{P_1P_2}=\left(2,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

可得斜率 $k=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又因为 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

练 习

1. 已知下列直线的倾斜角 α，研究它们的斜率 k 的取值情况：

(1) $\alpha=0$；　　(2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$；　　(4) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

2. 已知直线 a,b,c 的斜率分别为 $3,1,-2$，倾斜角分别为 α,β,γ. 按照从大到小的顺序排列 α,β,γ.
3. 已知直线 l 的一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(3,1)$，求直线 l 的斜率.
4. 已知直线 l 的斜率为 -2，求直线 l 的一个方向向量的坐标.

1.3 直线的方程

一、直线方程的点斜式

问题提出

我们知道，一点与一个方向可以确定一条直线. 例如，如图 1－10，直线 l 经过点 $P(0,3)$，且斜率 $k=2$，则直线 l 上的每个点在平面直角坐标系中的位置就被确定了. 也就是说，对于直线 l 上不同于点 P 的每一个点，其坐标都和已知点 P 的坐标与斜率存在某种恒定的数量关系. 那么，这一数量关系是什么呢？

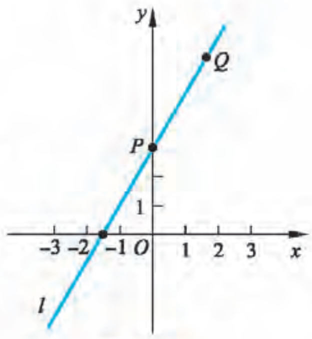


图 1－10

分析理解

设 $Q(x,y)$ 是直线 l 上不同于点 P 的任意一点，由直线斜率的概念，我们知道，不论点 Q 在直线 l 上如何运动，由 P,Q 两点的坐标计算出的斜率是恒定不变的，即

$$\frac{y-3}{x-0}=2.$$

整理，得

$$y=2x+3. \tag{①}$$

此时，点 P 的坐标 $(0,3)$ 也满足方程①.

这说明，直线 l 上任意一点的坐标 (x,y) 都满足方程①.

可以验证，以方程 $y=2x+3$ 的解为坐标的点都在直线 l 上，所以把方程 $y=2x+3$ 就叫作直线 l 的方程.

抽象概括

一般地，如果一条直线 l 上的每一点的坐标都是一个方程的解，并且以这个方程的解为坐标的点都在直线 l 上，那么这个方程称为**直线 l 的方程**.

已知直线 l 经过点 $P(x_0, y_0)$，且斜率为 k，可用上述方法求出直线 l 的方程.

如图 1-11(1)，设 $Q(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P 的任意一点，因为点 P，Q 都在直线 l 上，所以可以用 P，Q 两点的坐标表示直线 l 的斜率：

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=k,$$

即

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0)\ .} \qquad ②$$

由上述推导过程，我们可知：经过点 $P(x_0, y_0)$ 且斜率为 k 的直线 l 上的每一点的坐标都是方程②的解；反之，以方程②的解为坐标的每一点都在经过点 $P(x_0, y_0)$ 且斜率为 k 的直线 l 上. 由此说明：方程②就是经过点 $P(x_0, y_0)$ 且斜率为 k 的直线 l 的方程. 方程②称为直线方程的**点斜式**.

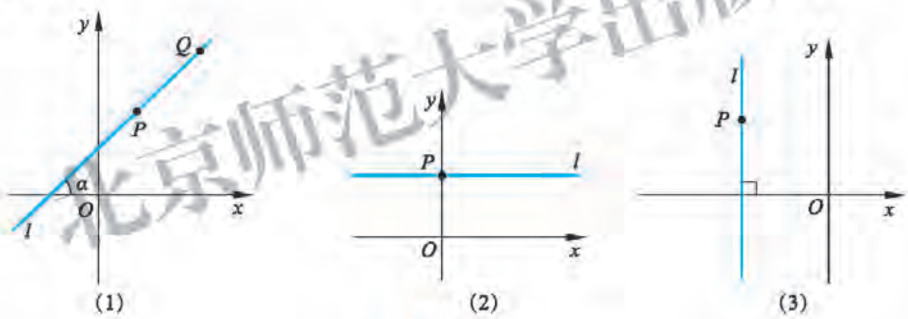


图 1-11

特殊地，当直线 l 的斜率为 0，即 $k=0$ 时，直线 l 与 x 轴平行（或重合），直线方程为 $y=y_0$（如图 1-11(2)）.

若直线 l 经过点 $(0, b)$ 且斜率为 k，则方程②中的点 $P(x_0, y_0)$ 就可以为点 $(0, b)$，所以该直线方程的点斜式为 $y-b=k(x-0)$，

即

$$y=kx+b.$$

该方程中的 k 为直线 l 的斜率，b 为直线 l **在 y 轴上的截距**.

称

$$\boxed{y=kx+b}$$

为直线方程的**斜截式**.

若直线 l 经过点 $P(x_0, y_0)$，且与 x 轴垂直，则直线 l 的斜率 k 不存在，此时它的特点是：直线 l 上任意一点的横坐标都是 x_0，所以直线 l 的方程为 $x=x_0$（如图 1-11(3)）.

思考交流

在初中，我们已经知道一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象是一条直线，与直线方程的斜截式比较，可以发现一次函数解析式中的 k 就是直线的斜率. 在函数中，我们更关注 y 随自变量 x 的变化而变化的关系，那么能否用斜率 $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 来描述一次函数中 y 随自变量 x 的变化规律呢?

例 7 求出经过点 $P(-1,2)$ 且满足下列条件的直线的方程，并画出直线：

(1) 倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$；　　(2) 与 x 轴垂直；　　(3) 与 x 轴平行.

解 (1) 因为直线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，所以该直线的斜率为

$$k=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

因为直线经过点 $P(-1,2)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$，所以该直线方程的点斜式为

$$y-2=\sqrt{3}[x-(-1)],$$

化简，得 $$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}+2=0\text{(如图 1-12(1))}.$$

(2) 因为直线经过点 $P(-1,2)$ 且与 x 轴垂直，所以该直线的方程为

$$x=-1\text{(如图 1-12(2))}.$$

(3) 因为直线经过点 $P(-1,2)$ 且与 x 轴平行，即斜率 $k=0$，所以该直线的方程为

$$y=2\text{(如图 1-12(3))}.$$

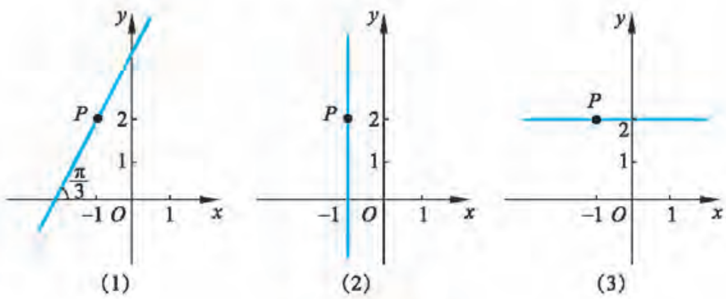


图 1-12

例 8 求经过 $A(-5,0)$，$B(3,-3)$ 两点的直线的方程.

解 由经过两点的直线斜率的计算公式，可得

$$k=\frac{-3-0}{3-(-5)}=-\frac{3}{8}.$$

所以该直线方程的点斜式为

$$y-0=-\frac{3}{8}(x+5),$$

即 $3x+8y+15=0$（如图 1－13）.

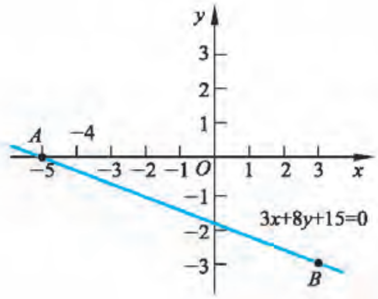


图 1－13

练 习

1. 写出下列直线的方程，并在同一平面直角坐标系中画出这些直线，通过观察，指出方程 $y-2=k(x-1)$ 表示的直线具有的与 k 取值无关的特征：

   (1) 经过点 $(1,2)$，斜率为 1；

   (2) 经过点 $(1,2)$，斜率为 -2；

   (3) 经过点 $(1,2)$，斜率为 0.

2. 已知直线的斜率是 -2，写出在 y 轴上的截距分别为 $-1,0,1,2$ 的直线的方程，并在同一平面直角坐标系中画出图形，观察这些直线，指出方程 $y=-2x+b$ 所表示的直线具有的与 b 取值无关的特征.

3. 求经过下列两点的直线的方程：

   (1) $A(0,1)$，$B(2,0)$；　　(2) $C(2,1)$，$D(0,-1)$；

   (3) $E(2,3)$，$F(2,-1)$；　　(4) $G(3,-3)$，$H(-4,-3)$.

二、直线方程的两点式

问题提出

我们知道，两点可以确定一条直线，因此，直线上其他的任意一点的位置都可以由已知两点确定，即直线上任意其他点的坐标和已知两点的坐标都存在着恒定的数量关系.

如图 1－14，已知直线 l 上的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$），对于直线 l 上其他的任意一点 $Q(x,y)$，A,B,Q 三点坐标间的数量关系是怎样的呢？

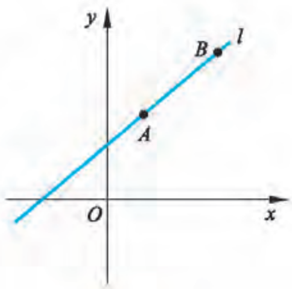


图 1－14

分析理解

由直线斜率的概念，可知对于倾斜角不为$\frac{\pi}{2}$的直线，由直线上任意两点算出的斜率是一个恒定的常数，因此

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

即

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(\text{其中 } x_1\neq x_2, y_1\neq y_2).}$$

这个方程称为直线方程的**两点式**.

例 9 求经过 $A(a,0)$，$B(0,b)$两点的直线 l 的方程(其中 $ab\neq0$).

解 因为直线 l 经过点 $A(a,0)$，$B(0,b)$，所以直线 l 的方程为

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}.$$

整理，得
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

通常，称方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$(其中 $ab\neq0$)为直线方程的**截距式**. 其中，a 为直线与 x 轴交点的横坐标(即直线在 x 轴上的截距)，b 为直线与 y 轴交点的纵坐标(即直线在 y 轴上的截距).

例 10 已知直线 l 经过 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$(其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$)两点，写出直线 l 方程的点斜式.

解 由经过两点的直线斜率的计算公式，可得

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

再由直线方程的点斜式，可得 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

练 习

1. 求经过下列两点的直线的方程：

   (1) $A(-3,2)$，$B(0,-3)$；　(2) $C(0,4)$，$D(4,0)$；　(3) $E(3,2)$，$F(0,0)$.

2. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(7,4)$，$B(3,-1)$，$C(-5,2)$.

   (1) 求$\triangle ABC$ 的三边所在直线的方程；

   (2) 求$\triangle ABC$ 的三条中线所在直线的方程.

3. 回答下列问题：

(1) 任意一条直线的方程都可以用直线的截距式表示吗？

(2) 经过点(1,2)，且在 x 轴和 y 轴上的截距相等的直线有几条？请写出这些直线的方程.

三、直线方程的一般式

在平面直角坐标系中，直线可以分为以下两类：

一类是与 x 轴不垂直的直线. 经过点 $P(x_0, y_0)$，且与 x 轴不垂直的直线方程都可写成点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$，它可化为 $kx-y-kx_0+y_0=0$ 的形式，此方程是关于 x, y 的二元一次方程.

另一类是与 x 轴垂直的直线. 经过点 $P(x_0, y_0)$，且与 x 轴垂直的直线方程为 $x=x_0$，它可化为 $x+0\cdot y-x_0=0$，此方程也是关于 x, y 的二元一次方程.

由此可知，平面直角坐标系中任意一条直线都可以用关于 x, y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$(A, B 不全为 0)来表示.

反之，任何关于 x, y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$(A, B 不全为 0)都可以表示平面直角坐标系中的一条直线.

事实上，当 $B\neq 0$ 时，$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，它表示平面直角坐标系中一条与 x 轴不垂直的直线(其中 $-\frac{A}{B}$ 是直线的斜率)；

当 $B=0$，且 $A\neq 0$ 时，$x=-\frac{C}{A}$，它表示平面直角坐标系中一条与 x 轴垂直的直线.

因此，关于 x, y 的二元一次方程

$$\boxed{Ax+By+C=0(\text{其中 } A, B \text{ 不全为 } 0)}$$

表示的是一条直线，称它为直线方程的**一般式**.

例 11 已知直线经过点 $A(6, -2)$，且斜率为 $-\frac{2}{3}$，求该直线方程的点斜式、一般式和截距式.

解 经过点 $A(6, -2)$，且斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的直线方程的点斜式是

$$y+2=-\frac{2}{3}(x-6).$$

化成一般式，得 $2x+3y-6=0.$

把常数项移到方程的右边，再把方程的两边同时除以 6，得到截距式

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$$

例 12 把直线 l 的方程 $3x-2y+6=0$ 化成斜截式，求出直线 l 的斜率和它在 x 轴与 y 轴上的截距，并画图.

解 将原方程移项，得 $$2y=3x+6.$$

方程的两边同时除以 2，得到斜截式 $y=\frac{3}{2}x+3$.

因此，直线 l 的斜率 $k=\frac{3}{2}$，它在 y 轴上的截距是 3.

令 $y=0$，可得 $x=-2$，

即直线 l 在 x 轴上的截距是 -2.

所以直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 $A(-2,0)$，$B(0,3)$. 过点 A，B 作直线，即可得直线 l(如图 1-15).

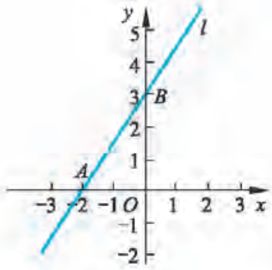


图 1-15

画一条直线时，只要画出这条直线上的两点就可以了，通常是找出直线与两坐标轴的交点.

例 13 已知直线 l 的方程为 $mx+(m-1)y+1=0$，$m\in\mathbf{R}$.

(1) 若直线 l 在 x 轴上的截距为 -2，求 m 的值；

(2) 若直线 l 与 y 轴垂直，求 m 的值；

(3) 若直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，求 m 的值.

解 (1) 由已知，可得直线 l 与 x 轴交于点 $(-2,0)$，

所以 $-2m+(m-1)\cdot 0+1=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$.

故 m 的值为 $\frac{1}{2}$.

(2) 因为直线 l 与 y 轴垂直，所以直线 l 的斜率为 0.

所以直线 l 的方程可化为斜截式 $y=\frac{m}{1-m}x-\frac{1}{m-1}$.

由 $\frac{m}{1-m}=0$，可得 $m=0$.

故 m 的值为 0.

(3) 由(2)可知直线 l 的斜率为 $\frac{m}{1-m}$，又倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，

所以由斜率与倾斜角的关系可得 $\frac{m}{1-m}=\tan\frac{\pi}{4}$，即 $\frac{m}{1-m}=1$.

解得 $m=\frac{1}{2}$.

故 m 的值为 $\frac{1}{2}$.

*四、直线方程的点法式

前面已经讨论了直线的方向向量，与方向向量垂直的向量称为直线的**法向量**，直线的法向量和方向向量都反映了直线的方向.

若直线 l 经过点 P，且一个法向量为 $\boldsymbol{n}$，则直线 l 上不同于点 P 的任意一点 M 都满足 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0$. 反之，满足 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0$ 的任意一点 M 一定在直线 l 上.

如图 1－16，在平面直角坐标系中，已知直线 l 经过点 $P(x_0,y_0)$，且它的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B)$，如何求直线 l 的方程呢？

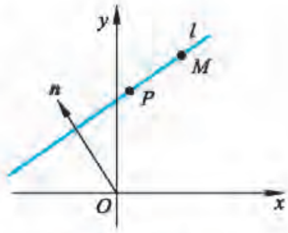


图 1－16

设直线 l 上的任意一点 M 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{PM}=(x-x_0,y-y_0)$.

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0$，可得

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.} \quad ①$$

这说明：直线 l 上的任意一点 $M(x,y)$ 都满足方程①.

另外，容易验证以方程①的解为坐标的点都在直线 l 上.

也就是说，方程①是直线 l 的方程. 称这个方程为直线方程的**点法式**.

例 14 已知△ABC 的三个顶点分别为 $A(1,2)$，$B(-2,1)$，$C(0,-1)$，求 BC 边上的高所在直线的方程.

解 由已知，可得 $\overrightarrow{CB}=(-2,2)$.

因为 $\overrightarrow{CB}=(-2,2)$ 就是 BC 边上的高所在直线的法向量，又所求直线经过点 $A(1,2)$，

所以由直线方程的点法式可得所求直线的方程为

$$-2(x-1)+2(y-2)=0,$$

即

$$x-y+1=0.$$

例 15 已知直线 l 经过点 $A(3,1)$，且与 $P(-1,0)$，$Q(3,2)$ 两点的连线垂直，求直线 l 的方程.

解 因为 $PQ\perp l$，所以 $\overrightarrow{PQ}=(3+1,2-0)=(4,2)$ 为直线 l 的一个法向量.

又直线 l 经过点 $A(3,1)$，代入直线的点法式方程，得

$$4(x-3)+2(y-1)=0,$$

即

$$2x+y-7=0.$$

练　习

1. 求下列直线的斜率及其在 y 轴上的截距：

(1) $2x-y=0$；　(2) $x-2y+1=0$；　(3) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$；　(4) $3y+1=0$.

2. 求经过点 $(0,-1)$，且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线的方程，并化成一般式.

*3. 求经过点 $(1,2)$，且一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,5)$ 的直线的方程，并化成一般式.

4. 对于问题“求经过点 $M(2,-1)$，$N(-3,4)$ 的直线 l 的方程”，某同学采取的方法如下：

首先设直线 l：$Ax+By+C=0$，然后由直线 l 经过 M，N 两点得到 $\begin{cases}2A-B+C=0,\\-3A+4B+C=0.\end{cases}$

做到这里，该同学认为题目条件不够，无法求解直线 l 的方程。你同意该同学的观点吗？说明自己的观点及依据。

1.4 两条直线的平行与垂直

在平面几何中，我们已经学习了两条直线平行或垂直的性质定理和判定定理。那么，在平面直角坐标系中，怎样根据直线方程的特征判断两条直线的平行或垂直关系呢？

一、两条直线平行

由平面几何知识，我们知道，对于两条不重合的直线 l_1，l_2，倾斜角分别为 α_1，α_2，则倾斜角相等($\alpha_1=\alpha_2$)是 $l_1 /\!/ l_2$ 的充要条件，如图 1-17.

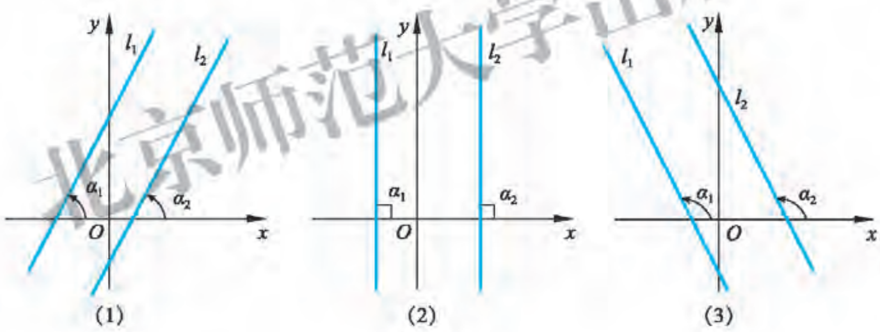


图 1-17

对于倾斜角不为 $\frac{\pi}{2}$ 的直线，由正切函数的性质，可知其倾斜角和斜率是一一对应的。

于是，可以得到如下结论：

对于两条不重合的直线 l_1：$y=k_1x+b_1$ 和 l_2：$y=k_2x+b_2$(其中 $b_1\neq b_2$)，

$$\boxed{l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.}$$

若直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都不存在，则它们都是倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 的直线，从而它们互相平行或重合。

例 16 判断下列各组直线是否平行，并说明理由：

(1) $l_1: y=3x+2$，　　$l_2: y=3x+1$；

(2) $l_1: x+2y-1=0$，　　$l_2: x+2y=0$；

(3) $l_1: x+2=0$，　　$l_2: 2x=1$.

解 (1) 设两条直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2，在 y 轴上的截距分别为 b_1, b_2，则由 l_1，l_2 的方程可知 $k_1=k_2=3$，且 $b_1 \neq b_2$，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

(2) 设两条直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2，在 y 轴上的截距分别为 b_1, b_2.

因为 l_1, l_2 的方程分别可化为 $l_1: y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，$l_2: y=-\frac{1}{2}x$，

所以 $k_1=k_2=-\frac{1}{2}$，且 $b_1 \neq b_2$，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

(3) 由 l_1, l_2 的方程可知，$l_1 \perp x$ 轴，$l_2 \perp x$ 轴，且两条直线 l_1, l_2 在 x 轴上的截距不相同，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

例 17 求经过点 $A(2,3)$，且平行于直线 $l: 2x+y-1=0$ 的直线的方程.

解 依据条件，可知所求直线存在斜率，设所求直线的方程为 $y-3=k(x-2)$.

依题意可知直线 $l: 2x+y-1=0$ 可化为 $y=-2x+1$.

因为所求直线平行于直线 l，所以 $k=-2$.

所以所求直线的方程为 $y-3=-2(x-2)$，即 $2x+y-7=0$.

思考交流

对于两条不重合的直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，可否用它们的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2)$ 来判断这两条直线是否平行呢？

二、两条直线垂直

可否用斜率判断两条直线垂直呢？

对于两条不重合的直线 l_1, l_2，当其斜率都存在时，设它们的斜率分别为 k_1, k_2. 由前面的学习，可知 $\boldsymbol{v}_1=(1, k_1)$ 和 $\boldsymbol{v}_2=(1, k_2)$ 分别是这两条直线的一个方向向量，如图 1-18. 因为两条直线 l_1, l_2 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2$，所以 $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2=0$，即

$$1+k_1k_2=0.$$

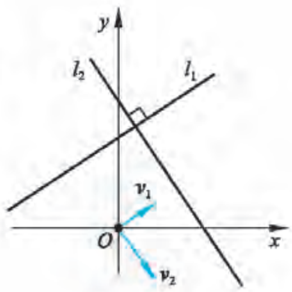


图 1-18

于是，可得到如下结论：

对于两条不重合的直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 和 $l_2: y=k_2x+b_2$，

$$\boxed{l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1.}$$

特殊地，当 l_1, l_2 中有一条直线的斜率不存在时，说明斜率不存在的直线与 x 轴垂直，因此，若 $l_1\perp l_2$，则另一条直线与 x 轴平行或重合，即另一条直线的斜率为 0.

例 18 判断下列各组直线是否垂直，并说明理由：

(1) $l_1: y=3x+2$，　　$l_2: y=-\frac{1}{3}x+1$；

(2) $l_1: x+2y-1=0$，　　$l_2: 2x-y=0$；

(3) $l_1: x+2=0$，　　$l_2: 2y=1$.

解 (1) 设两条直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2，则 $k_1=3, k_2=-\frac{1}{3}$.

因为 $k_1k_2=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$，所以 $l_1\perp l_2$.

(2) **方法 1** 设两条直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2，则 $k_1=-\frac{1}{2}, k_2=2$.

因为 $k_1k_2=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=-1$，所以 $l_1\perp l_2$.

***方法 2** 由两条直线方程可得它们的一个法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,2), \boldsymbol{n}_2=(2,-1)$.

因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=(1,2)\cdot(2,-1)=2-2=0$，所以 $l_1\perp l_2$.

(3) 由两个方程，可知 $l_1/\!/ y$ 轴，$l_2/\!/ x$ 轴，所以 $l_1\perp l_2$.

例 19 求经过点 $A(2,3)$，且垂直于直线 $l: 2x+y-1=0$ 的直线的方程.

解 依据条件，设所求直线的方程为 $y-3=k(x-2)$.

将直线 $l: 2x+y-1=0$ 化为 $y=-2x+1$.

依题意，有 $-2k=-1$，得 $k=\frac{1}{2}$.

所以所求直线的方程为 $y-3=\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x-2y+4=0$.

思考交流

已知两条直线 $l_1: Ax+By+C_1=0$ 和 $l_2: Bx-Ay+C_2=0$，如何判断它们的位置关系呢？判断的理由是什么？

练习

1. 判断下列各组直线的位置关系("垂直""平行"或"既不垂直也不平行"):

(1) $y=-3x+2$ 与 $x+3y-1=0$; (2) $y=x+2$ 与 $x-y-2=0$;

(3) $4x-2y+3=0$ 与 $x+2y-1=0$; (4) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 与 $3x-2y-2=0$;

(5) $2x-5=0$ 与 $3y-1=0$; (6) $2y+1=0$ 与 $y-2=0$.

2. 求经过点 $A(-3,2)$ 且满足下列条件的直线的方程:

(1) 平行于直线 $x+y-2=0$; (2) 垂直于直线 $3x-5y+\sqrt{2}=0$;

(3) 垂直于直线 $\sqrt{3}x+2=0$; (4) 平行于直线 $3y+1=0$.

3. 已知两条不重合的直线 $l_1: ax+2y-1=0$ 和 $l_2: x+(a+1)y-1=0, a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $l_1 /\!/ l_2$,求 a 的值; (2) 若 $l_1 \perp l_2$,求 a 的值.

1.5 两条直线的交点坐标

实例分析

由两条直线的方程 $l_1: 2x-y+3=0$, $l_2: x-2y+6=0$,如何判断 l_1,l_2 是否相交呢?若相交,如何求出其交点坐标呢?

由 l_1,l_2 的方程可知斜率分别为 $k_1=2$,$k_2=\frac{1}{2}$,从而 $k_1\neq k_2$,所以 l_1,l_2 不平行,因此从图形上看,l_1,l_2 一定相交. 显然,l_1,l_2 的交点既在直线 l_1 上,又在直线 l_2 上. 也就是说,交点坐标既满足方程 $2x-y+3=0$,又满足方程 $x-2y+6=0$. 将这两个方程联立即可求出交点的坐标.

解方程组$\begin{cases}2x-y+3=0,\\x-2y+6=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=3.\end{cases}$

所以这两条直线的交点坐标为$(0,3)$.

思考交流

判断两条直线相交有哪些方法?

抽象概括

一般地,对于两条不重合的直线

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\quad l_2: A_2x+B_2y+C_2=0,$$

我们可以用直线的斜率(斜率存在时)或法向量先定性判断两条直线是否相交,若相交,则依

据直线方程的概念可知，两条直线 l_1，l_2 交点的坐标就是两个方程的公共解. 因此，可通过求解方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ 得到两条直线 l_1，l_2 的交点坐标.

例 20 已知 $A(1,4)$，$B(-2,-1)$，$C(4,1)$ 是 $\triangle ABC$ 的三个顶点，求证：$\triangle ABC$ 的三条中线交于一点.

证明 根据已知条件将 A，B，C 三点画在平面直角坐标系中，如图 1-19. 设点 E，F，G 分别为 AB，BC，AC 的中点，则易求得三边的中点坐标分别为 $E\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$F(1,0)$，$G\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.

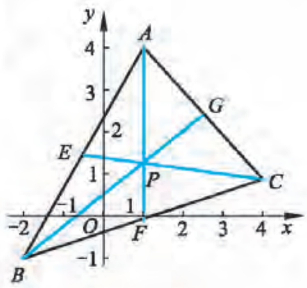


图 1-19

所以中线 AF 所在直线的方程为 $x=1$，

中线 BG 所在直线的方程为 $\dfrac{y+1}{\frac{5}{2}+1}=\dfrac{x+2}{\frac{5}{2}+2}$，即 $y+1=\frac{7}{9}(x+2)$，

中线 CE 所在直线的方程为 $\dfrac{y-1}{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{x-4}{-\frac{1}{2}-4}$，即 $y-1=-\frac{1}{9}(x-4)$.

由 $\begin{cases} y+1=\frac{7}{9}(x+2), \\ x=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=\frac{4}{3}, \end{cases}$

即交点 P 的坐标为 $\left(1,\frac{4}{3}\right)$.

因为 $\frac{4}{3}-1=-\frac{1}{9}\times(1-4)$，所以点 $P\left(1,\frac{4}{3}\right)$ 满足中线 CE 所在直线的方程，

即点 $P\left(1,\frac{4}{3}\right)$ 在中线 CE 所在直线上.

所以 $\triangle ABC$ 的三条中线交于一点.

练 习

1. 求下列各组直线的交点坐标：

(1) $l_1: x-y+2=0$，　　$l_2: x-2y+3=0$；

(2) $l_1: 3x-2y+1=0$，　　$l_2: x+2y+3=0$；

(3) $l_1: y=3x+2$，　　$l_2: y=-2x-3$.

2. 判断下列各组直线的位置关系，若相交，求出交点坐标：

(1) $l_1: x-2y+1=0$，　　$l_2: x-2y+3=0$；

(2) $l_1: 3x+2y-1=0$，　　$l_2: x+5y+4=0$；

(3) $l_1: \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$，　　$l_2: y=-3x+8$.

1.6 平面直角坐标系中的距离公式

一、两点间的距离公式

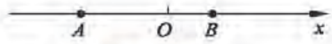


图 1-20

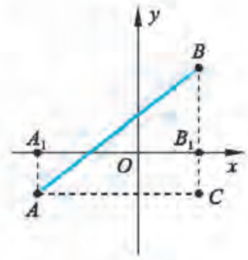


图 1-21

对于坐标平面内任意两点 A,B,通常用 $|AB|$ 表示这两点间的距离.在初中,我们已经学过数轴上两点间的距离公式(如图 1-20).

$$|AB|=|x_B-x_A|.$$

在平面直角坐标系中,若两点为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,如图 1-21,可以将 $|AB|$ 转化为 x 轴和 y 轴方向上的两段距离 $|x_2-x_1|$,$|y_2-y_1|$ 来计算,由勾股定理可得 A,B 两点间的距离公式

$$\boxed{|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.} \qquad ①$$

特殊地,当 $\overrightarrow{AB}$ 与 x 轴或 y 轴平行时,这两点间的距离 $|AB|$ 就是坐标轴上的距离,此时,公式①仍然适用.

分析理解

对于公式①,还可分别按如下两种方法进行理解:

方法 1 从平面向量的知识来看,对于坐标平面内的两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$,那么 A,B 两点间的距离 $|AB|$ 可以理解成向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度,即

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

方法 2 图 1-21 中的 $|AC|=|x_2-x_1|$ 和 $|CB|=|y_2-y_1|$,也可以理解为向量 $\overrightarrow{AB}$ 分别在 x 轴和 y 轴上的投影数量的绝对值.若设向量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别是与 x 轴和 y 轴正方向相同的单位向量,则 $|AC|=|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{i}|=|x_2-x_1|$,$|CB|=|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{j}|=|y_2-y_1|$.于是,再由勾股定理可得公式①.

例 21 已知 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是直线 $l:y=2x+b$ 上的两点,若 $|x_2-x_1|=3$,求 $|AB|$.

解 因为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 在直线 l 上,所以 $y_1=2x_1+b$,$y_2=2x_2+b$.

由已知 $|x_2-x_1|=3$,得 $|y_2-y_1|=|(2x_2+b)-(2x_1+b)|=2|x_2-x_1|=6$.

根据两点间的距离公式,得

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=\sqrt{3^2+6^2}\\&=3\sqrt{5}.\end{aligned}$$

例 22 如图 1 - 22，已知△ABC 的三个顶点分别为 $A(4,3)$，$B(1,2)$，$C(3,-4)$.

(1) 试判断△ABC 的形状；

(2) 设点 D 为 BC 的中点，求 BC 边上中线的长.

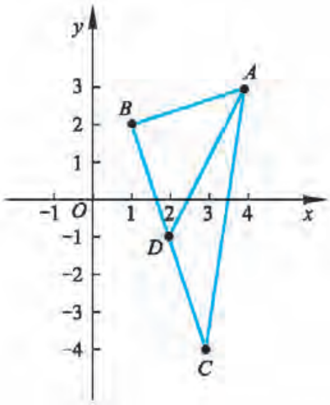


图 1 - 22

解 (1) 根据两点间的距离公式，得

$|AB|=\sqrt{(1-4)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$，

$|BC|=\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{10}$，

$|CA|=\sqrt{(4-3)^2+[3-(-4)]^2}=5\sqrt{2}$.

因为$(\sqrt{10})^2+(2\sqrt{10})^2=(5\sqrt{2})^2$，即$|AB|^2+|BC|^2=|CA|^2$，所以△$ABC$ 是直角三角形.

(2) 因为 BC 的中点 D 的横坐标 $x=\dfrac{1+3}{2}=2$，纵坐标 $y=\dfrac{2+(-4)}{2}=-1$，所以 BC 边上中线的长$|AD|=\sqrt{(2-4)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$.

练 习

1. 求下列两点间的距离：

   (1) $A(-3,2)$，$B(0,3)$； (2) $C(-1,3)$，$D(2,7)$；

   (3) $E(-1,-1)$，$F(-2,2)$.

2. 已知点 $A(x,-5)$，$B(0,10)$的距离为 17，求 x 的值.

3. 已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是直线 l：$y=kx+1$ 上的两点，若$|x_2-x_1|=3$，且$|AB|=6$，求直线 l 的方程.

二、点到直线的距离公式

在平面直角坐标系中，有一点 $P(x_0,y_0)$，直线 l：$Ax+By+C=0$（其中 A，B 不全为 0)，如何求出点 P 到直线 l 的距离 d 呢？

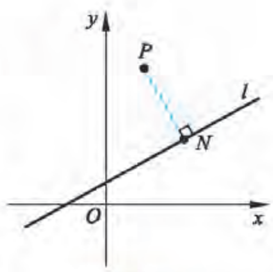


图 1 - 23

根据定义，点 P 到直线 l 的距离 d 就是点 P 到直线 l 的垂线段 PN 的长(如图 1 - 23)．但是因为垂足 N 的坐标是未知的，所以不能直接用两点间的距离公式来计算.

设 $M(x_1,y_1)$是直线 l 上任意一点，我们可以把线段 PN 的长理解成向量 $\overrightarrow{PM}$ 在直线 l 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B)$方向上的投影向量的长度.

所以

$$d=\left|\overrightarrow{PM}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{(x_1-x_0,y_1-y_0)\cdot(A,B)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\quad ①$$

因为点 $M(x_1,y_1)$ 在直线 $l:Ax+By+C=0$ 上，所以 $Ax_1+By_1+C=0$，

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=Ax_1+By_1-(Ax_0+By_0)=-C-Ax_0-By_0.\quad ②$$

将②代入①，我们就得到了点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离公式

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\text{（其中 }A,B\text{ 不全为 0）.}}$$

例 23 求点 $P(-2,1)$ 到下列直线的距离：

(1) $3x+4y-1=0$； (2) $y=2x+3$； (3) $2x+5=0$.

解 (1) 根据点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|3\times(-2)+4\times1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}.$$

即点 $P(-2,1)$ 到直线 $3x+4y-1=0$ 的距离为 $\frac{3}{5}$.

(2) 直线方程 $y=2x+3$ 可化为一般式 $2x-y+3=0$.

根据点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|2\times(-2)-1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

即点 $P(-2,1)$ 到直线 $y=2x+3$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) 直线方程 $2x+5=0$ 可化为 $x=-\frac{5}{2}$，这条直线垂直于 x 轴，所以

$$d=\left|-2-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}.$$

即点 $P(-2,1)$ 到直线 $2x+5=0$ 的距离为 $\frac{1}{2}$.

三、两条平行直线间的距离公式

已知两条平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$，$l_2:Ax+By+C_2=0$（其中 A,B 不全为 0，且 $C_1\neq C_2$），那么如何求它们之间的距离呢？

我们知道，两条平行直线间的距离就是夹在两条平行直线间的公垂线段的长. 在直线 l_1 上任取一点 $P(x_1,y_1)$，则有 $Ax_1+By_1+C_1=0$，此时，两条平行直线 l_1,l_2 间的距离也就是点 $P(x_1,y_1)$ 到直线 l_2 的距离.

根据点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-C_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

即
$$\boxed{d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}(\text{其中 }A,B\text{ 不全为 }0,\text{且 }C_1\neq C_2).}$$

这就是两条平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$，$l_2:Ax+By+C_2=0$（A，B 不全为 0，且 $C_1\neq C_2$）间的距离公式.

例 24 求下列各对平行直线间的距离：

(1) $l_1:3x+4y-1=0$， $l_2:3x+4y+3=0$；

(2) $l_1:y=3x+2$， $l_2:y=3x-3$；

(3) $l_1:x-2y-1=0$， $l_2:2x-4y+3=0$.

解 (1) 根据两条平行直线间的距离公式，得

$$d=\frac{|3-(-1)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}.$$

即 l_1 与 l_2 间的距离为$\frac{4}{5}$.

(2) 将所给直线方程化为一般式，得 $l_1:3x-y+2=0$，$l_2:3x-y-3=0$.

根据两条平行直线间的距离公式，得

$$d=\frac{|-3-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

即 l_1 与 l_2 间的距离为$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(3) 将直线 l_2 的方程化简，得 $x-2y+\frac{3}{2}=0$.

根据两条平行直线间的距离公式，得

$$d=\frac{\left|\frac{3}{2}-(-1)\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

即 l_1 与 l_2 间的距离为$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

练 习

1. 求原点到下列直线的距离：

(1) $\sqrt{3}x+y-3=0$； (2) $y=3x+10$； (3) $3y-5=0$.

2. 求点 P 到下列直线 l 的距离：

(1) $P(1,-2)$，l：$3x+4y-10=0$；

(2) $P(-3,0)$，l：$3x+\sqrt{7}y+5=0$.

3. 已知$\triangle ABC$的三个顶点分别为$A(1,4)$，$B(-2,-1)$，$C(4,1)$，求$\triangle ABC$的面积.

4. 求下列各对平行直线间的距离：

(1) l_1：$\sqrt{3}x-y-1=0$，　　l_2：$\sqrt{3}x-y+3=0$；

(2) l_1：$y=2x+1$，　　l_2：$y=2x-9$；

(3) l_1：$-x+2y+2=0$，　　l_2：$x-2y+3=0$.

习题 1-1

A　组

1. 已知直线 l 经过点 $A(0,2)$，$B(3,-1)$，求直线 l 的斜率.

2. 已知直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(2,-2\sqrt{3})$，求直线 l 的倾斜角和斜率.

3. 已知点 $P(-2,m)$，$Q(m,4)$，且直线 PQ 的斜率为 1，求实数 m 的值.

4. 根据下列条件，写出直线方程的一般式：

(1) 经过点$(0,2)$，且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$；

(2) 经过点$(-2,3)$和点$(-1,0)$；

(3) 经过点$(2,1)$，在 x，y 轴上有不为 0 且相等的截距.

5. 求满足下列条件的直线方程的一般式：

(1) 经过点$(2,-1)$，且与直线 $2x-y+3=0$ 平行；

(2) 经过点$(0,2)$，且与直线 $2x-y+3=0$ 垂直；

(3) 经过点$(-2,3)$，且与 x 轴垂直；

(4) 经过点$(1,2)$，且一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(1,\sqrt{3})$.

6. 求经过两条直线 $2x-3y+1=0$ 和 $x+y-2=0$ 的交点，且与直线 $2x+y+3=0$ 垂直的直线的方程.

7. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 分别在 x 轴和 y 轴上，且 $AC=6$，$BD=4$，求菱形 $ABCD$ 四边所在直线的方程.

8. 若直线 $2x-ay+1=0$ 与直线 $x-y=0$ 的交点在直线 $2x+y-3=0$ 上，求实数 a 的值.

9. 已知直线 $ax+y-2=0$ 与直线 $x+(a-1)y-2=0$ 垂直，求实数 a 的值.

10. 求以 $A(2,0)$，$B(4,-2)$ 为端点的线段 AB 的垂直平分线的方程.

11. 已知直线 l 与直线 $\sqrt{3}x+y-3=0$ 平行且两者间的距离为 2，求直线 l 的方程.

B 组

1. 写出下列含参数的方程的直线的几何特性：

(1) $y-2=k(x+1)$；　　(2) $y=2x+b$；

(3) $x=my+2$.

2. 用坐标法证明：

(1) 在直角三角形中，斜边中点到三个顶点的距离相等；

(2) 若三角形一边上的中点到三个顶点的距离相等，则该边所对的角是直角.

3. 已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是直线 l：$y=2x+3$ 上的两点，若 $|AB|=5$，求 $|x_2-x_1|$ 的值.

4. 已知直线 l 经过点 $A(-1,3)$，且点 $P(1,-1)$ 到直线 l 的距离为 2，求直线 l 的方程.

5. 若正方形的中心为 $(-1,0)$，一条边所在直线的方程为 $x+3y-5=0$，求其余三条边所在直线的方程.

6. 经过点 $A(1,0)$ 的直线 l 被两条直线 $2x-y=0$ 和 $x+y+2=0$ 所截得的线段恰被点 A 平分，求直线 l 的方程.

7. 已知直线 l 与直线 $2x-3y+5=0$ 关于直线 $x=1$ 对称，求直线 l 的方程.

8. 一条沿直线传播的光线经过点 $P(-2,5)$ 和 $Q(1,1)$，然后被 x 轴反射，求入射点及反射光线所在直线的方程.

*9. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(0,4)$，求 BC 边上的高所在直线的方程.

C 组

1. 探索方程 $|x|+|y|=1$ 表示的图形.

2. 探索方程 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2$ 表示的图形.

3. 已知三条直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，倾斜角分别为 α，β，γ，且 $k_1<k_2<k_3$，探索其倾斜角 α，β，γ 的大小关系.

§2 圆与圆的方程

2.1 圆的标准方程

问题提出

在平面几何的学习中，我们已经认识到圆是平面内到定点的距离等于定长的所有点的集合(或轨迹)，其中定点是圆心，定长就是半径.

说　明

在几何学中，通常我们将满足某条件的点的集合也叫作满足某条件的点的轨迹.

在平面直角坐标系中，如何把圆的问题转化为数和方程的问题，用代数运算来求解呢?

分析理解

设圆 C 的圆心为 $C(a,b)$，半径为 r，如图 1-24. 下面来求圆上任意一点的横、纵坐标所满足的关系式.

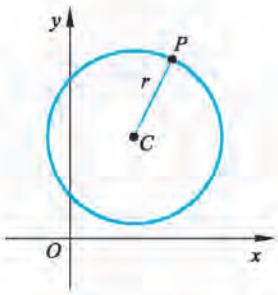


图 1-24

设 $P(x,y)$ 为平面直角坐标系中的任意一点，根据圆的定义，点 P 在圆 C 上的充要条件是

$$|PC|=r.$$

也就是说，若点 P 在圆 C 上，则 $|PC|=r$；反之，若点 P 满足 $|PC|=r$，则点 P 在圆 C 上.

根据两点间的距离公式，将 $|PC|=r$ 化为

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

将上式两边平方、整理，得方程

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.} \qquad ①$$

平面内圆 C 上的点 P 的坐标 (x,y) 满足方程①，反之，以满足方程①的 (x,y) 为坐标的点 P 一定在圆 C 上. 因此，方程①就是以点 $C(a,b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程，称此方程为**圆的标准方程**.

思考交流

对于点 $P(x_0,y_0)$ 和圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，由圆的标准方程的概念，可知点 P 在圆 C 上的充要条件是 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$.

当点 P 不在圆 C 上时，一定有 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2\neq r^2$，此时，存在以下两种情况：

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2 \text{ 或 } (x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2.$$

而点 P 不在圆 C 上时，也恰好有两种情况：点 P 在圆 C 内或点 P 在圆 C 外. 那么，"两个不等关系"和"点与圆的两种位置关系"之间存在怎样的联系呢？

例 1 根据下列圆的方程，写出各圆的圆心和半径：

(1) $x^2+(y-1)^2=4$；　　(2) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

解 (1) 根据圆的标准方程，可得该圆的圆心为 $(0,1)$，半径为 2.

(2) 将方程 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ 化为 $(x-1)^2+[y-(-1)]^2=(\sqrt{2})^2$，根据圆的标准方程，可得该圆的圆心为 $(1,-1)$，半径为 $\sqrt{2}$.

例 2 已知两点 $A(1,2)$ 和 $B(3,-2)$.

(1) 求以点 A 为圆心，且经过点 B 的圆的方程；

(2) 求以 AB 为直径的圆的方程.

解 (1) 根据已知条件，设圆 A 的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$.

由圆 A 经过点 $B(3,-2)$，得 $(3-1)^2+(-2-2)^2=r^2$.

解得 $r^2=20$.

所以圆 A 的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=20$（如图 1-25）.

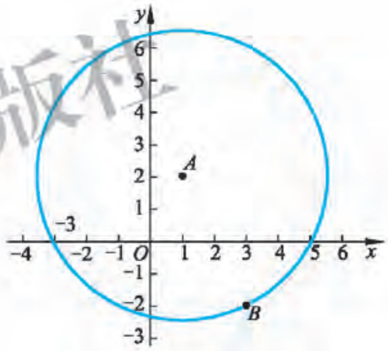


图 1-25

(2) 设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则 (a,b) 是圆心的坐标.

根据已知条件，得

$$a=\frac{1+3}{2}=2,\ b=\frac{2+(-2)}{2}=0.$$

将点 $B(3,-2)$ 代入圆的方程 $(x-2)^2+y^2=r^2$，解得

$$r^2=(3-2)^2+(-2)^2=5.$$

所以所求圆的方程为 $(x-2)^2+y^2=5$（如图 1-26）.

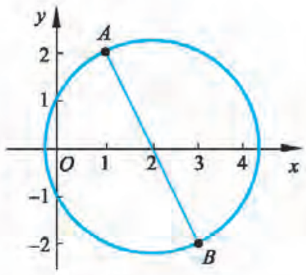


图 1-26

思考交流

1. 若圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 经过点 $(2,-1)$，且 $r=1$，则该圆确定吗？如果不确定，那么圆心 $C(a,b)$ 的位置有何特点？

2. 若圆 C 经过 $A(2,1)$，$B(0,1)$ 两点，则该圆确定吗？如果不确定，那么圆心 $C(a,b)$ 的位置又有怎样的特点？

练 习

1. 根据下列圆的方程,写出各圆的圆心和半径:

(1) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$;　　(2) $x^2+y^2=5$;

(3) $x^2+(y+1)^2=3$;　　(4) $(1-x)^2+(2+y)^2=9$.

2. 下列方程是圆的方程吗?若不是,请说明理由.

(1) $(x+1)^2+(y-1)^2=-5$;　　(2) $(x+1)^2+(y-1)^2=k$.

3. 根据下列条件,求圆的标准方程:

(1) 圆心在原点,半径为 3;

(2) 圆心是$(3,-4)$,半径是 $\sqrt{5}$;

(3) 已知 $A(2,5)$,$B(0,-1)$两点,线段 AB 是圆的直径.

4. 判断下列各点与圆$(x-2)^2+(y+1)^2=5$ 的位置关系,并说明理由:

(1) $O(0,0)$;　　(2) $A(1,2)$;

(3) $B(3,-2)$.

例 3 求经过 $A(1,3)$,$B(4,2)$两点,且圆心 C 在直线 l:$x+y-3=0$ 上的圆的标准方程.

解法 1 设该圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

由圆经过 A,B 两点且圆心 C 在直线 l 上,可得方程组

$$\begin{cases}(1-a)^2+(3-b)^2=r^2, & ①\\(4-a)^2+(2-b)^2=r^2, & ②\\a+b-3=0. & ③\end{cases}$$

①-②,得 $$(1-a)^2+(3-b)^2=(4-a)^2+(2-b)^2, \quad ④$$

化简、整理,得 $$3a-b-5=0. \quad ⑤$$

联立③⑤解得 $$\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$$

代入①,得 $$r^2=5.$$

故所求圆的标准方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=5$(如图 1-27(1)).

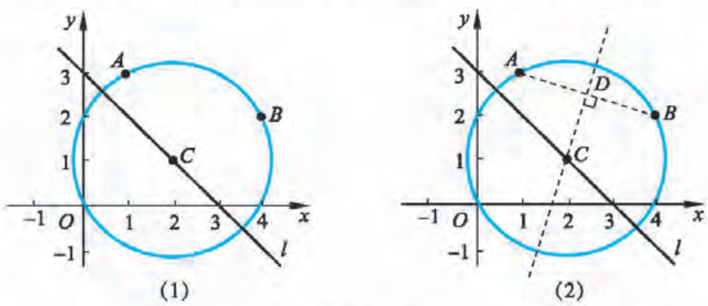


图 1-27

解法 2 如图 1-27(2),连接 AB,作 AB 的垂直平分线交 AB 于点 D,则圆心 C 是线段 AB 的垂直平分线与直线 l 的交点.线段 AB 的垂直平分线的方程为 $3x-y-5=0$.

联立线段 AB 的垂直平分线方程和直线 l 的方程得方程组$\begin{cases}3x-y-5=0,\\x+y-3=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$即圆心 C 的坐标为$(2,1)$.

又该圆经过点 A,则 $r^2=(1-2)^2+(3-1)^2=5$,
故所求圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

对于任何一个半径为 r 的圆,为了方便研究,我们可以以圆心为原点建立平面直角坐标系,再依据圆的定义得到圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2. \quad ①$$

由圆的方程①,可得圆的简单几何性质:

(1) 范围

由方程①可得圆上任意一点 $P(x,y)$都满足不等式

$$|x|\leqslant r,|y|\leqslant r.$$

这说明圆上的所有点都在两条平行直线 $x=-r$,$x=r$ 和两条平行直线 $y=-r$,$y=r$ 围成的正方形之间(如图 1-28).

图 1-28

(2) 对称性

根据方程①的结构特点,可以发现:若点 P 的坐标(x,y)满足方程①,则点 P 分别关于 x 轴、y 轴和原点 O 对称的点 $P_1(x,-y)$,$P_2(-x,y)$,$P_3(-x,-y)$的坐标也都满足方程①. 这说明圆①既是关于 x 轴和 y 轴的轴对称图形,也是关于原点的中心对称图形.

练 习

1. 求经过 $O(0,0)$,$B(4,-4)$两点,且圆心 C 在直线 l:$x+y+2=0$ 上的圆的标准方程.
2. 回顾例 3 的求解过程,说明由方程①和②消 r^2 得到的方程④表达的几何意义,并指出方程④表示的图形和 $A(1,3)$,$B(4,2)$两点具有怎样的位置关系.

2.2 圆的一般方程

把圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 展开得到

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

可见,任何一个圆的方程都可以写成下面的形式:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \quad ①$$

反之,这个方程表示的图形是否都是圆呢?

对方程①进行配方，得$\left(x+\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{2}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}$.

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①可表示为$\left(x+\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}\right)^2$，

方程①表示以$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$为圆心，$\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$为半径的圆；

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程①仅有一组解$\begin{cases}x=-\dfrac{D}{2},\\ y=-\dfrac{E}{2},\end{cases}$所以方程①表示一个点$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$；

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程①没有实数解，因而它不表示任何图形.

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①表示一个圆. 称

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(\text{其中 } D^2+E^2-4F>0)}$$

为圆的一般方程.

对于二元二次方程 $Ax^2+Cxy+By^2+Dx+Ey+F=0$ 而言，圆的一般方程突出了二元二次方程表示圆时，其在代数结构上的典型特征：

(1) x^2，y^2 的系数相同，且不等于 0，即 $A=B\neq0$；

(2) 不含 xy 这样的二次项，即 $C=0$.

具备上述两个特征是一般二元二次方程表示圆的必要条件，但不是充分条件.

例 4 求经过 $A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(5,-5)$三点的圆的方程.

解 设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为 A，B，C 三点在圆上，所以有

$$\begin{cases}10+D+3E+F=0,\\ 20+4D+2E+F=0,\\ 50+5D-5E+F=0,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}D=-2,\\ E=4,\\ F=-20.\end{cases}$

故所求圆的方程为

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0(\text{如图 } 1-29).$$

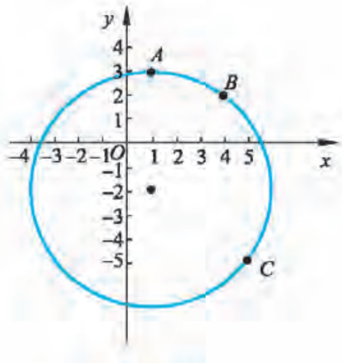


图 1-29

思考交流

能从代数角度说明“不共线的三点可以确定一个圆”吗？

例 5 讨论方程 $\lambda(x^2+y^2)=(x-3)^2+y^2$ 表示的是怎样的图形.

解 将原方程整理为 $(\lambda-1)x^2+(\lambda-1)y^2+6x-9=0$. ①

当 $\lambda=1$ 时,方程①是一元一次方程 $6x-9=0$,表示与 x 轴垂直的直线.

当 $\lambda\neq1$ 时,方程①可进一步整理为 $\left(x+\dfrac{3}{\lambda-1}\right)^2+y^2=\dfrac{9\lambda}{(\lambda-1)^2}$. ②

当 $\lambda<0$ 时,方程②无解,故原方程不表示任何图形;

当 $\lambda=0$ 时,方程②只有一组解 $\begin{cases}x=3,\\y=0,\end{cases}$ 故原方程表示一个点 $(3,0)$;

当 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$ 时,原方程表示一个圆心在点 $\left(-\dfrac{3}{\lambda-1},0\right)$,半径为 $\dfrac{3\sqrt{\lambda}}{|\lambda-1|}$ 的圆.

练　习

1. 下列二元二次方程中,哪些表示圆?如果是圆,求出它的圆心和半径:

(1) $2x^2+y^2+2x-y=0$; (2) $x^2+y^2+2x+4y=0$;

(3) $x^2+2x-y+1=0$; (4) $2x^2+2y^2+2x-4y+1=0$;

(5) $x^2+y^2-2x+y+2=0$.

2. 已知下列方程表示的是圆,写出方程系数 a,b 的取值范围,并指出各圆的圆心和半径:

(1) $x^2+y^2+2ax=0$; (2) $x^2+y^2+2by=0$;

(3) $x^2+y^2+2ax+2by=0$.

3. 根据下列条件,求圆的方程:

(1) 圆经过 $A(0,2)$,$B(-1,1)$ 两点,且圆心在直线 $x+2y-1=0$ 上;

(2) 圆经过 $O(0,0)$,$M(1,1)$,$N(4,2)$ 三点.

2.3 直线与圆的位置关系

在平面几何中,已经学习了直线与圆的三种位置关系:直线与圆相交,直线与圆相切,直线与圆相离(如图 1-30).

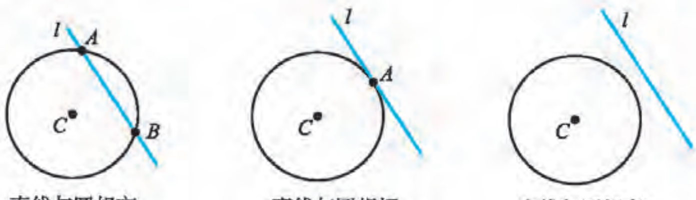


图 1-30

通过前面的学习,已经知道,借助平面直角坐标系,平面内的直线 l 与圆 C 可以分别用方程表示.那么,由直线 l 与圆 C 的方程,如何判断它们的位置关系呢?

直线与圆的位置关系可由圆心到直线的距离与半径的大小关系来决定,也可以根据它们的方程组成的方程组解的情况来决定.

一般地,已知直线 l:$Ax+By+C=0$(A,B 不全为 0)和圆 C:$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,则圆心 $C(a,b)$到直线 l 的距离

$$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}(A,B\text{ 不全为 }0).$$

当 $d<r$ 时,直线 l 与圆 C 相交;当 $d=r$ 时,直线 l 与圆 C 相切;当 $d>r$ 时,直线 l 与圆 C 相离.

此外,也可以由方程组$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$解的情况来判断直线 l 和圆 C 的位置关系:当方程组有两组不同的实数解时,直线 l 与圆 C 相交;当方程组只有一组实数解(两组相等的实数解)时,直线 l 与圆 C 相切;当方程组没有实数解时,直线 l 与圆 C 相离.

例 6 已知直线 l:$2x+y-3=0$,圆 M:$(x-a)^2+y^2=5$.

(1) 指出圆心 M 的位置特征;

(2) 求实数 a 分别取何值时,直线 l 与圆 M 相交、相切、相离.

解 (1) 由圆 M 的方程可知圆心 $M(a,0)$为 x 轴上的动点.

(2) 根据点到直线的距离公式,得圆心 M 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{|2a-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2a-3|}{\sqrt{5}}.$$

当 $d<\sqrt{5}$,即 $-1<a<4$ 时,直线 l 与圆 M 相交(如图 1-31);

当 $d=\sqrt{5}$,即 $a=-1$ 或 $a=4$ 时,直线 l 与圆 M 相切;

当 $d>\sqrt{5}$,即 $a<-1$ 或 $a>4$ 时,直线 l 与圆 M 相离.

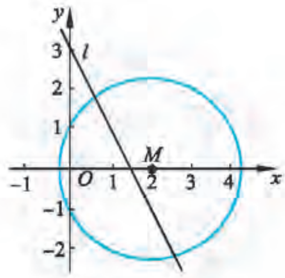


图 1-31

练 习

1. 判断下列直线 l 与圆 C 的位置关系:

(1) l:$x+y-1=0$, C:$x^2+(y-3)^2=2$;

(2) l:$2x-y-1=0$, C:$x^2+y^2+2x=0$;

(3) l:$2x+1=0$, C:$x^2+y^2+2x-2y=0$.

2. 已知直线 l:$y=x+b$,圆 C:$x^2+(y-1)^2=2$,求实数 b 分别为何值时,直线 l 与圆 C 相交、相切、相离.

例 7 已知直线 l 经过 $O(0,0)$,且与圆 C:$(x-1)^2+(y-3)^2=5$ 相切,求直线 l 的方程.

解法 1 当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=0$,代入圆 C 的方程,得$(y-3)^2=4$,此方程有两个不相等的实数根,即直线 l 与圆 C 相交,不合题意.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx$，得到方程组

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=5, & ① \\ y=kx, & ②\end{cases}$$

将②代入①消去 y 并整理，得 $(k^2+1)x^2-2(3k+1)x+5=0$. ③

由直线与圆相切可得方程③有两个相等的实数根，所以

$$\Delta=4(3k+1)^2-20(k^2+1)=0,$$

即
$$2k^2+3k-2=0.$$

解得
$$k=\frac{1}{2}\text{或}k=-2.$$

故所求直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=-2x$（如图 1-32）.

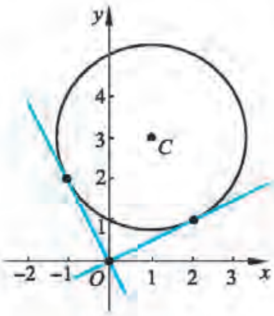


图 1-32

解法 2 当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=0$，圆心 $C(1,3)$ 到直线 l 的距离为 $1\neq\sqrt{5}$，不合题意.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx$，即 $kx-y=0$.

由相切条件可得 $d=\frac{|k-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，即

$$2k^2+3k-2=0.$$

解得
$$k=\frac{1}{2}\text{或}k=-2.$$

故所求直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=-2x$（如图 1-32）.

例 8 已知直线 $m:3x+4y-2=0$ 与圆 $P:x^2+y^2-2x-2y=0$.

(1) 写出圆 P 的圆心坐标和半径，并在平面直角坐标系中画出直线 m 和圆 P 的图形；

(2) 由(1)所画图形，判断直线 m 与圆 P 的位置关系，若相交，求直线 m 被圆 P 截得的弦长；若相切或相离，给出证明.

解 (1) 将圆的方程化为标准方程，得 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，即圆 P 是以点 $(1,1)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆（如图 1-33(1)）.

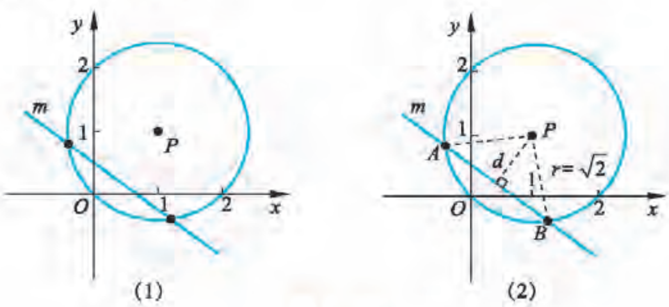


图 1-33

(2) 因为圆心 P 到直线 m 的距离 $d=\frac{|3+4-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1<\sqrt{2}$，所以直线 m 与圆 P 相交.

设交点为 A,B，圆 P 的半径为 r（如图 1-33(2)），易知 $\triangle PAB$ 是等腰三角形，腰 PA,PB

的长为圆 P 的半径长，即 $PA=PB=r=\sqrt{2}$，底边 AB 上的高为圆心 P 到直线 m 的距离 d.

所以由勾股定理，得 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2$.

故直线 m 被圆 P 截得的弦长为 2.

练　习

1. 已知直线 l 经过点 $P(-1,0)$，求直线 l 的斜率分别为何值时，满足下列条件：

   (1) 直线 l 经过圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ 的圆心；

   (2) 直线 l 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切；

   (3) 直线 l 与圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 相交，且截得的弦长为 2.

2. 求经过点 $A(0,2)$，且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切的直线的方程.

3. 求直线 $y=-2x+5$ 被圆 $x^2+y^2=10$ 截得的弦 AB 的长.

2.4　圆与圆的位置关系

平面内两个不等的圆之间有下列 5 种位置关系：

(1) 两个圆没有公共点，并且每个圆上的点都在另一个圆的外部，此时叫作这两个圆**外离**(如图 1-34(1)).

(2) 两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，每个圆上的点都在另一个圆的外部，此时叫作这两个圆**外切**(如图 1-34(2)). 这个唯一的公共点叫作两个圆的**切点**.

(3) 两个圆有两个公共点，此时叫作这两个圆**相交**(如图 1-34(3)).

(4) 两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，一个圆上的点都在另一个圆的内部，此时叫作这两个圆**内切**(如图 1-34(4)). 这个唯一的公共点叫作两个圆的**切点**.

两个圆外切和内切统称两个圆**相切**.

(5) 两个圆没有公共点，并且一个圆上的点都在另一个圆的内部，此时叫作这两个圆**内含**(图 1-34(5)).

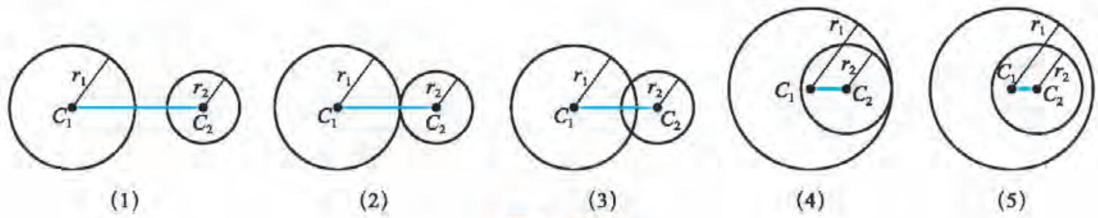


图 1-34

当两个圆是等圆时，它们之间的位置关系只有外离、外切和相交三种情况(重合时两个圆被看成一个圆).

如果两个圆不是同心圆，那么经过两个圆的圆心的直线，叫作两个圆的**连心线**. 两个圆心之间的线段长叫作**圆心距**.

两个圆的圆心距 d、两个圆的半径 r_1, r_2 的大小关系与两个圆的位置关系有如下的对应关系：

两个圆外离$\Leftrightarrow d>r_1+r_2$;

两个圆外切$\Leftrightarrow d=r_1+r_2$;

两个圆相交$\Leftrightarrow |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$;

两个圆内切$\Leftrightarrow d=|r_1-r_2|$;

两个圆内含$\Leftrightarrow d<|r_1-r_2|$.

若圆 $C_1:(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$，圆 $C_2:(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$，则两个圆的圆心分别为 $C_1(x_1,y_1)$，$C_2(x_2,y_2)$，半径分别为 r_1, r_2. 于是圆心距

$$d=|C_1C_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

然后基于以上结论就可以进行两个圆位置关系的判断了.

例 9 画图并判断圆 $C_1:x^2+y^2+2x=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-2y=1$ 的位置关系.

解 如图 1-35，由已知，得

$C_1:(x+1)^2+y^2=1$，圆心 $C_1(-1,0)$，半径 $r_1=1$;

$C_2:x^2+(y-1)^2=2$，圆心 $C_2(0,1)$，半径 $r_2=\sqrt{2}$.

于是 $d=|C_1C_2|=\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$，$|r_1-r_2|=\sqrt{2}-1$，$r_1+r_2=\sqrt{2}+1$.

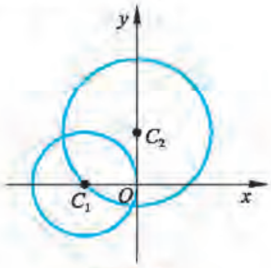


图 1-35

因为 $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$，所以圆 C_1 与圆 C_2 相交.

例 10 已知圆 C 与 x 轴和 y 轴都相切，且与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相外切，求圆 C 的方程.

解 设圆 C: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

因为圆 C 与 x 轴和 y 轴都相切，

所以 $$|a|=|b|=r. \quad ①$$

因为圆 C 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相外切，

所以 $$\sqrt{a^2+b^2}=1+r. \quad ②$$

由方程①化简方程②，得 $\sqrt{2}r=1+r$，

所以 $r=\sqrt{2}+1$.

所以 $|b|=|a|=\sqrt{2}+1=r$.

所以圆 C 的方程为

$$C_1:(x-\sqrt{2}-1)^2+(y-\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$$

或 $$C_2:(x+\sqrt{2}+1)^2+(y-\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$$

或 $$C_3:(x+\sqrt{2}+1)^2+(y+\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$$

或 $$C_4:(x-\sqrt{2}-1)^2+(y+\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2}+1)^2.$$

如图 1－36.

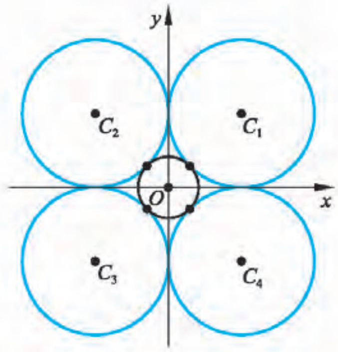


图 1－36

思考交流

圆与圆的位置关系可以根据它们的方程组成的方程组解的情况来判断吗？

练　习

1. 判断下列各组中两个圆的位置关系：

 (1) $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 与 $x^2+(y+2)^2=36$；

 (2) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 与 $(x+3)^2+(y-1)^2=9$；

 (3) $x^2+y^2+2x-4y=4$ 与 $x^2+y^2-2x=0$.

2. 判断圆 $C_1:x^2+y^2-4x-6y+9=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+12x+6y-19=0$ 的位置关系，并画出两圆 C_1，C_2 的图形.

3. 若圆 $(x+2)^2+(y-2)^2=m$ 与圆 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 相交，求实数 m 的取值范围.

4. 求经过点 $A(0,6)$，且与圆 $C:x^2+y^2+10x+10y=0$ 相切于原点的圆的方程.

习题 1－2

A　组

1. 写出下列各圆的圆心坐标和半径，指出该圆与坐标轴的位置关系，并分别画出它们的图形.

 (1) $x^2+y^2+2x=0$；　　(2) $x^2+y^2+4y=0$；

 (3) $x^2+y^2+2x-2y-3=0$；　　(4) $2x^2+2y^2+4x-6y+5=0$.

2. 求满足下列条件的圆的方程，并画出图形：

 (1) 经过点 $C(-1,1)$ 和 $D(1,3)$，圆心在 x 轴上；

 (2) 经过直线 $x+3y-9=0$ 与 $3x-2y+6=0$ 的交点，圆心为点 $C(-1,1)$；

 (3) 经过 $M(1,-4)$，$N(3,-2)$ 两点，且圆心在直线 $y=3x-5$ 上；

 (4) 经过 $E(0,1)$，$F(-3,2)$，$G(1,4)$ 三点.

3. 判断直线 $\sqrt{3}x+y-2=0$ 与圆 $x^2+y^2+2y=0$ 的位置关系.
4. 判断圆 $C_1: x^2+y^2+2x+6y+6=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 的位置关系.
5. 求经过圆 $x^2+y^2=5$ 上点 $(-1,2)$ 的圆的切线方程.
6. 求经过点 $(-2,0)$，且与圆 $x^2+(y-3)^2=4$ 相切的直线的方程.
7. 求以 $C(3,-4)$ 为圆心，且与圆 $x^2+y^2=1$ 相外切的圆 C 的方程.
8. 已知直线 $2x-y-1=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+m=0$ 相切，求切点坐标.
9. 经过点 $A(-1,2)$ 的直线与圆 $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ 相交，求直线 l 的斜率的取值范围.
10. 在圆内用坐标法证明：

(1) 垂直于弦的直径平分弦；　　(2) 平分弦(不是直径)的直径垂直于弦.

B　组

1. 已知圆 $C: x^2+y^2+2x-2y+m=0$ 与 x 轴交于 A，B 两点，若 $|AB|=4$，求实数 m 的值.
2. 求圆心在 x 轴上，且与直线 $l_1: 2x+y+2=0$，直线 $l_2: x+2y-3=0$ 都相切的圆的方程.
3. 已知经过点 $P(-2,-1)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2+2x+4y=0$ 交于 A，B 两点，判断是否存在直线 l，使得点 P 为线段 AB 的中点，若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.
4. 已知圆 $C_1: x^2+y^2+2x+3y-3=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-x-3y=0$ 相交于 A，B 两点，求直线 AB 的方程.
5. 已知某公园的一座半圆形拱桥的水面宽为 6 m，在一场暴雨后水面上涨了 40 cm，水面宽变为 4 m(如图). 根据以上数据，能否确定暴雨后圆拱顶距水面的距离？如果能，请写出计算方案.

(第 5 题)

C　组

1. 某同学在完成 B 组第 4 题时，发现了一个现象：求得的公共弦 AB(即两个圆相交时，两个交点的连线)所在直线的方程恰好与两个圆的方程相减消掉二次项 x^2，y^2 后所得的方程一样. 由此，他提出了一个猜想：对于两个圆 $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与 $C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$，直线 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$ 就是两个圆的公共弦所在直线的方程.

你认为他的猜想对吗？请说明理由.
2. 已知点 $P(x_0, y_0)$ 是圆 $C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 外一点，经过点 P 作圆 C 的切线，记一个切点为 A. 求证：$|PA|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F}$.

阅读材料

笛卡儿

笛卡儿与解析几何

从 16 世纪开始，由于制造业和航海业的迅猛发展，产生了许多迫切需要解决的实际问题，如航行中船的定位、速度问题等，这些问题都向数学提出了挑战，在这一形势下笛卡儿奠定了解析几何的基础.

笛卡儿(René Descartes，1596—1650)出生于法国一个古老的贵族家庭. 在学生时代，他就喜欢深思，并终生保持着这个习惯，后来他回忆到，那些寂静的冥思才是他的哲学和数学思想的真正源泉. 青年时代的笛卡儿，开始了比以前更长时间、更努力、更忘我的思考，他推崇严格的数学推理. 1620 年前后，他证明了四次方程 $x^4+px^2+qx+r=0$ 的根，可以通过抛物线和圆的交点求出，巧妙地把代数和几何结合在了一起.

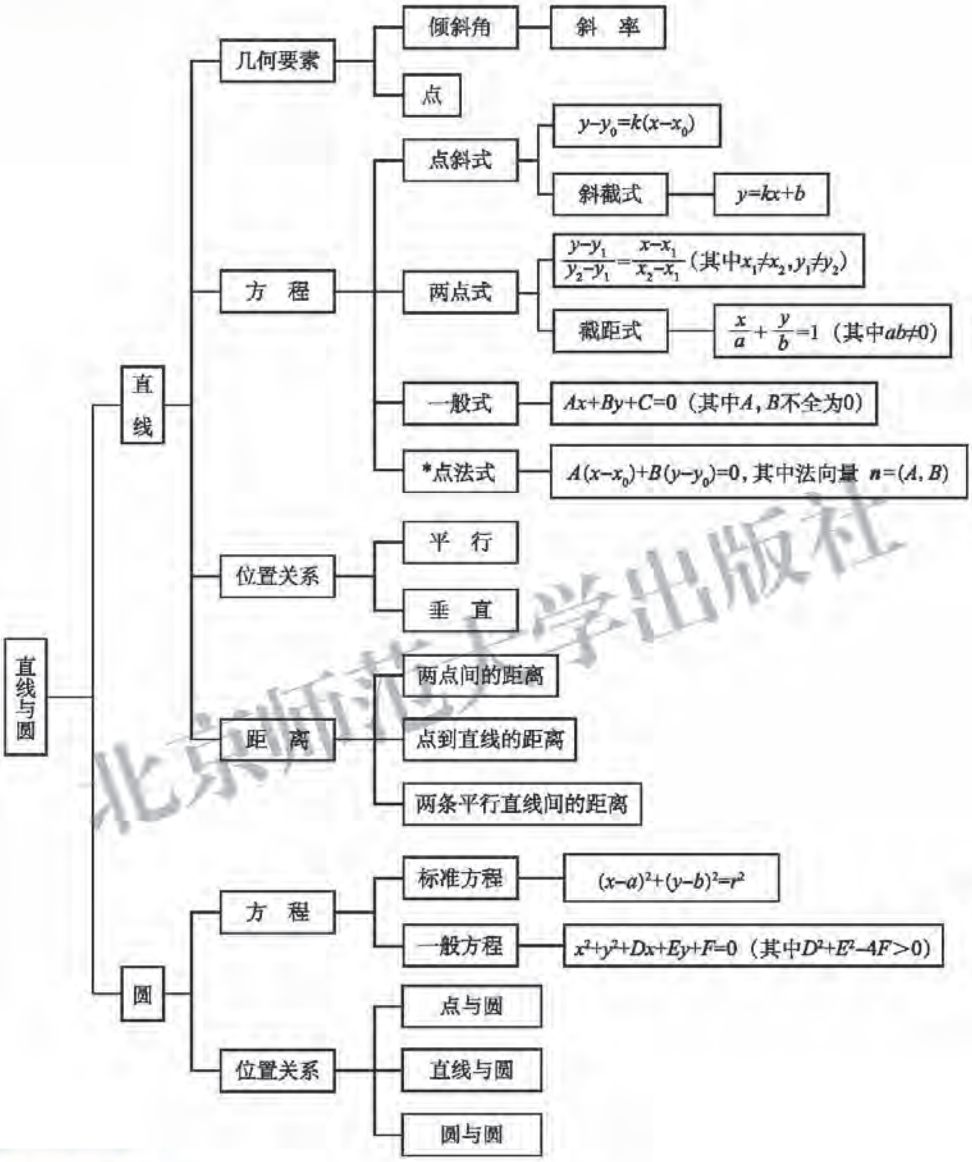
1637 年，他发表了重要著作《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》(简称《方法论》)，在该书的第三个附录《几何学》中，他把代数方法应用于几何的作图问题中，指出了作图问题与求方程组的解之间的关系，明确地提出了曲线方程的思想、坐标的方法，把几何曲线表示成代数方程.《几何学》的发表，标志着解析几何的创立.

解析几何的创立，在数学史上具有划时代的意义. 恩格斯给出了极高的评价："数学中的转折点是笛卡儿的变量，有了变量，运动进入了数学；有了变量，辩证法进入了数学；有了变量，微分和积分也就立刻成为必要的了."解析几何作为一种有效的数学工具，沟通了数学中数与形、代数与几何等基本对象之间的联系，使得几何问题可转化成用代数运算来解决，也使得代数问题因拥有几何背景而变得直观易懂.

(资料来源：E. T. 贝尔著、徐源译《数学精英》. 北京：商务印书馆，1991)

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

1. 直线与方程

（1）在平面直角坐标系中，结合具体图形，探索确定直线位置的几何要素.

（2）理解直线的倾斜角和斜率的概念，经历用代数方法刻画直线斜率的过程，掌握经过两点的直线斜率的计算公式.

（3）能根据斜率判定两条直线平行或垂直.

(4) 根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的几种形式（点斜式、两点式及一般式）.

(5) 能用解方程组的方法求两条直线的交点坐标.

(6) 探索并掌握平面上两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离.

2. 圆与方程

(1) 回顾确定圆的几何要素，在平面直角坐标系中，探索并掌握圆的标准方程与一般方程.

(2) 能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系.

(3) 能用直线和圆的方程解决一些简单的数学问题与实际问题.

三、需要关注的问题

1. 如何根据曲线的几何性质求出它的方程?

2. 如何用代数方法解决几何问题?

复习题一

A 组

1. 已知直线方程为 $3x+\sqrt{3}y-2=0$，则该直线的斜率为________，倾斜角为________，一个法向量的坐标为________.

2. 已知圆 C：$2x^2+2y^2+4x-2y-1=0$，则圆心的坐标为________，半径为________.

3. 已知直线 l：$Ax+By+C=0$(其中 A,B 不全为 0).

(1) 写出直线 l 的一个法向量的坐标.

(2) 若直线 l 经过原点，则 A,B,C 满足的条件是什么?

(3) 若直线 l 与 x 轴平行或重合，则 A,B,C 满足的条件是什么?

(4) 若直线 l 与 x 轴和 y 轴都相交且不经过原点，则 A,B,C 满足的条件是什么?

4. 已知直线 l：$3x+4y-1=0$ 和点 $P(1,1)$.

(1) 求经过点 P，且与直线 l 平行的直线的方程；

(2) 求经过点 P，且与直线 l 垂直的直线的方程；

(3) 求点 P 关于直线 l 对称的点的坐标；

(4) 若正方形 $ABCD$ 的边 AB 在直线 l 上，且点 P 为正方形 $ABCD$ 的中心，求直线 AD 和 DC 的方程.

5. 已知直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(3,-\sqrt{3})$，求直线 l 的斜率和倾斜角.

6. 说明方程 $(x-1)^2-y^2=x^2-(y+2)^2+1$ 表示的图形是什么，并画出该方程表示的图形.

7. 已知圆 M：$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. 写出它的圆心和半径，并说明 a,b,c 分别取何值，使得圆 M 分别满足下列条件：

(1) 圆 M 经过原点；

(2) 圆 M 与 x 轴相交；

(3) 圆 M 与 x 轴相切；

(4) 圆 M 与 x 轴相离.

8. 已知直线 l 经过点 $P(1,0)$，圆 C：$x^2+y^2+2x-6y+6=0$.

(1) 若直线 l 经过圆 C 的圆心，求直线 l 的方程；

(2) 若直线 l 与圆 C 相切，求直线 l 的方程；

(3) 若直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$，求直线 l 的方程.

9. 已知直线 l 与直线 $x+3y-1=0$ 垂直，且与圆 $x^2+y^2=10$ 相切，求直线 l 的方程.

10. 已知直线经过点 $M(2,-5)$，且在 x 轴上的截距等于在 y 轴上的截距的 2 倍，求该直线的方程.

11. 已知直线与圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=2$ 相切，且在 x 轴和 y 轴上的截距相等，求该直线的方程.

12. 求证：圆 C_1：$x^2+y^2+4x=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-2ay-1=0$ 不可能相外切.

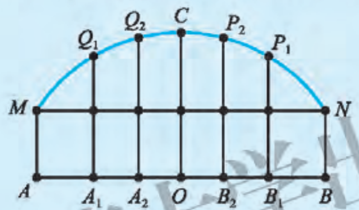
B 组

1. 已知直线 $3x-4y-2=0$ 与直线 $6x-8y+m=0$ 间的距离为 1，求实数 m 的值.
2. 过点 $A(1,2)$ 作一条直线 l，使得点 $M(2,3)$，$N(4,-5)$ 到直线 l 的距离相等，求直线 l 的方程.
3. 求到 $A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(5,-5)$ 三点距离相等的点的坐标.
4. 求证：无论 a 取何值，方程 $ax+(1-2a)y+3a-1=0$ 总表示一条直线，且恒过一定点.
5. 已知 $A(2,1)$，$B(-4,9)$，动点 P 满足 $\angle APB=90°$，求动点 P 的轨迹.
6. 已知曲线 C：$4x^2-y^2=0$.

   (1) 说明曲线 C 是什么图形，并画出该图形；

   (2) 直线 l 经过点 $A(2,1)$，与曲线 C 交于 M，N 两点，且点 A 是线段 MN 的中点，求直线 l 的方程；

   (3) 直线 l：$y=kx+1$ 与曲线 C 交于 M，N 两点，且 $|MN|=8$，求直线 l 的方程.
7. 为了制作圆拱形的蔬菜大棚的侧立面钢架，需要根据圆拱高 OC、跨度 MN、竖梁 BN 和各竖梁间距的尺寸，来计算出每根竖梁 B_1P_1，B_2P_2 的长度(如图). 请你设计一种计算的方法.



(第 7 题)

C 组

1. 用坐标法证明：三角形的余弦定理.
2. 已知经过点 $A(2,1)$ 的直线 l 与圆 C：$x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 交于 M，N 两点，是否存在直线 l 使得 $|MN|=2$？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.
3. 已知直线 l 与圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 交于 A，B 两点，是否存在斜率为 1 的直线 l 使得以 AB 为直径的圆恰好经过原点？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.

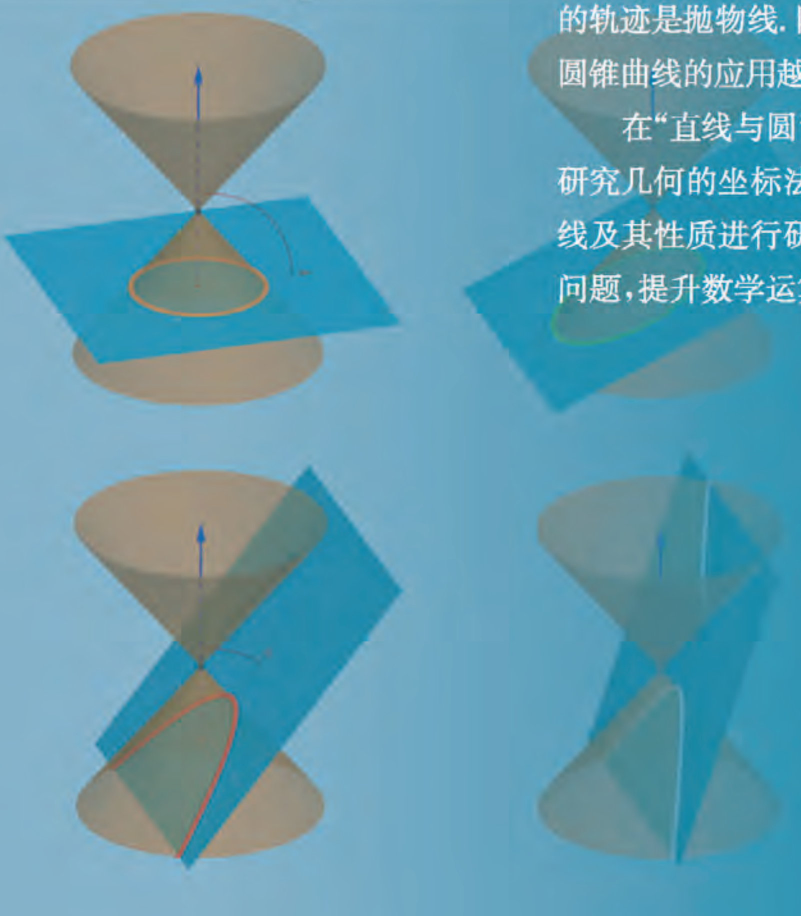
2 第二章

圆锥曲线

用平面去截圆锥面，根据截面与圆锥面的轴的夹角不同，所得截线分别是圆、椭圆、抛物线、双曲线. 所以，人们通常把圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为**圆锥曲线**.

圆锥曲线与科学、生活密切相关. 据传说，早在古希腊时代，阿基米德为了保卫祖国，利用抛物线的光学性质制作火镜，反射并聚焦太阳光到敌方舰船，使敌方舰船着火，这说明人类在古希腊时期就已经发现了抛物线的光学性质. 德国天文学家开普勒发现许多天体的运行轨道是椭圆；意大利物理学家伽利略发现物体斜抛运动的轨迹是抛物线. 随着人们对圆锥曲线的进一步认识，圆锥曲线的应用越来越广泛.

在“直线与圆”一章，我们已经初步经历和体验了研究几何的坐标法，本章将继续运用坐标法对圆锥曲线及其性质进行研究，并运用这些性质解决一些实际问题，提升数学运算、直观想象等核心素养.



§1 椭圆

1.1 椭圆及其标准方程

我们对“椭圆形状”并不陌生，如有些汽车油罐横截面的轮廓、天体中一些行星和卫星运行的轨道、篮球在阳光下的投影（如图 2 - 1）等. 那么，具有怎样特点的曲线是椭圆呢？

图 2 - 1

一、椭圆的定义

我们已经知道用一根细绳和一支笔就可以画出圆，那么仍然取一条一定长的细绳，把它的两端分别固定在画板上的 F_1 和 F_2 两点（如图 2 - 2），当绳长大于 F_1 和 F_2 的距离时，用铅笔尖把绳子拉紧，使笔尖在画板上慢慢移动，其轨迹就是一个椭圆.

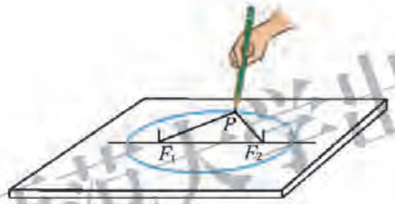


图 2 - 2

从上面的画图过程，可以看出：

平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的集合（或轨迹）叫作椭圆.

这两个定点 F_1, F_2 叫作**椭圆的焦点**，两个焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 叫作**椭圆的焦距**.

设点 P 为椭圆上任意一点，根据椭圆的定义可知 $|PF_1|+|PF_2|=2a$（a 为大于 0 的常数），设点 P_1 为点 P 关于直线 F_1F_2 的对称点，则 $|P_1F_1|+|P_1F_2|=2a$. 这说明点 P_1 也在椭圆上，所以直线 F_1F_2 是椭圆的对称轴（如图 2 - 3(1)）.

类似地，可知线段 F_1F_2 的垂直平分线 MN 也是椭圆的对称轴（如图 2 - 3(2)），线段 F_1F_2 的中点 O 是椭圆的对称中心（如图 2 - 3(3)）.

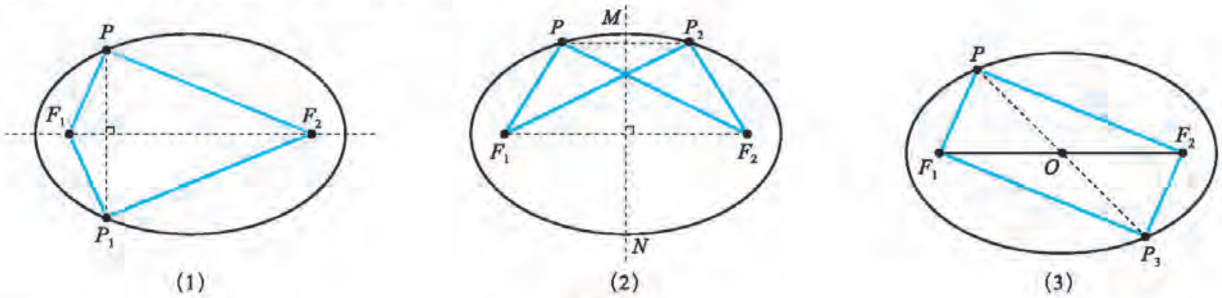


图 2 - 3

综上可知，椭圆是轴对称图形，直线 F_1F_2 及线段 F_1F_2 的垂直平分线都是它的对称轴；椭圆也是中心对称图形，线段 F_1F_2 的中点是它的对称中心.

例 1 已知△ABC 的周长为 10，且 $|BC|=4$，则△ABC 的顶点 A 的轨迹是什么？并说明理由.

解 因为△ABC 的周长为 10，且 $|BC|=4$，所以

$|AB|+|AC|=6$，且 $|AB|+|AC|>|BC|$.

根据椭圆的定义可知，△ABC 的顶点 A 的轨迹是以 B，C 为焦点，焦距长为 4 的椭圆（不含椭圆与直线 BC 的交点）（如图 2－4）.

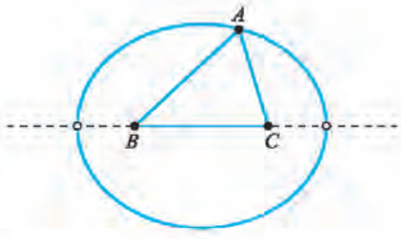
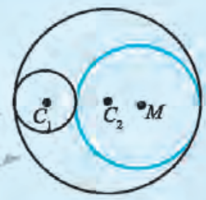


图 2－4

练　习

1. 已知两个定点 F_1，F_2 的距离是 6，动点 P 到这两个定点的距离之和是 6，那么动点 P 的轨迹是什么？
2. 如图，两个定圆⊙C_1 和⊙C_2 内切，且半径分别为 $r_1=1$，$r_2=3$，动圆 M 与⊙C_1 外切且与⊙C_2 内切，那么动圆圆心 M 的轨迹是什么？并说明理由.



（第 2 题）

二、椭圆的标准方程

下面，我们根据椭圆的定义来求椭圆的方程.

设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c\ (c>0)$，椭圆上任意一点到两个焦点 F_1，F_2 的距离之和为 $2a\ (a>c)$.

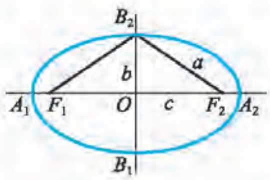


图 2－5

如图 2－5，椭圆与直线 F_1F_2 相交于点 A_1，A_2，与线段 F_1F_2 的垂直平分线相交于点 B_1，B_2，根据椭圆的定义和椭圆的对称性，得 $|B_2F_1|+|B_2F_2|=2a$，且 $|B_2F_1|=|B_2F_2|$，所以 $|B_2F_1|=|B_2F_2|=a$.

于是有 $|B_2O|=\sqrt{|B_2F_2|^2-|OF_2|^2}=\sqrt{a^2-c^2}$.

为方便起见，记 $|B_2O|=b$，则 $b=\sqrt{a^2-c^2}$，从而 $b^2=a^2-c^2$.

如图 2－6，以直线 F_1F_2 为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c,0)$，$(c,0)$.

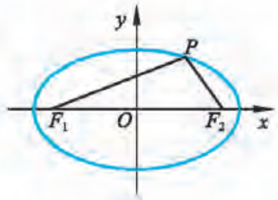


图 2－6

设 $P(x,y)$ 是椭圆上任意一点，根据椭圆的定义可知点 P 满足

$$|PF_1|+|PF_2|=2a.$$

因为 $|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

即 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边平方、整理，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

上式两边再平方、整理，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2,$$

即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

将 $b^2=a^2-c^2$ 代入上式，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0). \quad ①$$

这说明椭圆上任意一点的坐标都满足方程①. 我们还可以证明，以方程①的每一组解为坐标的点都在椭圆上.

* 以下证明供学习时参考.

设满足方程①的一组解对应的点为 $P_0(x_0,y_0)$，则点 P_0 的坐标 (x_0,y_0) 满足方程①，即

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1(a>b>0), \quad ②$$

其中 $b^2=a^2-c^2$.

点 P_0 到 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$ 的距离之和为

$$|P_0F_1|+|P_0F_2|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}+\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}. \quad ③$$

由方程②，得

$$y_0^2=b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}.$$

将上式代入③，得

$$\begin{aligned}|P_0F_1|+|P_0F_2|&=\sqrt{(x_0+c)^2+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}+\sqrt{(x_0-c)^2+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}\\&=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0-a\right)^2}\\&=\left|\frac{c}{a}x_0+a\right|+\left|\frac{c}{a}x_0-a\right|.\end{aligned}$$

因为 $-a\leqslant x_0\leqslant a$，所以 $-c\leqslant\frac{c}{a}x_0\leqslant c$.

又 $a>c$，所以 $-a<\frac{c}{a}x_0<a$.

从而 $$\begin{aligned}|P_0F_1|+|P_0F_2|&=\left|\frac{c}{a}x_0+a\right|+\left|\frac{c}{a}x_0-a\right|\\&=\left(a+\frac{c}{a}x_0\right)+\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)\\&=2a.\end{aligned}$$

这说明，以方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的解为坐标的点 $P_0(x_0,y_0)$ 都在椭圆上，所以方程①所对应的曲线是椭圆.

抽象概括

椭圆上任意一点的坐标都是方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的解；以方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的解为坐标的点都在椭圆上. 我们将方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)}$$

叫作**椭圆的标准方程**，它的焦点在 x 轴上，两个焦点分别是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $b^2=a^2-c^2$.

如果椭圆的焦点在 y 轴上，如图 2－7，其焦点分别为 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，用同样的方法也可推出它的标准方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0),}$$

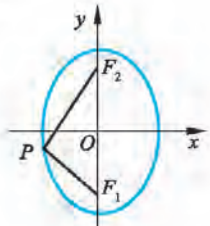


图 2－7

其中 $b^2=a^2-c^2$.

思考交流

1. 说明a,b,c在椭圆中分别表示哪些线段的长.
2. 当 a 为定值时，椭圆形状的变化与 c 有怎样的关系？

例 2 已知椭圆的两个焦点分别为 $F_1(0,-2)$，$F_2(0,2)$，并且经过点 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$，求椭圆的标准方程.

解法 1 因为椭圆的焦点在 y 轴上，所以可设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

根据椭圆的定义知

$$\begin{aligned}2a&=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+2\right)^2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}\\&=\frac{3\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\\&=2\sqrt{10},\end{aligned}$$

从而 $a=\sqrt{10}$.

又 $c=2$，所以 $b^2=a^2-c^2=10-4=6$.

所以椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1.$$

其图形如图 2-8.

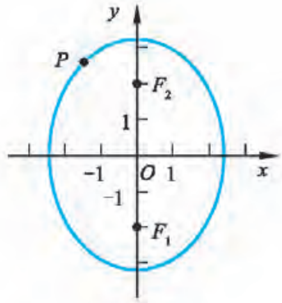


图 2-8

解法 2 因为椭圆的焦点在 y 轴上，所以可设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

因为点 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$在椭圆上，又 $c=2$，所以

$$\begin{cases}\frac{25}{4a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=4.\end{cases}$$

解得 $b^2=6$ 或 $b^2=-\frac{3}{2}$（舍），

则 $a^2=10$.

所以椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1.$$

例 3 求证：点 $M(a\cos\theta,b\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上.

证明 将点 M 的坐标代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，得

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(b\sin\theta)^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

所以点 $M(a\cos\theta,b\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上.

练 习

1. 求下列椭圆的焦点坐标：

(1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$；　(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$；　(3) $2x^2+y^2=2$.

2. 判断下列各点是否在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上，并画出椭圆和点：

(1) $A\left(\frac{5}{3},2\sqrt{2}\right)$；　(2) $B(4,2)$；　(3) $C(1,1)$.

3. 计算第 2 题中的不在椭圆上的点到两个焦点的距离之和，并比较这个和与 $2a$ 之间的大小关系，探索点在椭圆内、外与这个数量大小关系有何联系.

4. 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点 P 到该椭圆的一个焦点的距离为 6，则点 P 到另一个焦点的距离为________.

5. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程，并画出图形：

(1) 焦点在 x 轴上，焦距为 2，椭圆上的点到两焦点的距离之和为 4；

(2) 经过点 $M(3,0)$，$N(0,2)$；

(3) 经过点$(1,2)$，焦点坐标分别为$(0,\sqrt{3})$，$(0,-\sqrt{3})$；

(4) 经过点$(2,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$.

1.2 椭圆的简单几何性质

在上一节，通过椭圆的定义及图形认识到了椭圆的一些简单性质(如对称性). 得到椭圆的标准方程之后，类比圆的研究方法，就有了一个新的途径——通过方程来探索和验证椭圆的简单几何性质.

由椭圆 C 的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0) \qquad ①$$

和图象可以获得椭圆的哪些简单几何性质呢?

1. 范围

由方程①可得椭圆 C 上的任意一点 $P(x,y)$ 总满足

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\text{即}-a\leqslant x\leqslant a,-b\leqslant y\leqslant b.$$

这说明椭圆 C 位于四条直线：$x=-a$，$x=a$，$y=-b$，$y=b$ 所围成的矩形区域内(如图 2-9). 因此，经常以该矩形为参照来画椭圆的图形.

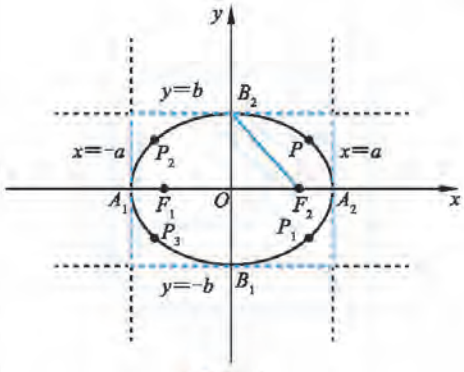


图 2-9

2. 对称性

前面已经分析了椭圆的对称性，下面再通过椭圆方程用代数方法来检验.

根据椭圆方程的结构特点，可以发现：若(x_0,y_0)是椭圆方程的一组解，即$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，则$(x_0,-y_0)$，$(-x_0,y_0)$，$(-x_0,-y_0)$也是方程的解，这说明：若点 $P(x_0,y_0)$在椭圆上，则点 P 分别关于 x 轴、y 轴和原点 O 对称的点 $P_1(x_0,-y_0)$，$P_2(-x_0,y_0)$，$P_3(-x_0,-y_0)$也在椭圆上(如图 2-9). 这说明椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$既是关于 x 轴和 y 轴的轴对称图形，也是关于原点

的中心对称图形. 这个中心称为**椭圆的中心**.

3. 顶点

如图 2－9,在椭圆 C 的标准方程①中,当 $x=0$ 时,$y=\pm b$. 这说明 $B_1(0,-b)$,$B_2(0,b)$ 是椭圆 C 与 y 轴的两个交点. 同理,当 $y=0$ 时,$x=\pm a$,即 $A_1(-a,0)$,$A_2(a,0)$是椭圆 C 与 x 轴的两个交点.

因为 x 轴、y 轴是椭圆的对称轴,所以椭圆与它的对称轴有四个交点. 这四个交点叫作**椭圆的顶点**.

椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的四个顶点分别为

$$A_1(-a,0),A_2(a,0),B_1(0,-b),B_2(0,b).$$

线段 A_1A_2,B_1B_2 分别叫作椭圆的**长轴**和**短轴**,且

$$|A_1A_2|=2a,|B_1B_2|=2b.$$

a 和 b 分别叫作椭圆的**长半轴长**和**短半轴长**. 它们反映了参数 a,b 的几何意义.

由于 $b^2=a^2-c^2$,a,b,c 就是图 2－9 中 $\mathrm{Rt}\triangle OB_2F_2$ 的三边长,它们从另一个角度反映了参数 a,b,c 的几何意义.

4. 离心率

由参数 a,b,c 的关系知道:a,c 的大小可反映椭圆“扁的程度”. 我们规定椭圆的焦距与长轴长度的比叫作椭圆的离心率,用 e 表示,即$\dfrac{c}{a}=e$. 显然 $0<e<1$. 如图 2－10(1),e 越接近于 1,椭圆就越扁. 反之,如图 2－10(2),e 越接近于 0,椭圆就越接近于圆. 当 $a=b$ 时,它的方程为 $x^2+y^2=a^2$. 这时 $c=0$,两个焦点重合,图形变为圆.

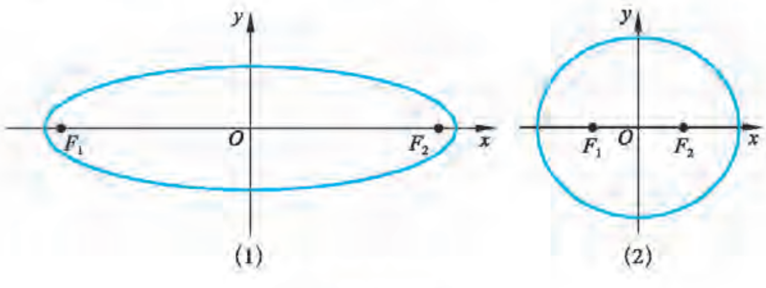


图 2－10

例 4 求椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标,并用描点法画出它的图形.

解 将已知方程化为椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

则 $a=5,b=3,c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.

因此，椭圆的长轴和短轴的长分别是

$$2a=10,2b=6.$$

离心率是

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}.$$

两个焦点分别是

$$F_1(-4,0),F_2(4,0).$$

椭圆的四个顶点分别是

$$A_1(-5,0),A_2(5,0),B_1(0,-3),B_2(0,3).$$

将方程变形为 $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$，由 $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$，在 $0\leqslant x\leqslant 5$ 的范围内计算出一些点的坐标 (x,y)，如表 2-1（y 的值精确到 0.1）.

表 2-1

x	0	1	2	3	4	5
y	3.0	2.9	2.7	2.4	1.8	0

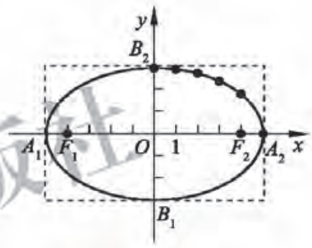


图 2-11

先用描点法画出椭圆在第一象限内的图形，再利用对称性画出整个椭圆（如图 2-11）.

练 习

1. 请说明椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中 a，b 的几何意义，并画图进行相应标记.
2. 求下列椭圆的长轴和短轴的长、焦距、离心率、焦点和顶点坐标，并以矩形为参照画出椭圆的图形：
   (1) $x^2+4y^2=4$；　　(2) $9x^2+4y^2=36$.
3. 根据下列条件，求椭圆的离心率：
   (1) 长轴与短轴之比为 3∶2；
   (2) 以短轴的两个端点和一个焦点为顶点的三角形是等边三角形.

例 5 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 长轴在 x 轴上，长轴的长为 12，离心率为 $\frac{2}{3}$；

(2) 经过点 $P(-6,0)$ 和 $Q(0,8)$.

解 (1) 由已知 $2a=12$，$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，得

$$a=6,c=4,$$

从而 $$b^2=a^2-c^2=20.$$

所以椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

(2) 由椭圆的几何性质可知，以坐标轴为对称轴的椭圆与坐标轴的交点就是椭圆的顶点，所以点 P,Q 分别是椭圆的短轴和长轴的一个端点，于是有

$$b=6, a=8.$$

又因为短轴、长轴分别在 x 轴和 y 轴上，所以椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{64}+\frac{x^2}{36}=1.$$

例 6 酒泉卫星发射中心将一颗人造卫星送入到距地球表面近地点(离地面最近的点)高度约 200 km，远地点(离地面最远的点)高度约350 km的椭圆轨道(将地球看作一个球，其半径约为6 371 km)，求椭圆轨道的标准方程.(注：地心(地球的中心)位于椭圆轨道的一个焦点，且近地点、远地点与地心共线)

解 如图 2-12，设地心为椭圆轨道右焦点 F_2，近地点、远地点分别为 A_2,A_1，以直线 A_1A_2 为 x 轴，线段 A_1A_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则 F_2,A_1,A_2 三点都在 x 轴上，

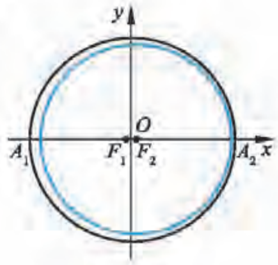


图 2-12

$$|F_2A_2|=a-c=200+6\ 371,$$
$$|A_1F_2|=a+c=350+6\ 371,$$

所以 $$a=6\ 646, c=75,$$

从而 $$b^2=a^2-c^2=6\ 646^2-75^2=44\ 163\ 691.$$

所以椭圆轨道的标准方程为

$$\frac{x^2}{44\ 169\ 316}+\frac{y^2}{44\ 163\ 691}=1.$$

例 7 如图 2-13，点 P 是圆 O：$x^2+y^2=4$ 上的动点，作 $PH\perp x$ 轴于点 H，求线段 PH 的中点 M 的轨迹方程，并指出该轨迹是什么图形.

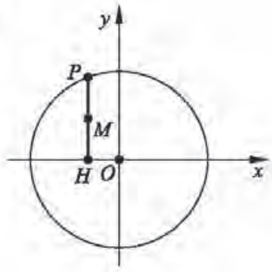


图 2-13

解 设点 M 的坐标为 (x,y)，则点 P 的坐标为 $(x,2y)$.

因为点 P 在圆 O 上，所以 $x^2+(2y)^2=4$，即

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

所以点 M 的轨迹是长轴长为 4，短轴长为 2，焦点在 x 轴上的椭圆.

练 习

1. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

   (1) 长轴长为 4，短轴长为 2，焦点在 y 轴上；

   (2) 经过点 $A(0,3)$，$B(4,0)$；

   (3) 一个焦点为 $(1,0)$，一个顶点为 $(2,0)$；

   (4) 一个焦点为 $(\sqrt{2},0)$，长轴长为 4；

   (5) 一个焦点为 $(-\sqrt{3},0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$；

   (6) 一个焦点到长轴的两个端点的距离分别为 6，2.

2. 求与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点相同，且经过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的椭圆的标准方程.

3. 求与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 离心率相同，且经过点 $(\sqrt{2},1)$ 的椭圆的标准方程.

4. 已知地球运行的轨道是长半轴长 $a=1.50\times10^8$ km，焦距与长轴长的比为 0.02 的椭圆，太阳在这个椭圆的一个焦点上. 求地球到太阳的最远距离和最近距离.（注：把地球、太阳看成质点）

习题 2－1

A 组

1. 已知平面内两个定点的距离为 6，一动点 P 到两定点的距离之和为 10. 建立适当的平面直角坐标系，求动点 P 的轨迹方程，并画出轨迹图形.

2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程，并画出草图：

   (1) 长轴长为 6，离心率为 $\frac{2}{3}$，焦点在 x 轴上；

   (2) 短轴长为 2，离心率为 $\frac{1}{2}$，焦点在 y 轴上；

   (3) 焦点是长轴的三等分点，短轴长为 $4\sqrt{2}$.

3. 求经过点 $A(-2,\sqrt{3})$ 和 $B(1,2\sqrt{3})$ 的椭圆的标准方程，并画出图形.

4. 已知边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形的四个顶点恰好是椭圆 C 的两个短轴端点和左、右焦点，求椭圆 C 的方程.

5. 根据下列条件，求椭圆的离心率：

   (1) 焦距和短轴长相等；

   (2) 长轴长是焦距的 2 倍；

   (3) 焦距等于椭圆相邻两个顶点间的距离；

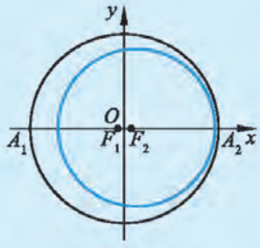
   (4) 经过一个焦点，且与长轴垂直的弦的弦长与焦距相等.

6. 已知正方形 $ABCD$，求以点 A，B 为焦点，且经过 C，D 两点的椭圆的离心率.

7. 已知直线 MN 经过椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点 F_2，并与椭圆交于 M，N 两点，其左焦点为 F_1，求 $\triangle F_1MN$ 的周长.

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，其左焦点 F 到直线 l：$y=x-2$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，求此椭圆方程.

9. 我国第一颗人造地球卫星的运行轨道是以地心 F_2 为一个焦点的椭圆(如图)，已知它的近地点 A_2 距地面的高度为 439 km，远地点 A_1 距地面的高度为 2 384 km，并且 A_2，F_2，A_1 三点在同一直线上，地球的半径约为 6 371 km，求卫星运行轨道的方程. (精确到 1 km)



(第 9 题)

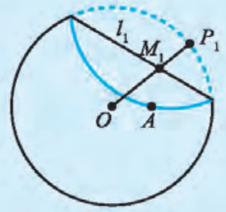
B　组

1. 若椭圆 $\frac{x^2}{k+8}+\frac{y^2}{9}=1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，求实数 k 的值.

2. 已知椭圆 $mx^2+(2-m)y^2=m(2-m)$ 的焦点在 x 轴上，求实数 m 的取值范围.

3. 已知两个定点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点 P 满足直线 PA 和直线 PB 的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$，求点 P 的轨迹方程，并指出该轨迹是什么曲线.

4. 用圆规画一个圆 O，然后在圆内标记点 A，并把圆周上的点 P_1 折叠到点 A，连接 OP_1，标记出 OP_1 与折痕 l_1 的交点 M_1(如图)，若不断在圆周上取新的点 P_2，P_3，…进行折叠并得到标记点 M_2，M_3，…，则点 M_1，M_2，M_3，…形成的轨迹是什么？并说明理由.



(第 4 题)

5. 设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，长轴的两个端点分别为 A_1，A_2，短轴的两个端点分别为 B_1，B_2.

   (1) 证明：四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 为菱形；

   (2) 若四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的面积为 120，边长为 13，求椭圆 C 的方程.

6. 已知平行四边形 $ABCD$ 的周长为 20，对角线 AC 的长为 6，用坐标法求 $|BD|$ 的最小值.

阅读材料

圆与椭圆

均匀压缩

均匀压缩是物理学中一种常见的现象. 如图 2-14,将给定的一个正方形 $ABCD$ 均匀压缩成一个长方形 $A_1B_1C_1D_1$,点 A,B,C,D 分别变成点 A_1,B_1,C_1,D_1,其中 A_1B_1 的长度为 AB 长度的一半.

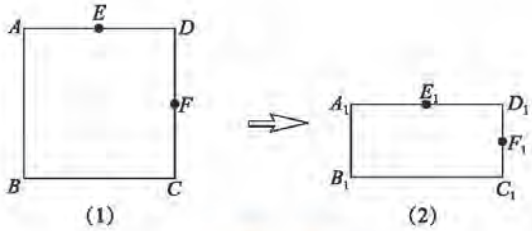


图 2-14

若点 E 为 AD 的中点,点 F 为 CD 的中点,在这个均匀压缩下,点 E 和点 F 分别变为 A_1D_1 的中点 E_1 和 C_1D_1 的中点 F_1.

均匀压缩的数学表示

均匀压缩图形是一个图形变化问题,我们常常通过平面直角坐标系来寻求图形变化的数学表示.

对图 2-14 中的两个图形分别建立平面直角坐标系(如图 2-15),设正方形 $ABCD$ 的边长为 1,则图 2-15(1)中,点 A,B,C,D 的坐标分别为 $(0,1),(0,0),(1,0),(1,1)$,根据上述均匀压缩的要求,在图 2-15(2)中,点 A_1,B_1,C_1,D_1 的坐标分别为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$(0,0),(1,0),\left(1,\frac{1}{2}\right)$. 同样地,在图 2-15(1)中,坐标为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的点 E 和坐标为 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 的点 F 分别变成了图 2-15(2)中坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的点 E_1 和坐标为 $\left(1,\frac{1}{4}\right)$ 的点 F_1. 设点 P 为正方形 $ABCD$ 上的任意一点,在均匀压缩下变成点 P_1,不妨设点 P 的坐标

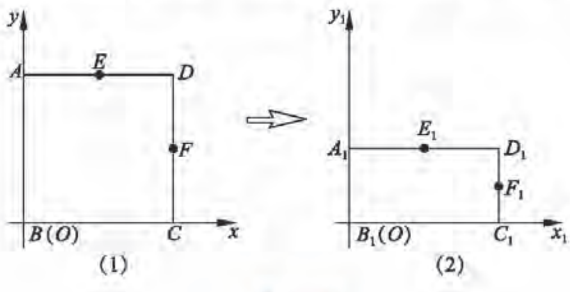


图 2-15

为(x,y)，点P_1的坐标为(x_1,y_1)，不难看出，点P_1的横坐标和点P的横坐标相同，即$x_1=x$，点P_1的纵坐标是点P的纵坐标的一半，即$y_1=\frac{1}{2}y$.

圆的伸缩

在本节的例 7(如图 2-16)中，线段PH的中点M，实际上可以视为圆$x^2+y^2=4$上的点P在竖直方向上向x轴压缩为原来的$\frac{1}{2}$，此时，横坐标保持不变，但是纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$. 由例 7 的结果可知圆被压缩后变成了长轴长为 4，短轴长为 2，焦点在x轴上的椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 同样地，也可以把点P在竖直方向上拉伸为原来的 2 倍，这样横坐标仍保持不变，但是纵坐标变为原来的2 倍，容易得到拉伸后的圆变成了焦点在y轴上的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.

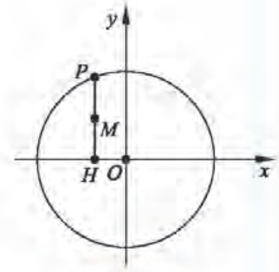


图 2-16

一般地，对于圆$x^2+y^2=1$上的点$P(x_0,y_0)$，若点P在竖直方向上向x轴压缩(或拉伸)为点P纵坐标的λ倍($\lambda>0$，且$\lambda\neq1$)，则经过压缩(或拉伸)后得到的点$M(x,y)$与点P的横坐标相同，即$x=x_0$，纵坐标变为点P纵坐标的λ倍，即$y=\lambda y_0$. 于是由点$P\left(x,\frac{y}{\lambda}\right)$满足圆$x^2+y^2=1$可得$x^2+\frac{y^2}{\lambda^2}=1$(如图 2-17).

当$0<\lambda<1$时，圆被纵向压缩后的图形是焦点在x轴上的椭圆，长轴长为 2，短轴长为2λ;

当$\lambda>1$时，圆被纵向拉长后的图形是焦点在y轴上的椭圆，长轴长为2λ，短轴长为 2.

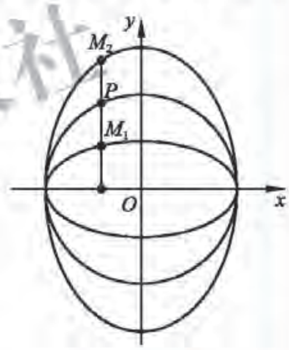


图 2-17

问题与思考

1. 如果把竖直方向的均匀压缩(或拉伸)改为水平方向的均匀压缩(或拉伸)，那么圆$x^2+y^2=1$经过压缩(或拉伸)后是什么图形?

2. 如果在竖直方向上和水平方向上同时做均匀压缩(或拉伸)，例如，在竖直方向压缩为原来的$\frac{1}{2}$，在水平方向上拉伸为原来的 2 倍，则圆$x^2+y^2=4$伸缩后是什么图形?

3. 对于椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，在竖直方向和水平方向分别做怎样的伸缩，可以得到圆$x^2+y^2=1$?

4. 依据圆和椭圆的上述关系，能否由圆所具有的相关结论提出一些关于椭圆的猜想? 例如，由“直径所对的圆周角为直角，在数量特征上体现为圆上任意一点与任意不经过该点的圆的直径的两个端点的连线的斜率(若斜率存在)乘积为常数-1”，猜想：“椭圆上的任意一点(不包括长轴两个端点)与长轴的两个端点的连线的斜率(若斜率存在)乘积为常数”. 写出一个猜想并论述猜想的正确性.

§ 2 双曲线

2.1 双曲线及其标准方程

一、双曲线的定义

我们已经知道，与两个定点的距离之和为常数(大于两个定点间的距离)的点的轨迹是椭圆. 那么与两个定点的距离之差为非零常数的点的轨迹是什么呢?

如图 2-18，取一条拉链，拉开它的一部分，在拉开的两边上各选择一点，分别固定在点 F_1，F_2 上，点 F_1 到点 F_2 的长为 $2c(c>0)$. 把笔尖放在拉链开口的咬合处 M，点 M 到点 F_1 的距离与点 M 到点 F_2 的距离之差等于 $2a(c>a>0)$. 随着拉链逐渐拉开或者闭拢，笔尖就画出一条曲线(如图 2-18 中右边的曲线). 这条曲线上的点 M 满足下面的条件:

$$|MF_1|-|MF_2|=2a.$$

如果 $|MF_2|-|MF_1|=2a$，就得到另一条曲线(如图 2-18 中左边的曲线).

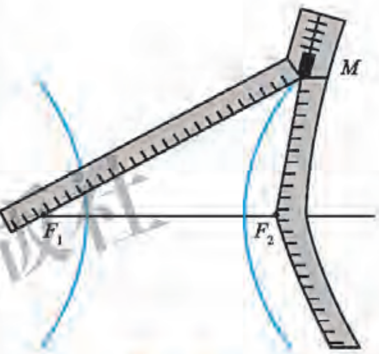


图 2-18

这两条曲线合起来叫作双曲线，每一条曲线叫作双曲线的一支.

由此得到双曲线的如下定义:

平面内到两个定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于常数(大于零且小于 $|F_1F_2|$)的点的集合(或轨迹)叫作双曲线.

这两个定点 F_1，F_2 叫作**双曲线的焦点**，两个焦点间的距离叫作**双曲线的焦距**.

双曲线在我们实际生活中有着十分广泛的应用，如热电厂冷却塔的外形与轴截面的交线，用于大面积照明的照明灯的反光罩与轴截面的交线等很多都是双曲线.

二、双曲线的标准方程

下面，我们仿照求椭圆标准方程的方法，根据双曲线的定义，并选择恰当的平面直角坐标系来求双曲线的标准方程.

如图 2-19，给定双曲线，它的焦点为 F_1，F_2，焦距 $|F_1F_2|=2c$ $(c>0)$，双曲线上任意一点到两个焦点的距离之差的绝对值为 $2a(0<a<c)$，以直线 F_1F_2 为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c,0)$，$(c,0)$.

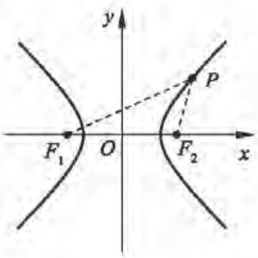


图 2-19

设 $P(x,y)$ 是双曲线上任意一点，则根据双曲线的定义可得

$$||PF_1|-|PF_2||=2a,$$

即
$$|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a.$$

因为$|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$

化简、整理可得
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

根据双曲线的定义可知，$2c>2a>0$，所以 $c^2-a^2>0$.

设 $c^2-a^2=b^2(b>0)$，代入上式，得 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，

即
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0). \quad ①$$

这说明双曲线上的任意一点的坐标都满足方程①. 还可以类比本章第 1 节中椭圆的方法来证明：该方程的每一组解对应的点都在双曲线上，即证明方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的解对应的点 $P(x,y)$都满足$||PF_1|-|PF_2||=2a$. 因此，将方程
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)}$$
称为**双曲线的标准方程**，它的焦点在 x 轴上，两个焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中$c^2=a^2+b^2$.

如果双曲线的焦点在 y 轴上(如图 2-20)，其焦点分别为$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，利用同样的方法可以得到双曲线的标准方程为
$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)}，$$
其中 $c^2=a^2+b^2$.

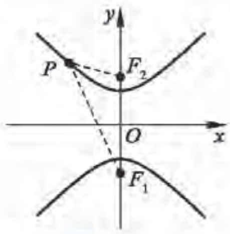


图 2-20

例 1 已知双曲线的两个焦点分别是 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，该双曲线上的点到两个焦点距离之差的绝对值是 6，求该双曲线的标准方程.

解 因为双曲线的焦点在 x 轴上，所以可设它的标准方程为
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0).$$

又 $c=5$，$a=3$，故 $b^2=5^2-3^2=16$.

因此，所求双曲线的标准方程为
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

例 2 相距 2 km 的两个哨所 A,B 听到远处传来的炮弹爆炸声,在 A 哨所听到爆炸声的时间比在 B 哨所迟 4 s. 已知当时的声速为 340 m/s,试判断爆炸点在什么样的曲线上,并求出曲线的方程.

解 设爆炸点为 P,由已知,得

$$|PA|-|PB|=340\times4=1\ 360(\text{m}).$$

因为 $|AB|=2\text{ km}=2\ 000\text{ m}>1\ 360\text{ m}$,$|PA|>|PB|$,所以点 P 在以点 A,B 为焦点的双曲线并靠近点 B 的那一支上.

以直线 AB 为 x 轴,线段 AB 的垂直平分线为 y 轴,建立平面直角坐标系(如图 2-21).

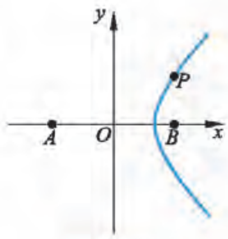


图 2-21

由 $2a=1\ 360$,$2c=2\ 000$,得

$$a=680,c=1\ 000,$$

$$b^2=c^2-a^2=537\ 600.$$

因此,点 P 所在曲线是双曲线的右支,它的方程是

$$\frac{x^2}{462\ 400}-\frac{y^2}{537\ 600}=1(x>0).$$

练 习

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程:

(1) 焦点为$(2,0)$,$(-2,0)$,且双曲线上的一点到两个焦点距离之差为 2;

(2) 焦点在 y 轴上,焦距为 10,且经过点$(0,4)$;

(3) 经过点$(2,\sqrt{3})$,$(-\sqrt{5},2)$.

2. 求双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标,并画出该双曲线的图形.

3. 已知双曲线的焦点与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点相同,且经过椭圆的右焦点,求该双曲线的方程.

2.2 双曲线的简单几何性质

仿照椭圆的简单几何性质的讨论方法,根据双曲线 C 的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0) \quad ①$$

和图象(如图 2－22),我们来研究双曲线 C 的简单几何性质.

1. 范围

由方程①,得 $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}$,所以双曲线 C 上的任意一点 $P(x,y)$ 都满足

$$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1,y\in\mathbf{R},$$

即 $$x\leqslant -a\text{ 或 }x\geqslant a,\text{且 }y\in\mathbf{R}.$$

因此,双曲线 C 在不等式 $x\leqslant -a$ 与 $x\geqslant a$ 所表示的区域内,即位于两条直线 $x=-a$ 和 $x=a$ 外侧的区域(如图 2－22).

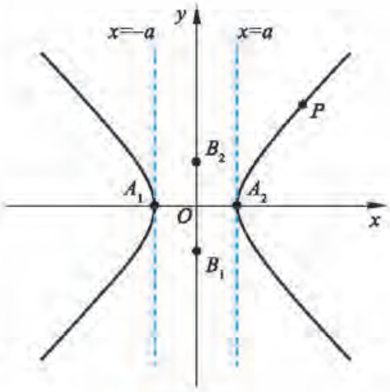


图 2－22

2. 对称性

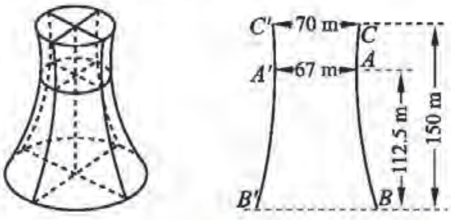
根据方程①的结构特点,可以发现:若点 P 的坐标(x,y)满足方程①,则点 P 关于 x 轴、y 轴和原点 O 对称的点 $P_1(x,-y)$,$P_2(-x,y)$,$P_3(-x,-y)$的坐标也都满足方程①.这说明双曲线既是关于 x 轴和 y 轴的轴对称图形,也是关于原点的中心对称图形.这个对称中心称为双曲线的**中心**.

3. 顶点

把双曲线与它的对称轴的交点 $A_1(-a,0)$,$A_2(a,0)$叫作双曲线的**顶点**.显然顶点是双曲线两支之间距离最近的点.两个顶点间的线段 A_1A_2 叫作双曲线的**实轴**,它的长度等于 $2a$,其中 a 叫作双曲线的**实半轴长**.

$B_1(0,-b)$,$B_2(0,b)$为 y 轴上的两个点,线段 B_1B_2 叫作双曲线的**虚轴**,它的长度等于 $2b$,其中 b 叫作双曲线的**虚半轴长**.

例 3 图 2－23(1),火力发电厂的冷却塔的外形是由双曲线绕其虚轴所在直线旋转所得到的曲面.已知塔的总高度为 150 m,塔顶直径为 70 m,塔的最小直径(喉部直径)为 67 m,喉部标高(标高是地面或建筑物上的一点和作为基准的水平面之间的垂直距离)为 112.5 m,求双曲线的标准方程(结果精确到 0.01),并画出该双曲线.



(1) (2)

图 2－23

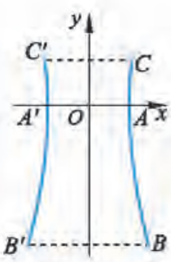


图 2－24

解 图 2－23(2)是冷却塔的轴截面,为了得到双曲线的标准方程,以最小直径处所在直线为 x 轴,最小直径的垂直平分线为 y 轴,建立平面直角坐标系(如图 2－24),则点 A 的坐标为(33.5,0).

设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0),$$

则 $$a=33.5.$$

由已知可得点 C 的坐标为(35,37.5),代入双曲线的标准方程有

$$\frac{35^2}{33.5^2}-\frac{37.5^2}{b^2}=1,$$

所以 $$b^2\approx 15\ 359.26.$$

所求双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{1\ 122.25}-\frac{y^2}{15\ 359.26}=1.$$

例 4 求双曲线 $x^2-4y^2=1$ 的焦点、中心、顶点坐标、实轴和虚轴的长,并画出该双曲线.

解 将 $x^2-4y^2=1$ 化为标准方程 $x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$,

由此可得实半轴长 $a=1$,虚半轴长 $b=\frac{1}{2}$,半焦距 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

所以双曲线的焦点坐标为$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$,$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$,中心坐标为(0,0),顶点坐标为(−1,0),(1,0),实轴长为2,虚轴长为1.

根据双曲线的对称性,先画双曲线位于第一象限的部分.为此,由双曲线的方程解得

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\ (x\geqslant 1).$$

计算出一些点,如表 2-2(y 的值精确到 0.01).

表 2-2

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
y	0	0.56	0.87	1.15	1.41	1.94	2.45	2.96	3.46	3.97

在平面直角坐标系中描出上述对应点,并用光滑曲线连起来.根据对称性,再画出双曲线在其他三个象限的部分(如图 2-25).

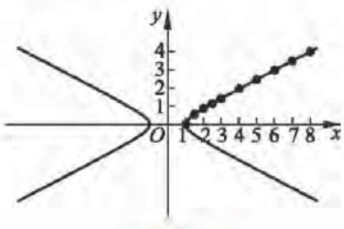


图 2-25

思考交流

观察图 2－25 中双曲线 $x^2-4y^2=1$ 在第一象限的图形，可发现如下情形：随着 x 的增大，y 随之增大，当 x 比较大时，该图形逼近于直线 $y=\frac{1}{2}x$，且总在该直线的下方. 双曲线图形的这种特征，能否从它在第一象限的图形的方程 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,(x\geqslant1)$ 和直线方程 $y=\frac{1}{2}x$ 的联系中给出解释呢？

练　习

1. 求下列双曲线的焦点和顶点坐标、实轴和虚轴的长、焦距：

(1) $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{4}=-1$；　(2) $3x^2-4y^2=12$；　(3) $y^2-x^2=4$.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 焦距为 6，顶点为 $(-2,0)$，$(2,0)$；

(2) 顶点为 $(-3,0)$，$(3,0)$，虚轴长为 2；

(3) 实轴长和虚轴长相等，且经过点 $(3,2)$.

4. 离心率

我们把 $\frac{c}{a}$ 叫作双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的**离心率**，用 e 表示. 因为 $c>a>0$，所以 $e=\frac{c}{a}>1$.

$\frac{b}{a}$ 决定双曲线的开口大小，$\frac{b}{a}$ 越大，双曲线的开口就越大. 因为

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}=\sqrt{e^2-1},$$

所以 $\frac{b}{a}$ 越大，e 也越大，从而离心率 e 可以用来表示双曲线开口的程度.

5. 渐近线

例 4 中双曲线 $x^2-4y^2=1$ 上的点 $P(x,y)$ 在第一象限时，$y=\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$，当 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}<1$ 且无限逼近于 1，y 无限逼近于 $\frac{x}{2}$. 也就是说，当 $x\to+\infty$ 时，双曲线在第一象限内的点 $P(x,y)$ 无限逼近于直线 $y=\frac{1}{2}x$. 因此，形象地称直线 $y=\frac{1}{2}x$ 为双曲线 $x^2-4y^2=1$ 的渐近线，根据双曲线的对称性可知 $y=-\frac{1}{2}x$ 也是双曲线 $x^2-4y^2=1$ 的渐近线.

一般地，对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，当双曲线上的点$P(x,y)$在第一象限时，有$y=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$，当$x\to+\infty$时，$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}<1$且无限逼近于1，所以点$P(x,y)$在直线$y=\frac{b}{a}x$的下方，且$y$无限逼近于$\frac{bx}{a}$，即当$x\to+\infty$时，点$P(x,y)$无限逼近于直线$y=\frac{b}{a}x$.

由双曲线的对称性可知，双曲线的两支在向外无限延伸时与直线$y=\frac{b}{a}x$和$y=-\frac{b}{a}x$无限逼近.

一般地，直线$y=\frac{b}{a}x$和$y=-\frac{b}{a}x$称为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的**渐近线**.

例5 求双曲线$9x^2-16y^2=-144$的实轴和虚轴的长、焦点和顶点坐标，以及渐近线方程，并画出该双曲线.

解 将$9x^2-16y^2=-144$化为标准方程，得

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1.$$

所以实轴长$2a=6$，虚轴长$2b=8$，焦点坐标为$(0,-5)$，$(0,5)$，顶点坐标为$(0,-3)$，$(0,3)$，渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$.

如图2-26，首先画出$x=\pm4$，$y=\pm3$，作出矩形；

然后作出矩形的对角线，得到渐近线$y=\pm\frac{3}{4}x$；

最后以渐近线为参照画出双曲线.

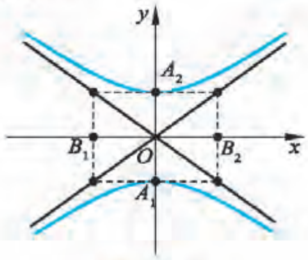


图2-26

练 习

1. 请说明双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$中$a,b$的几何意义，并画图进行相应标记.

2. 求下列双曲线的实轴和虚轴的长、顶点的坐标、离心率和渐近线方程，并画出双曲线的草图：

(1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$； (2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$.

3. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 渐近线方程为$y=\pm2x$，实轴长为2且焦点在x轴上；

(2) 顶点为$(0,-6)$，$(0,6)$，渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$；

(3) 渐近线方程为$y=\pm\frac{2}{3}x$，且经过点$(3\sqrt{2},2)$.

习题 2－2

A　组

1. 求下列双曲线的实轴和虚轴的长、焦点坐标、虚轴端点坐标、离心率和渐近线方程：

(1) $6x^2-10y^2+60=0$；　　　(2) $20x^2-25y^2=500$.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 焦点 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，一个顶点为 $(1,0)$；

(2) 一个焦点为 $(0,3)$，离心率为 3；

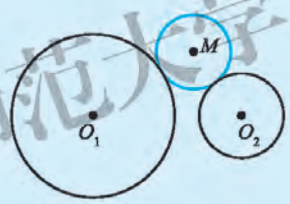
(3) 一条渐近线为 $2x-3y=0$，且过点 $(1,-1)$；

(4) 经过点 $(3,-4\sqrt{2})$，$\left(\frac{9}{4},5\right)$.

3. 求双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点到其渐近线的距离.

4. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，求双曲线 C 的渐近线方程.

5. 如图，已知动圆 M 与两个定圆 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别外切，则动圆圆心 M 的轨迹是什么图形？



（第 5 题）

B　组

1. 求以椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 的焦点为顶点，以椭圆 C 的顶点为焦点的双曲线的标准方程.

2. 求双曲线 $4x^2-9y^2=k$ 的离心率和渐近线方程.

3. 已知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$ 两点，动点 P 满足直线 PA 和直线 PB 的斜率之积为 1，求动点 P 的轨迹方程，并指出其轨迹的图形.

§ 3 抛物线

3.1 抛物线及其标准方程

一、抛物线的定义

我们在初中学过，一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线，而且知道，斜抛物体在没有空气阻力的情况下，其轨迹是抛物线，如铅球的运行轨迹等，有些拱桥、雷达的天线也是利用抛物线的原理制成的. 那么，具有怎样几何特征的曲线是抛物线呢?

如图 2-27，先将一把直尺固定在画板上，再把一个直角三角板的一条直角边紧靠在直尺的边缘(记作直线 l)，然后取一根细绳，它的长度与另一条直角边 AB 相等，细绳的一端固定在三角板顶点 A 处，另一端固定在画板上的点 F 处.

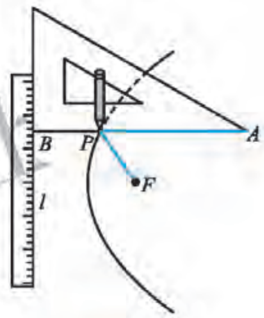


图 2-27

用铅笔尖(记作点 P)扣紧绳子，并靠住三角板，然后将三角板沿着直尺上下滑动，可以发现铅笔尖就在画板上描出了一段曲线，即点 P 的轨迹.

观察铅笔尖随着三角板的移动过程，可以发现，点 P 始终满足 $|PF|=|PB|$(三角板的直角顶点记作 B)，即点 P 到定点 F 的距离和点 P 到定直线 l 的距离相等. 于是，我们把具有这样特征的曲线作如下定义：

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l(l 不经过点 F)的距离相等的点的集合(或轨迹)叫作抛物线.

这个定点 F 叫作**抛物线的焦点**，这条定直线 l 叫作**抛物线的准线**.

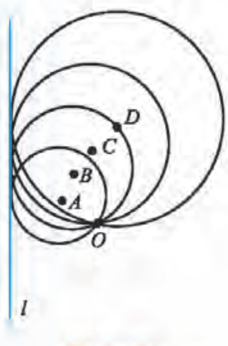


图 2-28

思考交流

观察图 2-28，点 A,B,C,D 分别是四个圆的圆心，试用数学语言来描述这些点.

二、抛物线的标准方程

问题提出

类比椭圆、双曲线标准方程的建立过程，你认为应如何建立平面直角坐标系，使所建立的抛物线的方程简单？

分析理解

取经过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴，x 轴与准线 l 相交于点 K，以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴，建立如图 2－29 的平面直角坐标系.

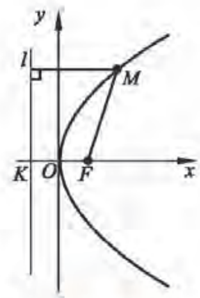


图 2－29

设抛物线的焦点到准线的距离为 $p(p>0)$，则 $|KF|=p$，焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

设点 $M(x,y)$ 是抛物线上的任意一点，点 M 到准线 l 的距离为 d. 由抛物线的定义可知，抛物线上的点 M 满足

$$|MF|=d.$$

因为 $$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\quad d=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

所以 $$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方并化简，得

$$\boxed{y^2=2px(p>0).} \qquad ①$$

这说明抛物线上的任意一点的坐标都满足方程①；反之，可以证明，以方程①的解为坐标的点都在抛物线上. 于是，把方程①叫作**抛物线的标准方程**. 这条抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上，坐标是 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，它的准线方程是

$$\boxed{x=-\frac{p}{2},}$$

其中 p 是抛物线的焦点到准线的距离.

例 1 根据下列条件，求抛物线的标准方程：

(1) 焦点坐标为 $(2,0)$；

(2) 准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$.

解 (1) 设抛物线的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

其焦点坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，根据题意有$\frac{p}{2}=2$，故 $2p=8$.

所以所求抛物线的标准方程为 $y^2=8x$.

(2) 设抛物线的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

则其准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，根据题意有$-\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}$，故 $2p=6$.

所以所求抛物线的标准方程为 $y^2=6x$.

例 2 已知抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，焦点到准线的距离为$\frac{1}{2}$，求抛物线的标准方程、焦点坐标和准线方程.

解 因为抛物线的焦点到准线的距离 $p=\frac{1}{2}$，所以所求抛物线的标准方程为

$$y^2=x,$$

其焦点坐标为$\left(\frac{1}{4},0\right)$，准线方程是 $x=-\frac{1}{4}$.

思考交流

在建立椭圆和双曲线的标准方程时，由于焦点在平面直角坐标系中的位置不同，它们各有两种形式的标准方程，你认为抛物线的标准方程一共有几种形式？请分别指出抛物线的焦点位置，并写出相应的标准方程和准线方程.

练 习

1. 根据下列条件，求抛物线的标准方程：

(1) 焦点坐标为$\left(\frac{1}{2},0\right)$；

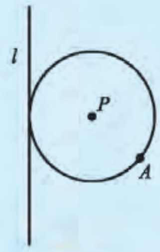
(2) 准线方程为 $x+3=0$；

(3) 焦点在 x 轴的正半轴，且到准线的距离为 3.

2. 求下列抛物线的焦点坐标、准线方程和焦点到准线的距离：

(1) $y^2=12x$；　　(2) $2y^2-x=0$.

3. 如图，动圆 P 过定点 A，且与定直线 l 相切，请指出圆心 P 的轨迹是什么，并说明理由.



(第 3 题)

3.2 抛物线的简单几何性质

类比椭圆和双曲线的几何性质的探索过程，你认为抛物线有哪些简单几何性质？

根据抛物线的标准方程

$$y^2=2px(p>0) \qquad ①$$

和图形研究它的几何性质.

1. 范围

由方程①可知，对于抛物线①上的任意一点 $M(x,y)$，都有 $x\geqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$，所以这条抛物线在 y 轴的右侧，开口向右；当 x 的值增大时，$|y|$ 也随之增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸.

2. 对称性

根据方程①的结构特点，可以发现：若 (x_0,y_0) 满足方程①，则 $(x_0,-y_0)$ 也满足方程①，所以抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 是关于 x 轴对称的曲线.

3. 顶点

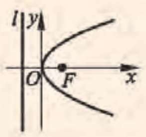
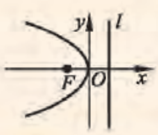
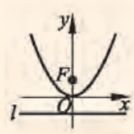
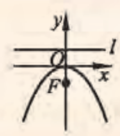
抛物线和它的对称轴的交点叫作**抛物线的顶点**. 在方程①中，当 $y=0$ 时，$x=0$，因此，抛物线的顶点就是坐标原点.

4. 离心率

抛物线上的点 M 到焦点的距离和它到准线的距离的比，叫作**抛物线的离心率**，用 e 表示. 由抛物线的定义可知 $e=1$.

在平面直角坐标系中，顶点在原点、焦点在坐标轴上的抛物线有四种位置情况，因此抛物线的方程相应地也有四种形式，它们都叫作**抛物线的标准方程**. 设焦点到准线的距离为 $p(p>0)$，则抛物线标准方程的四种形式如表 2-3.

表 2-3

图象				
标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

例 3 求顶点在原点，经过点$(\sqrt{3},-6)$，且以坐标轴为对称轴的抛物线的标准方程.

解 因为点$(\sqrt{3},-6)$在第四象限，

所以若 x 轴是抛物线的对称轴，则设抛物线的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

因为点$(\sqrt{3},-6)$在抛物线上，所以

$$(-6)^2=2p\cdot\sqrt{3}.$$

解得 $2p=12\sqrt{3}$，所求抛物线的标准方程为

$$y^2=12\sqrt{3}x(\text{如图 }2-30(1)).$$

若 y 轴是抛物线的对称轴，同理可得抛物线的标准方程为

$$x^2=-\frac{1}{2}y(\text{如图 }2-30(2)).$$

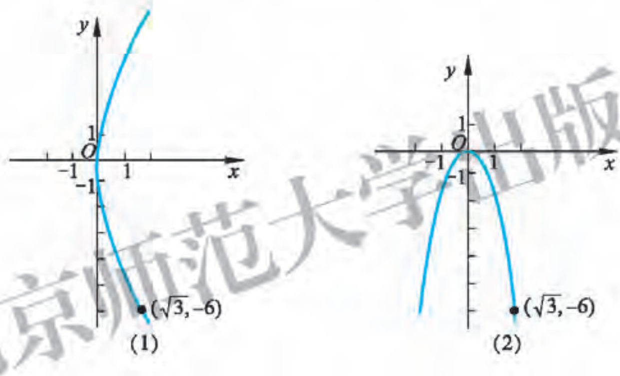


图 2-30

练 习

1. 根据下列条件，求抛物线的标准方程、顶点坐标和准线方程：

(1) 焦点为 $F(0,1)$；　　(2) 焦点为 $F(-1,0)$；

(3) 焦点为 $F(0,-3)$.

2. 根据下列条件，求抛物线的标准方程、顶点坐标和焦点坐标：

(1) 准线方程为 $x=\frac{3}{4}$；　　(2) 准线方程为 $y=-2$；

(3) 准线方程为 $x=2$.

3. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=-4x$；　　(2) $x^2=3y$；

(3) $x^2=-2y$；　　(4) $x+y^2=0$；

(5) $y=2x^2$；　　(6) $4y^2-x=0$.

例 4 已知点 M 到点 $F(4,0)$ 的距离比它到直线 $l: x+6=0$ 的距离小 2，求点 M 的轨迹方程.

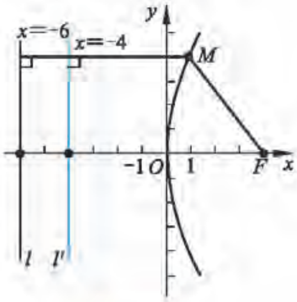


图 2-31

解 如图 2-31，点 M 到点 $F(4,0)$ 的距离比它到直线 $l: x+6=0$ 的距离小 2，即"点 M 到点 $F(4,0)$ 的距离等于它到直线 $l': x+4=0$ 的距离". 由此可知，点 M 的轨迹是以 $F(4,0)$ 为焦点，以直线 $l': x=-4$ 为准线的抛物线. 故点 M 的轨迹方程是

$$y^2=16x.$$

例 5 已知抛物线 $y^2=4x$ 上的点 P 到焦点 F 的距离为 5，求点 P 的坐标.

解法 1 由抛物线方程 $y^2=4x$，可得焦点 $F(1,0)$.

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，依题意有 $\begin{cases} y_0^2=4x_0, & ① \\ \sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}=5. & ② \end{cases}$

将①代入②，消去 y_0，然后两边平方，得 $(x_0-1)^2+4x_0=25$，解得 $x_0=-6$ 或 $x_0=4$.

将 $x_0=-6$ 代入①，得 $y_0^2=-24$ 无解，故舍去；

将 $x_0=4$ 代入①，得 $y_0^2=16$，即 $y_0=\pm 4$.

所以点 P 的坐标为 $(4,4)$ 或 $(4,-4)$.

解法 2 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，由点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上，得 $y_0^2=4x_0$.

由抛物线方程 $y^2=4x$，可得其准线方程为 $x=-1$.

由点 P 到焦点 F 的距离为 5 可知，点 P 到抛物线的准线的距离也为 5，

即 $x_0-(-1)=5$，解得 $x_0=4$.

将 $x_0=4$ 代入 $y^2=4x$，得 $y_0^2=16$，即 $y_0=\pm 4$.

所以点 P 的坐标为 $(4,4)$ 或 $(4,-4)$.

例 6 某单行隧道横断面由一段抛物线及一个矩形的三边组成，尺寸如图 2-32（单位：m），某卡车载一集装箱，车宽 3 m，车与集装箱总高 4.5 m，此车能否安全通过隧道？说明理由.

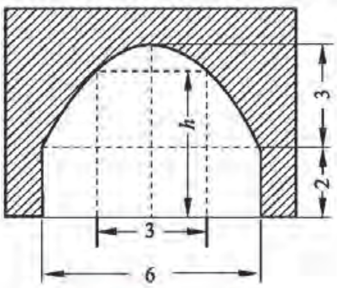


图 2-32

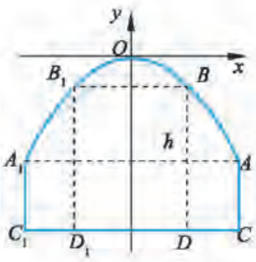


图 2-33

解 如图 2-33，以抛物线的顶点为原点，以抛物线的对称轴为 y 轴，建立平面直角坐

标系，则点 A 的坐标为 $(3,-3)$.

设抛物线的标准方程为

$$x^2=-2py(p>0).$$

将点 A 的坐标代入上式，得 $9=6p$，即 $2p=3$.

所以抛物线的标准方程为 $x^2=-3y$.

将 $x=1.5$ 代入抛物线的标准方程，得 $y=-0.75$，则 $5-0.75=4.25<4.5$.

这说明，即使集装箱处于隧道的正中位置，车与集装箱的总高也会高于 BD，所以此车不能安全通过隧道.

练　习

1. 求适合下列条件的抛物线的方程：

   (1) 焦点为 $F\left(-\frac{1}{2},0\right)$，准线方程为 $x=\frac{1}{2}$；

   (2) 顶点在原点，准线方程为 $y=-3$；

   (3) 顶点在原点，以 y 轴为对称轴，过点 $M(1,1)$.

2. 在同一平面直角坐标系中画出下列抛物线：

   (1) $y^2=x$；　　(2) $y^2=2x$；　　(3) $y^2=4x$.

   通过观察这些图形，说明抛物线开口的大小与方程中 x 的系数有怎样的关系.

3. 若抛物线 $x^2=4y$ 上的点 $P(m,n)$ 到其焦点 F 的距离为 3，则 n 的值为________.

4. 已知点 M 到点 $A(-2,0)$ 的距离比点 M 到直线 $x=3$ 的距离小 1，求点 M 的轨迹方程.

习题 2-3

A　组

1. 根据下列条件，求抛物线的标准方程，并画图：

   (1) 准线方程为 $y=-\frac{3}{2}$；

   (2) 焦点在 x 轴上且其到准线的距离为 6；

   (3) 对称轴是 x 轴，顶点到焦点的距离等于 2；

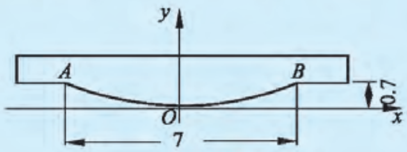
   (4) 对称轴是 y 轴，经过点 $(1,-2)$.

2. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

   (1) $\frac{1}{4}x^2+y=0$；　　(2) $2y^2+3x=0$；

   (3) $y=4x^2$；　　(4) $y^2-4x=0$.

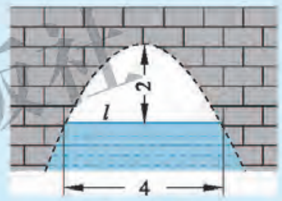
3. 已知点 M 到点 $A(2,0)$ 的距离比到 y 轴的距离大 2，求点 M 的轨迹方程.
4. 已知点 M 是抛物线 $y^2=4x$ 上一点，且点 M 到焦点的距离为 10，求点 M 的坐标.
5. 如图(单位：m)，吊车梁的鱼腹部分 AOB 是一段抛物线，其宽为 7 m，高为 0.7 m，求这条抛物线的方程.



(第 5 题)

B 组

1. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 M 到它准线的距离为 2，且点 M 到此抛物线顶点的距离等于点 M 到它的焦点的距离，求此抛物线的焦点坐标.
2. 已知抛物线的焦点在 y 轴上，且该抛物线上一点 $Q(-3,m)$ 到其焦点的距离为 5，求该抛物线的标准方程.
3. 已知点 P 在抛物线 $y^2=-4x$ 上，求点 P 到椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$ 左顶点的距离最小值.
4. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 P 到准线及对称轴的距离分别是 10 和 6，求点 P 的横坐标及抛物线方程.
5. 如图(单位：m)是抛物线形拱桥，当水面处于 l 位置时，拱顶离水面 2 m，水面宽 4 m. 水面下降 1 m 后，水面宽是多少？



(第 5 题)

阅读材料

圆锥的截线

如图 2－34，空间中的两条相交直线 l，m（交点为 S，夹角为锐角 θ）绕直线 l 旋转一周形成圆锥面．其中，S 称为圆锥面的顶点，l 称为圆锥面的轴，圆锥面上过点 S 的任意一条直线都称为圆锥面的母线．

用一个不经过点 S 的平面 β 去截这个圆锥面，随着平面 β 与轴 l 所成角 α 的不同，截线的形状也随之变化（如图 2－34）．

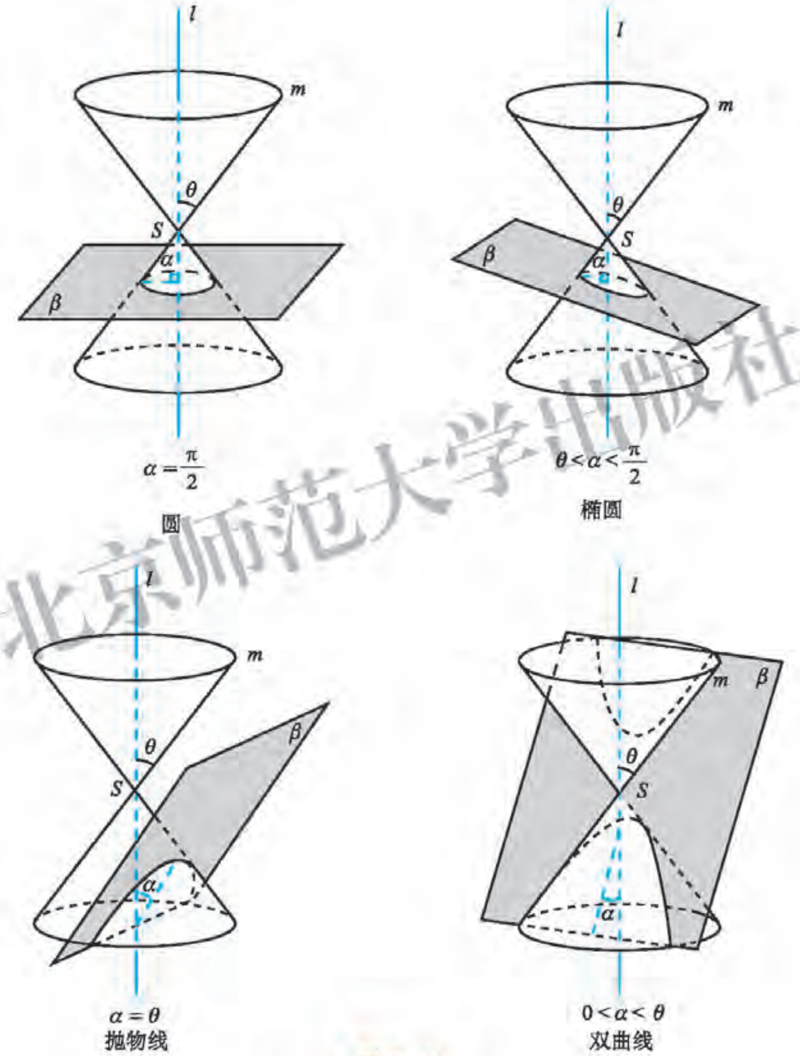


图 2－34

1. 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，即平面 β 与轴 l 垂直时，截线是圆；
2. 当 $\theta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时，截线是椭圆；
3. 当 $\alpha=\theta$ 时，截线是抛物线；
4. 当 $0<\alpha<\theta$ 时，截线是双曲线．

圆、椭圆、抛物线、双曲线都可以由平面截圆锥面得到，因此把它们统称为圆锥曲线．

§ 4　直线与圆锥曲线的位置关系

4.1　直线与圆锥曲线的交点

前面已经学习了直线以及圆、椭圆、双曲线和抛物线等一系列特殊曲线，通过平面直角坐标系，把圆锥曲线上的点和相应圆锥曲线方程的解建立了一一对应的关系．由此可知，直线与圆锥曲线的交点个数与两者对应方程的公共解的个数是相同的．

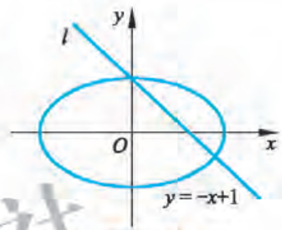


图 2-35

例 1　如图 2-35，求直线 l：$y=-x+1$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的交点坐标．

解　直线 l 与椭圆 C 的交点坐标是方程组 $\begin{cases} y=-x+1, \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$ 的解．

方程组可化为
$$\begin{cases} y=-x+1, & ① \\ x^2+3y^2=3. & ② \end{cases}$$

将①代入②，得
$$x^2+3(-x+1)^2=3,$$

化简，得
$$2x^2-3x=0.$$

解得
$$x_1=0, x_2=\frac{3}{2}.$$

代入②，得方程组的解为
$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=1, \end{cases} \begin{cases} x_2=\frac{3}{2}, \\ y_2=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

所以直线 l 与椭圆 C 的交点坐标为 $(0,1)$，$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$．

思考交流

例 1 中，若仅需判断直线 l 与椭圆 C 的交点个数，在不求出交点坐标的情况下，如何判断？理由是什么？

例 2　已知椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，若直线 l：$x-y+m=0$ 与椭圆 C 有唯一的公共点，求实数 m 的值．

解 如图 2-36，由直线 l 的方程特征可知，随着 m 的变化，直线 l 平行移动，若与椭圆 C 有唯一的公共点，则直线方程和椭圆方程应有唯一的公共解.

联立直线与椭圆的方程，得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ x-y+m=0.\end{cases}$

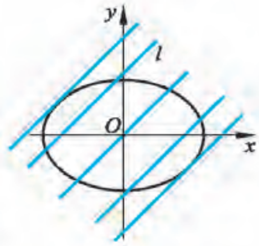


图 2-36

化简可得 $\begin{cases}x^2+2y^2=2, & ①\\ y=x+m. & ②\end{cases}$

将②代入①，并整理，得

$$3x^2+4mx+2m^2-2=0. \quad ③$$

因为方程③是一元二次方程，所以它有唯一的实数解的充要条件是

$$\Delta=16m^2-24(m^2-1)=0,$$

解得 $m=-\sqrt{3}$ 或 $m=\sqrt{3}$.

所以当直线 l 与椭圆 C 有唯一的公共点时，实数 m 的值为 $-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$.

练 习

1. 判断下列直线与圆锥曲线的交点情况：

(1) 直线 $x-2y-1=0$ 与抛物线 $y^2=4x$； (2) 直线 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

2. 由例 2 的结论，能否从图形的直观分析中判断出直线 l：$x-y+6=0$ 与椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的交点个数？若存在交点，则求出交点坐标；若不存在交点，则求椭圆 C 上的点到直线 l 的最小距离.

例 3 已知直线 l 经过点 $A(0,1)$，且与抛物线 C：$y^2=x$ 有唯一的公共点，求直线 l 的方程.

解 如图 2-37.

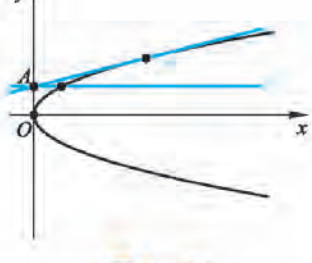


图 2-37

(1) 当直线 l 的斜率不存在时，直线 l：$x=0$（y 轴）与抛物线 C 相切于原点，符合条件.

(2) 当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$.

由方程组 $\begin{cases}y^2=x,\\ y=kx+1\end{cases}$ 消去 y 并整理，得

$$k^2x^2+(2k-1)x+1=0. \quad (*)$$

① 当 $k^2=0$ 时，直线 l 的方程为 $y=1$，此时，方程组有唯一的实数解，符合条件；

② 当 $k^2\neq 0$ 时，方程$(*)$有唯一的实数解的充要条件是 $\Delta=(2k-1)^2-4k^2=0$.

解得 $k=\frac{1}{4}$. 此时，方程组有唯一的实数解，符合条件.

综上，满足题意的直线 l 有三条：$x=0$，$y=1$，$y=\frac{1}{4}x+1$.

例 4 讨论直线 l：$y=kx+1$ 与双曲线 C：$x^2-y^2=1$ 的公共点的个数.

解 联立方程组 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2-y^2=1. \end{cases}$

消去 y，整理，得 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$.

(1) 当 $k=1$ 时，$x=-1$.

(2) 当 $k=-1$ 时，$x=1$.

(3) 当 $k\neq\pm1$ 时，$\Delta=4k^2+8(1-k^2)=8-4k^2$.

若 $\Delta>0$，则 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$；若 $\Delta=0$，则 $k=\pm\sqrt{2}$；若 $\Delta<0$，则 $k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$.

综上，当 $k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$ 时，直线 l 与双曲线 C 没有公共点；当 $k=\pm\sqrt{2}$ 时，直线 l 与双曲线 C 相切于一点；当 $k=\pm1$ 时，直线 l 与双曲线 C 相交于一点；当 $-\sqrt{2}<k<-1$ 或 $-1<k<1$ 或 $1<k<\sqrt{2}$ 时，直线 l 与双曲线 C 有两个公共点. 如图 2-38.

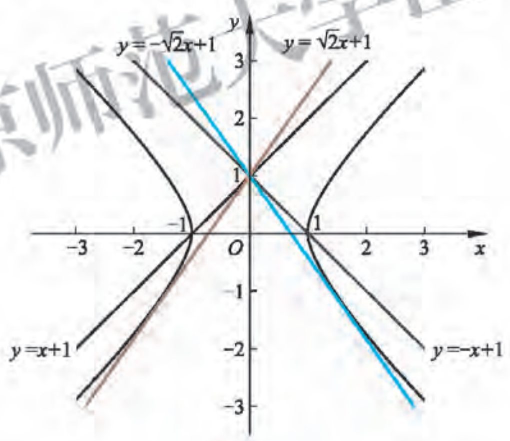


图 2-38

练 习

1. 已知直线 l：$y=kx-1$ 与双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 有且只有一个公共点，求实数 k 的值.

2. 如果直线 l：$y=k(x+\sqrt{3})$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 总有公共点，求实数 a 的取值范围.

3. 若直线 l：$x+m(y+1)-2=0$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1(a>0)$ 总有两个公共点，求实数 a 的取值范围.

4.2 直线与圆锥曲线的综合问题

例 5 如图 2-39，已知斜率为 -2 的直线经过椭圆 C：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点 F_1，与椭圆相交于 A，B 两点，求：

(1) 线段 AB 的中点 M 的坐标；

(2) $|AB|$ 的值.

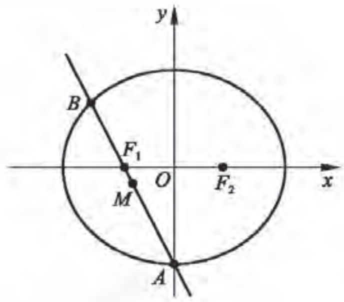


图 2-39

解 由题意知椭圆 C 的左焦点 F_1 的坐标为 $(-1,0)$，直线 AB 的方程为 $y=-2(x+1)$.

解方程组 $\begin{cases} y=-2(x+1), \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\frac{5}{3}, \\ y_2=\frac{4}{3}. \end{cases}$$

因此 $A(0,-2)$，$B\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$.

(1) 设线段 AB 的中点 M 的坐标为 (x,y)，则

$$x=\frac{0+\left(-\frac{5}{3}\right)}{2}=-\frac{5}{6},\ y=\frac{-2+\frac{4}{3}}{2}=-\frac{1}{3}.$$

所以线段 AB 的中点 M 的坐标为 $\left(-\frac{5}{6},-\frac{1}{3}\right)$.

(2) $|AB|=\sqrt{\left[0-\left(-\frac{5}{3}\right)\right]^2+\left(-2-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$.

思考交流

在解析几何中，代数运算是处理问题的重要方式，因此，“如何算?”成为解析几何中一个非常重要的问题，反思上面例 5 的求解过程，可否通过优化运算的顺序，实现运算的简化呢?

例 6 已知直线 l 过椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的中心，且交椭圆 C 于 A，B 两点，求 $|AB|$ 的取值范围.

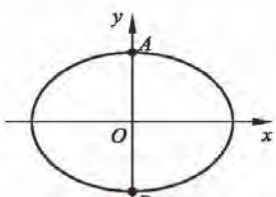


图 2-40

解 (1) 当直线 l 的斜率不存在时(如图 2-40)，直线 l：$x=0$，代入椭圆方程解得 $A(0,\sqrt{2})$，$B(0,-\sqrt{2})$，所以 $|AB|=2\sqrt{2}$.

(2) 当直线 l 的斜率存在时(如图 2-41),设直线 l 的方程为 $y=kx$.

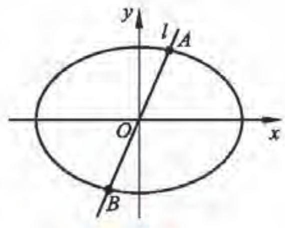


图 2-41

将椭圆方程化简、整理,得 $x^2+2y^2=4$.

将直线和椭圆方程联立,得 $\begin{cases} x^2+2y^2=4, & ① \\ y=kx, & ② \end{cases}$

将②代入①,得 $x^2+2(kx)^2=4$,

化简、整理,得 $(2k^2+1)x^2=4$. ③

显然,无论 k 取何值,方程③都有实数解,$x_A=\sqrt{\dfrac{4}{2k^2+1}}$,$x_B=-\sqrt{\dfrac{4}{2k^2+1}}$.

由两点间的距离公式,可得

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\\&=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(kx_A-kx_B)^2}\\&=\sqrt{(1+k^2)(x_A-x_B)^2}=4\sqrt{\frac{k^2+1}{2k^2+1}}.\end{aligned} \quad ④$$

为了便于求 $|AB|$ 的取值范围,将④进行变形整理,得

$$|AB|=4\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4k^2+2}}.$$

思 考

将④式做如此变形的理论依据是什么?

因为 $4k^2+2\geqslant 2$,由不等式的性质可得 $0<\dfrac{1}{4k^2+2}\leqslant\dfrac{1}{2}$,

所以 $2\sqrt{2}<|AB|\leqslant 4$.

综合(1)和(2)的结果,$|AB|$ 的取值范围为 $[2\sqrt{2},4]$.

思考交流

某同学给出了例 6 的如下解决方法:

解:考虑到直线 l 与椭圆 C 的两个交点 A,B 是关于中心 O 对称的,所以 $|AB|=2|OA|=2\sqrt{x_A^2+y_A^2}$.

因为点 A 在椭圆 C 上,所以 $x_A^2+2y_A^2=4$,整理,得 $x_A^2=4-2y_A^2$.

将其代入上式,消去 x_A 可得 $|AB|=2\sqrt{4-y_A^2}$.

由上述函数关系可以求出 $0\leqslant|AB|\leqslant 4$.

请对该同学的上述解法进行评价.

反思上述"思考交流"求解解析几何问题的过程,一方面可以再次感受到数形结合思维方式的作用,另一方面也可以感受到,还应该在分析图形的基础上对题目中的几何要素进行合理代数化表达,这直接关系到后续代数处理的繁简程度.

练 习

1. 已知直线 $x-2y+1=0$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于 A,B 两点，求 $|AB|$ 的值.

2. 已知直线 l 经过原点且交椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 于 M,N 两点，求 $|MN|$ 的最大值，并求此时的直线 l 的方程.

习题 2-4

A 组

1. 方程 $y(y-x)=2$ 所表示的曲线（　　）.

   A. 关于 y 轴对称　B. 关于直线 $x+y=0$ 对称　C. 关于原点对称　D. 关于直线 $x-y=0$ 对称

2. 请说明方程 $x^2-4y^2=0$ 表示怎样的曲线，并画出它的图形.

3. 已知直线 $3x-y+2=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 相交于 M,N 两点，求 MN 的长.

4. 已知点 $P(x,y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 上一点，求点 P 到点 $A(3,0)$ 的距离的取值范围.

B 组

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，$A(-a,0)$，$B(0,b)$ 是椭圆的两个顶点，如果左焦点 F 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{\frac{3}{7}}$，求该椭圆的方程.

2. 已知直线 $y=x+m$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 有唯一的公共点，求实数 m 的值.

3. 若经过点 $E(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 有 A,B 两个交点（其中点 A 在 x 轴上方），求 $|AE|$ 的取值范围.

4. 已知点 $E(1,0)$，直线 l：$y=x+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 相交于 A,B 两点，是否存在直线 l 满足 $|EA|=|EB|$？

5. 若直线 $y=kx+1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{m}=1$ 总有公共点，求实数 m 的取值范围.

阅读材料一

圆锥曲线的共同特征

比较本章所学的三种圆锥曲线，可以发现，椭圆和双曲线在定义上非常相似，它们都有两个焦点，在对称性上，它们都是中心对称曲线，都有两条对称轴；但是同为圆锥曲线的抛物线，仅有一个焦点，不论在定义上还是在对称性上，抛物线和椭圆、双曲线都相差较大. 既然椭圆、双曲线和抛物线本是同根生，都可以用平面截对顶圆锥面而得到，三者理应存在某些共同的性质，那么这种共同性质究竟是什么呢？

尽管上述三种圆锥曲线焦点个数不同，但是它们都有焦点，不妨从这里出发进行探究.

下面，分别来考察这三种圆锥曲线上的点到焦点的距离.

(1) 如图 2－42，设点 $P(x,y)$ 为椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的任意一点，右焦点 $F(c,0)$.

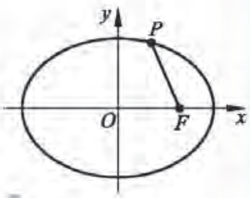


图 2－42

因为 $$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2},$$

所以 $$|PF|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}.$$

由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $|PF|=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2}=\sqrt{\left(\dfrac{c}{a}x-a\right)^2}=\left|\dfrac{c}{a}x-a\right|$. ①

(2) 如图 2－43，设点 $P(x,y)$ 为双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的任意一点，右焦点 $F(c,0)$.

因为 $$y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2,$$

所以 $$|PF|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}.$$

由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $|PF|=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2}=\sqrt{\left(\dfrac{c}{a}x-a\right)^2}=\left|\dfrac{c}{a}x-a\right|$. ②

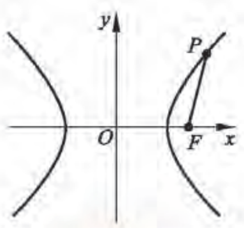


图 2－43

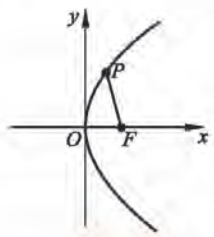


图 2－44

(3) 如图 2－44，设点 $P(x,y)$ 为抛物线 $C_3:y^2=2px(p>0)$ 上的任意一点，焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.

由抛物线的定义可知，点 P 到焦点 F 的距离等于点 P 到准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离，

即
$$|PF|=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \quad ③$$

考察①②，发现它们与③形式类似，受抛物线的启发，将①②变形整理，得

$$|PF|=\frac{c}{a}\left|x-\frac{a^2}{c}\right|.$$

设 $\frac{c}{a}=e$，则上式又可以改写成

$$|PF|=e\left|x-\frac{a^2}{c}\right|.$$

上式的几何意义是：椭圆和双曲线上的任意一点 P 到定点 F 的距离均等于该点到定直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 距离的 e 倍.

同理，抛物线上的任意一点也符合到焦点的距离等于到定直线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离的 e 倍.

通过上述分析，可以得到上述三种圆锥曲线的一个共同特征：

椭圆、双曲线和抛物线上任意一点到焦点 F 的距离与到定直线的距离之比为常数 e. 当 $0<e<1$ 时，曲线是椭圆；当 $e=1$ 时，曲线是抛物线；当 $e>1$ 时，曲线是双曲线.

因此，可以得到圆锥曲线的一个统一定义：

平面内到定点 F 的距离与到定直线 $l(F\notin l)$ 的距离之比为常数 $e(e>0)$ 的动点的轨迹是**圆锥曲线**. 其中，定点 F 为圆锥曲线的**焦点**，常数 e 是圆锥曲线的离心率，定直线 l 为圆锥曲线的**准线**.

阅读材料二

圆锥曲线的光学性质

在生活中，我们会发现抛物面的一些应用，如手电筒、探照灯、太阳灶(如图 2-45).

图 2-45

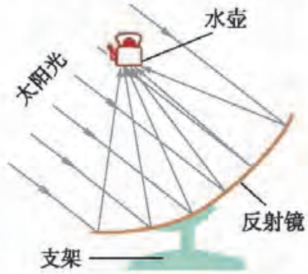


图 2-46

抛物面之所以在生活中得到广泛应用，是源于抛物面特有的光学性质：平行于抛物面的旋转轴的入射光线，经抛物面反射后，都集中到旋转轴上的一点，这点被称为“焦点”，意为聚焦光线的点；反之，从焦点发出的光线，经过抛物面反射后，反射光线平行于抛物面的旋转轴. 太阳灶就是利用这个性质工作的(如图 2-46). 2016 年 9 月 25 日，在贵州省平塘县落成启用的射电望远镜(如图 2-47)，它的反射面就是一个口径 500 m 的巨型球面，通过机械控制可以把其调整成所需要的抛物面.

图 2-47

根据物理中的光的镜面反射性质，由光源 S 发出的光线，经镜面反射后的反射光线就相当于是从光源 S 的像点 S' 射出的(如图 2-48)，其中光源 S 和其像点 S' 关于镜面对称.

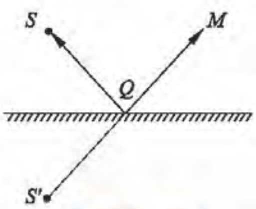


图 2-48

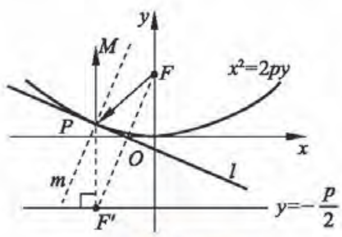


图 2-49

实际上，从微观去看曲面镜的反射，曲面和平面反射的规律类似，如图 2-49，焦点 F 射出的光线经抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上任意一点 P 反射的规律，仍遵从光的反射规律，只不过此时的反射面是该抛物线过点 P 的切线 l.

结合镜面反射的规律和抛物线上点的几何特性，可以发现图 2-49 中作抛物线上点

P 处的切线的方法：过点 P 作准线 $y=-\frac{p}{2}$ 的垂线交准线于点 F'(相当于点 F 的像点)，并连接 FF'，则线段 FF' 的垂直平分线 l 就是所求的切线.

实际上，椭圆和双曲线也有它们各自独特的光学性质. 圆锥曲线都有一个共同的概念——焦点，这一概念本身就体现了它们的光学性质.

椭圆和双曲线的光学性质和抛物线不同. 椭圆的光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线一定会通过另一个焦点(如图 2-50). 双曲线的光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是发散的，它们就好像是从双曲线的另一个焦点处射出来的(如图 2-51). 椭圆和双曲线的光学性质，也被人们广泛地应用到各种设计中. 例如，有一种电影放映机的放映灯泡是在灯泡的玻璃内壁上镀铝，并留有透明窗(通光孔)的专用灯泡. 它的反射镜面的一部分是旋转椭球面的一部分，它的中心接口线 BAC 是椭圆的一部分，灯丝位于它的一个焦点 F_2 上，片门(电影胶片通过的地方)位于另一个焦点 F_1 上(如图 2-52)，使得胶片可以获得最强的光线.

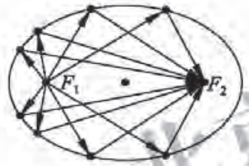


图 2-50

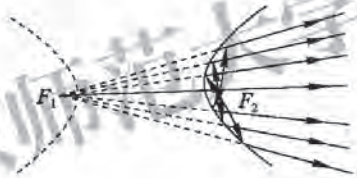


图 2-51

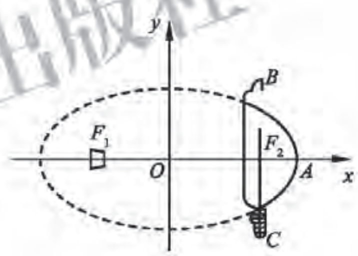
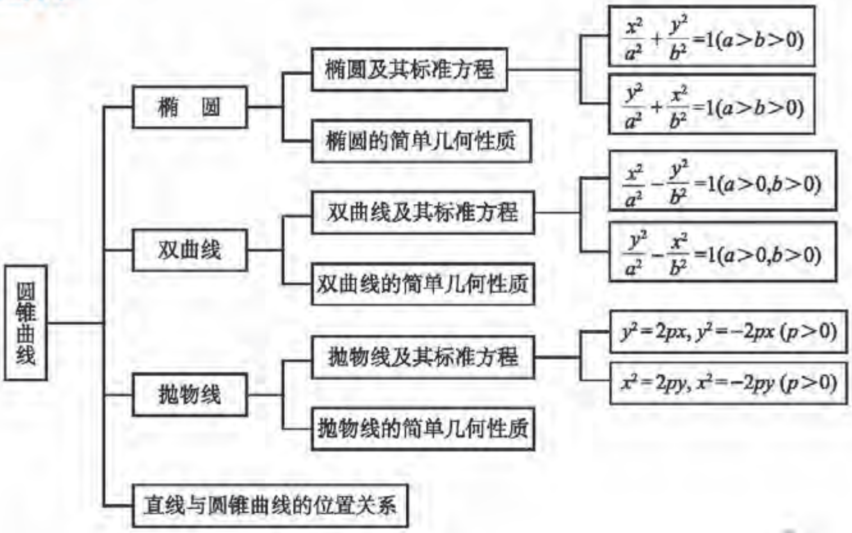


图 2-52

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

本章的学习，可以帮助同学们在平面直角坐标系中，认识椭圆、双曲线、抛物线的几何特征，建立它们的标准方程；运用代数方法进一步认识圆锥曲线的性质以及它们的位置关系；运用平面解析几何方法解决简单的数学问题和实际问题，感悟平面解析几何中蕴含的数学思想.

1. 圆锥曲线与方程

(1) 了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

(2) 经历从具体情境中抽象出椭圆的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质.

(3) 了解双曲线与抛物线的定义、几何图形和标准方程，以及它们的简单几何性质.

(4) 通过圆锥曲线与方程的学习，进一步体会数形结合的思想.

(5) 了解椭圆、抛物线的简单应用.

*2. 平面解析几何的形成与发展

收集、阅读平面解析几何的形成与发展的历史资料，撰写小论文，论述平面解析几何发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

三、需要关注的问题

1. 在建立圆锥曲线的方程、由方程研究曲线的简单几何性质，以及简单的直线与圆锥曲线的位置关系的研究过程中，角和距离各自发挥了哪些作用？

2. 比较用坐标法研究本章所学的三种圆锥曲线的具体过程，并思考它们有哪些共同特点. 这对你研究其他的曲线有何启示？

3. 本章中研究直线与圆锥曲线的位置关系的方法，和上一章研究直线与圆的位置关系的方法有何异同？

4. 如何建立形与数的关系？

5. 比较解析几何方法与向量几何方法的联系与差异.

复习题二

A 组

1. 求下列椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点坐标：

(1) $x^2+9y^2=9$；　　(2) $4x^2+2y^2=16$.

2. 求下列双曲线的实轴和虚轴的长、离心率、焦点和顶点坐标、渐近线方程：

(1) $x^2-7y^2=7$；　　(2) $x^2-2y^2=-8$.

3. 根据下列条件，求圆锥曲线的标准方程：

(1) 焦点为$(-2,0)$，$(2,0)$，离心率为$\frac{1}{3}$；

(2) 焦点为$(-2,0)$，$(2,0)$，离心率为3；

(3) 抛物线的准线为$2y+1=0$；

(4) 椭圆与双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$有相同的焦点，且短轴长为2.

4. 若椭圆$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4}=1$的焦距是2，则实数$m$的值为________.

5. 若常数$a>0$，椭圆$x^2+a^2y^2=2a^2$的长轴长是短轴长的3倍，则实数a的值为________.

6. 设椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$的焦点为$F_1$，$F_2$，点$P$在该椭圆上，如果线段$PF_1$的中点在$y$轴上，那么$|PF_1|:|PF_2|$的值为________.

7. 若椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$有相同的焦点，则实数$a$的值为________.

8. 已知曲线C的方程为$\frac{x^2}{7-m}-\frac{y^2}{3-m}=1$，根据下列条件，求实数$m$的取值范围：

(1) 曲线C是椭圆；　　(2) 曲线C是双曲线.

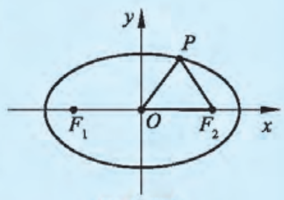
9. 求椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>0)$上的点$P(2,-1)$到椭圆$C$的右焦点$F$的距离.

10. 已知直线$x-2y+2=0$与椭圆$x^2+4y^2=4$相交于A，B两点，求$|AB|$的值.

11. 已知一个抛物线形拱桥在一次暴雨前后的水位之差是1.5 m，暴雨后的水面宽为2 m，暴雨来临之前的水面宽为4 m，求暴雨后的水面离桥拱顶的距离.

B 组

1. 如图，点F_1，F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点$P$在该椭圆上，$\triangle POF_2$是面积为$\sqrt{3}$的等边三角形，求该椭圆的方程.



(第1题)

2. 已知经过椭圆C：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$的焦点且与长轴垂直的直线$l$与椭圆$C$交于$M$，$N$两点，求$\triangle OMN$的面积.

3. 已知直线 $l: ax+y-4=0$ 与抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$的一个交点是(1,2),求抛物线 C 的焦点到直线 l 的距离.

4. 已知直线 $l: x-my+2=0$ 与椭圆 $C: x^2+3y^2=3$ 仅有一个公共点,求实数 m 的值.

5. 已知点 F_1, F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点,直线 l 经过点F_2,且与椭圆交于 M,N 两点,求$\triangle MF_1N$ 面积的最大值,并求此时的直线 l 的方程.

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点 $F(c,0)$,点 $P(x,y)$是椭圆 C 上的一个动点.

求证:$a-c \leqslant |PF| \leqslant a+c$.

7. 证明:以椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点 F 为圆心的圆与该椭圆最多有两个公共点.

C 组

1. 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点的直线 l 交该抛物线于M,N 两点,求$|MN|$的取值范围.

2. 经过椭圆 $C: \frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的中心作直线 l,与椭圆 C 交于 P,Q 两点,设椭圆 C 的右焦点为 F,已知$\angle PFQ=\frac{2\pi}{3}$,求$\triangle PFQ$ 的面积.

3. 已知直线 $l: mx-y+1=0$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A,B 两点,求$|AB|$的最大值.

4. 已知点 A,B 是椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 上不关于长轴对称的两点,且 A,B 两点到点 $M(m,0)$的距离相等,求实数 m 的取值范围.

5. 已知直线 $l: x-my-1=0$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A,B 两点,以弦 AB 为直径的圆恰好过原点 O,求此时直线 l 的方程.

3 第三章 空间向量与立体几何

我们曾经学习了平面向量，认识到向量在数学和物理中的广泛应用；认识到向量运算与数量运算既有区别，又有联系. 空间中也有很多既有大小又有方向的量，如速度、力、磁场强度、位移等，我们把它们叫作空间向量.

本章将在平面向量的基础上，通过类比的方法，学习空间向量的概念、性质和运算，并以向量为工具进一步研究立体几何的相关问题，提升直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养.

亦可只要代数和几何沿着各自的途径去发展，它们的进展将是缓慢的，它们的应用也是很有限的. 但是，当这两门学科结成伴侣，它们都将从对方身上获得新鲜的活力，因此，以快速的步伐猛进，趋于完美.

——拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange，1736—1813)

§ 1 空间直角坐标系

日常生活中，经常需要确定空间物体的位置，如一架飞机在空中的位置，一艘潜艇在海洋中的位置等. 那么如何确定空间中任意一点的位置呢？

我们知道，在数轴上，一个实数就能确定一点的位置；在平面直角坐标系中，需要一个有序实数对(x,y)才能确定一点的位置. 类似地，为了确定空间中任意一点的位置，可以建立空间直角坐标系，用三元有序实数组(x,y,z)来表示该点的位置.

如图 3－1，过空间任意一点 O，作三条两两垂直的直线，并以点 O 为原点，在三条直线上分别建立数轴：x 轴、y 轴和 z 轴，这样就建立了一个**空间直角坐标系** O－xyz. 点 O 叫作坐标原点，x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）叫作**坐标轴**，通过每两条坐标轴的平面叫作**坐标平面**，分别称为 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面.

一般是将 x 轴和 y 轴放置在水平面上，那么 z 轴就垂直于水平面. 它们的方向通常符合**右手螺旋法则**，即伸出右手，让四指与大拇指垂直，并使四指先指向 x 轴正方向，然后让四指沿握拳方向旋转 90°指向 y 轴正方向，此时大拇指的指向即为 z 轴正方向. 我们也称这样的坐标系为**右手系**（如图 3－2）.

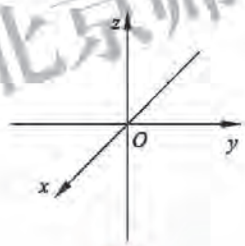


图 3－1

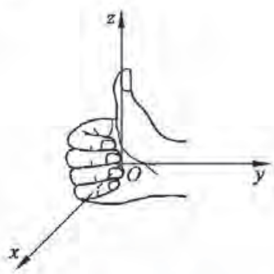


图 3－2

1.1 点在空间直角坐标系中的坐标

如果点 P 是空间直角坐标系 O－xyz 中的任意一点，那么如何刻画它的位置呢？

类比平面上点的坐标的确定方式，可以先作出点 P 在三条坐标轴上的投影，再根据投影在坐标轴上的坐标写出表示点 P 位置的三元有序实数组即可.

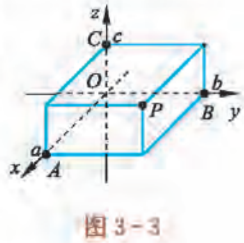


图 3－3

如图 3－3，当点 P 不在任何坐标平面上时，过点 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，依次交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 A、点 B 和点 C，则点

A,B,C 分别是点 P 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影. 设点 A 在 x 轴上、点 B 在 y 轴上、点 C 在 z 轴上的坐标依次为 a,b,c，那么点 P 就对应唯一的三元有序实数组 (a,b,c).

反过来，任意给定一个三元有序实数组 (a,b,c)，按照刚才作图的相反顺序，可以先在 x 轴、y 轴和 z 轴上依次取坐标为 a，b 和 c 的点 A、点 B 和点 C，再过点 A,B,C 各作一个平面，使之分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，则这三个平面的唯一交点就是由三元有序实数组 (a,b,c) 确定的点 P.

思考交流

根据下列特殊情况，讨论点 P 所对应的三元有序实数组：

(1) 当点 P 为坐标原点时；

(2) 当点 P 在 x 轴上时；

(3) 当点 P 在 xOy 平面上时.

在空间直角坐标系中，对于空间任意一点 P，都可以用唯一的一个三元有序实数组 (x,y,z) 来表示；反之，对于任意给定的一个三元有序实数组 (x,y,z)，都可以确定空间中的一个点 P. 这样，在空间直角坐标系中，任意一点 P 与三元有序实数组 (x,y,z) 之间，就建立了一一对应的关系：

$$P \leftrightarrow (x,y,z).$$

三元有序实数组 (x,y,z) 叫作点 P 在此**空间直角坐标系中的坐标**，记作 $P(x,y,z)$，其中 x 叫作点 P 的**横坐标**，y 叫作点 P 的**纵坐标**，z 叫作点 P 的**竖坐标**.

过点 P 作垂直于坐标轴的平面，与三条坐标轴分别交于点 A、点 B 和点 C，实际上就是作点 P 在各条坐标轴上的投影，即从点 P 向坐标轴引垂线，垂足分别为点 A,B,C. 设点 A,B,C 的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$，则点 P 的坐标为 (x,y,z).

例 1 如图 3-4，在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，已知长方体 $OABC-O'A'B'C'$，$|OA|=3$，$|OC|=4$，$|OO'|=2$，写出 O'，A'，B' 三点的坐标.

解 点 O' 在 z 轴上，且 $|OO'|=2$，则它的竖坐标为 2，又它的横坐标和纵坐标都为 0，所以点 O' 的坐标为 $(0,0,2)$.

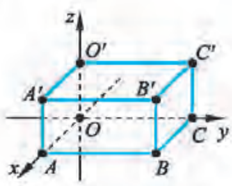


图 3-4

点 A' 在 zOx 平面内，则它的纵坐标为 0. 点 A' 在 x 轴、z 轴上的投影依次为点 A、点 O'，又 $|OA|=3$，$|OO'|=2$，所以点 A' 的横坐标和竖坐标依次为 3，2，即点 A' 的坐标为 $(3,0,2)$.

点 B' 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为点 A、点 C 和点 O'，所以点 B' 的坐标为 $(3,4,2)$.

例 2 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，画出下列各点：

$$A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,3,0), D(0,3,0),$$
$$A'(0,0,2), B'(2,0,2), C'(2,3,2), D'(0,3,2).$$

解 点 A 为原点.

点 B 为 x 轴上坐标为 2 的点.

点 C 的竖坐标为 0，因此点 C 就是 xOy 平面内横坐标为 2、纵坐标为 3 的点.

点 D 是 y 轴上坐标为 3 的点.

点 A' 是 z 轴上坐标为 2 的点.

点 B' 是 zOx 平面内横坐标为 2、竖坐标也为 2 的点.

要作出点 $C'(2,3,2)$，只需过 x 轴上坐标为 2 的点 B 作垂直于 x 轴的平面 α，过 y 轴上坐标为 3 的点 D 作垂直于 y 轴的平面 β，根据几何知识可以得出：这两个平面的交线就是经过点 $C(2,3,0)$ 且与 z 轴平行的直线 l. 再过 z 轴上坐标为 2 的点 A' 作垂直于 z 轴的平面 γ，那么直线 l 与平面 γ 的交点也是三个平面 α, β, γ 的交点，就是点 C'.

点 D' 是 yOz 平面内纵坐标为 3、竖坐标为 2 的点.

在同一空间直角坐标系中，画出以上各点，它们刚好是长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的八个顶点（如图 3－5）.

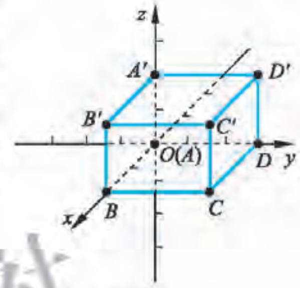


图 3－5

1.2 空间两点间的距离公式

问题提出

距离是几何中的基本度量，几何问题和一些实际问题经常涉及距离. 两点间的距离也就是以这两点为端点的线段的长度. 在空间直角坐标系中，两点间的距离与两点的坐标有何关系？

分析理解

在空间直角坐标系中，给定 $P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$ 两点.

先考虑特殊情况.

若其中一点为原点，不妨设点 Q 为原点 O，过点 P 分别作与三条坐标轴垂直的平面，则被各坐标平面所截可得长方体 $A_1P_1C_1O-APCB$（如图 3－6），且长方体的棱长满足

$$|OA_1| = |x_1|, |OC_1| = |y_1|, |OB| = |z_1|.$$

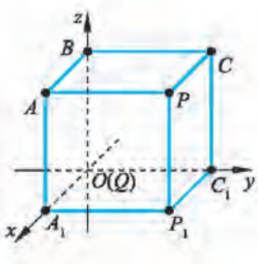


图 3－6

由图 3－6 可知，P，O 两点间的距离就是长方体 $A_1P_1C_1O-APCB$ 的对角线 PO 的长度. 根据长方体对角线的长与各棱长的关系，得

$$|PO|^2=|OA_1|^2+|OC_1|^2+|OB|^2,$$

即
$$|PO|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

由上述方法得到启发：空间中两点间的距离可以转化为长方体对角线的长度.

再来看一般情况.

对于空间任意 P,Q 两点，过点 P 分别作与三条坐标轴垂直的平面，过点 Q 也分别作与三条坐标轴垂直的平面（如图 3-7），当这六个平面均不重合时，它们围成一个长方体 $PCBA-EFQD$，且长方体的各棱所在的直线均与某条坐标轴平行或重合.

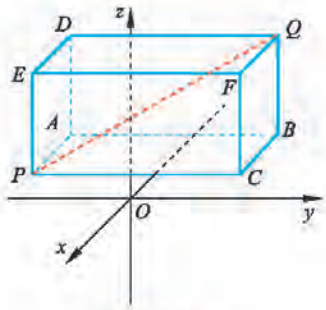


图 3-7

由图 3-7 易知，C,B 两点的坐标分别为 (x_1,y_2,z_1)，(x_2,y_2,z_1).

因为 CB 平行于 x 轴，所以 $|CB|=|x_2-x_1|$.

同理有 $|PC|=|y_2-y_1|$，$|BQ|=|z_2-z_1|$.

因此
$$|PQ|^2=|CB|^2+|PC|^2+|BQ|^2,$$

即
$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

当这六个平面中至少有两个平面重合时，不妨设垂直于 z 轴的两个平面重合（$z_1=z_2$），作出其余四个平面与 xOy 平面的交线（如图3-8）. 容易证明：四边形 PQQ_1P_1 为矩形或线段 PQ 与 P_1Q_1 重合，所以 $|PQ|=|P_1Q_1|$. 由图 3-8 易知，P_1,Q_1 两点的坐标分别为 $(x_1,y_1,0)$，$(x_2,y_2,0)$，再根据平面上两点间的距离公式，有 $|P_1Q_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. 于是仍有

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

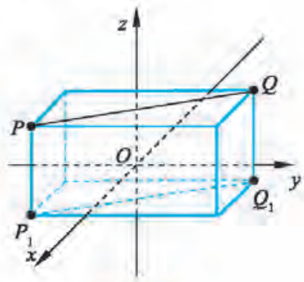


图 3-8

抽象概括

已知空间中 $P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$ 两点，则 P,Q 两点间的距离为

$$\boxed{|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

这就是空间两点间的距离公式.

思考交流

方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 表示什么图形？

例3 给定空间直角坐标系，在 x 轴上找一点 P，使它与点 $P_0(4,1,2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

解 设点 P 的坐标是 $(x,0,0)$，由题意，得 $|P_0P|=\sqrt{30}$，即

$$\sqrt{(x-4)^2+(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{30},$$

所以
$$(x-4)^2=25.$$

解得 $x=9$ 或 $x=-1$.

所以点 P 的坐标为 $(9,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$.

练 习

1. 在同一空间直角坐标系中，画出下列各点：

$$A(-1,1,0),B(1,-1,-1),C(1,2,1).$$

2. 在第1题中，B,C 两点的横坐标均为1，直线 BC 与 x 轴在几何上有什么样的位置关系？试推广这一结论，并探究类似的问题.

3. 一个单位正方体，对称中心位于空间直角坐标系的原点，且各棱均平行于坐标轴，请画出图形，并在图中写出这个正方体各顶点的坐标.

4. 求下列两点间的距离：

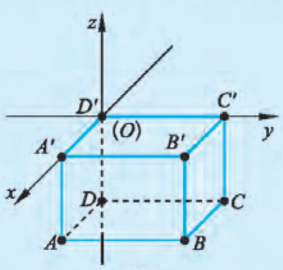
(1) $A(1,0,1),B(1,1,1)$；　　(2) $C(-3,1,5),D(0,2,3)$.

5. 在 z 轴上求一点 M，使点 M 到点 $A(1,0,2)$ 与点 $B(1,-3,1)$ 的距离相等.

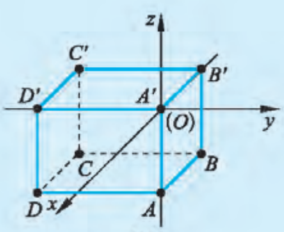
习题 3-1

A 组

1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=a,BC=b,CC'=c$，将此长方体放在空间直角坐标系中的不同位置，分别说出长方体各个顶点的坐标.



(1)



(2)

(第1题)

2. 已知点 $P(3,-2,1)$，分别写出它关于 zOx 平面、x 轴、原点的对称点的坐标.

3. 求点 $A(-3,2,-4)$ 和点 $B(-4,3,1)$ 间的距离.

4. 求点 $N(3,-2,-4)$ 到原点、各坐标轴和各坐标平面的距离.

5. 已知点 $A(1,1,2)$，指出方程 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=2$ 所表示的图形，并说明理由.

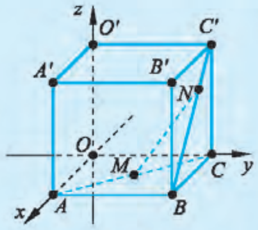
6. 已知点 $A(-1,2,3)$，$B(2,-2,3)$，$C(-1,-2,z)$.

   (1) 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时，求实数 z 的值；

   (2) $\triangle ABC$ 是否可能为钝角三角形？

B 组

1. 如图，已知正方体 $OABC$-$O'A'B'C'$ 的棱长为 a，点 M 为线段 AC 的中点，点 N 在线段 BC' 上，且满足 $|BN|=2|NC'|$，求 $|MN|$ 的长.



(第 1 题)

2. 建立合适的空间直角坐标系，在所建立的坐标系中：

   (1) 写出棱长为 1 的正四面体各顶点的坐标；

   (2) 写出底面边长为 1，高为 2 的正三棱柱各顶点的坐标.

3. 回顾解析几何解决问题的思路，写出空间两点间距离的计算步骤.

§ 2 空间向量与向量运算

2.1 从平面向量到空间向量

在必修课程中，我们曾通过力和位移引入了平面向量. 事实上，力和位移都是空间中的概念，下面将在空间中继续讨论这些问题.

在如图 3－9 的天平中，左、右两个秤盘均被 3 根细绳均匀地固定在横梁上. 在其中一个秤盘中放入质量为 1 kg 的物品，在另一个秤盘中放入质量为 1 kg 的砝码，天平平衡. 3 根细绳通过秤盘分担对物品的拉力（拉力分别为 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$），若 3 根细绳两两之间的夹角均为 $\frac{\pi}{3}$，不考虑秤盘和细绳本身的质量，则 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 的大小分别是多少？

图 3－9

与平面向量类似，在空间中，我们把具有大小和方向的量叫作**空间向量**. 向量的大小叫作向量的**长度**或**模**. 上述问题中的 3 根细绳对物品的拉力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 就是3 个空间向量，解决上述问题时就需要用到空间向量的知识.

与平面向量类似，可以定义空间向量的相关概念.

空间向量也有两种表示法. 一种用有向线段来表示. 例如，以点 A 为起点、点 B 为终点的有向线段可以表示一个向量，记作向量 $\overrightarrow{AB}$. 点 A 叫作向量 $\overrightarrow{AB}$ 的**起点**，点 B 叫作向量 $\overrightarrow{AB}$ 的**终点**. 一种用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$表示，书写用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$表示.

表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的长度也叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**长度**或**模**，用$|\boldsymbol{a}|$表示. 有向线段的方向表示向量的方向. 方向相同且模相等的向量称为**相等向量**. 正是由于这一点，数学中所研究的向量，与向量的起点无关，称之为**自由向量**. 方向相反且模相等的向量互为**相反向量**，向量 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量用$-\boldsymbol{a}$ 表示. 为方便起见，规定模为 0 的向量叫作**零向量**，记为 $\boldsymbol{0}$. 零向量的起点与终点重合，零向量的方向为任意方向.

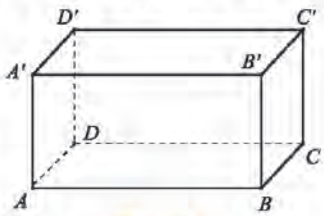


图 3－10

如图 3－10 的长方体中，有向线段$\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{DD'}$ 长度相等，方向相同，是相等向量，在数学中都表示同一向量，即

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}.$$

向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{B'A'}$ 长度相等，方向相反，互为相反向量.

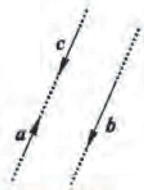


图 3－11

当表示向量的两条有向线段所在的直线平行或重合时，称这两个向量互为**共线向量**（或**平行向量**）. 相等向量和相反向量都是共线向量的特殊情况. 如图 3－11，向量 $\boldsymbol{a}$、向量 $\boldsymbol{b}$、向量 $\boldsymbol{c}$ 互为共线向量，记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$.

规定:零向量与任意向量平行.

当表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段所在直线平行于平面 α 或在平面 α 内时,就说向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 α,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\alpha$. 通常,我们把平行于同一平面的向量,叫作**共面向量**. 共线向量是共面向量的一种特例.

空间中,任意两个向量总是共面的,但任意三个向量可能是共面的,也可能是不共面的. 能平移到同一平面内的三个向量叫作**共面向量**. 例如,在图 3-10 的长方体中,向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'B'}$ 均平行于平面 $ABCD$,是共面向量,而向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ 不是共面向量.

思考交流

在平面向量的基础上研究空间向量,一个很自然的问题就是平面向量的哪些内容可以推广到空间向量. 请回顾平面向量的所有运算,并尝试填写表 3-1.

表 3-1

平面向量的运算	定　义	法　则	性　质	是否可推广到空间向量,为什么?
加法				
减法				
……				

练　习

1. 画出平行六面体的直观图,并给出共线向量、相反向量和共面向量的实例.
2. 完成本节"思考交流"中的表格.

2.2　空间向量的运算

因为空间中任意两个向量都是共面向量,所以空间中涉及两个向量的运算,都可以由平面向量的运算推广而来,而涉及三个向量的运算时,则需要结合具体情况进行分析.

一、空间向量的加减法

已知空间向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,过空间任意一点 A 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,再作向量 $\overrightarrow{AC}$,如图 3-12. 把向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作空间向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的和. 求空间向量和的运算叫作空间向量的加法. 即

$$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.}$$

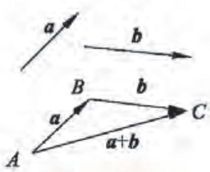


图 3-12

上述求两个空间向量和的法则,叫作**向量求和的三角形法则**.

当空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行时，过空间任意一点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$（如图 3－13），这时，$O$，$A$，$B$ 三点不共线，在平面 OAB 内，以 OA，OB 为邻边作 ▱$OACB$. 因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，所以也有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}.$$

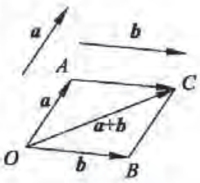


图 3－13

由此可见，平面向量求和的平行四边形法则，对空间向量同样适用. 由此可证：空间向量的加法满足交换律.

空间向量的加法是否满足结合律？

以平行六面体 $ABCD$－$A'B'C'D'$ 为例（如图 3－14）加以说明.

一方面，$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$，

另一方面，$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AC'}$，

所以 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$.

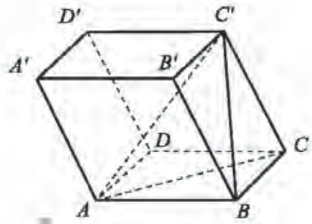


图 3－14

与平面向量的加法满足的运算律类似，空间向量的加法也满足如下的运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

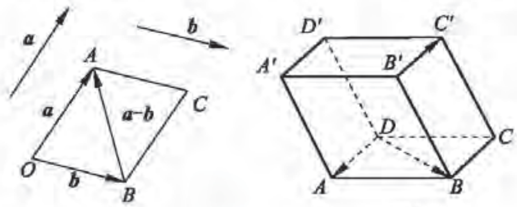
与平面向量类似，空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的差也可定义为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，其中 $-\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量.

例如，在图 3－15(1)中，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$.

在图 3－15(2)中，$\overrightarrow{DA}$ 是 $\overrightarrow{B'C'}$ 的相反向量，所以

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$.



(1) (2)

图 3－15

二、空间向量的数乘运算

与平面向量类似，实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积仍然是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 求实数与空间向量的乘积的运算称为**空间向量的数乘运算**，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度和方向满足：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

根据以上定义不难知道：对于任意一个非零向量 $\boldsymbol{a}$，当 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$时，$\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$表示与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

空间向量的数乘运算满足如下的结合律和分配律：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；
(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；
(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.
其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，$\mu\in\mathbf{R}$.

根据空间向量数乘运算的定义，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，因此，对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，若存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. 反之，由共线向量的定义，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则一定存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（其中 $|\lambda|=\left|\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right|$，若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同，则 $\lambda>0$；若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反，则 $\lambda<0$；若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=0$）. 也就是说，平面中两个向量共线的充要条件，对于空间向量同样成立.

定理 空间两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 共线的充要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

通常把这个定理称为**共线向量基本定理**.（也称**“一维向量基本定理”**）

思考交流

任意给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若存在实数 x,y，使得向量 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是否为共面向量？

例1 如图 3-16(1)，已知平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$，化简下列向量表达式，并在图中标出化简后的结果所对应的向量.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$；

(2) $\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{BC})$.

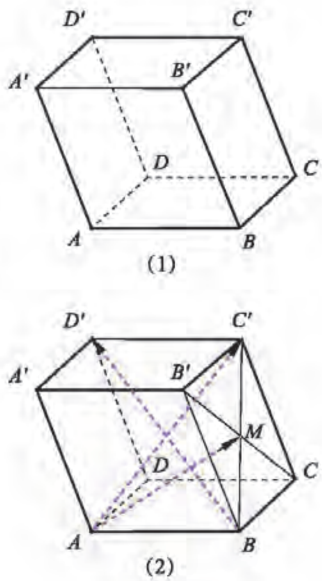


图 3-16

解 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$；

(2) $\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{BD'}$；

(3) 设点 M 为 CB' 的中点，则

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{BC})\\=&\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{BC})\\=&\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{AM}.\end{aligned}$$

化简后所对应的向量如图 3-16(2).

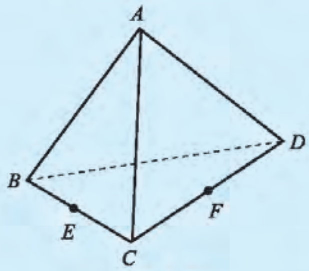
练 习

1. 如图，已知四面体 $ABCD$，点 E,F 分别是 BC,CD 的中点，化简下列表达式，并在图中标出化简后的结果所对应的向量.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$；

(3) $\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

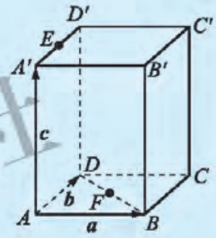


(第 1 题)

2. 化简：$\dfrac{1}{2}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})-5\left(\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)+2\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)$.

3. 如图，长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 E,F 分别是 $A'D'$ 和 BD 的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，将下列两组中相等的向量连线：

$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$	$\overrightarrow{A'C}$
$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$	$\overrightarrow{AE}$
$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$	$\overrightarrow{D'F}$
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$	$\overrightarrow{EF}$



(第 3 题)

4. 结合图形说明下列等式的正确性：

(1) $\dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{a})=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}$；

(2) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

三、空间向量的数量积

1. 两个向量的夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$(如图 3－17)，在空间中任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

通常规定

$$\boxed{0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi.}$$

在此规定下，两个向量的夹角被唯一确定，并且

$$\boxed{\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle.}$$

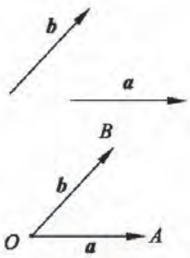


图 3－17

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同；

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反；

当$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$时，称向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

规定：零向量与任意向量垂直.

2. 两个向量的数量积

已知两个空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，把$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.}$$

与平面向量类似，空间向量的数量积也是一个实数，容易得到以下结论：

(1) $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$；

(2) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

与平面向量类似，空间向量的数量积运算也满足如下运算律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\lambda\in\mathbf{R})$.

3. 投影向量与投影数量

在平面向量中已经学习过一个向量在另一个向量方向上的投影向量及投影数量，因为任意两个空间向量一定是共面向量，所以可以把上述概念直接推广到空间向量.

如图 3－18，已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，过点 B 作直线OA 的垂线，垂足为点 B_1，称向量$\overrightarrow{OB_1}$为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的**投影向量**，其长度等于$\big||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\big|$.

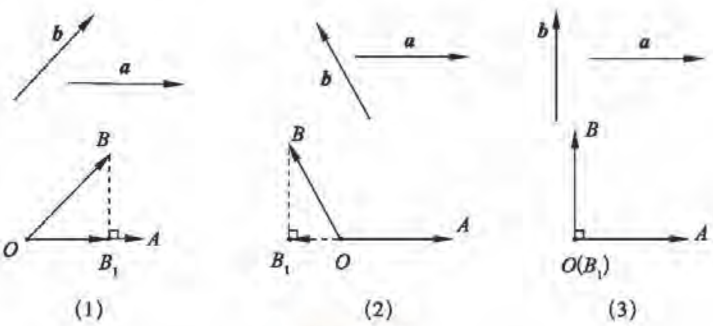


图 3－18

当$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$为锐角时，$|\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle>0$(如图 3－18(1))；

当$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$为钝角时，$|\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$(如图 3－18(2))；

当$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$时，$|\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$(如图 3－18(3)).

若用 $\boldsymbol{a}_0$ 表示与向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 同方向的单位向量，则向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为

$$\overrightarrow{OB_1}=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\ \boldsymbol{a}_0.$$

因此，称 $|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为投影向量 $\overrightarrow{OB_1}$ 的数量，简称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的**投影数量**.

结合空间向量数量积的定义可知：向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量为

$$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}.$$

例 2 如图 3－19，已知单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$.

(1) 指出向量 $\overrightarrow{CA'}$ 分别在 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CC'}$ 方向上的投影向量；

(2) 求向量 $\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影数量；

(3) 求向量 $\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影数量.

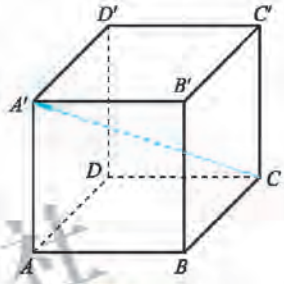


图 3－19

解 (1) 根据正方体的性质知：$A'B\perp CB$，$A'D\perp CD$，$A'C'\perp CC'$，所以向量 $\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CC'}$ 方向上的投影向量分别为 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CC'}$.

(2) 因为 $\langle\overrightarrow{CA'},\overrightarrow{CB}\rangle=\angle A'CB$，所以向量 $\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影数量为

$$|\overrightarrow{CA'}|\cos\angle A'CB=|\overrightarrow{CB}|=1.$$

(3) 因为 $\langle\overrightarrow{CA'},\overrightarrow{BC}\rangle=\pi-\angle A'CB$，所以向量 $\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影数量为

$$|\overrightarrow{CA'}|\cos(\pi-\angle A'CB)=-|\overrightarrow{CB}|=-1.$$

例 3 如图 3－20，已知四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，且 $\angle C'CB=\angle C'CD=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$，$DD'=2$. 求：

(1) $\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{DA}$； (2) $\overrightarrow{DD'}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$； (3) $|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC'}|$.

解 (1) 因为 $\angle D'DA=\angle C'CB=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DD'}||\overrightarrow{DA}|\cos\angle D'DA=1$.

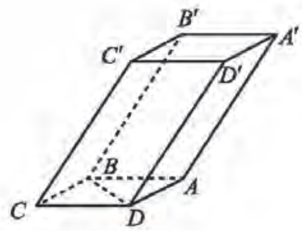


图 3－20

(2) 因为 $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}$，

而 $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{CC'}||\overrightarrow{CD}|\cos\angle C'CD=1$，

$\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CC'}||\overrightarrow{CB}|\cos\angle C'CB=1$，

所以 $\overrightarrow{DD'}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{CB}=1-1=0$.

(3) $|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC'}|=\sqrt{(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC'})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC'})}$

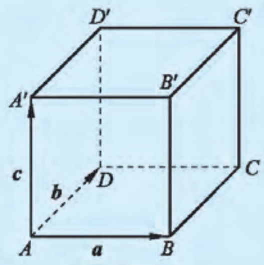
$$=\sqrt{\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{CC'}^2+2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CC'}+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CC'}}=\sqrt{11}.$$

练 习

1. 判断正误：

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量；

(2) 和向量 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量等于 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量之和.



（第 3 题）

2. 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，根据下列条件求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1$； (2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-1$；

(3) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$； (4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

3. 如图，在单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$； (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

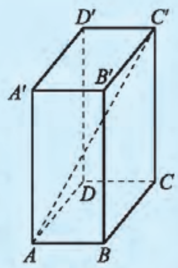
4. 棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中，点 E，F，G 分别为 AB，AD，DC 中点，求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$； (2) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}$；

(3) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}$； (4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FG}$；

(5) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG}$.

5. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，已知 $|AB|=1$，$|AD|=2$，$|AA'|=3$，分别求向量 $\overrightarrow{AC'}$ 在 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA'}$ 方向上的投影数量.



（第 5 题）

习题 3－2

A 组

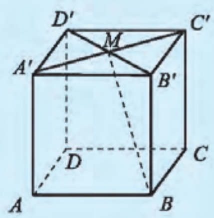
1. 已知空间任意四点 A，B，C，D，则 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=$（　　）.

A. $\overrightarrow{DB}$　　B. $\overrightarrow{AB}$　　C. $\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{BA}$

2. 在空间四边形 $ABCD$ 中，点 M，G 分别是 BC 和 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=$（　　）.

A. $\overrightarrow{AD}$　　B. $\overrightarrow{GA}$　　C. $\overrightarrow{AG}$　　D. $\overrightarrow{MG}$

3. 如图，在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 M 为 $A'C'$ 与 $B'D'$ 的交点，若 $\overrightarrow{A'B'}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A'D'}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{A'A}=\boldsymbol{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的向量是（　　）.



（第 3 题）

A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　D. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

4. 在三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 中，已知点 M,N 分别为 BB' 和 AC 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=($ $)$.

A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})$ B. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'})$

C. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB'})$ D. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$

5. 若 A,B,C,D 为空间四个两两不同的点，则下列各式为零向量的是（ ）.

① $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}$； ② $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$；

③ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}$； ④ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$.

A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ①④

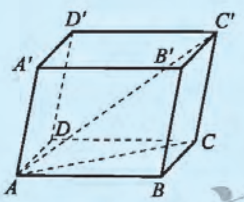
6. 根据如图的平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{BC}$；

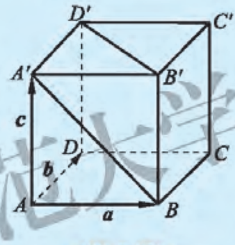
(2) $\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}$.

7. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，则 $\langle\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D'}\rangle=($ $)$.

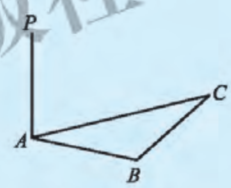
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$



(第 6 题)



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 如图，已知 $PA\perp$ 平面 ABC，垂足为点 A，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$PA=AB=BC=6$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=($ $)$.

A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. 12 D. 144

9. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是两两垂直的单位向量，则 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=($ $)$.

A. 14 B. $\sqrt{14}$ C. 4 D. 2

10. 在棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值为________.

11. 已知单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，求下列各式的值：

(1) $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}$； (2) $\overrightarrow{BD'}\cdot\overrightarrow{AC}$；

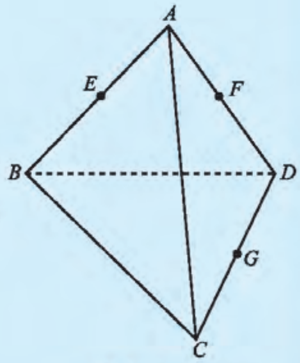
(3) $\overrightarrow{BC'}\cdot\overrightarrow{AC}$； (4) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$；

(5) $\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{BD'}$； (6) $\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{BD'}$.

12. 如图，已知棱长为 a 的正四面体 $ABCD$，点 E,F,G 分别是 AB,AD,DC 的中点，求下列向量的数量积：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$； (2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$；

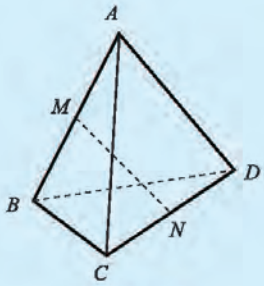
(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$； (4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$.



(第 12 题)

B 组

1. 如图，点 M，N 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 AB 和 CD 的中点，求证：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



（第 1 题）

（第 2 题）

2. 解决本节开始时的问题：在如图的天平中，左、右两个秤盘均被 3 根细绳均匀地固定在横梁上. 在其中一个秤盘中放入质量为 1 kg 的物品，在另一个秤盘中放入质量为 1 kg 的砝码，天平平衡. 3 根细绳通过秤盘分担对物品的拉力（拉力分别为 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$），若 3 根细绳两两之间的夹角均为 $\frac{\pi}{3}$，不考虑秤盘和细绳本身的质量，则 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 的大小分别是多少？

信息技术应用

利用 GeoGebra 绘制空间向量

GeoGebra 具有很多 3D 功能，但在默认的工具栏中并没有体现. 要启动 3D 绘图功能，需要在菜单栏上选择“视图”，再单击“3D 绘图区”，关闭“绘图区”后在绘图工具栏中就可以看到 3D 绘图工具了（如图 3－21）.

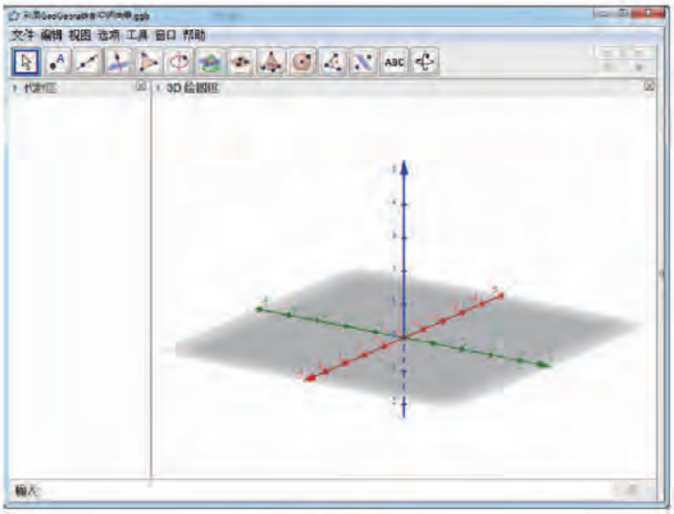


图 3－21

例如，在 3D 绘图区中画一个从点 $A(1,\ -2,\ 4)$ 到点 $B(-1,\ 3,\ 2)$ 的空间向量 $\overrightarrow{AB}$. 画图步骤如下：

(1) 在输入栏中分两次分别输入 $A=(1,\ -2,\ 4)$，$B=(-1,\ 3,\ 2)$.

(2) 在绘图区内点 A(或点 B)上单击鼠标右键，调出属性菜单，分别选择点 A 和点 B，勾选“锁定对象”选项(如图 3-22)，这样做是防止向量端点移动.

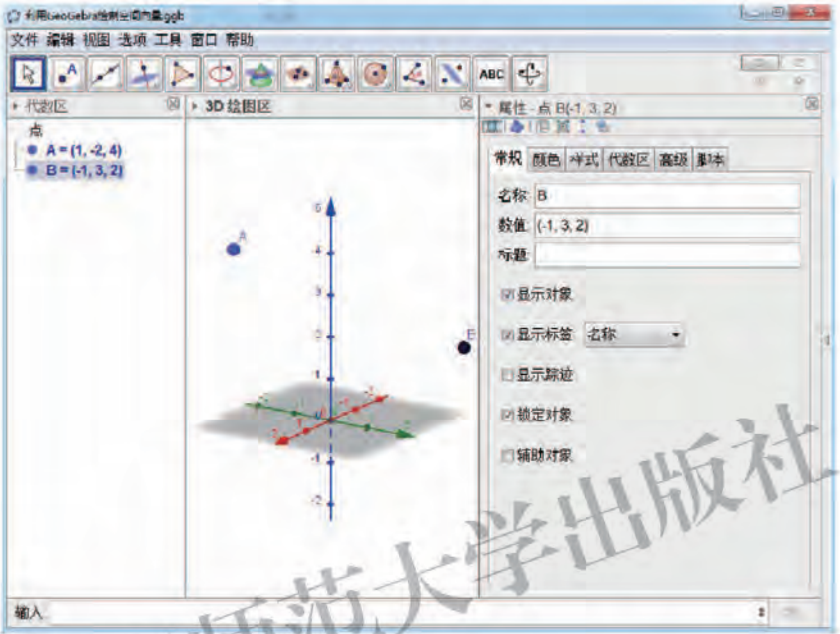


图 3-22

(3) 在图形工具栏上选择“向量”工具(如图 3-23).

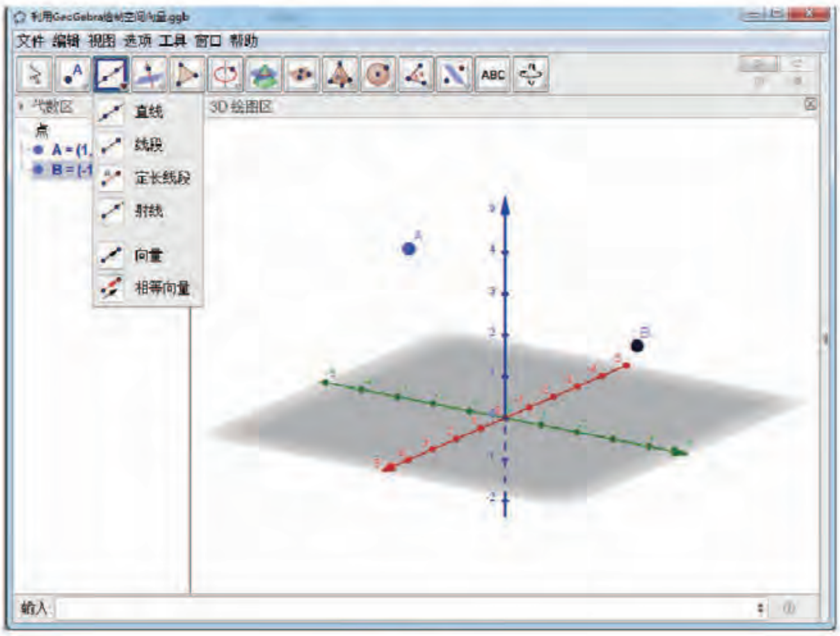


图 3-23

(4) 先单击点 A，然后单击点 B，此时在 3D 视图区出现空间向量 $\overrightarrow{AB}$(如图 3-24). 如果先选点 B 后选点 A，将会产生一个相反方向的向量(即 $\overrightarrow{BA}$).

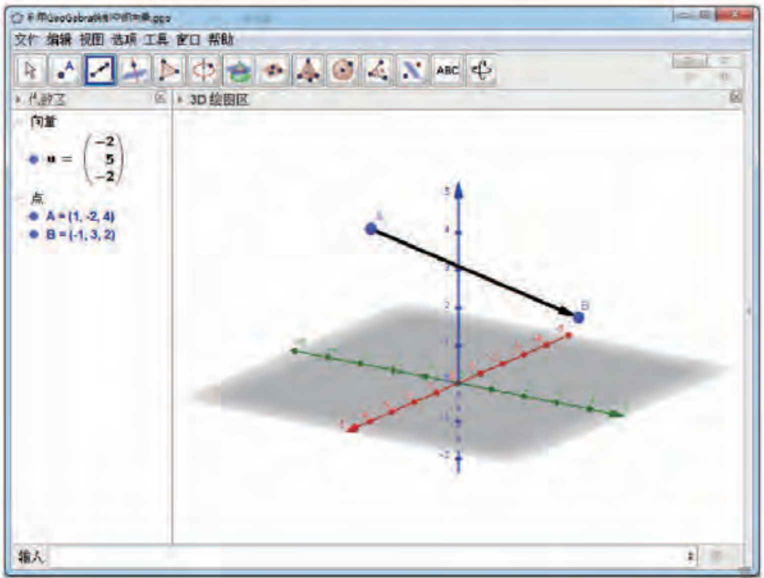


图 3-24

交互练习 试画出首尾相连的 5 个空间向量.

§ 3 空间向量基本定理及空间向量运算的坐标表示

3.1 空间向量基本定理

问题提出

在平面内，任意给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，根据平面向量基本定理，对于该平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数对(x,y)，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$. 特别地，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为直角坐标平面内的向量时，向量 $\boldsymbol{p}$ 就与坐标(x,y)建立了一一对应关系，从而将向量运算用坐标表示，简化了向量运算，为研究问题带来了极大的方便. 那么，对于空间向量，有没有类似平面向量基本定理的结论呢？如图 3－25(1)，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是空间三个不共面的向量，$\boldsymbol{p}$ 是空间任意一个向量，是否可以用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 来表示向量 $\boldsymbol{p}$？

分析理解

如图 3－25(2)，过空间任意一点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 因为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，所以 O，A，B，C 四点不共面.

作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$.

当点 P 不在直线 OC 上时，过点 P 作与 OC 平行的直线交平面 AOB 于点 Q，则 $\overrightarrow{QP}\parallel\overrightarrow{OC}$，故存在实数 z，使得 $\overrightarrow{QP}=z\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{c}$.

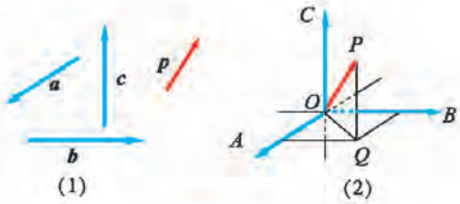


图 3－25

在平面 AOB 内，由平面向量基本定理可知：存在唯一的有序实数对(x,y)，使得

$$\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

从而，存在唯一的三元有序实数组(x,y,z)，使得

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

当点 P 在直线 OC 上，则 $\boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{c}$，故存在唯一的实数 z，使得 $\boldsymbol{p}=z\boldsymbol{c}$. 从而也存在唯一的三元有序实数组$(x,y,z)=(0,0,z)$，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

抽象概括

空间向量基本定理　如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是空间三个不共面的向量，$\boldsymbol{p}$ 是空间任意一个向量，那么存在唯一的三元有序实数组(x,y,z)，使得

$$\boxed{\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.}$$

由上述定理可知，如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是空间三个不共面向量，那么所有的空间向量组成的集合就是 $\{\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},x,y,z\in\mathbf{R}\}$，这个集合可以看成是由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 生成的，这时 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 叫作空间的一组基，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都叫作**基向量**.

空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一组基.

*下面证明空间向量基本定理中三元有序实数组的唯一性.

证明 假设还有另一个三元有序实数组 (x',y',z') 也满足 $\boldsymbol{p}=x'\boldsymbol{a}+y'\boldsymbol{b}+z'\boldsymbol{c}$，则

$$\mathbf{0}=(x-x')\boldsymbol{a}+(y-y')\boldsymbol{b}+(z-z')\boldsymbol{c}.$$

不妨设 $x\neq x'$，则

$$\boldsymbol{a}=-\frac{y-y'}{x-x'}\boldsymbol{b}-\frac{z-z'}{x-x'}\boldsymbol{c}.$$

也就是说，向量 $\boldsymbol{a}$ 可以被向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性表示，不难得出，此时向量 $\boldsymbol{a}$ 应该与向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，这与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是空间三个不共面的向量矛盾. 因此，$x=x'$. 同理可得 $y=y'$，$z=z'$.

因此，空间向量基本定理中三元有序实数组具有唯一性.

例 1 如图 3-26，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 M 是 $\square A'B'C'D'$ 的对角线的交点，点 N 是棱 BC 的中点. 如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$.

解 因为点 M 为 $\square A'B'C'D'$ 的对角线的交点，所以

$$\overrightarrow{MA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'B'})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}).$$

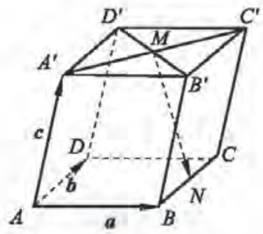


图 3-26

又 $\overrightarrow{A'A}=-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\\&=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

练 习

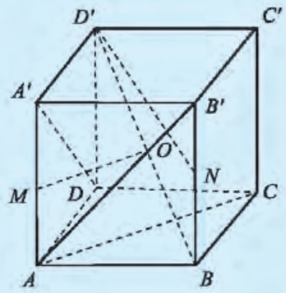
1. 空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面是否可以推出其中任意两个向量均不平行？
2. 已知空间的一组基 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.
   (1) 写出一个与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量 $\boldsymbol{c}_1$；
   (2) 写出一个与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的向量 $\boldsymbol{c}_2$；
   (3) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是否共线？是否共面？

(4) 写出一个向量 $\boldsymbol{c}_3$，使之与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 构成空间的另一组基.

3. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 M,N 分别是 $A'A$，$B'B$ 的中点，点 O 为 BD' 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示下列向量：

(1) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB'}$，$\overrightarrow{A'D}$，$\overrightarrow{D'B}$；

(2) $\overrightarrow{D'N}$，$\overrightarrow{OM}$.



(第 3 题)

4. (1) 写出 A,B,C 三点共线的一个充分条件；

(2) 写出 A,B,C,D 四点共面的一个充分条件.

3.2 空间向量运算的坐标表示及应用

一、空间向量运算的坐标表示

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，分别沿 x 轴、y 轴、z 轴正方向作单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，这三个互相垂直的单位向量就构成空间向量的一组基$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，这组基叫作**标准正交基**.

根据空间向量基本定理，对于任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，都存在唯一的三元有序实数组(x,y,z)，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

反之，任意给出一个三元有序实数组(x,y,z)，也可找到唯一的一个向量 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 与之对应. 这样，就在空间向量与三元有序实数组之间建立了一一对应的关系，把三元有序实数组(x,y,z)叫作向量 $\boldsymbol{p}$ 在标准正交基$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下的坐标，记作

$$\boxed{\boldsymbol{p}=(x,y,z).}$$

单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都叫作**坐标向量**. $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 实际上分别是向量 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 方向上所作的投影向量，x,y,z 分别是向量 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 方向上所作投影向量的数量.

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，对于空间任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，一定可以把它平移，使它的起点与原点 O 重合，得到向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$. 若点 P 的坐标为(x,y,z)，由空间向量的加法不难得出 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$（如图 3-27），于是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标也是(x,y,z).

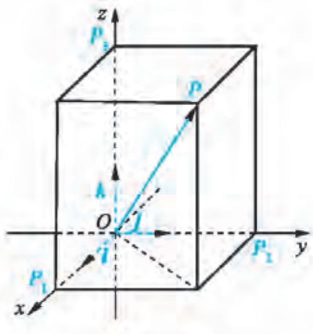


图 3-27

向量 $\boldsymbol{p}$ 的坐标恰是点 P 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标(x,y,z). 这样，我们就建立了从标准正交基到空间直角坐标系的联系.

若点 A 的坐标为(x_1,y_1,z_1)，点 B 的坐标为(x_2,y_2,z_2)，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\end{aligned}$$

也就是说：**一个向量在空间直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.**

设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，根据空间向量的运算法则，不难得到：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$；

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$；

(3) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$，$\lambda\in\mathbf{R}$；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

下面只对空间向量的数量积运算加以证明，其余的证明留给同学们自己完成. 证明过程如下：

因为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}).$$

根据向量数量积的分配律，以及

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

即可得出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1x_2)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+(x_1y_2)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+(x_1z_2)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad(y_1x_2)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+(y_1y_2)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+(y_1z_2)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad(z_1x_2)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+(z_1y_2)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+(z_1z_2)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

因此，空间两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,0)$，求：

(1) $2\boldsymbol{a}$； (2) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解 (1) $2\boldsymbol{a}=2(-1,-3,2)=(-2,-6,4)$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}&=(-1,-3,2)+2(1,2,0)\\&=(-1,-3,2)+(2,4,0)\\&=(1,1,2),\\-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=-2(-1,-3,2)+(1,2,0)\\&=(2,6,-4)+(1,2,0)\\&=(3,8,-4),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=(1,1,2)\cdot(3,8,-4)\\&=1\times3+1\times8+2\times(-4)\\&=3.\end{aligned}$$

二、空间向量平行(共线)和垂直的条件

我们知道，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\boxed{\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R},\text{使得 }\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.}$$

如果设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，那么当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\boxed{\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R},\text{使得}\begin{cases}x_1=\lambda x_2,\\ y_1=\lambda y_2,\\ z_1=\lambda z_2.\end{cases}}$$

当 $\boldsymbol{b}$ 与三个坐标平面都不平行(即 $x_2y_2z_2\neq0$)时，

$$\boxed{\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.}$$

类似地，可得

$$\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.}$$

练 习

1. 已知 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是空间的一组标准正交基，试写出这三个向量所对应的坐标.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,1)$，求：
   (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　(2) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；　(3) $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.
3. 判断下列每对向量是否平行，若平行，请将向量 $\boldsymbol{a}$ 用向量 $\boldsymbol{b}$ 表示：
   (1) $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$；　(2) $\boldsymbol{a}=(-2,-4,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$；
   (3) $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,2,2)$；　(4) $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-1,0)$.
4. 判断下列每对向量是否垂直：
   (1) $\boldsymbol{a}=(0,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$；　(2) $\boldsymbol{a}=(-2,2,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$；
   (3) $\boldsymbol{a}=(-2,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,2,-2)$；　(4) $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0,-1)$.
5. 已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，且 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{n}=x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$，若 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $x+y=$________.
6. 已知 $A(1,0,0)$，$B(2,1,2)$.
   (1) 写出一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，使得 $\boldsymbol{a}/\!/\overrightarrow{AB}$；
   (2) 写出一个向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标，使得 $\boldsymbol{b}\perp\overrightarrow{AB}$；
   (3) 写出与坐标平面垂直的一个向量的坐标；
   (4) 写出与坐标平面 xOy 平行的两个互不平行的向量的坐标.
7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,0,-1)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$，求一个向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标，使得 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$.

三、空间向量长度与夹角的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，根据空间向量运算的坐标表示，可以得到以下结论：

(1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

若点 $A(a_1,b_1,c_1)$，$B(a_2,b_2,c_2)$，则

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}.$$

(2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$.

例 3 已知空间三点 $A(1,0,0)$，$B(3,1,1)$，$C(2,0,1)$，求线段 AB 的长和 $\angle BAC$ 的大小.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,0,1)$，所以

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1+1\times0+1\times1=3,$$

$$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又因为两个向量的夹角取值范围为$[0,\pi]$，

所以$\angle BAC=\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$.

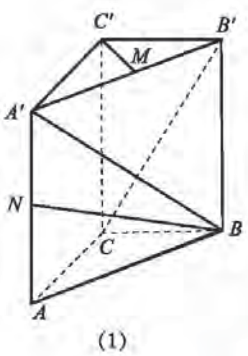
即线段 AB 的长为$\sqrt{6}$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$.

例 4 如图 3－28(1)，三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，侧棱与底面垂直，$CA=CB=1$，$\angle BCA=\dfrac{\pi}{2}$，棱 $AA'=2$，点 M，N 分别是 $A'B'$ 和 $A'A$ 的中点.

(1) 求 $|\overrightarrow{BN}|$；

(2) 求 $\cos\langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{CB'}\rangle$ 的值；

(3) 求证：$\overrightarrow{A'B}\perp\overrightarrow{C'M}$.



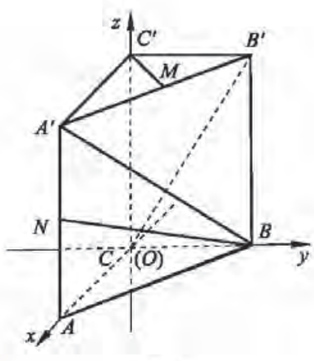


图 3－28

(1) **解** 如图 3－28(2)，以点 C 为原点，CA，CB，CC' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建

立空间直角坐标系.

由题意,得 $B(0,1,0)$, $N(1,0,1)$.

则 $$\overrightarrow{BN}=(1,-1,1),|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}.$$

(2) **解** 由题意,得 $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$, $A'(1,0,2)$, $B'(0,1,2)$.

因为 $$\overrightarrow{BA'}=(1,-1,2),\overrightarrow{CB'}=(0,1,2),$$

所以 $$|\overrightarrow{BA'}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6},$$

$$|\overrightarrow{CB'}|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5},$$

$$\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{CB'}=1\times0+(-1)\times1+2\times2=3,$$

$$\cos\langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{CB'}\rangle=\frac{\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{CB'}}{|\overrightarrow{BA'}||\overrightarrow{CB'}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

故 $\cos\langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{CB'}\rangle$ 的值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

(3) **证明** 由题意,得 $A'(1,0,2)$, $B(0,1,0)$, $C'(0,0,2)$, $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$.

因为 $$\overrightarrow{A'B}=(-1,1,-2),\overrightarrow{C'M}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),$$

所以 $$\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{C'M}=(-1)\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+(-2)\times0=0,$$

即 $$\overrightarrow{A'B}\perp\overrightarrow{C'M}.$$

练 习

1. 已知 $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$, $C(2,3,2)$, $D(0,2,3)$,写出向量 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ 的坐标,并求出它们的长度.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{b}=(-2,-4,-6)$, $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{14}$,若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=7$,则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$________.
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$, $\boldsymbol{c}=(1,0,1)$, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,求:

   (1) $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$;　　(2) $|\boldsymbol{p}|,|\boldsymbol{q}|$;　　(3) $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$;　　(4) $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\rangle$.
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,4,5)$, $\boldsymbol{b}=(3,x,y)$.

   (1) 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,求实数 x,y 的值;

   (2) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,且 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{29}$,求实数 x,y 的值.

习题 3-3

A 组

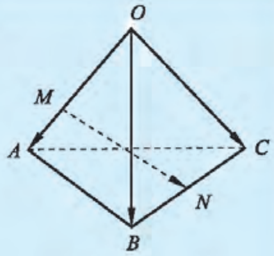
1. 已知空间的一组基 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$,若 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 共线,则 $x+y$ 的值为(　　).

   A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. 0

2. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，点 M 在 OA 上，且 $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{MA}$，点 N 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$（　　）.

A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　B. $-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$



（第 2 题）

3. 若 A,B 两点的坐标分别是 $(3\cos\alpha,3\sin\alpha,1)$，$(2\cos\theta,2\sin\theta,1)$，则 $|\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围是（　　）.

A. $[0,5]$　　B. $[1,5]$　　C. $(1,5)$　　D. $[1,25]$

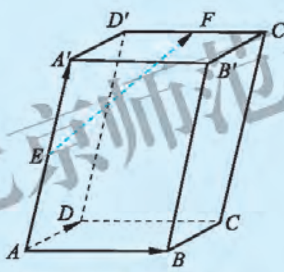
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,2,0)$，$\boldsymbol{b}=(3,2-x,x)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，则实数 x 的取值范围是（　　）.

A. $x<-4$　　B. $-4<x<0$　　C. $0<x<4$　　D. $x>4$

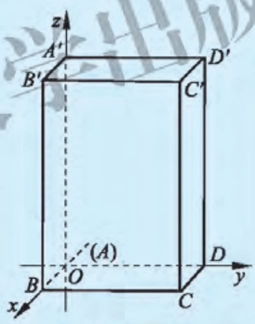
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,-y)$，$\boldsymbol{b}=(x,1,2)$，且 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\parallel(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则（　　）.

A. $x=\frac{1}{3},y=1$　　B. $x=\frac{1}{2},y=-4$　　C. $x=2,y=-\frac{1}{4}$　　D. $x=1,y=-1$

6. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 E,F 分别是棱 AA' 和 $C'D'$ 的中点，以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$ 为基表示 $\overrightarrow{EF}$.



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，$AB=1$，$BC=2$，$AA'=3$. 求：

(1) 向量 $\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{BD'},\overrightarrow{AD'}$ 的坐标；

(2) $\overrightarrow{AC'}+2\overrightarrow{BD'}$，$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BD'}-2\overrightarrow{AD'}$ 的坐标.

8. 判断下列各对向量是否平行或垂直：

(1) $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,1)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-3,2,4)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$；

(3) $\boldsymbol{a}=\left(\frac{3}{2},-3,2\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(0,1,-\frac{3}{2}\right)$.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,x)$，$\boldsymbol{b}=(y,-2,4)$.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，试求实数 x,y 的值；

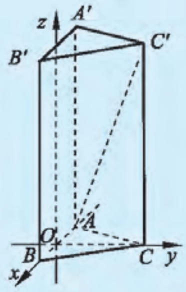
(2) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，且 x,y 均为正数，试求 xy 的最大值.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,-1)$，计算：

(1) $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　(2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

11. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(5,-2,4)$ 同方向的单位向量的坐标.

12. 如图，将正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 放在空间直角坐标系中，使得棱 AB 的中点恰为空间直角坐标系的原点 O，A，B 两点在 x 轴上，点 C 在 y 轴上，若 $AA'=2$，$AB=1$，写出 $\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BC}$ 的坐标，并求它们夹角的余弦值.



(第 12 题)

13. 已知 $A(-2,0,2)$，$B(-1,1,2)$，$C(-3,0,4)$，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$.

(1) 设 $|\boldsymbol{c}|=3$，$\boldsymbol{c}\parallel\overrightarrow{BC}$，求 $\boldsymbol{c}$ 的坐标；

(2) 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(3) 若 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，求实数 k 的值.

B 组

1. 在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，已知 BA，BC，BB' 为三条不共面的线段，若 $\overrightarrow{AC'}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{BC}+3z\overrightarrow{C'C}$，则 $x+y+z$ 的值为（　　）.

A. 1　　B. $\frac{7}{6}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{11}{6}$

2. 已知 A，B，C 三点不共线，对平面 ABC 外任意一点 O，有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，则 A，B，C，M 四点________（填“共面”或“不共面”）.

3. 判断正误：

(1) 已知向量 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一组基，则向量 $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 也是空间的一组基；

(2) 若空间中的 O，A，B，C 四点不共面，则向量 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ 是空间的一组基.

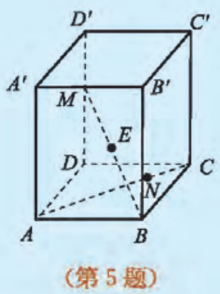
4. 如图，点 M，N 分别是棱长为 1 的正四面体 $OABC$ 的边 OA 和 BC 的中点，点 P，Q 是线段 MN 的三等分点.

(1) 用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$；

(2) 求 $|\overrightarrow{OP}|$，$|\overrightarrow{OQ}|$；

(3) 求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$.

(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 M 为 DD' 的中点，点 N 在 AC 上，且 $AN:NC=2:1$，点 E 为 BM 的中点，求证：A'，E，N 三点共线.

§ 4 向量在立体几何中的应用

前面我们已经把向量从平面推广到空间，由此认识到：向量既有长度又有方向，且能用代数方法来表达几何特征，是用代数方法研究几何问题的有效工具．本节我们将学习用向量方法解决立体几何中的一些问题．

空间向量在立体几何中的应用主要有以下三个方面：刻画基本图形，讨论位置关系，研究度量关系．

4.1 直线的方向向量与平面的法向量

在前面的学习中，我们认识到用空间向量解决立体几何问题的基本步骤是：首先将立体几何问题转化为向量问题，然后运用向量方法求解，最后再回到立体几何问题．几何特征的代数表述起着重要的作用．

我们知道，立体几何研究的基本对象是点、直线、平面，以及由它们组成的空间图形，因此用空间向量解决立体几何问题时，首先需要把点、直线、平面用向量分别表示出来．

容易想到：在空间中取一个定点 O，那么空间中任意一点 P 的位置就可以用向量$\overrightarrow{OP}$ 来表示，向量 $\overrightarrow{OP}$ 就是点 P 的位置向量．

那么如何用向量方法描述空间的一条直线、一个平面呢？

一、直线的方向向量与直线的向量表示

由两点确定一条直线可知，若给定直线上的两点，或者给定直线上的一点及这条直线的方向，则这条直线的位置也就唯一确定了．

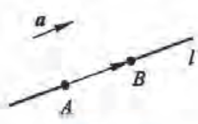


图 3－29

如图 3－29，设点 A,B 是直线 l 上不重合的任意两点，称 $\overrightarrow{AB}$ 为**直线 l 的方向向量**．显然，一条直线有无数个方向向量，根据平行向量的定义可知：这些方向向量都平行，因此与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 也是直线 l 的方向向量．

由此可见，空间中任意一条直线 l 的位置可以由直线 l 上的一个定点和该直线的方向向量唯一确定．

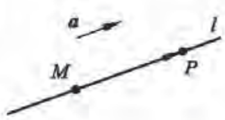


图 3－30

如图 3－30，已知点 M 是直线 l 上的一点，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 是直线 l 的一个方向向量．那么对于直线 l 上的任意一点 P，一定存在实数 t，使得

$$\boxed{\overrightarrow{MP}=t\boldsymbol{a}.}$$

反之，由几何知识不难确定，满足上式的点 P 一定在直线 l 上. 因此，我们把这个式子称为**直线 l 的向量表示**.

例 1 在空间直角坐标系中，已知点 $A(4,2,0)$，$B(1,3,3)$，点 E 是线段 AB 上的一点，且 $AE=\frac{1}{2}AB$，求点 E 的坐标.

解 设点 E 的坐标为 (x_1,y_1,z_1). 由题意可知 $\overrightarrow{AB}=(-3,1,3)$，且 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

所以
$$(x_1-4,y_1-2,z_1)=\frac{1}{2}(-3,1,3).$$

即
$$\begin{cases}x_1-4=-\frac{3}{2},\\ y_1-2=\frac{1}{2},\\ z_1=\frac{3}{2},\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x_1=\frac{5}{2},\\ y_1=\frac{5}{2},\\ z_1=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

所以点 E 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

例 2 在空间直角坐标系中，已知点 $A(1,1,0)$，$B(2,3,3)$，$C(0,1,2)$，点 D 为直线 AB 上的一点，且 $CD\perp AB$，求 $\frac{|AD|}{|AB|}$.

解 依题意知 $\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{CA}=(1,0,-2)$.

因为点 D 是直线 AB 上的一点，所以存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，则
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AB}=(1+\lambda,2\lambda,-2+3\lambda).$$

由 $CD\perp AB$，得 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，即
$$(1+\lambda)+2(2\lambda)+3(-2+3\lambda)=0.$$

解得 $\lambda=\frac{5}{14}$.

所以 $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{5}{14}$.

例 3 求证：点 P 在直线 AB 上的充要条件是对空间任意一个确定的点 O，存在实数 t 使得 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

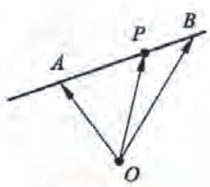


图 3-31

证明 如图 3-31，根据直线的向量表示可知点 P 在直线 AB 上等价于存在实数 t，使得 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$.

又因为$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，

所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$.

整理，得$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

练 习

1. 分别写出 x 轴、y 轴、z 轴的一个方向向量的坐标.
2. 一个质点从点 $A(1,0,1)$出发，做匀速直线运动，每秒的速度向量为 $\boldsymbol{v}=(0,1,1)$，求该质点在运动 1 s，2 s，5 s 后所在位置的坐标.
3. 已知点 $A(1,2,1)$，$B(0,1,3)$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA}$(点 O 为坐标原点)，求点 C 的坐标，并写出直线 BC 的一个方向向量的坐标.
4. 在空间直角坐标系中，已知点 $A(2,1,3)$，$B(-1,3,1)$，求直线 AB 与坐标平面 xOy 的交点 C 的坐标.

二、平面的法向量及其应用

我们已经知道，给定一点和一个方向可以唯一确定一条直线. 类似地，空间中给定一点和一条直线后，可以唯一确定过此点与这条直线垂直的平面. 因此，如果一条直线 l 与一个平面 α 垂直，那么就把直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{n}$ 叫作平面 α 的**法向量**，则 $\boldsymbol{n}\perp\alpha$.

那么如何用平面的法向量来描述平面内任意一点的位置呢?

如图 3－32，设点 M 是平面 α 内给定的一点，向量 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，那么对于平面 α 内任意一点 P，必有

$$\overrightarrow{MP}\cdot\boldsymbol{n}=0. \quad ①$$

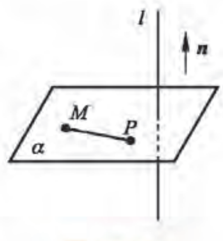


图 3－32

反过来，由立体几何知识可以证明：满足①式的点 P 都在平面 α 内，所以把①式称为平面 α 的一个向量表示式.

如图 3－33，在空间直角坐标系中，若 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，点 M 的坐标为(x_0,y_0,z_0)，则对于平面 α 内任意一点 $P(x,y,z)$，有

$$\overrightarrow{MP}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0),$$

代入①式，得

$$\overrightarrow{MP}\cdot\boldsymbol{n}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(A,B,C)=0,$$

即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad ②$$

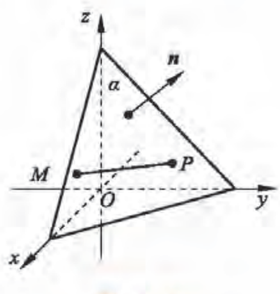


图 3－33

由此可见，平面 α 内任意一点 P 的坐标(x,y,z)都满足方程②；反之，以满足方程②的(x,y,z)为坐标的任意一点也都在平面 α 内. 所以方程②叫作平面 α 的方程.

例 4 已知点 $A(0,1,1)$，$B(1,2,1)$，$C(2,1,3)$，求平面 ABC 的一个法向量的坐标.

解 由已知可得 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 ABC 的一个法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x+y=0,\\ 2x+2z=0.\end{cases}$$

不妨取 $x=1$，得 $y=z=-1$.

所以平面 ABC 的一个法向量的坐标为 $(1,-1,-1)$.

例 5 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，已知 $AB=1$，$AD=2$，$AA'=3$.

(1) 在四边形 $BCC'B'$ 内是否存在一点 N，使得 $AN\perp$ 平面 $A'BD$？

(2) 求证：AC' 与平面 $A'BD$ 的交点恰为线段 AC' 的三等分点.

(1) **解** 以点 A 为原点，AB，AD，AA' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，如图 3-34 建立空间直角坐标系，则

$$B(1,0,0),D(0,2,0),A'(0,0,3).$$

故 $\overrightarrow{BD}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{BA'}=(-1,0,3)$.

设 $N(1,y,z)$ 是四边形 $BCC'B'$ 内一点，

则
$$0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 3,\overrightarrow{AN}=(1,y,z).$$

令
$$\begin{cases}\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BA'}=0,\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}-1+2y=0,\\ -1+3z=0.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}y=\dfrac{1}{2},\\ z=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

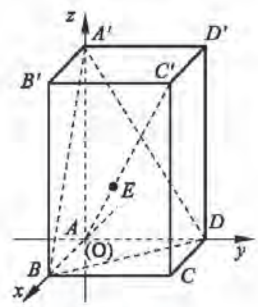


图 3-34

故在四边形 $BCC'B'$ 内存在一点 $N\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$，使得 $AN\perp$ 平面 $A'BD$.

(2) **分析** 要证明 AC' 与平面 $A'BD$ 的交点恰为线段 AC' 的三等分点，可以将直线 AC' 的方程与平面 $A'BD$ 的方程联立求得交点坐标，再验证其恰为线段 AC' 的三等分点；也可以先求出线段 AC' 三等分点的坐标，再验证其在平面 $A'BD$ 内.

证明 由(1)可知 $\overrightarrow{AN}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$ 是平面 $A'BD$ 的一个法向量；

又 $B(1,0,0)$，所以平面 $A'BD$ 的方程为

$$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\cdot(x-1,y-0,z-0)=0.$$

化简，得$(6,3,2)\cdot(x-1,y,z)=0$，

即
$$6x+3y+2z=6. \qquad ①$$

设点 E 为线段 AC' 的一个三等分点，且满足$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$.

由$\overrightarrow{AC'}=(1,2,3)$，可知$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$，即点 E 的坐标为$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$.

代入方程①检验可知，点 E 的坐标满足平面 $A'BD$ 的方程①.

所以 AC' 的三等分点 E 在平面 $A'BD$ 内，即 AC' 与平面 $A'BD$ 的交点是线段 AC' 的三等分点.

说明：(2)中只展示了第二种证明方法，第一种证明方法请同学们课下完成.

练 习

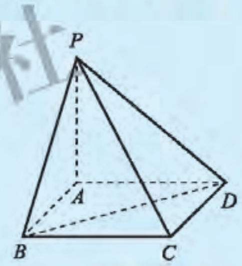
1. 分别写出 xOy 平面，yOz 平面，zOx 平面的一个法向量的坐标.
2. 已知 $A(1,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,0,2)$，求平面 ABC 的一个法向量的坐标，并在坐标平面中作出该向量.
3. 写出经过点 $A(2,0,0)$，且与 x 轴垂直的平面的方程.
4. 写出经过点 $B(1,2,3)$，且与 y 轴垂直的平面的方程.
5. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$.

   (1) 分别指出平面 PAD、平面 PAB 的一个法向量；

   (2) 若 $AB=AD=AP$，试在图中作出平面 PDC 的一个法向量；

   (3) $\triangle PBD$ 是否有可能是直角三角形？

   (4) 根据法向量判断平面 PBC 与平面 PDC 是否有可能垂直.



(第 5 题)

4.2 用向量方法研究立体几何中的位置关系

问题提出

平行和垂直是立体几何中主要的位置关系，那么如何用向量方法进行研究呢？

分析理解

因为直线的方向向量与平面的法向量是确定直线和平面位置的关键因素，所以可以利用直线的方向向量和平面的法向量表示空间直线与平面间的平行、垂直等位置关系.

设向量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$ 分别是直线 l，m 的方向向量，$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，尝试用直线的方向向量和平面的法向量表达下列各种位置关系，并思考如何用向量方法证明这些问题.

思考交流

用向量语言描述表 3－2 中的几何关系：

表 3－2

几何关系	向量语言
$l /\!/ m$	
$l /\!/ \alpha$	
$\alpha /\!/ \beta$	
$l \perp m$	
$l \perp \alpha$	
$\alpha \perp \beta$	

有的问题比较简单，只是将几何语言转化为向量语言，如证明两条直线平行可以转化为证明这两条直线的方向向量是否共线. 但有的问题较为复杂，不仅仅是几何语言与向量语言的转化，还涉及证明的方法，如用向量方法证明 $l /\!/ \alpha$，可以有以下几种思路：

思路 1　若只从直线的方向向量和平面的法向量入手考虑，设向量 $\boldsymbol{l}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}_1$ 是平面 α 的法向量，则只需证明 $\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{n}_1$.

思路 2　考虑向量与平面平行的定义，以及平面向量基本定理，从而得到如下证明方法：将直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{l}$ 用平面 α 的一组基线性表示，此时必有 $l /\!/ \alpha$.

思路 3　直接将线面平行的判定定理向量化，找到 $m \subset \alpha$，且直线 l 与 m 的方向向量共线.

由此可知，运用向量证明几何问题的方法，一方面源于立体几何中定理的向量化表述，另一方面也需要结合向量自身的特点.

设向量 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ 分别是直线 l, m 的方向向量，$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α, β 的法向量，则

$$
\boxed{
\begin{gathered}
l /\!/ m \text{ 或 } l \text{ 与 } m \text{ 重合} \Leftrightarrow \boldsymbol{l} /\!/ \boldsymbol{m};\\
l /\!/ \alpha \text{ 或 } l \subset \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{n}_1;\\
\alpha /\!/ \beta \text{ 或 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 重合} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2;\\
l \perp m \Leftrightarrow \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{m};\\
l \perp \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{l} /\!/ \boldsymbol{n}_1;\\
\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2.
\end{gathered}
}
$$

下面用向量方法证明一些立体几何中的定理.

直线与平面垂直的判定定理　如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么该直线与此平面垂直.

已知：如图 3－35(1)，a，b 是平面 α 内的两条相交直线，直线 $n\perp a$，且 $n\perp b$.

求证：$n\perp\alpha$.

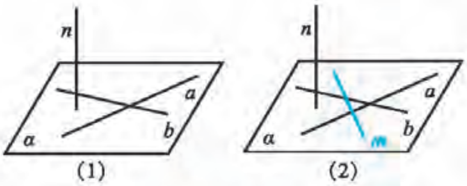


图 3－35

分析 设 m 是平面 α 内的任意一条直线. 要证明 $n\perp\alpha$，只需证明 $n\perp m$. 如何充分运用条件，表达“m 是平面 α 内的任意一条直线”呢？可以考虑将直线 m 的方向向量用平面 α 的一组基表示.

证明 设 m 是平面 α 内的任意一条直线(如图 3－35(2))，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 依次为直线 a，b，m，n 的方向向量，因为直线 a，b 相交，所以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线. 在平面 α 内，根据平面向量基本定理可知存在唯一的实数对 (x,y) 使得

$$\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b},$$

故
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}.$$

因为
$$n\perp a,\ n\perp b,$$

所以
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0,$$

所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$，故 $n\perp m$.

所以 $n\perp\alpha$.

两个平面平行的判定定理 如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，那么这两个平面平行.

已知：如图 3－36，a，b 是平面 α 内的两条相交直线，且 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$.

求证：$\alpha/\!/\beta$.

证明 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别是直线 a，b 的方向向量.

因为 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\beta$，$\boldsymbol{b}/\!/\beta$.

设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 β 的法向量，则 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$.

因为直线 a，b 是平面 α 内的两条相交直线，所以 $\boldsymbol{n}\perp\alpha$.

所以 $\alpha/\!/\beta$.

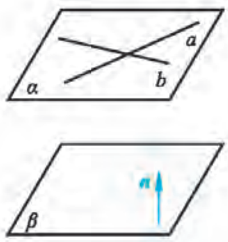


图 3－36

练习

1. 已知 $\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$ 分别为两条不重合的直线 l_1，l_2 的方向向量，判断下列各组中两条直线的位置关系是平行还是垂直：

(1) $\boldsymbol{l}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{l}_2=(-1,2,3)$；

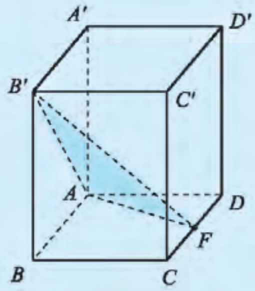
(2) $\boldsymbol{l}_1=(1,-2,0)$，$\boldsymbol{l}_2=(-1,2,0)$.

2. 已知 $\boldsymbol{l}$ 为直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，且 $l\not\subset\alpha$，判断直线 l 与平面 α 的位置关系是平行还是垂直.

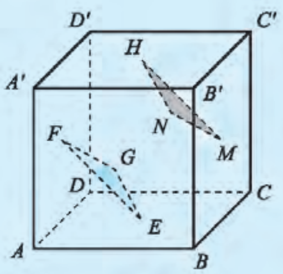
(1) $\boldsymbol{l}=(-1,1,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,4,-3)$；

(2) $\boldsymbol{l}=(-1,3,2)$，$\boldsymbol{n}=(2,-6,-4)$.

3. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，棱长 $AB=AD=2$，$AA'=3$，点 E 是平面 $BCC'B'$ 上的动点，点 F 是 CD 的中点. 试确定点 E 的位置，使 $D'E\perp$ 平面 $AB'F$.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 E,F,G,H,M,N 分别是该正方体六个面的中心，求证：平面 $EFG\mathbin{/\mkern-5mu/}$平面 HMN.

例 6 已知：如图 3－37，$AB\perp\alpha$，垂足为点 B，$AC\cap\alpha=C$，$l\subset\alpha$，且 $l\perp BC$.

求证：$l\perp AC$.

证明 设 $\boldsymbol{l}$ 是直线 l 的一个方向向量，则由 $l\perp BC$，可知 $\boldsymbol{l}\perp\overrightarrow{BC}$.

因为 $AB\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，

所以 $AB\perp l$，即$\overrightarrow{AB}\perp\boldsymbol{l}$.

又因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{l}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\boldsymbol{l}=\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{l}+\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{l}=0$.

因此 $\boldsymbol{l}\perp\overrightarrow{AC}$，即 $l\perp AC$.

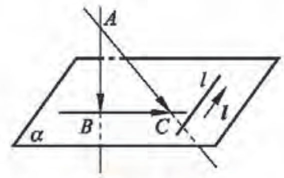


图 3－37

本例所证明的结论，通常称为**三垂线定理**. 这里，直线 BC 实际上是斜线 AC 在平面 α 内的投影.

三垂线定理 若平面内的一条直线与平面的一条斜线在这个平面内的投影垂直，则它也和这条斜线垂直.

类似地可以得到：

三垂线定理的逆定理 若平面内的一条直线和这个平面的一条斜线垂直，则它也和这条斜线在这个平面内的投影垂直.

例 7 已知:如图 3-38,直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中,$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$,$AB=AC=\sqrt{2}AA'$,点 M,N 分别为 $A'B$ 和 $B'C'$ 的中点.

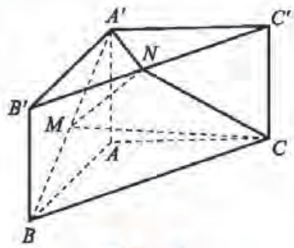


图 3-38

(1) 求证:$MN\mathbin{/\mkern-5mu/}$平面 $A'ACC'$;

(2) 求证:平面 $CMN\perp$平面 $A'MN$.

证明 由直三棱柱 $ABC-A'B'C'$,可知 $A'A\perp$平面 ABC. 又 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$,故以点 A 为原点,AB,AC,AA' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系(如图 3-39).

设 $AA'=1$,因为 $AB=AC=\sqrt{2}AA'$,所以 $A'(0,0,1)$,$B(\sqrt{2},0,0)$,$B'(\sqrt{2},0,1)$,$C(0,\sqrt{2},0)$,$C'(0,\sqrt{2},1)$.

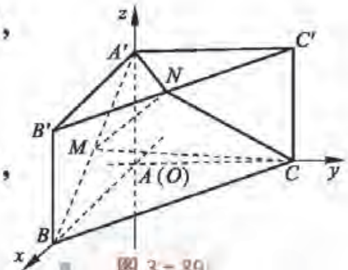


图 3-39

因为点 M,N 分别为 $A'B$ 和 $B'C'$ 的中点,所以 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$,$N\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. 故 $\overrightarrow{MN}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(1) 由图易知 $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},0,0)$ 是平面 $A'ACC'$ 的一个法向量. 又

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0,$$

所以

$$\overrightarrow{MN}\mathbin{/\mkern-5mu/}\text{平面 }A'ACC'.$$

又因为 $MN\not\subset$平面 $A'ACC'$,所以

$$MN\mathbin{/\mkern-5mu/}\text{平面 }A'ACC'.$$

(2) 依题意有 $\overrightarrow{CN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,$\overrightarrow{A'N}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 是平面 CMN 的一个法向量,则

$$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{CN},\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{MN}.$$

所以

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+z=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$$

不妨取 $y=1$,得 $z=-\sqrt{2}$,$x=3$,所以

$$\boldsymbol{n}_1=(3,1,-\sqrt{2}).$$

同理可得平面 $A'MN$ 的一个法向量

$$\boldsymbol{n}_2=(-1,1,-\sqrt{2}).$$

因为

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=3\times(-1)+1\times1+(-\sqrt{2})^2=0,$$

所以

$$\text{平面 }CMN\perp\text{平面 }A'MN.$$

练 习

1. 用向量方法证明：三垂线定理的逆定理.

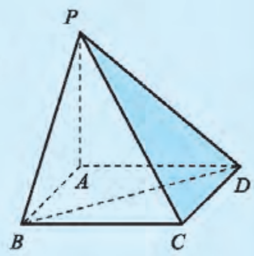
2. 已知：如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$.

(1) 所有棱中，与直线 PB 垂直的有________；

(2) $PC\perp BD$ 的一个充要条件是________；

(3) 四个侧面中，是直角三角形的有________个；

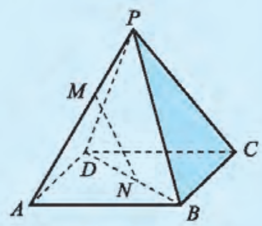
(4) 若 $AB=AD=AP$，试在图中作出平面 PDC 的一个法向量.



（第 2 题）

3. 已知：如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 所在平面外一点，点 M，N 分别是 PA 和 BD 上的点，且 $PM:MA=BN:ND=5:8$.

求证：直线 $MN\parallel$平面 PBC.

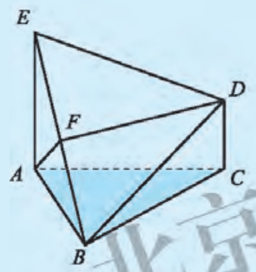


（第 3 题）

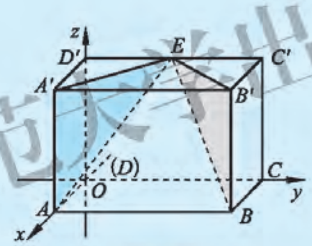
4. 已知：如图，$\triangle ABC$ 为正三角形，AE 和 CD 都垂直于平面 ABC，且 $AE=AB=2CD$，点 F 是 BE 的中点.

(1) 求证：$DF\parallel$平面 ABC；

(2) 求证：$AF\perp BD$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 已知：如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AA'=1$，点 E 是 $C'D'$ 的中点. 求证：平面 $AA'E\perp$平面 $BB'E$.

4.3 用向量方法研究立体几何中的度量关系

一、空间中的角

在必修课程中，我们学习过异面直线所成的角，直线与平面相交所成的角，以及两个平面相交所成的二面角. 那么，在空间中怎样描述这些角呢？这些角的大小与直线的方向向量、平面的法向量有何关系？

1. 两条直线所成的角

当两条直线 a 与 b 相交时，我们把两条直线交角中范围在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内的角叫作两条直线

所成的角(如图 3-40(1));

当两条直线平行时,规定它们所成的角为 0;

当两条直线 a 与 b 是异面直线时,在空间任取一点 O,过点 O 作直线 a' 和 b',使得 $a' /\!/ a$,$b' /\!/ b$,把 a',b' 所成的角叫作异面直线 a 与 b 所成的角(如图 3-40(2)).

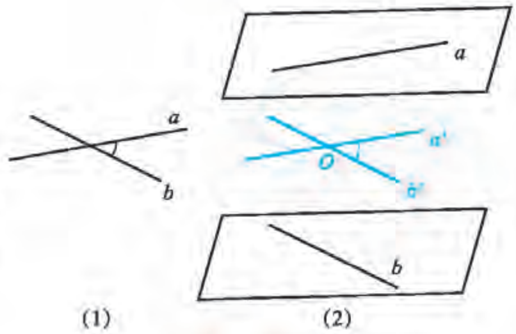


图 3-40

空间直线由一个点和一个方向确定,所以空间两条直线所成的角由它们的方向向量所成的角确定.

根据上面的定义不难得到:

若向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 分别为直线 a,b 的方向向量,则直线 a 与 b 所成的角 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,且 θ 与两个方向向量所成的角 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 相等或互补. 也就是说:

当 $0 \leqslant \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,$\theta = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$;

当 $\frac{\pi}{2} < \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leqslant \pi$ 时,$\theta = \pi - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

故 $$\boxed{\cos\theta = |\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle|.}$$

例 8 如图 3-41,在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$,$AB=2$,$BC=1$,$AA'=3$. 求 AC' 与 $A'D$ 所成角的余弦值.

解 设 $\boldsymbol{s}_1$,$\boldsymbol{s}_2$ 分别是 AC' 和 $A'D$ 的一个方向向量,取

$$\boldsymbol{s}_1 = \overrightarrow{AC'}, \boldsymbol{s}_2 = \overrightarrow{A'D}.$$

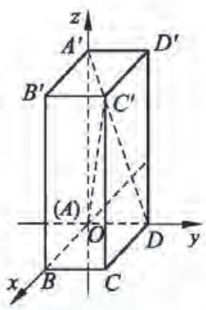


图 3-41

因为 $A(0,0,0)$,$C'(2,1,3)$,$A'(0,0,3)$,$D(0,1,0)$,

所以 $$\boldsymbol{s}_1 = \overrightarrow{AC'} = (2,1,3),$$

$$\boldsymbol{s}_2 = \overrightarrow{A'D} = (0,1,-3).$$

设 AC' 与 $A'D$ 所成角为 θ,则

$$\cos\theta = |\cos\langle \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \rangle| = \left| \frac{\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} \right| = \frac{8}{\sqrt{140}} = \frac{4\sqrt{35}}{35}.$$

故 AC' 与 $A'D$ 所成角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{35}}{35}$.

2. 直线与平面所成的角

由必修课程可知，平面的一条斜线和它在平面内的投影所成的锐角就是这条直线与这个平面所成的角. 当一条直线与一个平面平行或在这个平面内时，规定这条直线与这个平面所成角的大小为 0；当一条直线与一个平面垂直时，规定这条直线与这个平面所成角的大小为$\frac{\pi}{2}$.

由图 3－42 和图 3－43 不难看出：直线与平面所成的角和直线与平面的垂线所成的角互余.

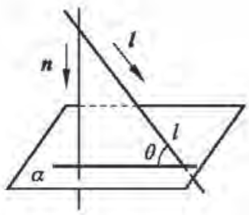


图 3－42

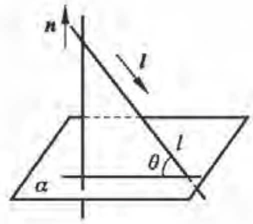


图 3－43

设向量 $\boldsymbol{l}$ 为直线 l 的一个方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，则直线 l 与平面 α 所成的角 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，且 $\theta=\frac{\pi}{2}-\langle\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}\rangle$（如图 3－42）或 $\theta=\langle\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}\rangle-\frac{\pi}{2}$（如图 3－43），故

$$\boxed{\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}\rangle|.}$$

例 9　如图 3－44，在正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，底面边长为 2，$AA'=\sqrt{5}$，求直线 AB' 与侧面 $ACC'A'$ 所成角的正弦值.

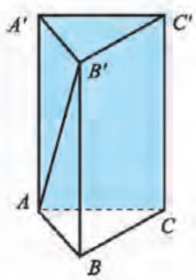


图 3－44

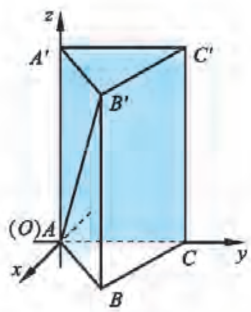


图 3－45

解　由正三棱柱知 $AA'\perp$ 平面 ABC，故以点 A 为原点，AC，AA' 所在直线分别为 y 轴、z 轴，如图 3－45 建立空间直角坐标系. 易知 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$ 是平面 $ACC'A'$ 的一个法向量.

由 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，可得 $B'(\sqrt{3},1,\sqrt{5})$.

所以 $\overrightarrow{AB'}=(\sqrt{3},1,\sqrt{5})$.

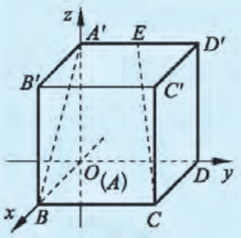
设直线 AB' 与侧面 $ACC'A'$ 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB'},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AB'}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AB'}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

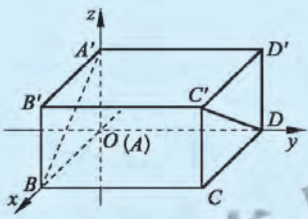
所以直线 AB' 与侧面 $ACC'A'$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

练 习

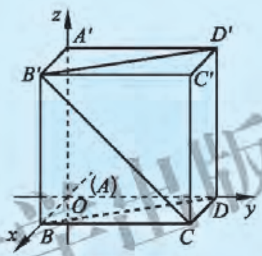
1. 如图，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，点 E 是 $A'D'$ 的中点，求直线 $A'B$ 与直线 CE 所成角的余弦值.
2. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，且 $AB=2$，$AD=2$，$AA'=1$，求异面直线 $A'B$ 与 $C'D$ 所成角的余弦值.



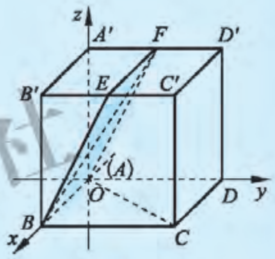
（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，且 $AB=1$，$BC=2$，$AA'=2$，求直线 $B'C$ 与平面 $B'BDD'$ 所成角的正弦值.
4. 如图，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，点 E，F 分别是 $B'C'$ 和 $A'D'$ 的中点，求直线 AC 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值.

3. 两个平面所成的角

我们知道，两个平面相交形成四个二面角，那么二面角的平面角与两个平面的法向量存在怎样的关系呢？下面选择其中一个来研究.

如图 3－46，过二面角 $\alpha-l-\beta$ 内一点 P 作 $PA\perp\alpha$ 于点 A，作 $PB\perp\beta$ 于点 B，则 $\overrightarrow{PA}$（或 $\overrightarrow{AP}$）是平面 α 的一个法向量，$\overrightarrow{PB}$（或 $\overrightarrow{BP}$）是平面 β 的一个法向量.

设平面 PAB 交直线 l 于点 O，连接 AO，BO，不难证明：$l\perp$ 平面 PAB，于是 $\angle AOB$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

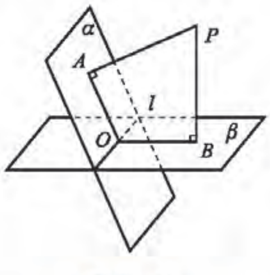


图 3－46

因为在四边形 $PAOB$ 中，$\angle PAO=\angle PBO=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\angle AOB+\angle APB=\pi$.

一般地，已知 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 α,β 的法向量，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角与两法向量所成角 $\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$ 相等（如图3-47(1)）或互补（如图 3-47(2)）.

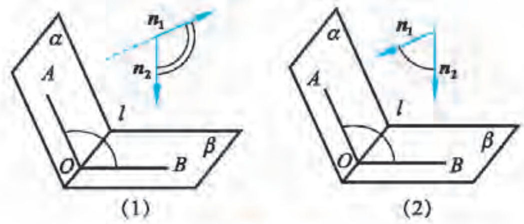


图 3-47

例 10 如图 3-48，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，求二面角 $A'-DC-A$ 的平面角.

解 由 $AA'\perp$ 平面 $ABCD$，可知 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量.

因为 $A'(0,0,1),C(1,1,0),D(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{A'D}=(0,1,-1),\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$ 是平面 $A'DC$ 的一个法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A'D}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}y-z=0,\\ x=0.\end{cases}$$

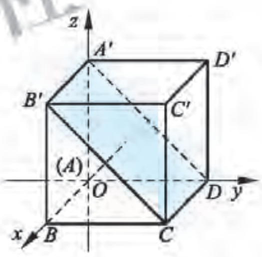


图 3-48

所以取 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$，得

$$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由图 3-48 可知二面角 $A'-DC-A$ 的平面角为锐角，因此，平面角为$\frac{\pi}{4}$.

例 11 如图 3-49，已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为$\frac{2\pi}{3}$，点 B,C 在棱 l 上，$A\in\alpha,D\in\beta,AB\perp l,CD\perp l,AB=2,BC=1,CD=3$，求 AD 的长.

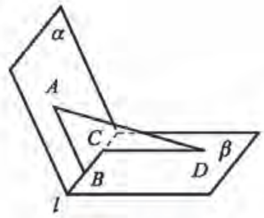


图 3-49

解 因为 $AB\perp l,CD\perp l$，二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为$\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，

$$\begin{aligned}\text{所以 }|\overrightarrow{AD}|^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

$$=2^2+1^2+3^2+2\times2\times3\times\frac{1}{2}$$

$$=20.$$

所以 $|AD|=2\sqrt{5}$.

练 习

1. 若二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ，异面直线 a，b 满足 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 $a\perp l$，$b\perp l$，则异面直线 a，b 所成的角为(　　).

A. θ　　B. $\pi-\theta$　　C. $\frac{\pi}{2}-\theta$　　D. θ 或 $\pi-\theta$

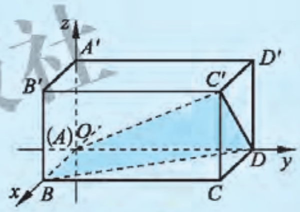
2. 在大小为 $\frac{\pi}{3}$ 的二面角的一个面内有一个点 P，若点 P 到棱的距离为 8，则点 P 到另一个面的距离为(　　).

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

3. 若在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 E 是 BB' 的中点，则二面角 $E-A'D'-D$ 的平面角的正切值为(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

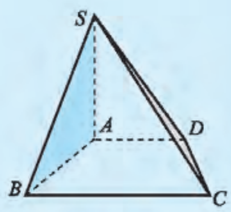
C. $\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}$



(第 4 题)

4. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，且 $AB=2$，$AD=4$，$AA'=2$，求平面 $AC'D$ 与平面 ABD 所成二面角的平面角的余弦值.

5. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD/\!/BC$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$SA=BC=AB=1$，$AD=\frac{1}{2}$，求平面 SAB 与平面 SCD 所成二面角的平面角的余弦值.



(第 5 题)

二、空间中的距离问题

问题提出

几何学中，经常需要计算两个图形间的距离. 一个图形内任一点与另一个图形内任一点的距离中的最小值，通常叫作这两个图形的距离.

空间中常见的距离有：两点间的距离、点到直线的距离、点到平面的距离、相互平行的直线之间的距离、相互平行的平面之间的距离等. 计算距离是空间度量最基本的问题，如何用向量方法求解这些距离呢？

分析理解

回顾平面内直线 l 外一点 P 到直线 l 距离的几种求解方法. 方法如下：

综合几何方法：如图 3－50(1)，过点 P 作直线 l 的垂线，垂足为点 D_1，一般转化为求三角形的高，即 PD_1 的长度.

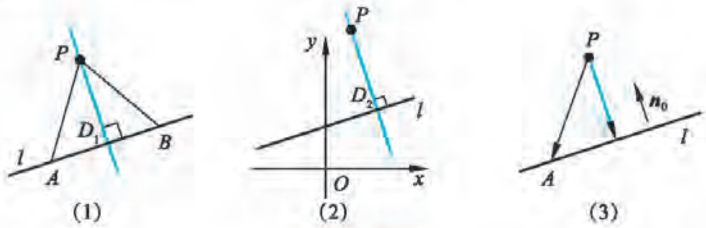


图 3－50

解析几何方法：如图 3－50(2)，确定点 P 的坐标及直线 l 的方程，利用点到直线的距离公式即可得点 P 到直线 l 的距离 PD_2 的长度.

平面向量方法：如图 3－50(3)，先求出直线 l 的单位法向量 $\boldsymbol{n}_0$，再求向量 $\overrightarrow{PA}$ 在法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 方向上的投影向量的长度 $|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}_0|$ 即可.

点到直线的距离就等于过这点向直线所引垂线段的长度；点到平面的距离就等于过这点向平面所作垂线段的长度；如果一条直线和一个平面平行，它们之间的距离就等于过这条直线上任意一点向该平面所作垂线段的长度；两个平行平面间的距离就等于这两个平面的垂线夹在两个平行平面间的线段的长度.

垂直反映了距离的本质. 用向量方法求解距离，也要抓住这一点. 无论是对于平面还是直线，法向量都是反映垂直方向的最为直观的表达形式，因此可以通过一个向量在法向量方向上作投影向量的方法来求解距离.

1. 点到平面的距离

如图 3－51，设点 P 是平面 α 外一点，点 A 是平面 α 内的已知点，$\boldsymbol{n}_0$ 是平面 α 的单位法向量.

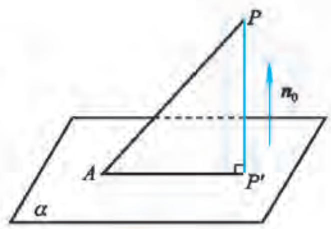


图 3－51

过点 P 作 $PP'\perp$ 平面 α，垂足为点 P'，则线段 PP' 的长度就是点 P 到平面 α 的距离，而 $\overrightarrow{PP'}\parallel\boldsymbol{n}_0$，所以向量 $\overrightarrow{PA}$ 在法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 方向上的投影向量的长度 $|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}_0|$ 就等于线段 PP' 的长度.

抽象概括

点 P 到平面 α 的距离，等于点 P 与平面 α 内任意一点 A 连线所得向量 $\overrightarrow{PA}$，在平面 α 的单位法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 方向上所作投影向量的长度，即

$$\boxed{d=|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}_0|.}$$

例 12 如图 3－52，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$.

(1) 求证：$\overrightarrow{AC'}$ 是平面 $A'BD$ 的一个法向量；

(2) 求点 C' 到平面 $A'BD$ 的距离.

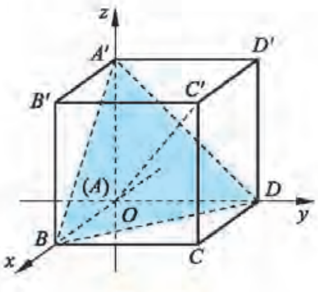


图 3－52

(1) **证明** 依据题意有

$$A'(0,0,1),B(1,0,0),D(0,1,0),C'(1,1,1).$$

因为 $\overrightarrow{AC'}=(1,1,1),\overrightarrow{A'B}=(1,0,-1),\overrightarrow{A'D}=(0,1,-1)$，

所以 $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{A'B}=(1,1,1)\cdot(1,0,-1)=0$，

$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{A'D}=(1,1,1)\cdot(0,1,-1)=0$.

从而 $$\overrightarrow{AC'}\perp\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{AC'}\perp\overrightarrow{A'D}.$$

又 $A'B,A'D\subset$ 平面 $A'BD$，$A'B\cap A'D=A'$，

所以 $\overrightarrow{AC'}\perp$ 平面 $A'BD$，即 $\overrightarrow{AC'}$ 是平面 $A'BD$ 的一个法向量.

(2) **解** 因为 $\overrightarrow{BC'}=(0,1,1)$，所以点 C' 到平面 $A'BD$ 的距离为

$$\left|\overrightarrow{BC'}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{|\overrightarrow{AC'}|}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

例 13 在单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 M 是侧面 $ABB'A'$ 的中心. 判断直线 $C'M$ 与平面 ACD' 是否平行. 若平行，请证明你的结论，并求直线 $C'M$ 到平面 ACD' 的距离；若不平行，请说明理由.

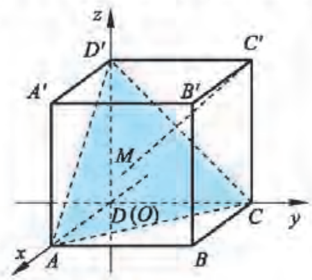


图 3－53

分析 平面 ACD' 截正方体得一个三角形，如图 3－53. 点 C' 不在该三角形内，所以 $C'M\not\subset$ 平面 ACD'. 进一步研究二者的位置关系可以考虑平面 ACD' 的法向量与 $\overrightarrow{C'M}$ 是否垂直.

解 以点 D 为原点，DA,DC,DD' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系（如图 3－53）. 由正方体的棱长为 1，得

$$A(1,0,0),C(0,1,0),D'(0,0,1),C'(0,1,1),M\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

所以 $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0),\overrightarrow{AD'}=(-1,0,1),\overrightarrow{C'M}=\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 ACD' 的一个法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD'}=-x+z=0.\end{cases}$$

取 $x=1$，得 $y=z=1$，故 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

因为 $$\overrightarrow{C'M}\cdot\boldsymbol{n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0,$$

所以 $$\overrightarrow{C'M}\,/\!/\,\text{平面 } ACD'.$$

又 $$C'M\not\subset\text{平面 } ACD',$$

所以 $$C'M\,/\!/\,\text{平面}\,ACD'.$$

因此，直线 $C'M$ 上任意一点到平面 ACD' 的距离都相等，都等于直线 $C'M$ 到平面 ACD' 的距离.

因为 $\overrightarrow{D'C'}=(0,1,0)$，
所以点 C' 到平面 ACD' 的距离为

$$\left|\overrightarrow{D'C'}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

即直线 $C'M$ 到平面 ACD' 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 14 已知向量 $\overrightarrow{OX}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{OI}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{OY}=(4,3,3)$，对任意的实数 a,b，当向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI})$ 的长度最小时，求 a,b 的值.

分析 记向量 $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI}$. 由平面向量基本定理可知，对任意的 a,b，向量 $a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI}$ 都在 $\overrightarrow{OX}$，$\overrightarrow{OI}$ 所确定的平面 xOy 内，反之，平面 xOy 内的任意向量都可以用 $a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI}$ 来表示. 换句话说，当 a,b 变化时，点 M 是平面 xOy 内的动点.

解 如图 3-54，$\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI}$，$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI})$，要使向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI})$ 的长度最小，也就是线段 MY 的长度最短.

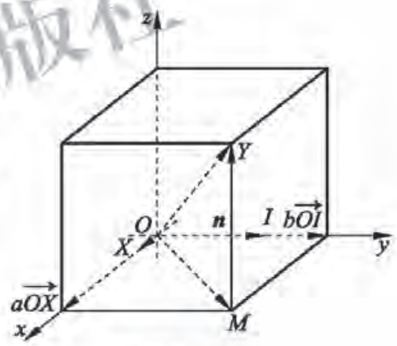


图 3-54

由点到平面距离的定义，当且仅当 $\boldsymbol{n}\perp$ 平面 xOy 时，线段 MY 的长度最短.

这时，$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OX}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OI}=0.\end{cases}$

由 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI})=(4-a,3-2b,3)$，$\overrightarrow{OX}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{OI}=(0,2,0)$，

得 $\begin{cases}(4-a,3-2b,3)\cdot(1,0,0)=0,\\ (4-a,3-2b,3)\cdot(0,2,0)=0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}4-a=0,\\ 6-4b=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=\frac{3}{2}.\end{cases}$

所以当 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{OI})$ 的长度最小时，$a=4$，$b=\frac{3}{2}$.

用向量方法求解点到平面的距离问题的一般步骤是：(1)确定一个法向量；(2)选择参考向量；(3)确定参考向量在法向量方向上的投影向量；(4)求投影向量的长度.

思考交流

怎样用向量的方法求解平行于平面的直线到该平面的距离、相互平行的两个平面间的距离?

练 习

1. 与已知平面距离等于 1 的点的轨迹是什么图形?
2. 已知直线 l 上有两点到一个平面 α 的距离都为 1,那么这条直线 l 与平面 α 的位置关系是怎样的?
3. 已知点 $M(-1,1,-2)$,平面 α 经过原点 O,且垂直于向量 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$,求点 M 到平面 α 的距离.
4. 已知三个平面两两垂直且交于点 O,若空间一点 P 到三个平面的距离分别为 2,3,6,则线段 OP 的长度为多少?
5. 在$\triangle ABC$ 中,$AB=9$,$AC=15$,$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$,$\triangle ABC$ 所在平面外一点 P 到 A,B,C 三点的距离都等于 14,那么点 P 到平面 ABC 的距离为多少?
6. 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中,点 E,F 分别是 AB 和 AD 的中点,$CG\perp$平面 $ABCD$,且 $CG=2$,求点 B 到平面 EFG 的距离.

2. 点到直线的距离

如图 3-55,设点 P 是直线 l 外一点,$\boldsymbol{l}_0$ 是直线 l 的单位方向向量,过点 P 作直线 l 的垂线,垂足为点 P',则垂线段 PP'的长度就是点 P 到直线 l 的距离. 如何求这个距离呢?

按照前面的思路,若能求出垂线段 PP'的方向向量,则可在直线 l 上任取一点 A,求$\overrightarrow{PA}$在向量$\overrightarrow{PP'}$方向上的投影向量的长度即可. 事实上,在平面向量中就是这样做的.

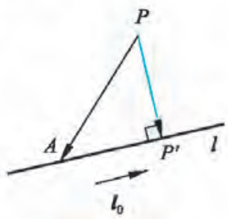


图 3-55

然而在空间中,求垂线段的方向向量较为困难. 但直线 l 的方向向量已知,所以可先求出$\overrightarrow{PA}$在 $\boldsymbol{l}_0$ 方向上的投影数量,然后在 Rt$\triangle PP'A$ 中运用勾股定理求得$|PP'|$即可.

在 Rt$\triangle PP'A$ 中,$|\overrightarrow{P'A}|=|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{l}_0|$,于是,点 P 到直线 l 的距离为

$$|PP'|=\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{P'A}|^2}=\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{l}_0|^2}.$$

抽象概括

若点 P 是直线 l 外一点,$\boldsymbol{l}_0$ 是直线 l 的单位方向向量,点 A 是直线 l 上任意一点,则点 P 到直线 l 的距离为

$$\boxed{d=\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{l}_0|^2}.}$$

*下面给出点到直线距离的一种推导方法：

如图 3－56，设点 P 是直线 l 外一定点，$\boldsymbol{l}_0$ 是直线 l 的单位方向向量，点 A 是直线 l 上任意给定的一点，如何在直线 l 上找到一点 Q，使得 $|PQ|$ 最小？

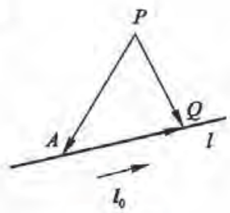


图 3－56

对于直线 l 上任意一点 Q，总存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\boldsymbol{l}_0$，于是

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{PA}+\lambda\boldsymbol{l}_0.$$

因此只需求 λ 的值，使得 $|\overrightarrow{PQ}|$ 最小即可. 因为

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+\lambda^2+2\lambda|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{l}_0|,$$

所以 $|\overrightarrow{PQ}|^2$ 是关于 λ 的二次函数，容易知道：当 $\lambda=-|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{l}_0|$ 时，$|\overrightarrow{PQ}|^2$ 最小，最小值为 $|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{l}_0|^2$. 所以点 P 到直线 l 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{l}_0|^2}$.

利用向量投影求解距离主要是运用距离的几何属性，而上述利用距离的最小性求解则主要是运用代数方法.

例 15 如图 3－57，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，$AB=1$，$BC=2$，$AA'=3$. 用向量的方法求点 B 到直线 $A'C$ 的距离.

解 依题意有 $A'(0,0,3)$，$C(1,2,0)$，$B(1,0,0)$. 所以

$$\overrightarrow{A'C}=(1,2,-3),\ \overrightarrow{BC}=(0,2,0),$$

$\overrightarrow{BC}$ 在 $\overrightarrow{A'C}$ 方向上的投影数量为

$$\overrightarrow{BC}\cdot\frac{\overrightarrow{A'C}}{|\overrightarrow{A'C}|}=\frac{4}{\sqrt{14}}.$$

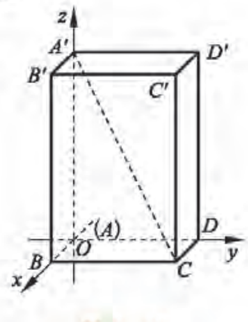


图 3－57

所以点 B 到直线 $A'C$ 的距离为

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2-\left|\overrightarrow{BC}\cdot\frac{\overrightarrow{A'C}}{|\overrightarrow{A'C}|}\right|^2}=\sqrt{4-\frac{16}{14}}=\frac{2\sqrt{35}}{7}.$$

相互平行的两条直线间的距离可以转化为一条直线上任意一点到另一条直线的距离.

练　习

1. 与已知直线距离等于 1 的点的轨迹是什么图形？
2. 已知点 $A(1,-1,2)$，直线 l 经过原点且平行于 $\boldsymbol{a}=(0,2,1)$，求点 A 到直线 l 的距离.
3. 在▱$ABCD$ 中，$AB\perp BD$，$BA=1$，$BC=\sqrt{5}$，$PA=\frac{\sqrt{5}}{5}$，且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，求点 P 到直线 BC 的距离.

习题 3-4

A 组

1. 若 $\boldsymbol{l}_1=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{l}_2=(-2,3,2)$分别为直线 l_1，l_2的一个方向向量，则(　　).

A. $l_1 /\!/ l_2$　　　　B. l_1与 l_2相交，但不垂直

C. $l_1 \perp l_2$　　　　D. 不能确定

2. 若 $\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{1}{2},-1,3\right)$，$\boldsymbol{n}_2=(-1,2,-6)$分别为平面 α，β 的一个法向量，则 (　　).

A. $\alpha /\!/ \beta$　　　　B. α 与 β 相交但不垂直

C. $\alpha \perp \beta$　　　　D. $\alpha /\!/ \beta$ 或 α 与 β 重合

3. 若 $l /\!/ \alpha$，且 $\boldsymbol{l}=(2,m,1)$为直线 l 的一个方向向量，$\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{1}{2},2\right)$为平面 α 的一个法向量，则 m 的值为(　　).

A. -4　　B. -6　　C. -8　　D. 8

4. 以下向量中，与向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,1,2)$都垂直的向量为(　　).

A. $\boldsymbol{e}=(1,7,5)$　　　　B. $\boldsymbol{f}=(1,-7,5)$

C. $\boldsymbol{g}=(-1,-7,5)$　　　　D. $\boldsymbol{h}=(1,-7,-5)$

5. 如图，在空间直角坐标系中，有正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，给出下列结论：

① 直线 DD'的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=(0,0,1)$；

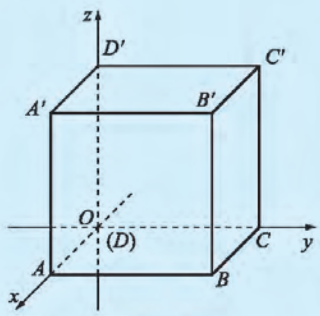
② 直线 BC'的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=(0,1,1)$；

③ 平面 $ABB'A'$的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$；

④ 平面 $B'CD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$.

其中正确的个数为 (　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



(第 5 题)

6. 下列说法不正确的是 (　　).

A. 平面 α 的一个法向量垂直于与平面 α 共面的所有向量

B. 一个平面的所有法向量互相平行

C. 如果两个平面的法向量垂直，那么这两个平面也垂直

D. 如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与平面 α 共面且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{n}$ 就是平面 α 的一个法向量

7. 若 $\boldsymbol{n}_1=(x,1,-2)$为平面 α 的一个法向量，$\boldsymbol{n}_2=\left(-1,y,\frac{1}{2}\right)$为平面 β 的一个法向量，已知 $\alpha /\!/ \beta$，则 $x+y$ 的值为________.

8. 若 $A\left(0,2,\frac{19}{8}\right)$，$B\left(1,-1,\frac{5}{8}\right)$，$C\left(-2,1,\frac{5}{8}\right)$是平面 α 内的三点，$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 α 的一个法向量，则$x:y:z=$________.

9. 已知点 P 是$\square ABCD$ 所在平面外一点，$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-4)$，$\overrightarrow{AD}=(4,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$. 给出下列结论：① $AP\perp AB$；② $AP\perp AD$；③ $\overrightarrow{AP}$ 是平面 $ABCD$ 的法向量；④ $\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{BD}$. 其中正确的是________.

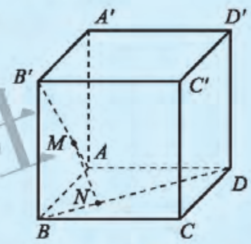
10. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，已知点 $A(1,1,1)$，平面 α 经过点 A 且与直线 OA 垂直，动点 $P(x,y,z)$是平面 α 内的任一点，则点 P 的坐标满足的条件为________.

11. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$中，直线 $A'B$ 与平面 $A'B'CD$ 所成角的大小为________.

12. 已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$的一条对角线 AC'与平面 $ABB'A'$和平面 $ADD'A'$所成的角都是 $\frac{\pi}{6}$，则直线 AC'与平面 $ABCD$ 所成的角是________.

13. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，分别写出对角面 $A'ACC'$和平面 ACB'的一个法向量.

14. 如图，在单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$中，点 M 是 AB'上的点，且 $AM=\frac{1}{3}AB'$，点 N 是 BD 上的点，且 $BN=\frac{1}{3}BD$，求 MN 的长.



(第 14 题)

15. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$中，点 E,F 分别是底面 $A'B'C'D'$和侧面 $B'C'CB$ 的中心. 求证：

(1) $AC'\perp$平面 $A'BD$；

(2) $EF/\!/$平面 $A'BD$；

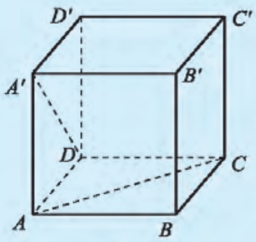
(3) 平面 $B'EF/\!/$平面 $A'BD$.

16. 如图，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$中，求异面直线 $A'D$ 与 AC 所成的角.

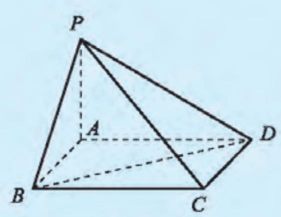
17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AP=3$，$AD=5$，$AB=4$，求下列异面直线所成角的余弦值：

(1) PB 与 CD；　(2) PC 与 AD；　(3) PC 与 BD.

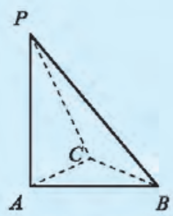
18. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp$平面 ABC，$AC\perp BC$，$CA=CB=2$，$PA=2\sqrt{3}$，求二面角 $A-BC-P$ 的大小.



(第 16 题)



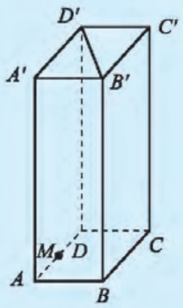
(第 17 题)



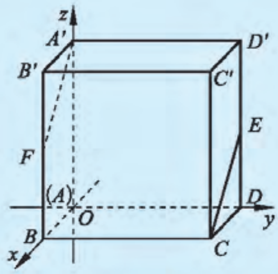
(第 18 题)

19. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB=1$，$BC=2$，$AA'=3$，点 M 是 AD 的中点，求点 M 到直线 $B'D'$ 的距离.

20. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，$AB=1$，$BC=2$，$AA'=2$，点 E，F 分别是棱 DD' 和 BB' 的中点. 求证：$CE/\!/A'F$，并求它们的距离.



(第 19 题)



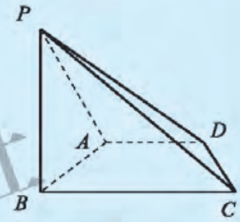
(第 20 题)

21. 已知点 $M(-1,2,3)$，平面 α 经过 $A(1,2,0)$，$B(-2,0,1)$，$C(0,2,2)$ 三点，求点 M 到平面 α 的距离.

22. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$PB\perp$ 平面 $ABCD$，$PB=5$，$AB=BC=6$，$AD=3$，求：

(1) 点 B 到平面 PCD 的距离；

(2) 二面角 $P-CD-A$ 的平面角的余弦值.



(第 22 题)

B 组

1. 已知向量 $\boldsymbol{l}$ 是直线 l 的方向向量，向量 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，则 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 是 $l/\!/\alpha$ 的什么条件？

2. 已知点 $A(-2,3,0)$，$B(1,3,2)$，点 P 在直线 AB 上.

(1) 若 $\dfrac{|AP|}{|AB|}=2$，写出点 P 的坐标；

(2) 若点 O 是坐标原点，且 $OP\perp AB$，写出点 P 的坐标.

3. 证明 $A(3,0,5)$，$B(2,3,0)$，$C(0,5,0)$，$D(1,2,5)$ 四点共面，你能给出几种证明方法？

4. 已知正四面体的棱长为 2.

(1) 求顶点到底面的距离；

(2) 求侧棱与底面所成角的正弦值；

(3) 求侧面与底面所成二面角的平面角为锐角时的余弦值.

5. 已知平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的各棱长均为 1，且 $\angle A'AB=\angle A'AD=\angle BAD=\frac{\pi}{3}$.

(1) 求证：$AA'\perp BD$；

(2) 求对角线 AC' 的长.

阅读材料

异面直线间的距离

设直线 a,b 异面,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 分别为它们的一个方向向量,如何求出这两条异面直线间的距离呢?

如图 3-58,过直线 a 上任意一点 A 作 $b'/\!/b$,过直线 b 上任意一点 B 作 $a'/\!/a$,则 $a\cap b'=A$,$a'\cap b=B$,于是 a 与 b',a' 与 b 均可确定一个平面,依次记作 α,β. 由立体几何的知识可以证明:平面 α,β 均由直线 a,b 唯一确定,与点 A,B 的位置无关,且 $\alpha/\!/\beta$. 于是,异面直线 a,b 的距离就转化为平行平面 α,β 的距离,故只需先求出这两个平行平面的法向量,再求 $\overrightarrow{AB}$ 在此法向量上的投影向量的长度即可.

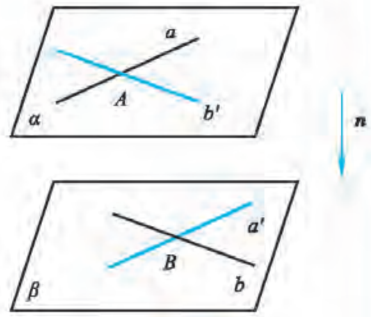


图 3-58

如何求这两个平行平面的法向量呢?

设 $\boldsymbol{n}$ 是平行平面 α,β 的一个法向量,显然有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$. 因为向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 不共线,所以满足这个条件的所有向量都平行. 也就是说,只需找到与向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 均垂直的向量即可.

如图 3-59,设点 A,B 分别是异面直线 a,b 上任意一点,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 分别是直线 a,b 的方向向量,向量 $\boldsymbol{n}$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 均垂直的向量,则异面直线 a,b 的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|.$$

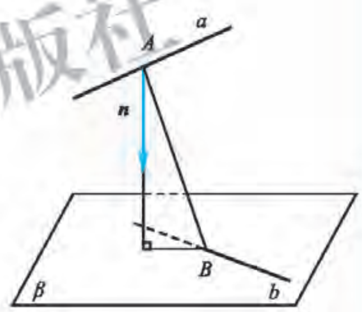


图 3-59

§ 5 数学探究活动(一):正方体截面探究

实例分析

用一个平面去截正方体,能否截出直角三角形呢?

结论:不能.

分析 用一个平面去截正方体,如果三角形截面的三边在正方体共顶点的三个面上,那么三个顶点在正方体的三条棱上,如图 3-60 中的 $\triangle ABC$. 因为 $\triangle ABD$ 是直角三角形,由勾股定理有 $BD^2+AD^2=AB^2$,又 $BC>BD$,$AC>AD$,所以 $BC^2+AC^2>AB^2$,即 $\triangle ABC$ 不是直角三角形.

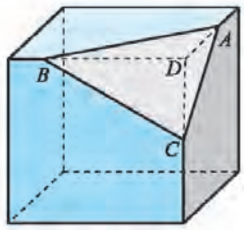


图 3-60

因为上述 $\triangle ABC$ 是任意截得的三角形截面,所以用一个平面去截正方体,不能截出直角三角形.

课堂探究

用一个平面去截正方体,并在正方体中画出所有可能的截面示意图.

(1) 如果截面是三角形,你认为可以截出几类不同的三角形(分别按边、角分类)? 为什么?

(2) 指出最大面积的三角形截面,并说明理由.

(3) 你认为可以截出几类不同的四边形? 为什么?

(4) 能否截出正五边形? 为什么?

(5) 是否存在正六边形的截面? 为什么?

(6) 边数最多的截面是几边形? 为什么?

探究建议

(1) 成立探究小组,一起讨论研究,集思广益.

(2) 可以利用计算机作图软件协助,也可以直接做模型,甚至切萝卜块来探究.

(3) 大胆猜想,小心求证.

(4) 梳理探究的结果,撰写一个报告.

思考交流

发现和提出在截正方体时的其他有意义的问题,并研究解决.

习题 3－5

1. 不同的凸多面体中的顶点数 V、棱数 E、面数 F 之间的关系有什么规律吗？

(1) 请完成下表.

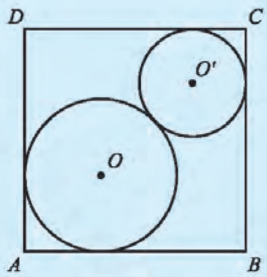
常见的凸多面体顶点数 V、棱数 E、面数 F 的实验观察记录表

所选多面体	顶点数 V	棱数 E	面数 F	形成猜想
正四面体				
正方体				
正八面体				
正十二面体				
正二十面体				
三棱柱				
五棱锥				
六棱台				
自选观察体一				
自选观察体二				

(2) 提出猜想，写出明确结论.

(3) 收集阅读相关资料，完善对问题的理解.

2. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，在其内部的两圆圆 O 与圆 O' 互相外切，并且圆 O 与 AB，AD 两边相切，圆 O' 与 CB，CD 两边相切.



(第 2 题)

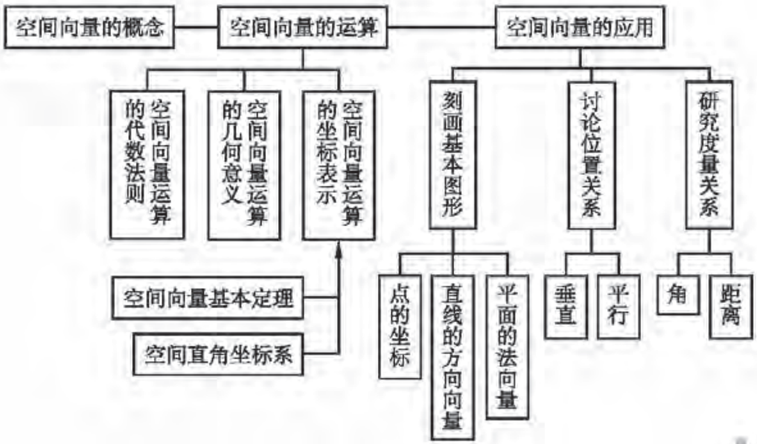
(1) 求这两圆的半径之和.

(2) 当两圆半径各为多少时，两圆面积之和最小？当两圆半径各为多少时，两圆面积之和最大？并证明你的结论.

(3) 如果把题中的正方形改成单位正方体，把圆改成球，你能得到什么结论？并说明理由.

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

本章的学习，可以帮助同学们在学习平面向量的基础上，利用类比的方法理解空间向量的概念、运算、基本定理和应用，体会平面向量和空间向量的共性和差异；运用向量的方法研究空间基本图形的位置关系和度量关系，体会向量方法和综合几何方法的共性和差异；运用向量方法解决简单的数学问题和实际问题，感悟向量是研究几何问题的有效工具.

1. 空间直角坐标系

(1) 在平面直角坐标系的基础上，了解空间直角坐标系，感受建立空间直角坐标系的必要性，会用空间直角坐标系刻画点的位置.

(2) 借助特殊长方体(所有棱分别与坐标轴平行)顶点的坐标，探索并得出空间两点间的距离公式.

2. 空间向量及其运算

(1) 经历由平面向量推广到空间向量的过程，了解空间向量的概念.

(2) 经历由平面向量的运算及其法则推广到空间向量的过程.

3. 向量基本定理及坐标表示

(1) 了解空间向量基本定理及其意义，掌握空间向量的正交分解及其坐标表示.

(2) 掌握空间向量的线性运算及其坐标表示.

(3) 掌握空间向量的数量积及其坐标表示.

(4) 了解空间向量投影的概念及其投影向量的意义.

4. 空间向量的应用

(1) 能用向量语言描述直线和平面，理解直线的方向向量与平面的法向量.

(2) 能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角以及垂直与平行关系.

(3) 能用向量方法证明必修课程中有关直线、平面位置关系的判定定理.

(4) 能用向量方法解决点到直线、点到平面、相互平行的直线、相互平行的平面的距离问题和简单夹角问题,并能描述解决这一类问题的算法,体会向量方法在研究几何问题中的作用.

三、需要关注的问题

1. 空间向量与平面向量在概念、运算、坐标表示等方面有哪些异同点？向量的坐标与向量的投影有什么关系？

2. 什么是直线的方向向量？什么是平面的法向量？如何计算平面的法向量？如何用向量刻画直线？如何用向量刻画平面？

3. 如何用向量刻画空间直线与直线的垂直和平行关系？如何用向量刻画空间直线与平面的垂直和平行关系？如何用向量刻画空间平面与平面的垂直和平行关系？

4. 如何用向量刻画空间直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角？

5. 空间中常见的距离有哪些？如何用向量求解这些距离？

复习题三

A 组

1. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a，对角线 AC' 与 BD' 相交于点 O，则有(　　).

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}=a^2$　　B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}=\sqrt{2}a^2$

C. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}a$　　D. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA'}=a^2$

2. 已知点 $A(2,4,0)$，$B(1,3,3)$，且满足 $2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QB}$，则点 Q 的坐标为(　　).

A. $\left(\frac{11}{3},\frac{5}{3},1\right)$　　B. $\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},1\right)$　　C. $\left(\frac{5}{3},1,0\right)$　　D. $(1,0,1)$

3. 如果 $A(1,5,-2)$，$B(2,4,2)$，$C(a,3,b+2)$ 三点在同一直线上，那么 $a=$________，$b=$________.

4. 某潜艇为躲避反潜飞机的侦察，紧急下潜 50 m 后，以 15 km/h 的速度沿北偏东 45°前行 5 min，后又以 10 km/h 的速度沿北偏东 60°前行 8 min，最后摆脱了反潜飞机的侦察. 试画出潜艇整个过程的位移示意图.

5. 某飞机通过雷达发现在其下方 500 m 空域，北偏东 60°方位，距离 3 000 m 处有另一架飞机正在飞行，试用向量画出两架飞机的相对位置.

6. 已知点 $A(1,1,-1)$，$B(1,0,1)$，$C(0,1,2)$，$D(-1,2,1)$，求：

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$；　　(2) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$；

(3) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|$.

7. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是两两垂直的单位向量，求：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量；　　(4) $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\rangle$.

8. 已知 A，B，C，D，E 为五个不共面的点，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$，则 A，C，D，E 四点共面. 这个命题正确吗？说明理由.

9. 点 A，B 为空间中两个不同的点，且 $AB=1$，满足条件 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$ 的点 M 的轨迹是什么图形？

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,1)$，计算：

(1) $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|-3\boldsymbol{a}|$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　(2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；

(3) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $-3\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量.

11. 已知直线 l 经过点 $A(1,2,3)$，且平行于 x 轴，求直线 l 上满足 $|\overrightarrow{AP}|=1$ 的点 P 的坐标.

12. 已知直线 l 经过 $A(-2,1,1)$，$B(1,0,-3)$ 两点，求直线 l 上一点 P，使得 $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}$.

13. 判断下列点 P 是否在直线 l 上：

(1) 点 $P(3,-3,1)$，直线 l 经过 $A(-1,1,1)$ 和 $B(1,-1,1)$ 两点；

(2) 点 $P(1,-2,-1)$，直线 l 经过 $A(-1,-4,1)$ 和 $B(2,1,2)$ 两点.

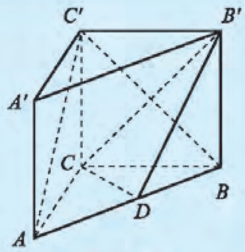
14. 已知直线 l_1 经过点 $P_1(-1,2,3)$，平行于向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,-1,2)$，直线 l_2 经过点 $P_2(1,-2,0)$，平行于向量 $\boldsymbol{s}_2=(0,1,1)$，求与两直线 l_1，l_2 都平行的平面 α 的一个法向量的坐标.

15. 已知直线 l 经过点 $P_0(1,0,-1)$，平行于向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,1)$，求经过直线 l 和点 $A(1,2,3)$ 的平面的一个法向量的坐标.

16. 如图，在直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，$AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，$AA'=4$，点 D 是 AB 的中点. 求证：

(1) $AC\perp BC'$；

(2) AC' // 平面 CDB'.



(第 16 题)

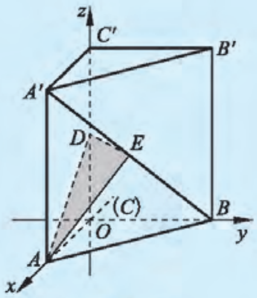
17. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 E，F 分别为棱 $D'C'$，$B'C'$ 的中点. 求：

(1) 异面直线 AD' 与 EF 所成的角；

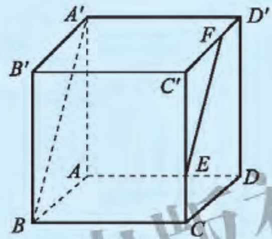
(2) 直线 AC 与平面 EFC 所成角的正弦值；

(3) 平面 EFC 与底面 $ABCD$ 所成二面角的平面角为锐角时的正切值.

18. 如图，在空间直角坐标系中有直三棱柱 $ABC-A'B'C'$，底面是等腰直角三角形，$AB=2$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，侧棱 $AA'=2$，点 D，E 分别是 CC' 和 $A'B$ 的中点，求点 A' 到平面 AED 的距离.



(第 18 题)



(第 19 题)

19. 如图，在单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 E 为 CC' 上一点，且 $2CE=EC'$，在面 $CDD'C'$ 内作 EF // $A'B$ 交 $C'D'$ 于点 F，求直线 EF 与 $A'B$ 的距离.

B 组

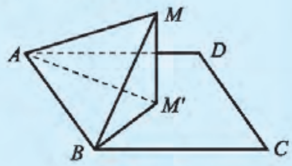
1. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，已知 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D(1,1,\sqrt{2})$. 若 S_1，S_2，S_3 分别是三棱锥 $D-ABC$ 在 xOy，yOz，zOx 坐标平面上的正投影图形的面积，则（　　）.

A. $S_1=S_2=S_3$　　B. $S_2=S_1$，且 $S_2\neq S_3$

C. $S_3=S_1$，且 $S_3\neq S_2$　　D. $S_3=S_2$，且 $S_3\neq S_1$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,0,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,-1,2)$，判断它们是否平行于同一个平面.

3. 如图，$\triangle ABM$ 在平面 $ABCD$ 上的投影为 $\triangle ABM'$，θ 为平面 ABM 与底面 $ABCD$ 所成二面角的平面角中的锐角. 证明：$S_{\triangle ABM}\cdot\cos\theta=S_{\triangle ABM'}$.



(第 3 题)

4. 已知三棱锥的底面是两条直角边长分别为 6 cm 和 8 cm 的直角三角形，各侧面与底面所成二面角的平面角均为 $\frac{\pi}{3}$，求该三棱锥的高.

5. 已知平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的底面是边长为 3 的正方形，棱 $AA'=5$，且 $\angle BAA'=\angle DAA'=\frac{\pi}{3}$. 求：

(1) 棱 AA' 与底面 $ABCD$ 所成角的大小；

(2) 这个平行六面体的体积.

第四章

4 数学建模活动（三）

本章将提供比较完整的、利用建模的过程和方法解决问题的实例，请同学们着重关注解决实际问题的过程和步骤.

§1 数学建模实例

在必修课程中，我们已经学习并实践了数学建模活动，在这里再研究一个实际的问题.

一、实际情境

日常洗衣服都要经历两个阶段，第一阶段是用去污剂搓洗衣服，第二阶段是漂洗衣服.一般来讲要漂洗多次，漂洗的次数越多衣服越干净.

二、提出问题

在给定漂洗所用的清水量的前提下，漂洗多少次能使衣服干净？

三、相关因素分析及假设

影响漂洗衣服干净程度的因素有：漂洗前衣服上残留的污物量，用于漂洗衣服的清水量，漂洗的次数，每次漂洗用的清水量，每次漂洗后衣服上残留的污物量.

假设：

1. 漂洗所用的清水总量是定值，记为 A kg；
2. 共漂洗 $n(n\in \mathbf{N}_+)$ 次，每次漂洗所用的清水量相等，记为 a kg；
3. 初次漂洗之前衣服上的污物量记为 m_0 kg，第 $i(1\leqslant i\leqslant n$，且 $i\in \mathbf{N}_+)$ 次漂洗后，将衣服拧干，衣服上残留污物量记为 m_i kg；
4. 每次漂洗拧干后，衣服上留有的清水量相等，记为 b kg；
5. 每次漂洗，衣服上残留的污物可均匀地溶解在水中；
6. 为了使衣服上的污物能均匀地溶解在水里，每次漂洗时存在用水最小量，记为 c kg；
7. 衣服上的残留污物量小于 ε kg，则称衣服被漂洗干净了.

四、建立模型

第 1 次漂洗前，衣服上有污物 m_0 kg，衣服上留有的清水量 b kg.

第 1 次漂洗时加入清水 a kg，此时 m_0 kg 污物均匀地溶解在 $(a+b)$ kg 清水里，漂洗拧干后，衣服上残留的污物量为 m_1 kg，满足 $\frac{m_1}{b}=\frac{m_0}{a+b}$，即 $m_1=\frac{m_0}{1+\frac{a}{b}}$. 进而可得

$$m_2=\frac{m_1}{1+\frac{a}{b}}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a}{b}\right)^2}.$$

同理

$$m_n=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{A}{nb}\right)^n}.$$

另外,由假设可知,$a \geqslant c$,即 $n \leqslant \frac{A}{c}$.

于是,问题转化为只需要求同时满足$\frac{m_0}{\left(1+\frac{A}{nb}\right)^n}<\varepsilon$ 和 $n \leqslant \frac{A}{c}$的 n 值即可. 通过对 n 赋值,得到符合条件的 n 值,即得结果.

事实上,为了保证有解,应当满足条件$\frac{m_0}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^{\left[\frac{A}{c}\right]}}<\varepsilon$,其中$\left[\frac{A}{c}\right]$表示不超过$\frac{A}{c}$的最大整数.

五、检验

由模型得出的结论可通过实际检测得到(略).

以上过程是一个完整的数学建模活动过程. 在这之后,我们还可以做进一步的工作,比如:

1. 改进已有模型,可通过改进假设,建立新的模型,使新的模型更接近实际.
2. 讨论模型的特征,扩大模型的适用范围,以解决更多的问题.
3. 深入分析实际情境,提出新的问题,进行新问题解决的数学建模活动.

在上面的数学建模活动中,做了模型的假设:每次漂洗所用的清水量相等,在本节开始还提及:漂洗的次数越多衣服越干净. 现在,不禁要问:

(1) 如果每次漂洗所用的清水量不相等,结果又怎样呢?

(2) “漂洗的次数越多衣服越干净”的结论正确吗?

在这里只讨论问题(1):

为了简单起见,只讨论漂洗 2 次,设 2 次所用的清水量分别为 a_1 kg,a_2 kg,且 $a_1+a_2=A$,A 是定值,比较 $a_1=a_2$ 和 $a_1 \neq a_2$ 的漂洗效果.

在漂洗所用的清水量不相等($a_1 \neq a_2$)时,

$$m_2=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{b}\right)\left(1+\frac{a_2}{b}\right)}.$$

我们希望 m_2 尽可能地小,即$\left(1+\frac{a_1}{b}\right)\left(1+\frac{a_2}{b}\right)$尽可能地大. 由基本不等式,得

$$\left(1+\frac{a_1}{b}\right)+\left(1+\frac{a_2}{b}\right) \geqslant 2\sqrt{\left(1+\frac{a_1}{b}\right)\left(1+\frac{a_2}{b}\right)},$$

即$\left(1+\frac{a_1}{b}\right)\left(1+\frac{a_2}{b}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{a_1}{b}\right)+\left(1+\frac{a_2}{b}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\left(2+\frac{a_1+a_2}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left(2+\frac{A}{b}\right)^2$.

因为这里的 $\frac{1}{4}\left(2+\frac{A}{b}\right)^2$ 是定值，所以当且仅当 $1+\frac{a_1}{b}=1+\frac{a_2}{b}$，即 $a_1=a_2$ 时，$\left(1+\frac{a_1}{b}\right)\left(1+\frac{a_2}{b}\right)$取得最大值. 这说明，在只漂洗 2 次的情况下，所用的清水量相等的漂洗效果最佳.

一般地，在用水总量和漂洗次数都相同的情况下，等量用水漂洗比不等量用水漂洗下的最后残留污物量要少.

思考交流

经验告诉我们，漂洗的次数越多衣服越干净，能给出数学的解释吗？为了简单起见，只比较平均用水共漂洗 2 次比漂洗 1 次要好.

习题 4－1

1. 通过检索网上资料或请家长、老师帮助通过实验收集相关数据，探索车辆的运行速度和刹车距离之间的关系，并对行车安全提出建议.
2. 探索个人所得税起点的变化和应纳税额与收入的关系. 通过相应的数学描述写出不同收入应缴纳的不同税额，并由纳税额推算纳税者收入的范围.
3. 完善在必修课程中自选问题所做的数学建模，准备参加结题会.

§ 2 数学建模结题交流

2.1 重温“结题”

“结题”是研究小组向老师和同学们报告研究成果、进行答辩的过程，一般来讲，结题会是结题的基本形式.

参加结题会要注意以下事项：

(1) 报告人(或报告团队)预先整理好显示成果的数据、软件、模型、文字报告、照片、视频或实物等，准备好报告提纲、报告用幻灯片(PPT). 报告都是限时的，要突出重点、特点、亮点和创新点.

(2) 报告人(或报告团队)以积极、认真的态度投入答辩，以平和的心态接受大家的质询和评价.

(3) 参加结题会的每一个人都要仔细聆听报告人的演讲，欣赏他人的建模成果，审视研究过程，评判研究结论；捕捉要点，理出质疑点，深入参加讨论.

结题会上的各方发言要紧紧围绕数学建模的几个环节展开.

2.2 整理数学建模研究成果

一、撰写数学建模研究报告

论文(也可以是表格式文档)是研究成果的核心内容，需要研究者(个人或小组)按照数学建模的各个环节呈现数学建模的过程和结论.

在论文完成后，制作数学建模报告，形成报告提纲和 PPT.

二、回顾、梳理数学建模经历

历经半年乃至一年的数学建模实践，这段经历在数学学习中是非常独特的，也许这是你第一次解决你选择的实际问题，也许这是你第一次带着研究问题去接触社会，也许这是你第一次在团队中凸显了你的特长. 请把你的研究体验梳理成提纲或小文章.

习题 4－2

1. 将研究报告和研究体验制作成展品，准备参加展示.
2. 进一步反思自己做过的数学建模结果，提出新问题，或推广到更多的领域.
3. 学习一篇高中生数学建模的获奖论文，写一写自己对于数学建模和撰写论文的感悟.

5 第五章 计数原理

在日常的生产、生活中，我们常常会遇到一些需要计数的问题.例如：

用 8 个数字：1，2，3，4，5，6，7，8 组成电话号码，共可以组成多少种不同的电话号码？

又例如：

从 10 位同学中，选出两位同学当组长，共有多少种选法？

本章主要介绍分类加法计数原理和分步乘法计数原理，我们将利用这两个原理，讨论排列、组合等简单计数问题，并得到重要的二项式定理，提升数学运算等核心素养.

§ 1 基本计数原理

1.1 分类加法计数原理

实例分析

问题 1 从甲地到乙地，可以乘飞机，可以乘火车，也可以乘轮船，还可以乘汽车. 每天有 2 个班次的飞机，有 4 个班次的火车，有 2 个班次的轮船，有 1 个班次的汽车. 那么，乘坐以上交通工具中的一种从甲地到乙地，在一天中共有多少种选择呢？

分析 如图 5 - 1，该问题需要完成的是：从甲地到乙地共有多少种方法. 所有方法可以分成：乘飞机、火车、轮船、汽车 4 类办法，每类办法中分别又有 2，4，2，1 种方法. 于是，乘坐以上交通工具从甲地到乙地，共有 $2+4+2+1=9$ 种方法.

图 5 - 1

因此，解决以上问题的步骤如下：

(1) 求完成一件事的所有方法数，这些方法可以分成 n 类，且类与类之间两两不交；

(2) 求每一类中的方法数；

(3) 把各类的方法数相加，就可以得到完成这件事的所有方法数.

抽象概括

分类加法计数原理　完成一件事，可以有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种方法，在第 2 类办法中有 m_2 种方法……在第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么，完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.（也称“加法原理”）

注意：完成这件事的若干种方法可以分成 n 类，且类与类之间两两不交.

1.2 分步乘法计数原理

实例分析

问题 2 春节到了，某同学要与父母一起参加家庭聚会.

(1) 她有 3 件不同的上衣，4 条不同的裤子，如果把 1 件上衣和 1 条裤子看作一种搭配方法，那么共有多少种搭配方法？

(2) 她还有 5 双不同的鞋子，如果把 1 件上衣、1 条裤子和 1 双鞋子看作一种搭配方法，那么共有多少种搭配方法？

分析 (1) 我们先看裤子的选择方法数，有 4 条不同的裤子，则有 4 种选择方法；每一

条裤子对应 3 件不同的上衣，如图 5－2.

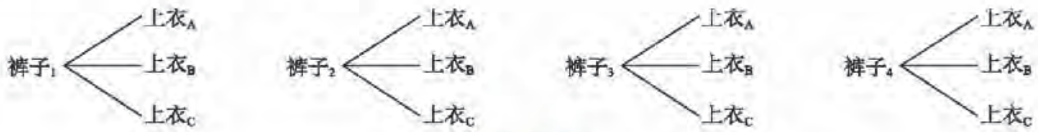


图 5－2

因此，根据分类加法计数原理，共有 $N=3+3+3+3=3\times4=12$ 种搭配方法.

(2) 由题意知还有 5 双不同的鞋子，且每一双鞋子对应的裤子和上衣的搭配方法有 12 种，如图 5－3.

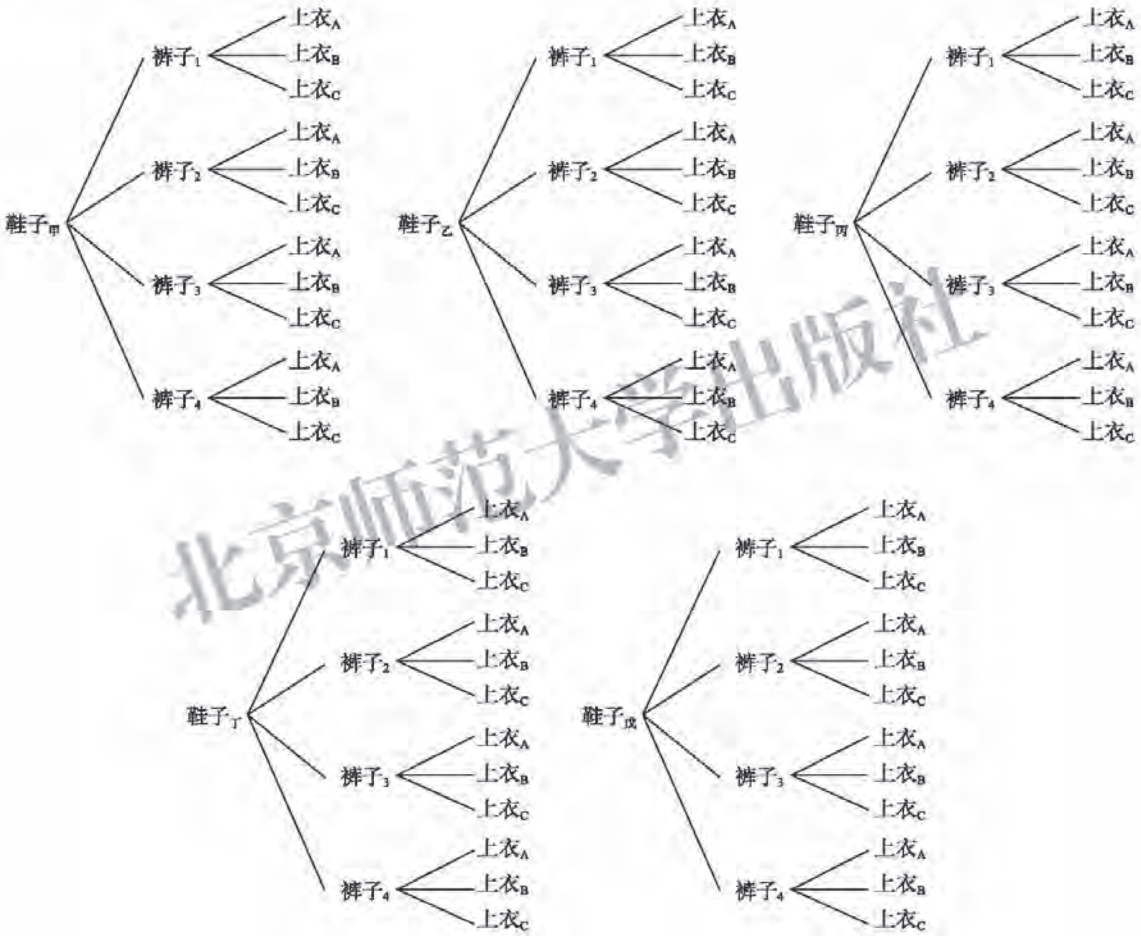


图 5－3

因此，根据分类加法计数原理，共有 $N=12+12+12+12+12=12\times5=3\times4\times5=60$ 种搭配方法.

若再考虑围巾、帽子等因素，则可以按照类似的思路继续进行.

实际上，我们可以发现，问题(1)是分两步完成，第 1 步确定裤子有 4 种选择方法，第 2 步确定每一条裤子对应 3 件上衣；问题(2)是在问题(1)的基础上确定每一双鞋子对应 12 种裤子和上衣的搭配方法，即需要分三步完成.

因此,以上问题有如下特点:

(1) 完成一件事需要经过 n 个步骤;

(2) 完成每一步有若干种方法,且每一步对其他步没有影响;

(3) 把各个步骤的方法数相乘,就可以得到完成这件事的所有方法数.

抽象概括

分步乘法计数原理　完成一件事需要经过 n 个步骤,缺一不可,做第 1 步有 m_1 种不同的方法,做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么,完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种方法.(也称"乘法原理")

练　习

1. 完成一项工作,有 2 种方法,有 5 个人只会用第 1 种方法,另外有 4 个人只会用第 2 种方法,从这 9 个人中选 1 人完成这项工作,共有多少种选法?
2. 甲有 5 件不同颜色的上衣,6 条不同样式的裤子和 4 双不同的鞋子,如果把 1 件上衣、1 条裤子和 1 双鞋子看作一种搭配方法,那么甲着装时,共有多少种不同的搭配方法?

1.3　基本计数原理的简单应用

例 1　在 1,2,3,…,200 中,能够被 5 整除的数共有多少个?

解　能够被 5 整除的数,末位数字是 0 或 5,因此,我们把 1,2,3,…,200 中能够被 5 整除的数分成 2 类来计数:

第 1 类,末位数字是 0 的数,共有 20 个;

第 2 类,末位数字是 5 的数,共有 20 个.

根据分类加法计数原理,在 1,2,3,…,200 中,能够被 5 整除的数共有 $N=20+20=40$ 个.

例 2　如图 5-4,从 A 村到 B 村的道路有 3 条,从 B 村到 C 村的道路有 2 条,从 C 村到 D 村的道路有 3 条. 李明要从 A 村先到 B 村,再经过 C 村,最后到 D 村,共有多少条线路可以选择?

图 5-4

解　先考虑李明从 A 村经过 B 村到 C 村:从 A 村到 B 村的道路有 3 条,从 B 村到 C 村的道路有 2 条,因此李明从 A 村经过 B 村到 C 村可以分成 3 类,每一类都有 2 种不同的方法,共有 $2+2+2=2\times3=6$ 条线路可以选择.

再考虑从 C 村到 D 村,有 3 条道路可以选择,因此可以认为有 3 类,共有 $6+6+6=6\times$

$3=18$ 条线路可以选择.

因此,整个行程可以理解为共有 $N=2\times3\times3=18$ 条线路可以选择.

以上例题,再次从分类加法计数原理的角度理解分步乘法计数原理.分步乘法计数原理的本质实际上是分类加法计数,事实上,可以把第一步的 m_1 种不同的方法看成有 m_1 类,只不过每一类的方法数是相同的,因此可以运用乘法表示加法.下面的例题就是对分类加法计数原理和分步乘法计数原理的直接应用.

例 3 有一项活动,需在 3 名教师、8 名男学生和 5 名女学生中选人参加.

(1) 若只需 1 名参加,共有多少种选法?

(2) 若需教师、男学生、女学生各 1 名参加,共有多少种选法?

解 (1) 只要选出 1 名就可以完成这件事,而选出的 1 名有 3 种不同类型,即教师、男学生或女学生,因此要分 3 类相加:

第 1 类,选出的是教师,有 3 种选法;

第 2 类,选出的是男学生,有 8 种选法;

第 3 类,选出的是女学生,有 5 种选法.

根据分类加法计数原理,共有 $N=3+8+5=16$ 种选法.

(2) 完成这件事,需要分别选出 1 名教师、1 名男学生和 1 名女学生,可以先选教师,再选男学生,最后选女学生,因此要分 3 步相乘:

第 1 步,选 1 名教师,有 3 种选法;

第 2 步,选 1 名男学生,有 8 种选法;

第 3 步,选 1 名女学生,有 5 种选法.

根据分步乘法计数原理,共有 $N=3\times8\times5=120$ 种选法.

练习

1. 有 10 本不同的数学书,9 本不同的语文书,8 本不同的英语书,从中取出数学书、语文书、英语书各 1 本,共有多少种取法?
2. 某乒乓球队共有男队员 5 名,女队员 6 名,现组成一男一女的队伍参加男女混双比赛,共有多少种不同的组合?

习题 5－1

A 组

1. 在 1,2,3,…,200 中,被 5 除余 1 的数共有多少个?
2. 在所有的两位数中,个位数字比十位数字大的两位数共有多少个?
3. 某校高二(1)班有学生 56 名,其中男生 38 名,从中选取 1 名男生和 1 名女生作代表,参加学校组织的调查团,则选取代表的方法共有多少种?
4. 一个口袋内装有 5 个小球,另一个口袋内装有 4 个小球,这些小球的颜色互不相同,从两个口袋内分别取 1 个小球,共有多少种取法?
5. 在平面直角坐标系中,确定若干个点,点的横坐标取自集合 $P=\{1,2,3\}$,点的纵坐标取自集合 $Q=\{1,4,5,6\}$,这样的点共有多少个?
6. 商店里有 15 件不同的上衣、18 条不同的裤子,某人要买 1 件上衣或 1 条裤子,共有多少种选法?若要买上衣、裤子各 1 件,共有多少种选法?

B 组

1. “渐升数”是指每一位数字都比其左边的数字大的正整数(如 236),那么三位渐升数有多少个?其中比 516 大的三位渐升数共有多少个?

§ 2 排列问题

2.1 排列与排列数

实例分析

在日常生活中，我们经常遇到下面一些问题，这些问题有什么共同特征呢？

问题 1 3 名同学排成一行照相，共有多少种排法？

分析 设 3 名同学分别为 A，B，C. 将 3 名同学排成一行，可以看作将字母 A，B，C 放入如图 5－5 的方格中.

图 5－5

第 1 步：第一个位置可以从 A，B，C 三人中任选 1 人，有 3 种方法；

第 2 步：第二个位置可以从除了已经排在第一个位置的人之外的 2 个人中任选 1 人，有 2 种方法，即第一个位置的每一种方法都对应 2 种方法；

第 3 步：第三个位置只能是除了已经排在第一个位置和第二个位置的 2 个人之外剩下的 1 人，有 1 种方法，即第一个位置和第二个位置确定的每一种方法都对应 1 种方法，如图 5－6.

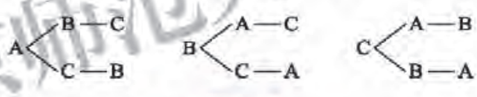


图 5－6

因此，根据分步乘法计数原理，3 名同学排成一行照相，共有 $N=3\times2\times1=6$ 种排法.

问题 2 北京、广州、南京、武汉 4 个城市相互通航，请列举出所有机票的情况，并指出共有多少种机票.

分析 北京、广州、南京、武汉 4 个城市间有多少种机票，是指起点和终点不同的机票共有多少种.

第 1 步：确定可以作为起点的城市，有 4 种方法；

第 2 步：作为终点的城市可以从起点城市之外的 3 个城市中任选 1 个，有 3 种方法. 如图 5－7.

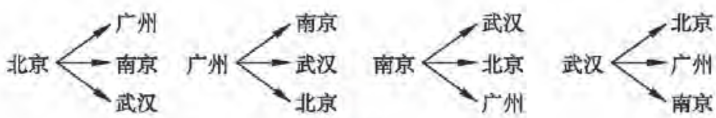


图 5－7

因此，根据分步乘法计数原理，北京、广州、南京、武汉 4 个城市间，共有 $4\times3=12$ 种机票.

问题 3 从 4 面不同颜色(红、黄、蓝、绿)的旗子中,选出 3 面排成一排作为一种信号,共能组成多少种信号?

分析 从 4 面不同颜色(红、黄、蓝、绿)的旗子中,选出 3 面排成一排作为信号,相当于从 4 面不同颜色(红、黄、蓝、绿)的旗子中取出 3 面旗子放入如图 5-8 的 3 个方格中.


图 5-8

第 1 步:第一个位置可以从 4 面不同颜色的旗子中任选 1 面,有 4 种方法;

第 2 步:第二个位置可以从除了确定在第一个位置的那面旗子之外的 3 面中任选 1 面,有 3 种方法,即第一个位置的每一种方法都对应 3 种方法;

第 3 步:第三个位置只能从除了确定在第一个位置和第二个位置的 2 面之外剩下的 2 面中任选 1 面,有 2 种方法,即第一个位置和第二个位置确定的每一种方法都对应 2 种方法,如图 5—9.

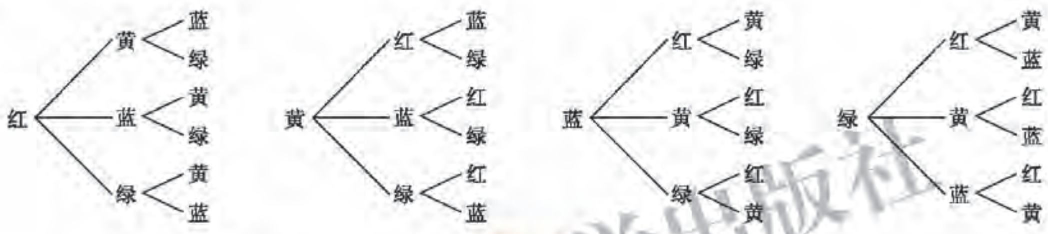


图 5-9

因此,根据分步乘法计数原理,从 4 面不同颜色(红、黄、蓝、绿)的旗子中,选出 3 面排成一排作为信号,共有 $4\times3\times2=24$ 种排法. 每一种排法可以对应一种信号,故能组成 24 种信号.

可以发现,这些问题都是对给定的 n 个元素或者其中的一些元素,按照一定的顺序进行排列.

抽象概括

一般地,从 n 个不同元素中取出 m ($m\leqslant n$,且 $m,n\in\mathbf{N}_+$) 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**.

例如,问题 2 中,北京、广州就是从 4 个不同元素中取出 2 个元素的一个排列.

我们把从 n 个不同元素中取出 m ($m\leqslant n$,且 $m,n\in\mathbf{N}_+$) 个元素的所有不同排列的个数,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**,记作 A_n^m.

我们把有关求排列的个数的问题叫作**排列问题**.

问题 2 中,北京、广州、南京、武汉 4 个城市相互通航,其机票种类数就是从 4 个不同元素中取出 2 个元素的排列数,记为 A_4^2. 根据上面的分析,我们知道 $\mathrm{A}_4^2=12$.

那么，如何计算 A_n^2 呢？

A_n^2 是指从 n 个不同元素中取出 2 个元素的排列数. 相当于从 n 个不同元素中取出 2 个元素放入如图 5-10 的方格中.

图 5-10

第 1 步：第一个位置可以从 n 个不同元素中任选 1 个，有 n 种方法；

第 2 步：第二个位置可以从除了确定排在第一个位置的那个元素之外的 $(n-1)$ 个中任选1 个，有 $(n-1)$ 种方法，即第一个位置的每一种方法都对应 $(n-1)$ 种方法，如图 5-11.

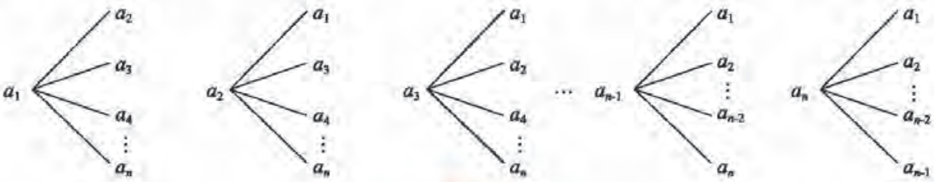


图 5-11

因此，根据分步乘法计数原理，从 n 个不同元素中取出 2 个元素的一个排列，共有 $n(n-1)$ 种方法，即 $A_n^2=n(n-1)$.

例 1 (1) 请列出从 5 个不同元素中取出 2 个元素的所有排列，并计算 A_5^2.

(2) 计算排列数 A_n^3.

解 (1) 设 5 个不同元素分别为 a,b,c,d,e.

从 5 个不同元素中取出 2 个元素的所有排列，相当于从 5 个不同元素中选出 2 个元素放入如图 5-10 的方格中.

第 1 步：第一个位置可以从 5 个不同元素中任选 1 个，有 5 种方法；

第 2 步：第二个位置可以从除了确定在第一个位置的元素之外的 4 个中任选 1 个，有 4 种方法，如图 5-12.

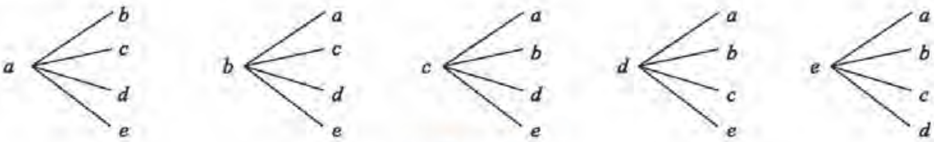


图 5-12

因此，根据分步乘法计数原理，$A_5^2=5\times4=20$.

(2) A_n^3是指从 n 个不同元素中取出 3 个元素的排列数.

从 n 个不同元素中取出 3 个元素的排列数相当于从 n 个不同元素中取出 3 个元素放入如图 5-13 的方格中.

图 5-13

第 1 步：第一个位置可以从 n 个不同元素中任选 1 个，有 n 种方法；

第 2 步：第二个位置可以从除了已经排在第一个位置的那个元素之外的 $(n-1)$ 个中任选 1 个，有 $(n-1)$ 种方法，即第一个位置的每一种方法都对应 $(n-1)$ 种方法；

第 3 步：第三个位置可以从除了已经排在第一个位置和第二个位置的 2 个元素之外余下的 $(n-2)$ 个不同元素中任选 1 个，有 $(n-2)$ 种方法，即第一个位置和第二个位置确定的每

一种方法都对应$(n-2)$种方法. 如图 5－14.

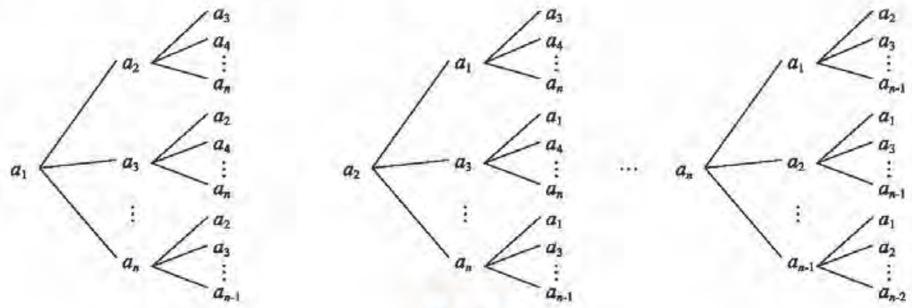


图 5－14

因此,根据分步乘法计数原理,从 n 个不同元素中取出 3 个元素的排列,共有 $n(n-1)\cdot(n-2)$种,即 $A_n^3=n(n-1)(n-2)$.

练 习

1. 请列出下列排列:

   (1) 从 4 个不同元素 a,b,c,d 中任取 3 个元素的所有排列;

   (2) 从 7 个不同元素 a,b,c,d,e,f,g 中任取 2 个元素的所有排列.

2. 从 48 名学生中选出 2 名分别担任正、副班长,共有多少种选法?

2.2 排列数公式

如何计算从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n$, 且 $m,n\in \mathbf{N}_+)$ 个元素的排列数 A_n^m 呢?

我们把从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n$, 且 $m,n\in \mathbf{N}_+)$ 个元素的排列,看成从 n 个不同的球中取出 m 个球,放入排好的 m 个盒子中,每个盒子里放一个球,我们根据分步乘法计数原理排列这些球:

第 1 步,从全体 n 个球中任选一个放入第 1 个盒子,有 n 种方法;

第 2 步,从剩下的$(n-1)$个球中任选一个放入第 2 个盒子,有 $(n-1)$ 种方法;

第 3 步,从剩下的$(n-2)$个球中任选一个放入第 3 个盒子,有 $(n-2)$ 种方法;

……

第 m 步,从剩下的$[n-(m-1)]$个球中任选一个放入第 m 个盒子,有$[n-(m-1)]$种方法,如表 5－1.

表 5－1

盒 子	1	2	3	…	m
方法数	n	$n-1$	$n-2$	…	$n-(m-1)$

因此,根据分步乘法计数原理,从 n 个不同的球中取出 m 个球的排列,共有 $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot[n-(m-1)]$种方法.

这样,我们得到:从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n$, 且 $m,n\in \mathbf{N}_+)$ 个元素的排列共有

$n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot[n-(m-1)]$ 种，所以

$$\boxed{A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot[n-(m-1)].}$$

上述这个公式叫作**排列数公式**.

当 $m=n$ 时，$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$，记作 $n!$，读作：n 的阶乘.

规定：$A_n^0=1$，$0!=1$.

于是，问题 2 是从 4 个不同元素中取出 2 个元素的排列问题，其排列数是

$$A_4^2=4\times 3=12.$$

例 2 计算下列排列数：

(1) A_{15}^3； (2) A_{50}^3； (3) A_5^5； (4) A_6^6.

解 (1) $A_{15}^3=15\times 14\times 13=2\ 730$；

(2) $A_{50}^3=50\times 49\times 48=117\ 600$；

(3) $A_5^5=5!=120$；

(4) $A_6^6=6A_5^5=720$.

例 3 利用 1,2,3,4 这 4 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 本题是从 1,2,3,4 这 4 个数字中，任意选出 3 个数字排成一排，有多少种排法的排列问题.

因为 $A_4^3=4\times 3\times 2=24$，所以利用 1,2,3,4 这 4 个数字，可以组成 24 个没有重复数字的三位数.

例 4 现有红、黄、蓝 3 种颜色的旗子各一面，如果用它们其中的若干面挂在一个旗杆上发出信号，那么一共可以组成多少种信号？

分析 旗杆上可以挂 1 面旗子，也可以挂 2 面、3 面旗子，因此，需要分类计数.

由于挂出的旗子顺序不同表示的信号也不同，因此，对每一类来说是一个排列问题.

解 根据分析，可知需要分 3 类进行：

第 1 类，旗杆上挂 1 面旗子，可以组成 A_3^1 种信号；

第 2 类，旗杆上挂 2 面旗子，可以组成 A_3^2 种信号；

第 3 类，旗杆上挂 3 面旗子，可以组成 A_3^3 种信号.

因此，根据分类加法计数原理，一共可以组成 $A_3^1+A_3^2+A_3^3=3+3\times 2+3\times 2\times 1=15$ 种信号.

练 习

1. 9 个人站成一排照相，其中甲必须站在左侧第一个位置，共有多少种排法？

2. 计算：

(1) A_{13}^4； (2) A_9^9； (3) $A_8^4-2A_8^2$； (4) $\dfrac{A_{12}^8}{A_{12}^2}$.

3. 计算阶乘数，并填入表中：

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$								

习题 5－2

A 组

1. 计算：

(1) $A_5^5-4A_4^4$；　　(2) $A_4^1+A_4^2+A_4^3+A_4^4$.

2. 从 6 名志愿者中选出 4 名分别从事翻译、导游、导购、保洁 4 项工作，选派方案共有多少种？

3. A，B，C，D，E 共 5 人站成一排，如果 A，B 必须相邻且 B 在 A 的右边，那么排法种数共有(　　).

A. 60 种　　B. 48 种　　C. 36 种　　D. 24 种

4. 从 4 种不同颜色的旗子(每种颜色的旗子至少 3 面)中，选出 3 面排成一排作为一种信号，共能组成多少种信号？

5. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种，分别种在不同土质的 3 块土地上，其中黄瓜必须种植，种植方法共有多少种？

6. 已知 5 个不同的元素 a,b,c,d,e 排成一排.

(1) a,e 相邻共有多少种排法？

(2) a,e 不相邻共有多少种排法？

B 组

1. 现有并排的 10 块单位试验田，请选择其中 2 块分别种植 A，B 两种作物，每块种植一种作物. 要求 A，B 两种作物的间隔不小于 6 块，选择的方法共有多少种？

2. 甲、乙、丙、丁、戊 5 名学生进行某种劳动技术比赛，产生了第 1 名到第 5 名的名次. 甲、乙两名参赛者去询问成绩. 回答者对甲说“很遗憾，你和乙都未拿到冠军”；对乙说“你当然不是最差的”. 试仅从这个回答中分析 5 人的名次排列共有多少种情况 .

§3 组合问题

3.1 组　合

实例分析

问题 1 某个城市有 3 座大型体育场 A,B,C,需要选择 2 座体育场承办一次运动会,共有多少种选择方案?

分析 利用列举法,我们把所有可能都列出来,共有 3 种,分别是 AB,AC,BC. 因此,从 3 座大型体育场 A,B,C 中选择 2 座体育场承办一次运动会,共有 3 种选择方案.

问题 2 从 a,b,c,d 这 4 个元素中取出 2 个元素,共有多少种可能?

方法 1 利用列举法,我们把所有可能都列出来,共有 6 种,分别是 ab,ac,ad,bc,bd,cd. 因此,从 a,b,c,d 这 4 个元素中取出 2 个元素,共有 6 种可能.

方法 2 从排列问题分析.

从 a,b,c,d 这 4 个不同元素中取出 2 个元素的排列问题可以分解成以下 2 个步骤:

第 1 步,从 a,b,c,d 这 4 个不同元素中取出 2 个元素,设其取法总数为 x;

第 2 步,将取出的 2 个元素进行排列,排列数为 A_2^2.

因此,根据分步乘法计数原理,$A_4^2=x\cdot A_2^2$,从而 $x=\dfrac{A_4^2}{A_2^2}=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$.

所以从 a,b,c,d 这 4 个元素中取出 2 个元素,共有 6 种可能.

问题 3 某次团代会,要从 5 名候选人中选出 3 名担任代表,共有多少种方案?

方法 1 用 a,b,c,d,e 这 5 个字母代表 5 名候选人,把所有可能都列出来,共有 10 种,分别是

$$abc,abd,abe,acd,ace,ade,bcd,bce,bde,cde.$$

因此,要从 5 名候选人中选出 3 名担任代表,共有 10 种方案.

方法 2 从排列问题分析.

从 a,b,c,d,e 这 5 个不同元素中取出 3 个元素的排列问题可以分解成以下 2 个步骤:

第 1 步,从 a,b,c,d,e 这 5 个不同元素中取出 3 个元素,设其取法总数为 x;

第 2 步,将取出的 3 个元素进行排列,排列数为 A_3^3.

因此,根据分步乘法计数原理,$A_5^3=x\cdot A_3^3$,从而 $x=\dfrac{A_5^3}{A_3^3}=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$.

所以从 5 名候选人中选出 3 名担任代表,共有 10 种方案.

抽象概括

一般地，从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leqslant n$，且 $m, n \in \mathbf{N}_+$) 个元素为一组，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**. 我们把有关求组合的个数的问题叫作**组合问题**.

例如，在上面讨论的 3 个问题中，问题 1 是从 3 个不同元素中取出 2 个元素的组合问题，问题 2 是从 4 个不同元素中取出 2 个元素的组合问题，问题 3 是从 5 个不同元素中取出 3 个元素的组合问题.

从排列与组合的定义可知，两者都是关于从 n 个不同元素中取出 m ($m \leqslant n$，且 $m, n \in \mathbf{N}_+$) 个元素的计数问题，它们的差别是：**排列需考虑元素顺序，组合不需考虑元素顺序**. 也就是说：只有元素相同且顺序也相同的两个排列才是相同的；只要两个组合的元素相同，不论元素的顺序如何，都是相同的组合，例如，ab 与 ba 是两个不同的排列，但它们却是同一个组合.

练 习

1. 用列举法写出下列组合：
   (1) 从 4 个不同元素中任取 3 个元素的所有组合；
   (2) 从 5 个不同元素中任取 2 个元素的所有组合.
2. 从 6 名班委中选出 3 名作为发言代表，共有多少种选法？
3. 从 6 名班委中选出 3 名分别担任第一、二、三组的发言代表，共有多少种选法？

3.2 组合数及其性质

对于一般的组合问题，如何计算所有组合的个数呢？

从 n 个不同元素中取出 m ($m \leqslant n$，且 $m, n \in \mathbf{N}_+$) 个元素的所有组合的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m ($m \leqslant n$，且 $m, n \in \mathbf{N}_+$) 个元素的**组合数**，记作 C_n^m.

前面我们已经学习了如何计算排列数 A_n^m，下面我们通过分解排列数的计算步骤来得到计算组合数的方法.

在上面的问题 2 中，从 a, b, c, d 这 4 个不同元素中取出 2 个元素的排列问题可以分解成以下 2 个步骤：

第 1 步，从 a, b, c, d 这 4 个不同元素中取出 2 个元素，共有 C_4^2 种取法；

第 2 步，将取出的 2 个元素进行排列，共有 A_2^2 种排法.

因此，根据分步乘法计数原理，$A_4^2=C_4^2\cdot A_2^2$，从而 $C_4^2=\frac{A_4^2}{A_2^2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$.

一般地，考虑 A_n^m 与 C_n^m 的关系：把“从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$，且 $m,n\in\mathbf{N}_+$）个元素进行排列”这件事，可以分解成以下 2 个步骤：

第 1 步，从 n 个不同元素中取出 m 个元素，共有 C_n^m 种取法；

第 2 步，将取出的 m 个元素进行排列，共有 A_m^m 种排法.

因此，根据分步乘法计数原理，我们得到“从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$，且 $m,n\in\mathbf{N}_+$）个元素进行排列”共有 $C_n^m\cdot A_m^m$ 种排法，即 $A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m$.

由此，我们得到：从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$，且 $m,n\in\mathbf{N}_+$）个元素的组合数为

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot[n-(m-1)]}{m(m-1)(m-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

上述这个公式叫作**组合数公式**.

规定：$C_n^0=1$.

例 1 计算：

(1) C_{10}^4； (2) C_7^3.

解 (1) $C_{10}^4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$；

(2) $C_7^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$.

例 2 已知平面内有 12 个点，任何 3 个点均不在同一直线上，以每 3 个点为顶点画一个三角形，一共可以画多少个三角形？

分析 已知“任何 3 个点均不在同一直线上”，所以在 12 个点中任取 3 个点都可以构成一个三角形，且这 3 个点不必考虑顺序，如 $\triangle ABC$，$\triangle ACB$，$\triangle BAC$，$\triangle BCA$，$\triangle CAB$，$\triangle CBA$ 都表示同一个三角形. 因此，这是一个从 12 个不同元素中取出 3 个元素的组合问题.

解 依题意知以平面内 12 个点中的每 3 个点为顶点画三角形，可画的三角形的个数，就是从 12 个不同元素中取出 3 个元素的组合数，即

$$C_{12}^3=\frac{A_{12}^3}{A_3^3}=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220.$$

因此，一共可以画 220 个三角形.

我们再来研究下面的问题.

问题 4 分别计算“从 10 人中选出 6 人参加比赛”与“从 10 人中选出 4 人不参加比赛”的方法数.

分析 “从 10 人中选出 6 人参加比赛”相当于“从 10 人中选出 4 人不参加比赛”，因此，从 10 人中选出 6 人参加比赛的方法数和从 10 人中选出 4 人不参加比赛的方法数是相同的，即

$$C_{10}^{6}=C_{10}^{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210.$$

一般地，组合数有如下性质：

性质 1 $\boxed{C_n^m=C_n^{n-m}.}$

问题 5 从 10 名普通战士和 1 名班长中选出 5 名参加军事比武大赛，共有多少种方案？

分析 一方面，从 11 名中选出 5 名参加军事比武大赛，共有 C_{11}^5 种方案.

另一方面，选出的 5 名可以分成以下 2 类：

第 1 类，含有班长，共有 C_{10}^4 种方案；

第 2 类，不含班长，共有 C_{10}^5 种方案.

因此，根据分类加法计数原理，共有 $(C_{10}^4+C_{10}^5)$ 种方案.

由此，我们得到：$C_{11}^5=C_{10}^4+C_{10}^5$.

一般地，组合数还有如下性质：

性质 2 $\boxed{C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}.}$

我们通过构造下面的情境来说明性质 2.

性质 2 的左边表示：从 $(n+1)$ 个不同的小球中取出 m 个小球的组合数.

现将这 $(n+1)$ 个小球看成 n 个红球和 1 个黑球，从中取出 m 个球. 所有取法可以分成以下 2 类：

第 1 类，不取黑球，从 n 个红球中，取出 m 个球，方法数为 C_n^m；

第 2 类，取出 1 个黑球和 $(m-1)$ 个红球，因此，取出的方法数相当于从 n 个红球中，取出 $(m-1)$ 个球，方法数为 C_n^{m-1}.

因此，根据分类加法计数原理，共有 $(C_n^m+C_n^{m-1})$ 种取法.

由此，我们得到：$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

练 习

1. 计算：

(1) C_3^2；　(2) C_5^3；　(3) $C_4^3-C_5^4$；　(4) $3C_3^2-2C_4^3$；　(5) C_{100}^{98}.

2. 6 个人聚会，每两人握一次手，一共握多少次手？

3. 学校开设了 6 门选修课，要求每个学生从中选学 3 门，共有多少种选法？

习题 5－3

A 组

1. 计算：

(1) C_5^2；　　(2) C_7^4；

(3) C_{10}^5.

2. 求证：$C_7^3+C_7^4+C_8^5=C_9^5$.

3. 已知某圆上的 10 个不同的点.

(1) 过每 2 个点画一条弦，一共可画多少条弦？

(2) 过每 3 个点画一个圆内接三角形，一共可画多少个圆内接三角形？

4. 从 1，3，5，7，9 中任取 3 个数字，从 2，4，6，8 中任取 2 个数字，一共可以组成多少个没有重复数字的五位数？

B 组

1. 若甲、乙、丙、丁 4 个公司承包 8 项工程，其中甲公司承包 3 项，乙公司承包 1 项，丙、丁公司各承包 2 项，共有多少种承包方式？

2. 某校乒乓球队有男运动员 10 名和女运动员 9 名，若要选出男、女运动员各 3 名参加三场混合双打比赛（每名运动员只限参加一场比赛），共有多少种参赛方法？

§ 4 二项式定理

4.1 二项式定理的推导

问题提出

根据多项式的乘法法则，容易知道$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，如果称等式的右边为左边的展开式，那么如何求出$(a+b)^n$ 的展开式？

分析理解

我们知道$(a+b)^n=\overbrace{(a+b)(a+b)\cdot\cdots\cdot(a+b)}^{n\text{个}(a+b)}$，下面分 2 步来求展开式中的项：

1. 展开式每一项的特征.

根据多项式的乘法法则，在每个因式$(a+b)$中任选其中一项作为因子，只有 a 和 b 两种选择，即不选 a，就选 b. 先从第 1 个因式$(a+b)$中选一项作为因子，再从第 2 个因式$(a+b)$中选一项作为因子，依此类推，最后从第 n 个因式$(a+b)$中选一项作为因子. 这 n 个因子的乘积构成一个单项式. 由此可知：展开式的每一项由若干个“a”与若干个“b”的乘积构成，并且 a 和 b 的总个数为 n，若 b 的个数为 k，则 a 的个数为 $n-k$，即 $a^{n-k}b^k(k=0,1,2,\cdots,n)$.

2. $a^{n-k}b^k$ 同类项的个数.

从 n 个因式$(a+b)$中，若选出 k 个$(a+b)$，在这 k 个$(a+b)$中只取“b”不取“a”，在余下的$(n-k)$个$(a+b)$中只取“a”不取“b”，这样得到的乘积都是 $a^{n-k}b^k$. 因此，$a^{n-k}b^k$ 的同类项个数为 C_n^k，即 $a^{n-k}b^k$ 的同类项个数就是从 n 个$(a+b)$中选出 k 个$(a+b)$的组合数.

抽象概括

$(a+b)^n$ 的展开式中共有$(n+1)$种不同的同类项：$a^{n-k}b^k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$，相应的个数为 $C_n^k(k=0,1,2,\cdots,n)$. 因此，根据分类加法计数原理，其展开式为

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n. \qquad ①$$

上式可简写成

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k.}$$

公式①称为**二项式定理**，等号右边的式子称为 $(a+b)^n$ 的**二项展开式**，$(a+b)^n$ 的二项展开式共有 $(n+1)$ 项，其中各项系数 C_n^k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 称为**二项式系数**，式中的 $C_n^ka^{n-k}b^k$

用 T_{k+1} 表示，称为二项展开式中第 $(k+1)$ 项，又称为**二项式通项**，记作 $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$.

例 1 求 $(1+x)^n$ 的展开式.

解 $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+x^n$.

例 2 求 $(x+2)^5$ 的展开式.

解
$$\begin{aligned}(x+2)^5&=C_5^0x^5 2^0+C_5^1x^4 2^1+C_5^2x^3 2^2+C_5^3x^2 2^3+C_5^4x^1 2^4+C_5^5x^0 2^5\\&=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32.\end{aligned}$$

例 3 求 $\left(2+\frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式.

解
$$\begin{aligned}\left(2+\frac{1}{x}\right)^4&=C_4^0 2^4\left(\frac{1}{x}\right)^0+C_4^1 2^3\left(\frac{1}{x}\right)^1+C_4^2 2^2\left(\frac{1}{x}\right)^2+C_4^3 2^1\left(\frac{1}{x}\right)^3+C_4^4 2^0\left(\frac{1}{x}\right)^4\\&=16+\frac{32}{x}+\frac{24}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

例 4 求 $(x-2y)^7$ 展开式中 x^4y^3 的系数.

解 因为 x^4y^3 中“x”的指数为 4，所以由二项式通项，得

$$C_7^3x^4(-2y)^3=-280x^4y^3.$$

因此，x^4y^3 的系数是 -280.

练 习

1. 求 $(2x+y)^3$ 的展开式.
2. 求 $\left(\frac{1}{x}-1\right)^8$ 的展开式.
3. 求 $\left(\frac{1}{x}-x\right)^6$ 展开式中 $\frac{1}{x^4}$ 的系数.
4. 求 $(a-2b)^{10}$ 展开式中 a^3b^7 的系数.

4.2 二项式系数的性质

当 n 依次取 1,2,3,… 时，$(a+b)^n$ 展开式的二项式系数如图 5－15.

图 5－15 中的表叫作**二项式系数表**，历史上也称为**杨辉三角**（详见阅读材料“杨辉三角”）. 它有如下的规律：

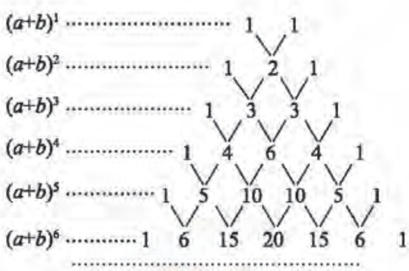


图 5－15

表中每行两端都是 1，而且除 1 以外的每一个数都等于它“肩上”的两个数之和. 事实上，设表中任意一个不为“1”的数为 C_{n+1}^{k}，那么它“肩上”的两个数分别为 C_n^{k-1} 和 C_n^k，由组合数的性质 2 得到：

$$C_{n+1}^{k}=C_n^{k-1}+C_n^k.$$

例 5 根据杨辉三角，写出 $(a+b)^7$ 的二项式系数.

解 从图 5-15 的杨辉三角知道，$(a+b)^6$ 的各二项式系数为 1，6，15，20，15，6，1. 根据其规律，有

```
   1    6    15   20   15    6    1
    \  /  \  /  \  /  \  /  \  /  \ 
1    7    21   35   35   21    7    1
```

所以 $(a+b)^7$ 的各二项式系数为 1，7，21，35，35，21，7，1.

于是，可以根据杨辉三角将二项式系数表延伸下去，从而可根据这个表来求二项式系数.

例 6 求证：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

证明 由二项式定理，有 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$.

令 $a=b=1$，则 $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$.

练 习

1. 根据杨辉三角，写出 $(a+b)^8$ 的二项式系数.
2. 根据杨辉三角，求 $(5a+b)^{10}$ 展开式中的 a^8b^2 的系数.

习题 5-4

A 组

1. 求 $(1+3x)^4$ 的展开式.
2. 求 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$ 的展开式.
3. 求 $(\sqrt{x}+y)^5$ 的展开式.
4. 求 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式.
5. 求 $(1-x)^3$ 展开式的各项系数.

B 组

1. 求证：$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$.
2. 用分步乘法计数原理求$(a+b+c)^5$展开式的项数.

阅读材料

杨辉三角

杨辉三角是二项式系数在三角形中的一种几何排列.

在中国，杨辉三角大约于1050年由贾宪(1010—1070)进行高次开方运算时提出，故也有“贾宪三角”之称. 杨辉(1238—1298)在1261年所著的《详解九章算法》里记载了“贾宪三角”，因其影响更广而被称为“杨辉三角”(如图5-16). 朱世杰(1249—1314)在1303年的《四元玉鉴》中将“贾宪三角”扩充成“古法七乘方图”(如图5-17).

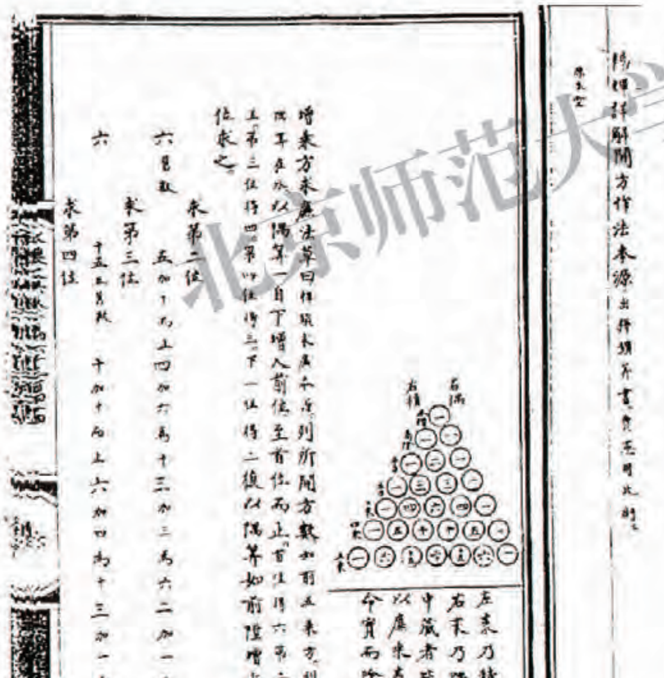


图5-16

图5-17

在欧洲，二项式系数是由吉尔松尼德(Levi ben Gershon，1288—1344)在14世纪初用乘法公式计算出来的. 法国数学家帕斯卡(Blaise Pascal，1623—1662)在《论算术三角形》(Traité du triangle arithmétique)中介绍了由二项式系数所构成的三角形，并以此

解决一些与概率有关的问题，影响广泛. 所以这个表又叫作帕斯卡三角形(如图 5 - 18).

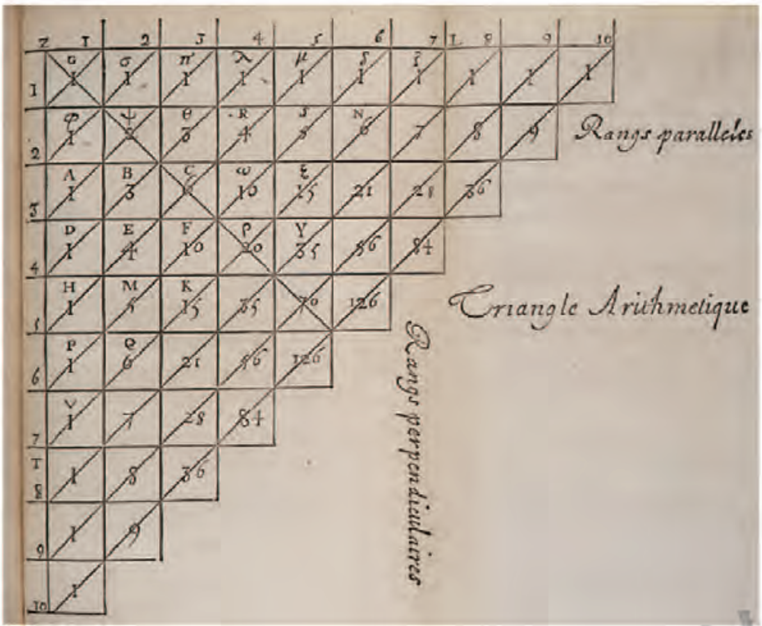
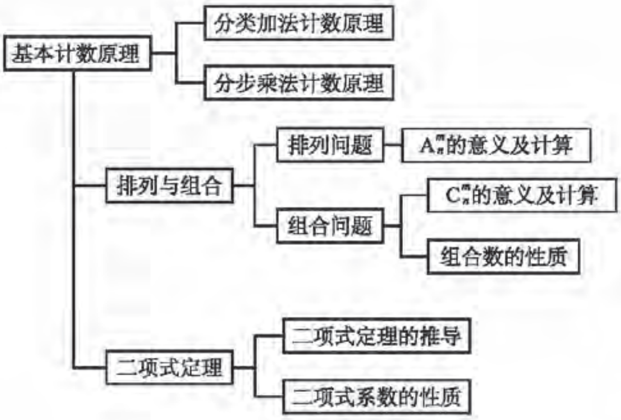


图 5 - 18

杨辉三角是中国古代数学的杰出研究成果之一，它把二项式系数图形化，把组合数内在的一些代数性质直观地从图形中体现出来，是一种离散型的数与形的结合.

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

分类加法计数原理和分步乘法计数原理是解决计数问题的基础，称为基本计数原理. 本章的学习，可以帮助同学们理解两个基本计数原理，运用计数原理探索排列、组合、二项式定理等问题.

1. 两个基本计数原理

通过实例，了解分类加法计数原理、分步乘法计数原理及其意义.

2. 排列与组合

通过实例，理解排列、组合的概念；能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式.

3. 二项式定理

能用多项式运算法则和计数原理证明二项式定理，会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

三、需要关注的问题

1. 两个基本计数原理与排列、组合的内在关系是什么？
2. 排列与组合在处理计数问题时的区别和联系是什么？
3. 处理计数问题时，都有哪些最基本的方法？
4. 二项式定理与组合的内在联系是什么？

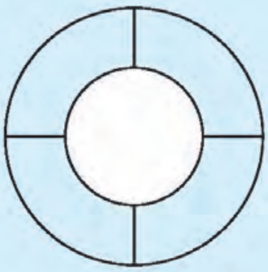
复习题五

A 组

1. 写出 4 个元素 a,b,c,d 的所有排列.
2. 8 个乒乓球队每两个队比赛一场,共有多少场比赛?
3. 在某试验田中,分别对一种作物的用肥、用水量和温度进行试验. 用肥有 3 种选择,用水量有 3 种选择,温度控制有 2 种选择,则该试验田应该分成多少部分?
4. 要把 6 名农业技术员分到 3 个乡支援工作,甲乡需要 2 名,乙乡需要 3 名,丙乡需要 1 名,共有多少种分配方案?
5. 2 名医生和 4 名护士将被分配到 2 所学校为学生体检,每校分配 1 名医生和 2 名护士. 分配方法共有多少种?
6. 从 5 名男生、3 名女生中选 4 名代表,至少有 1 名女生的选法共有多少种?
7. 银行储蓄卡的密码是一个 6 位数字,至少多少人中就一定会有两个人的密码相同?
8. 求$(x-2)^4$ 的展开式.

B 组

1. 6 名同学排成一排,其中甲、乙两人不相邻的排法共有多少种?
2. 正六边形的中心和顶点共 7 个点,则以其中 3 个点为顶点的三角形共有多少个?
3. 求下列问题的排列数:
   (1) 4 名男生 3 名女生排成一排,3 名女生相邻;
   (2) 4 名男生 3 名女生排成一排,3 名女生不能相邻;
   (3) 4 名男生 3 名女生排成一排,女生不能排在两端;
   (4) 4 名男生 3 名女生,男、女相间排成一排.
4. 如图,节日花坛中有 5 个区域,要把 4 种不同颜色的花分别种植到这 5 个区域中,要求相同颜色的花不能相邻栽种,共有多少种种植方案?



(第 4 题)

5. 求$(2x+\sqrt{x})^4$ 的展开式.

6

第六章

概　率

随机现象在日常生活中随处可见，寻找随机现象的规律并从数学上加以刻画是概率学习的主要目标.

在本章中，我们将在必修课程的基础上，学习二项分布、超几何分布以及正态分布等重要的概率模型；学习离散型随机变量的均值、方差，并用所学知识解决一些简单的实际问题，提升数学抽象、数学运算、数据分析等核心素养.

§ 1 随机事件的条件概率

1.1 条件概率的概念

实例分析

问题 1 3 张奖券中只有 1 张能中奖，现分别由 3 名同学不放回地抽取，那么最后一名同学抽到中奖奖券的概率是否比其他同学的小？

分析 在 3 名同学抽取奖券的试验中，设事件 Y 表示“抽到中奖奖券”，事件 N_1，N_2 分别表示“抽到未中奖奖券 1”“抽到未中奖奖券 2”，则该试验的样本空间为 $\Omega=\{YN_1N_2, YN_2N_1, N_1YN_2, N_1N_2Y, N_2YN_1, N_2N_1Y\}$，事件 B 表示“最后一名同学抽到中奖奖券”，则 $B=\{N_1N_2Y, N_2N_1Y\}$. 由古典概型计算概率的公式可知，最后一名同学抽到中奖奖券的概率为

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

其中，$n(B)$和 $n(\Omega)$分别表示事件 B 和样本空间 Ω 包含的样本点个数.

这说明最后一名同学抽到中奖奖券的概率不比其他同学的小. 事实上，我们之前也研究过抽签问题，知道抽签虽有先后，但抽签是公平的，即每个人抽到中奖奖券的概率相等.

问题 2 继续考虑上面的问题，如果已知第一名同学没有抽到中奖奖券，那么最后一名同学抽到中奖奖券的概率又是多少呢？

分析 用事件 A 表示“第一名同学未抽到中奖奖券”，事件 B 表示“最后一名同学抽到中奖奖券”，则 $A=\{N_1YN_2, N_1N_2Y, N_2YN_1, N_2N_1Y\}$，$B=\{N_1N_2Y, N_2N_1Y\}$. 又已知第一名同学没有抽到中奖奖券，所以此时样本点的个数由原来的 6 个减少为 4 个. 由古典概型计算概率的公式可知，如果已知第一名同学没有抽到中奖奖券，那么最后一名同学抽到中奖奖券的概率为$\frac{2}{4}$，即 $\frac{1}{2}$.

显然，知道第一名同学的抽取结果，即知道了事件 A 的发生与否，会影响事件 B 发生的概率.

问题 3 知道第一名同学的抽奖结果为什么会影响最后一名同学抽到中奖奖券的概率呢？

分析 因为已经知道事件 A 发生，所以只需局限在事件 A 发生的范围内考虑问题，即样本空间由 Ω 缩小为 A. 此外，在事件 A 发生的情况下事件 B 发生，等价于事件 A 和事件 B 同时发生，即原来的事件 B 缩小为 AB. 因此相应的概率会发生变化.

问题 4　如何计算在事件 A 发生的情况下事件 B 发生的概率呢?

分析　以古典概型为例.由于样本空间由 Ω 缩小为 A,同时原来的事件 B 缩小为 AB,因此在事件 A 发生的情况下事件 B 发生的概率为

$$\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{\frac{n(AB)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

其中,$n(A)$,$n(AB)$和 $n(\Omega)$分别表示事件 A、事件 AB 和样本空间Ω 包含的样本点个数.

抽象概括

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,则称

$$\boxed{P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**. $P(B|A)$读作 A 发生的条件下 B 发生的概率. 显然,$0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$.

从集合的角度看,若事件 A 已发生,则为使 B 也发生,试验结果必须是既在 A 中又在 B 中的样本点,即此点必属于 AB(如图 6-1).由于已知 A 已经发生,故 A 成为计算条件概率 $P(B|A)$ 新的样本空间.

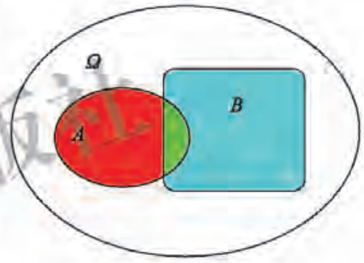


图 6-1

思考交流

1. 概率 $P(B|A)$ 与 $P(AB)$有什么区别和联系?
2. 若 B 和 C 是两个互斥事件,则 $P[(B\cup C)|A]=P(B|A)+P(C|A)$ 是否成立?

例 1　在 5 道题中有 3 道选择题和 2 道填空题.如果不放回地依次抽取 2 道题,求:

(1) 第一次抽到选择题的概率;

(2) 第一次和第二次都抽到选择题的概率;

(3) 在第一次抽到选择题的条件下,第二次抽到选择题的概率.

解　设事件 A 表示"第一次抽到选择题",事件 B 表示"第二次抽到选择题",则事件 AB 表示"第一次和第二次都抽到选择题".

(1) 在从 5 道题中不放回地依次抽取 2 道题的试验中,样本空间包含的样本点个数为

$$n(\Omega)=\mathrm{A}_5^2=20.$$

由分步乘法计数原理,得　$n(A)=\mathrm{A}_3^1\cdot\mathrm{A}_4^1=12.$

于是　$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

故第一次抽到选择题的概率为$\frac{3}{5}$.

(2) 因为 $n(AB)=A_3^2=6$, 所以

$$P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}.$$

故第一次和第二次都抽到选择题的概率为$\frac{3}{10}$.

(3) **方法 1** 由(1)(2)可知 $P(A)=\frac{3}{5}$,$P(AB)=\frac{3}{10}$,所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}.$$

故在第一次抽到选择题的条件下,第二次抽到选择题的概率为$\frac{1}{2}$.

方法 2 由(1)(2)可知 $n(AB)=6$, $n(A)=12$, 所以

$$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

故在第一次抽到选择题的条件下,第二次抽到选择题的概率为$\frac{1}{2}$.

计算条件概率有以下 2 种方法:

(1) 在样本空间 Ω 中,先求概率 $P(AB)$ 和 $P(A)$,再按定义计算 $P(B|A)$;

(2) 随机事件 A 的样本点构成了一个小样本空间 A,在样本空间 A 中求事件 B 的概率,就得到 $P(B|A)$.

例 2 一张储蓄卡的密码共有 6 位数字,每位数字都可从 0~9 中任选一个.某人在银行自动取款机上取钱时,忘记了密码的最后一位数字.求:

(1) 任意按最后一位数字,不超过两次就按对的概率;

(2) 如果他记得密码的最后一位是偶数,不超过两次就按对的概率.

解 设事件 A_i ($i=1,2$)表示"第 i 次按对密码",事件 A 表示"不超过两次就按对密码",则

$$A=A_1\cup\overline{A}_1A_2.$$

(1) 依题意知事件 A_1 与事件 $\overline{A}_1A_2$ 互斥,由概率的加法公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)\\&=\frac{1}{10}+\frac{9\times1}{10\times9}\\&=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

故任意按最后一位数字，不超过两次就按对的概率为$\frac{1}{5}$.

(2) 设事件 B 表示“密码的最后一位数字按偶数”，则

$$\begin{aligned}P(A|B) &= P(A_1|B) + P(\overline{A}_1A_2|B)\\ &= \frac{1}{5} + \frac{4\times1}{5\times4}\\ &= \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

故如果他记得密码的最后一位是偶数，不超过两次就按对的概率是$\frac{2}{5}$.

练 习

1. 抛掷一枚均匀的骰子，观察掷出的点数，若掷出的点数不超过 3，则掷出的点数是奇数的概率为( ).

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

2. 已知 100 个产品中，有 83 个产品长度合格，90 个产品质量合格，80 个产品长度和质量都合格. 现在，任取一个产品，若它的质量合格，则它长度合格的概率为( ).

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{83}{100}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{9}{10}$

3. 同时抛掷两枚均匀的骰子，已知第一枚掷出的点数为 6，则“两枚骰子掷出点数之和不小于 10”的概率是多少？

1.2 乘法公式与事件的独立性

在必修课程中，我们已经学习过事件的独立性，下面我们进一步来了解条件概率与独立性的关系.

由条件概率的定义 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，则有

$$P(AB)=P(B|A)P(A)\ (\text{其中 } P(A)>0). \quad ①$$

同理，

$$P(AB)=P(A|B)P(B)\ (\text{其中 } P(B)>0). \quad ②$$

称公式①②为**乘法公式**，利用它们可以计算两个事件同时发生的概率.

例 3 已知口袋中有 3 个黑球和 7 个白球，这 10 个球除颜色外完全相同.

(1) 先后两次从中不放回地各摸出一球，求两次摸到的均为黑球的概率；

(2) 从中不放回地摸球，每次各摸一球，求第三次才摸到黑球的概率.

解 设事件 A_i 表示“第 i 次摸到的是黑球”($i=1,2,3$)，则事件 A_1A_2 表示“两次摸到的均为黑球”.

(1) 由题意知 $P(A_1)=\frac{3}{10}$，$P(A_2|A_1)=\frac{2}{9}$. 于是，根据乘法公式，有

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}.$$

所以先后两次从中不放回地各摸出一球，两次摸到的均为黑球的概率为 $\frac{1}{15}$.

(2) 设事件 A 表示"第三次才摸到黑球"，则 $A=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

由题意知 $P(\overline{A}_1)=\frac{7}{10}$，$P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{6}{9}$，$P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{3}{8}$.

于是，根据乘法公式，有

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{40}.$$

所以从中不放回地摸球，每次各摸一球，第三次才摸到黑球的概率为 $\frac{7}{40}$.

回顾事件独立性的概念我们知道，如果事件 A(或 B)是否发生对事件 B(或 A)发生的概率没有影响，这样的两个事件就叫作**相互独立事件**. 例如，在试验"连续抛掷一枚均匀的骰子两次，观察每次出现的点数"中，若事件 A 表示"第一次掷出 1 点"，事件 B 表示"第二次掷出 1 点"，则事件 A 与 B 即为相互独立事件. 不仅如此，结合古典概型，我们还得出两个相互独立事件同时发生的概率，等于这两个事件发生的概率的积，即

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B).}$$

下面我们从条件概率的角度进行分析.

事实上，由条件概率的定义 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，得 $P(AB)=P(B|A)P(A)$. 若事件 A 与事件 B 相互独立，即事件 A(或 B)是否发生对事件 B(或 A)发生的概率没有影响，则 $P(B|A)=P(B)$，从而 $P(AB)=P(A)P(B)$；反之，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，且 $P(A)>0$，则 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，再由 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 可知 $P(B|A)=P(B)$，因此事件 A(或 B)是否发生对事件 B(或 A)发生的概率没有影响，即事件 A 与事件 B 相互独立. 因此，

$$\boxed{\text{事件 } A \text{ 与事件 } B \text{ 相互独立} \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B).}$$

例 4 口袋中有 4 个黑球和 3 个白球，这 7 个球除颜色外完全相同，连摸两次，每次摸一球. 记事件 A 表示"第一次摸得黑球"，事件 B 表示"第二次摸得黑球". 在放回摸球和不放回摸球两种情况下，事件 A 与事件 B 是否独立？

分析 放回摸球和不放回摸球这两种情况均可从以下两个方面来判断事件 A 与事件 B 是否独立.

(1) $P(B|A)=P(B)$ 是否成立；

(2) $P(AB)=P(A)P(B)$是否成立.

解 ① 放回摸球：

依题意有 $P(A)=\frac{4}{7}$，$P(B)=\frac{4}{7}$，$P(B|A)=\frac{4}{7}$.

因此，$P(B|A)=P(B)$，即放回摸球时事件 A 与事件 B 独立.

② 不放回摸球：

依题意有 $P(A)=\frac{4}{7}$，$P(B)=\frac{4}{7}$，$P(AB)=\frac{A_4^1A_3^1}{A_7^2}=\frac{4\times 3}{7\times 6}=\frac{2}{7}$.

因此，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，即不放回摸球时事件 A 与事件 B 不独立.

说明：另一种解法请同学们课下完成.

例 5 如图 6-2，用 a，b，c 三类不同的元件连接成两个系统 N_1，N_2. 当元件 a，b，c 都正常工作时，系统 N_1 正常工作；当元件 a 正常工作且元件 b，c 至少有一个正常工作时，系统 N_2 正常工作. 已知元件 a，b，c 正常工作的概率依次为 0.80，0.90，0.90.

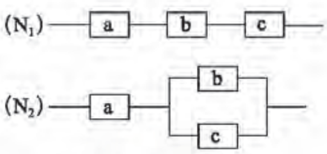


图 6-2

(1) 求系统 N_1 正常工作的概率 P_1；

(2) 求系统 N_2 正常工作的概率 P_2.

解 设事件 A 表示“元件 a 正常工作”，事件 B 表示“元件 b 正常工作”，事件 C 表示“元件 c 正常工作”.

(1) 依题意知 $P_1=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.80\times 0.90\times 0.90=0.648$.

故系统 N_1 正常工作的概率为 0.648.

(2) 依题意知 $P_2=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)P(C)$

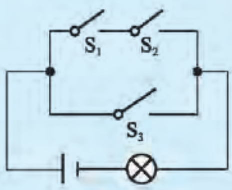
$=0.80\times 0.90\times 0.10+0.80\times 0.10\times 0.90+0.80\times 0.90\times 0.90$

$=0.792$.

故系统 N_2 正常工作的概率为 0.792.

练 习

1. 袋中有 3 个黑球和 2 个白球，这 5 个球除颜色外完全相同. 每次从中取出一球，取后放回. 设事件 A 表示“第一次取出白球”，事件 B 表示“第二次取出白球”，则 $P(B|A)=$________，$P(AB)=$________.
2. 连续抛掷一枚均匀的骰子两次，观察每次掷出的点数. 设事件 A 表示“第二次掷出的点数为 1”，事件 B 表示“第二次掷出的点数比第一次的小 1”，则 $P(B|A)=$________，$P(AB)=$________.
3. 甲、乙两名射击运动员分别对同一目标射击 1 次，甲射中的概率为 0.8，乙射中的概率为 0.9，则 2 人都射中的概率为________.
4. 如图，开关电路中，某段时间内，开关 S_1，S_2，S_3 开或关的概率均为 $\frac{1}{2}$，且相互独立，则这段时间内灯亮的概率为________.



(第 4 题)

1.3 全概率公式

实例分析

问题5 如图 6-3，有三个箱子，分别编号为 1,2,3，其中 1 号箱装有 1 个红球和 4 个白球，2 号箱装有 2 个红球和 3 个白球，3 号箱装有 3 个红球，这些球除颜色外完全相同. 某人先从三箱中任取一箱，再从中任意摸出一球，求取得红球的概率.

图 6-3

分析 设事件 B_i 表示“球取自 i 号箱”($i=1,2,3$)，事件 A 表示“取得红球”，其中 B_1,B_2,B_3 两两互斥，A 发生总是伴随着 B_1,B_2,B_3 之一同时发生，即 $A=B_1A\cup B_2A\cup B_3A$，且 B_1A，B_2A，B_3A 两两互斥. 运用互斥事件概率的加法公式得到 $P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+P(B_3A)$，再对求和中的每一项运用乘法公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}=\frac{8}{15}.\end{aligned}$$

因此，取得红球的概率为 $\frac{8}{15}$.

问题6 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的，根据以往的记录有如表 6-1 的数据：

表 6-1

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家元件制造厂的元件在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志. 在仓库中随机地取一只元件，求它是次品的概率.

分析 设事件 B_i 表示“所取到的产品是由第 i 家元件制造厂提供的”($i=1,2,3$)，事件 A 表示“取到的是一件次品”. 其中 B_1,B_2,B_3 两两互斥，A 发生总是伴随着 B_1,B_2,B_3 之一同时发生. 即 $A=B_1A\cup B_2A\cup B_3A$，且 B_1A,B_2A,B_3A 两两互斥. 运用互斥事件概率的加法公式和乘法公式，得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1A)+P(B_2A)+P(B_3A)\\&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)\\&=0.15\times0.02+0.80\times0.01+0.05\times0.03\\&=0.0125.\end{aligned}$$

因此，在仓库中随机地取一只元件，它是次品的概率为 0.012 5.

从上述两个问题可以看出，某一事件 A 的发生有各种可能的原因，如问题 5 中摸得的红球有三种来源：可能取自 1 号箱，也可能取自 2 号箱或 3 号箱；问题 6 中取到的次品可能产自第 1 家元件制造厂，也可能产自第 2 家元件制造厂或第 3 家元件制造厂. 若 A 是由原因 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所引起，则 A 发生的概率是 $P(AB_i)=P(B_i)P(A|B_i)$，由于每一个原因都可能导致 A 发生，且各原因涵盖所有可能的情形并彼此互斥，故事件 A 发生的概率是各原因引起 A 发生概率的总和，即

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

设 Ω 是试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一组事件，若

(1) $B_iB_j=\varnothing$，其中 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$，

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$，

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

条件(1)表示每次试验 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中只能发生一个；

条件(2)表示每次试验 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 必有一个发生.

抽象概括

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，若 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意一个事件 A 有

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).}$$

称上式为**全概率公式**.

如果我们把 B_i 看成导致事件 A 发生的各种可能"原因"，那么，全概率公式告诉我们：事件 A 发生的概率恰好是事件 A 在这些"原因"下发生的条件概率的平均.

例 6 采购员要购买某种电器元件一包(10 个). 他的采购方法是：从一包中随机抽查 3 个，如这 3 个元件都是好的，他才买下这一包. 假定含有 4 个次品的包数占 30%，而其余包中各含 1 个次品，求采购员随机挑选一包拒绝购买的概率.

解 设事件 B_1 表示“取到的是含有 4 个次品的包”，事件 B_2 表示“取到的是含有 1 个次品的包”，事件 A 表示“采购员拒绝购买”. 则 B_1，B_2 构成样本空间的一个划分，且 $P(B_1)=\frac{3}{10}$，$P(B_2)=\frac{7}{10}$. 又由古典概型计算概率的公式，可知

$$P(A|B_1)=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6},$$

$$P(A|B_2)=1-\frac{C_9^3}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}.$$

从而由全概率公式，可知

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)\\&=\frac{3}{10}\times\frac{5}{6}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}\\&=\frac{23}{50}.\end{aligned}$$

因此，采购员随机挑选一包拒绝购买的概率为 $\frac{23}{50}$.

例 7 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7. 飞机被一人击中且击落的概率为 0.2，被两人击中且击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率.

解 设事件 A 表示“飞机被击落”，事件 B_i 表示“飞机被 i 人击中”（$i=0,1,2,3$），则 B_0，B_1，B_2，B_3 构成样本空间的一个划分，且依题意，$P(A|B_0)=0$，$P(A|B_1)=0.2$，$P(A|B_2)=0.6$，$P(A|B_3)=1$. 再设事件 H_i 表示“飞机被第 i 人击中”（$i=1,2,3$）.

则

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(H_1\overline{H}_2\overline{H}_3\cup\overline{H}_1H_2\overline{H}_3\cup\overline{H}_1\overline{H}_2H_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7\\&=0.36.\end{aligned}$$

同理

$$P(B_2)=P(H_1H_2\overline{H}_3\cup H_1\overline{H}_2H_3\cup\overline{H}_1H_2H_3)=0.41,$$

$$P(B_3)=P(H_1H_2H_3)=0.14,$$

$$P(B_0)=P(\overline{H}_1\overline{H}_2\overline{H}_3)=0.09.$$

由全概率公式，可知

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)\\&=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1\\&=0.458.\end{aligned}$$

因此，飞机被击落的概率为 0.458.

运用全概率公式的一般步骤如下：

(1) 求出样本空间 Ω 的一个划分 $B_1, B_2, \cdots, B_n$；

(2) 求 $P(B_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$；

(3) 求 $P(A|B_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$；

(4) 求目标事件的概率 $P(A)$.

可以形象地把全概率公式看成“由原因推结果”，每个原因对结果的发生有一定的“作用”，即结果发生的可能性与各种原因的“作用”大小有关. 全概率公式表达了它们之间的关系. 在实际中，还有一类问题是“已知结果求原因”. 这类问题更为常见，它所求的是条件概率，是已知某结果发生条件下，探求各原因发生的可能性大小.

例 8 如图 6－4，有三个箱子，分别编号为 1，2，3，其中 1 号箱装有 1 个红球和 4 个白球，2 号箱装有 2 个红球和 3 个白球，3 号箱装有 3 个红球，这些球除颜色外完全相同. 某人先从三箱中任取一箱，再从中任意摸出一球，发现是红球，求该球是取自 1 号箱的概率以及该球取自几号箱的可能性最大.

图 6－4

解 设事件 B_i 表示“球取自 i 号箱”$(i=1,2,3)$，事件 A 表示“取得红球”.

由全概率公式，可得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}=\frac{8}{15}.$$

再由条件概率知，

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{1}{8},$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2A)}{P(A)}=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3A)}{P(A)}=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{5}{8}.$$

因此，该球是取自 1 号箱的概率为 $\frac{1}{8}$，该球取自 3 号箱的可能性最大.

抽象概括

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，若 $P(A)>0, P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}.$$

称上式为**贝叶斯（Bayes）公式.**

该公式于1763年由贝叶斯给出. 它是在观察到事件 A 已发生的条件下，寻找导致 A 发生的每个原因的概率，贝叶斯公式的思想就是“执果溯因”.

练 习

1. 某商场出售的灯泡来自甲、乙、丙三个工厂，甲厂产品占80%，合格率为90%；乙厂产品占10%，合格率为95%；丙厂产品占10%，合格率为80%. 某顾客购买了一个灯泡，求它是合格品的概率.
2. 某一地区患有癌症的人占0.005，患者对一种试验反应是阳性的概率为0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为0.04. 现抽查了一个人，试验反应是阳性，则此人是癌症患者的概率有多大？

习题 6－1

A 组

1. 已知 $P(A|B)$ 表示在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率，则 $P(A|B)=$(　　).

   A. $\dfrac{P(A)}{P(B)}$　　B. $\dfrac{P(B)}{P(A)}$　　C. $P(AB)$　　D. $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

2. 5个人排成一列，已知甲排在乙的前面，则甲、乙两人相邻的概率是(　　).

   A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{3}{5}$

3. 袋中有除颜色外完全相同的5个球，其中3个红球和2个白球. 现从袋中不放回地连取两个. 已知第一次取得红球，则第二次取得白球的概率为(　　).

   A. 0.4　　B. 0.5　　C. 0.6　　D. 0.7

4. 考虑恰有两个小孩的家庭. 若某家第一个是男孩，则这家有两个男孩(相当于第二个也是男孩)的概率为________(假定生男生女为等可能).

5. 同时抛掷红、蓝两枚均匀的骰子，设事件 A 表示“蓝色骰子掷出的点数为3或6”，事件 B 表示“红、蓝两枚骰子掷出的点数之和大于8”，则 $P(B|A)=$________.

6. 甲、乙两人参加面试，每人的试题通过不放回抽签的方式确定. 假设被抽的 10 个试题签中有 4 个是难题签，按甲先乙后的次序抽签.

(1) 求甲抽到难题签的概率；

(2) 若甲抽到难题签，求乙也抽到难题签的概率；

(3) 求甲和乙都抽到难题签的概率.

7. 设某厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，已知各车间的产量分别占全厂产量的 25%，35%，40%，并且各车间的次品率依次为 5%，4%，2%. 现从该厂这批产品中任取一件.

(1) 求取到次品的概率；

(2) 若取到的是次品，则此次品由三个车间生产的概率分别是多少？

8. 男、女两名运动员分别参加不同的长跑比赛，根据以往经验，他们获得冠军的概率分别为 0.6 与 0.5，求下列事件的概率：

(1) 两人都得冠军；

(2) 至少一人得冠军.

B 组

1. 下图表示由若干个某种电子元件组成的电路. 已知每个元件的可靠性是 0.9，且各个元件的可靠性是彼此独立的，求下列电路畅通的概率：

（第 1 题）

§2 离散型随机变量及其分布列

在必修课程中，我们已经认识了大量的随机现象，知道运用试验的样本空间和随机事件的概率等来刻画随机现象的规律. 下面，我们来学习如何进一步用数学语言来清楚地刻画每一个随机现象的数量规律.

2.1 随机变量

了解一个随机现象的规律，是指了解这个随机现象中所有可能出现的结果及每个结果出现的概率. 例如，任意抛掷一枚均匀的骰子掷出的点数，可能出现的结果共有 6 个，其样本空间为{掷出点数 i，$i=1,2,\cdots,6$}，可简记为$\{1,2,3,4,5,6\}$. 但是，还有一些试验的样本空间不是用数值而是用属性刻画的. 例如，抛掷一枚均匀的硬币观察其结果，其样本空间是{正面，反面}，如果引入变量 X，对应于试验的两个结果，将出现正面和反面时的 X 值分别规定为 1 和 0，这样，样本点就和数值对应起来. 随着试验结果的确定，X 的取值也就确定了.

由此看出，我们可以建立从样本空间到实数的对应关系，即用数值来表示试验的结果. 由于这样的数值依赖于随机试验的结果，尽管试验的所有可能结果是已知的，但在每次试验之前依然无法断定会出现何种结果，从而也就无法确定它的值，即它的值具有随机性.

抽象概括

在随机试验中，我们确定了一个对应关系，使得样本空间的每一个样本点都用一个确定的数值表示. 在这个对应关系下，数值随着试验结果的变化而变化. 像这种取值随着试验结果的变化而变化的量称为**随机变量**. 随机变量常用字母 X，Y，ξ，η 等来表示.

例 1 已知在 10 件产品中有 2 件不合格品. 试验 E：从这 10 件产品中任取 3 件，观察不合格品的件数.

(1) 写出该随机现象可能出现的结果；

(2) 试用随机变量来描述上述结果.

解 (1) 依题意知这 10 件产品中有 2 件不合格品，8 件合格品.

因此，从 10 件产品中任取 3 件，所有可能出现的结果是："没有不合格品""恰有 1 件不合格品""恰有 2 件不合格品".

(2) 令随机变量 X 表示取出的 3 件产品中的不合格品的件数，则 X 所有可能的取值为

0，1，2，对应着任取 3 件产品所有可能的结果. 即

$\{X=0\}$表示“没有不合格品”；

$\{X=1\}$表示“恰有 1 件不合格品”；

$\{X=2\}$表示“恰有 2 件不合格品”.

例 2　连续抛掷一枚均匀的硬币 2 次，用 X 表示这 2 次抛掷中出现正面的次数，则 X 是一个随机变量. 分别说明下列集合所代表的随机事件：

(1) $\{X=0\}$；　　(2) $\{X=1\}$；

(3) $\{X\leqslant 1\}$；　　(4) $\{X>0\}$.

解　(1)$\{X=0\}$表示使得随机变量对应于 0 的那些结果组成的事件，即 2 次都是出现反面. 所以$\{X=0\}$表示“2 次都是出现反面”.

(2)$\{X=1\}$表示“恰有 1 次出现正面”.

(3)$\{X\leqslant 1\}$表示“至多 1 次出现正面”.

(4)$\{X>0\}$表示“至少 1 次出现正面”.

练　习

1. 用随机变量来描述下列随机现象可能的结果：

   (1) 连续抛掷一枚均匀的硬币 3 次，出现正面的次数；

   (2) 一个口袋中装有除颜色外完全相同的 8 个红球和 3 个黄球，任意摸出两球，摸到黄球的个数.

2. 用 X 表示 10 次射击中命中目标的次数，分别说明下列集合所代表的随机事件：

   (1) $\{X=8\}$；　　(2) $\{1<X\leqslant 9\}$；

   (3) $\{X\geqslant 1\}$；　　(4) $\{X<1\}$.

3. 同时抛掷两枚均匀的骰子，记第一枚骰子掷出的点数与第二枚骰子掷出的点数之差为 ξ，则$\{\xi>4\}$表示的随机事件是（　　）.

   A. 第一枚掷出 6 点，第二枚掷出 2 点　　B. 第一枚掷出 5 点，第二枚掷出 1 点

   C. 第一枚掷出 1 点，第二枚掷出 6 点　　D. 第一枚掷出 6 点，第二枚掷出 1 点

2.2　离散型随机变量的分布列

对于随机试验我们引入了随机变量的概念. 这样，了解随机试验的规律就转化为了解随机变量的所有可能取值，以及随机变量取各个值的概率. 了解了上述两点，我们就可以说了解了这个随机试验的规律.

实例分析

用 X 表示抛掷一枚均匀的骰子掷出的点数，则 X 是一个随机变量，它的可能取值为 1，2，…，6；由于掷出各点数的概率相等，因而事件 $\{X=i\}(i=1,2,\cdots,6)$ 发生的概率为 $\frac{1}{6}$，记作

$$P(X=i)=\frac{1}{6}\ (i=1,2,\cdots,6).$$

知道了上述两点，抛掷一枚均匀的骰子掷出点数的规律也就弄明白了. 我们也常将上式列成表，如表 6－2：

表 6－2

i	1	2	3	4	5	6
$P(X=i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

抽象概括

取值能够一一列举出来的随机变量称为**离散型随机变量**.

若离散型随机变量 X 的取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，随机变量 X 取 x_i 的概率为 $p_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，记作

$$P(X=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots). \qquad ①$$

①式也可以列成表，如表 6－3：

表 6－3

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_n	…

表 6－3 或①式称为**离散型随机变量 X 的分布列**，简称为 **X 的分布列**.

显然：

(1) $p_i>0(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$；

(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n+\cdots=1$.

如果随机变量 X 的分布列为表 6－3 或①式，我们称随机变量 X 服从这一分布列，记作

$$X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}.$$

随机变量 X 的分布列完全描述了随机现象的规律：了解了随机变量 X 的分布列，就了解了这个随机变量的所有可能取值及取各个值的概率.

例 3 篮球运动员在比赛中每次罚球命中得 1 分，不中得 0 分. 已知某运动员罚球命中的概率为 0.7，求他罚球一次得分的分布列.

解 用随机变量 X 表示每次罚球所得的分值. 根据题意，X 的可能取值为 1，0，且取这两个值的概率分别为 0.7，0.3，因此所求的分布列如表 6－4：

表 6－4

X	1	0
P	0.7	0.3

抽象概括

若在某个试验中，每次试验只有两个相互对立的结果，可以分别称为“成功”和“失败”，每次“成功”的概率均为 p，每次“失败”的概率均为 $1-p$，则称这样的试验为**伯努利试验**.

如果随机变量 X 的分布列如表 6－5：

表 6－5

X	1	0
P	p	q

其中 $0<p<1$，$q=1-p$，那么称离散型随机变量 X 服从参数为 p 的**两点分布**（又称 **0－1 分布或伯努利分布**）. 例 3 中篮球运动员每次罚球所得的分值服从 $p=0.7$ 的两点分布. 两点分布不仅是最简单的，也是最重要的概率分布模型，在实际生活中有着广泛的应用.

例 4 连续抛掷一枚均匀的骰子两次，用 X 表示掷出的点数之和，试求 X 的分布列.

解 我们用 (i,j) 表示抛掷的结果，其中 i 表示第一次掷出的点数，j 表示第二次掷出的点数. 例如，(3，4) 表示第一次掷出的点数为 3，第二次掷出的点数为 4. 于是，连续抛掷一枚均匀的骰子两次，共有 36 种结果，结果如表 6－6：

表 6－6

第一次掷出的点数 \ 第二次掷出的点数	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

显然，这 36 种结果发生的概率是相同的，都是 $\frac{1}{36}$.

根据表 6-6，X 的可能取值为 $2,3,\cdots,12$；其中使得 $X=2$ 的结果只有 1 种：(1,1)，因此 $P(X=2)=\frac{1}{36}$. 使得 $X=3$ 的结果有 2 种：(1,2)和(2,1)，因此 $P(X=3)=\frac{2}{36}$. 同理可求得随机变量 X 取其他值的概率，最后可得 X 的分布列如表 6-7：

表 6-7

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

例 5 一袋中装有 6 个完全相同的黑球，编号分别为 1,2,3,4,5,6，现从中随机取出 3 个球，用 X 表示取出球的最大编号，求 X 的分布列.

解 依题意知随机变量 X 的取值为 3,4,5,6.

又易知从 6 个球中取出 3 个球，共有 C_6^3 种取法，且每一种取法都是等可能的.

当 $X=3$ 时，取出球的最大编号为 3，另两个球从 1,2 号球中取得，共有 $C_1^1C_2^2$ 种取法，由古典概型计算概率的公式得

$$P(X=3)=\frac{C_1^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{20};$$

当 $X=4$ 时，取出球的最大编号为 4，另两个球从 1,2,3 号球中取得，因此

$$P(X=4)=\frac{C_1^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20};$$

当 $X=5$ 时，取出球的最大编号为 5，另两个球从 1,2,3,4 号球中取得，因此

$$P(X=5)=\frac{C_1^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{10};$$

当 $X=6$ 时，取出球的最大编号为 6，另两个球从 1,2,3,4,5 号球中取得，因此

$$P(X=6)=\frac{C_1^1C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}.$$

综上，可得 X 的分布列如表 6-8：

表 6-8

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

例 6 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=\left(\frac{1}{3}\right)^i a\,(i=1,2,3)$，求实数 a 的值.

解 因为 $\sum\limits_{i=1}^{3}p_i=1$，所以 $\frac{1}{3}a+\left(\frac{1}{3}\right)^2a+\left(\frac{1}{3}\right)^3a=1$.

解得 $a=\frac{27}{13}$.

故实数 a 的值为$\frac{27}{13}$.

练 习

1. ① 某座大桥一天经过的车辆数为 X；

② 某通信公司官方客服一天内接听电话的总次数为 X；

③ 一天之内的温度为 X；

④ 一射手对目标进行射击，命中得 1 分，未命中得 0 分，用 X 表示射手在一次射击中的得分.

上述问题中的 X 是离散型随机变量的是(　　).

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ①③④　　D. ②③④

2. 从装有除颜色外完全相同的 3 个红球和 2 个白球的袋中随机取出 2 个球，设其中有 X 个红球，求随机变量 X 的分布列.

3. 已知随机变量 X 的分布列如下表：

X	1	2	3	4
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	m

则实数 m 的值为(　　).

A. $\frac{2}{3^3}$　　B. $\frac{2}{3^4}$　　C. $\frac{1}{3^3}$　　D. $\frac{1}{3^4}$

习题 6－2

A 组

1. 袋中有除颜色外完全相同的红球 6 个和白球 5 个，从袋中每次任意取出一个球，直到取出的球是白球为止，设随机变量 X 表示所需要的取球次数，则 X 的可能取值为(　　).

A. 1,2,…,6　　B. 1,2,…,7　　C. 1,2,…,11　　D. 1,2,3,…

2. 同时抛掷两枚均匀的骰子，设 X 表示掷出的点数之和，则$\{X=4\}$表示的随机试验结果是(　　).

A. 一枚掷出 3 点，一枚掷出 1 点　　B. 两枚都掷出 2 点

C. 两枚都掷出 4 点　　D. 一枚掷出 3 点，一枚掷出 1 点或两枚都掷出 2 点

3. 某射击运动员射击所得的环数 X 的分布列如下表：

X	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	a	0.29	0.22

则此运动员“射击一次命中的环数大于 5 且小于 9”的概率为(　　).

A. 0.43　　B. 0.51　　C. 0.79　　D. 0.88

4. 已知随机变量 ξ 的分布列如下表：

ξ	0	1	2
P	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

设 $F(x)=P(\xi\leqslant x)$,则当 $x\in[1,2)$时,$F(x)$的值为(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{6}$

5. 从 6 名男生和 4 名女生中随机选出 3 名同学参加一项竞技测试.

(1) 求选出的 3 名同学中至少有 1 名女生的概率；

(2) 设 ξ 表示选出的 3 名同学中男生的人数,求 ξ 的分布列.

6. 在一个箱子里装有编号为 1,2,3,4,5 的完全一样的 5 个球,现从中同时取出 2 个球,设 X 表示取出球的最大编号,求 X 的分布列.

B　组

1. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{c}{k(k+1)}(k=1,2,3,4)$,其中 c 是常数,则 $P\left(\frac{1}{2}<\xi<\frac{5}{2}\right)$的值为(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

2. 有 10 张卡片,其中 8 张标有数字 2,有 2 张标有数字 5,从中随机抽取 3 张,设 ξ 表示 3 张卡片上的数字之和,求随机变量 ξ 的分布列.

3. 一种电路控制器在出厂时每四件一等品装成一箱,工人在装箱时不小心把两件二等品和两件一等品装入了一箱,为找出该箱中的二等品,需要对该箱中的产品逐一取出进行测试.

(1) 求前两次取出的都是二等品的概率；

(2) 求第二次取出的是二等品的概率；

(3) 用随机变量 ξ 表示第二个二等品被取出时共取出的件数,求 ξ 的分布列.

§ 3 离散型随机变量的均值与方差

3.1 离散型随机变量的均值

问题提出

我们回顾一下本章第 2 节中的例 1：已知在 10 件产品中有 2 件不合格品. 从这 10 件产品中任取 3 件，用 X 表示取得产品中的不合格品的件数. 我们可求得 X 的分布列如表 6－9：

表 6－9

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

现在我们关心，取 3 件该产品时，平均会取到几件不合格品？

那么，怎样的一个数能够“代表”这个随机变量取值的平均水平呢？

分析理解

我们先来看看一个常见的求平均值的问题. 设有 12 个西瓜，其中有 4 个质量是 5 kg，3 个质量是 6 kg，5 个质量是 7 kg，求这 12 个西瓜的平均质量.

由平均数的意义，西瓜的平均质量应为 12 个瓜的总质量除以西瓜的总个数，即

$$\frac{5\times4+6\times3+7\times5}{12}=\frac{73}{12}(\mathrm{kg}).\qquad ①$$

①式也可写成如下形式：

$$5\times\frac{4}{12}+6\times\frac{3}{12}+7\times\frac{5}{12}=\frac{73}{12}(\mathrm{kg}).\qquad ②$$

其中$\frac{4}{12}$，$\frac{3}{12}$，$\frac{5}{12}$分别为质量是 5 kg，6 kg 和 7 kg 的西瓜个数在西瓜总个数中所占的比例. ②式告诉我们，如果知道各个质量所占的比例，则平均质量等于各个质量乘相应的比例，再求和.

那么，在前面“取不合格品的问题”中，根据 X 的分布列，有

$$0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=0.6.\qquad ③$$

③式表示，在一次的抽取中，3 件产品中平均有 0.6 件是不合格品. 这样，平均数 0.6 就代表“取次品问题”中随机变量 X 的平均取值.

抽象概括

设离散型随机变量 X 的分布列如表 6－10：

表 6－10

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

则称

$$EX=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$$

为随机变量 X 的**均值**或**数学期望**(简称**期望**).

均值 EX 刻画的是 X 取值的“中心位置”，反映了离散型随机变量 X 取值的平均水平，是随机变量 X 的一个重要特征.

根据均值 EX 的定义可知，随机变量的分布完全确定了它的均值；两个不同的分布可以有相同的均值. 这表明，随机变量的分布描述了随机现象的规律，从而也决定了随机变量的均值；而均值只是刻画了随机变量取值的“中心位置”这一重要特征，并不能完全决定随机变量的性质.

思考交流

举例说明不同的分布会有相同的均值.

例 1 设随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布，求 EX.

解 依题意知

$$\begin{aligned}EX&=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)\\&=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p.\end{aligned}$$

因此，当 X 服从参数为 p 的两点分布时，其均值 $EX=p$.

例 2 设 X 表示抛掷一枚均匀骰子掷出的点数，求 EX.

解 依题意知 X 的分布列为

$$P(X=i)=\frac{1}{6}\ (i=1,2,3,4,5,6),$$

如表 6－11：

表 6－11

i	1	2	3	4	5	6
$P(X=i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

根据均值的定义，可知

$$EX=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

思考交流

抛掷一枚均匀的骰子，掷出的点数只可能是1,2,…,6,怎样解释这个均值$\frac{7}{2}$呢？

例3 一个袋子里装有除颜色外完全相同的3个红球和2个黄球，从中同时取出2个，则取出的红球个数的均值是多少？

解 设X表示取出红球的个数，则X的取值为0,1,2.

$$P(X=0)=\frac{C_3^0C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10};$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5};$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^0}{C_5^2}=\frac{3}{10}.$$

故X的分布列如表6-12：

表6-12

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

根据均值的定义，可知

$$EX=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}.$$

例4 根据气象预报，某地区近期暴发小洪水的概率为0.25，暴发大洪水的概率为0.01.该地区某工地上有一台大型设备，为保护设备，有以下3种方案：

方案1：运走设备，搬运费为3 800元.

方案2：建一保护围墙，建设费为2 000元，但围墙只能防小洪水.

方案3：不采取措施，希望不发生洪水.此时遇到大洪水时要损失60 000元，遇到小洪水时要损失10 000元.

你会选择哪一种方案呢？

解 用X_1，X_2和X_3分别表示以上3种方案的损失.

采用方案1，无论有无洪水，都损失3 800元，即$X_1=3\ 800$，故$EX_1=3\ 800$(元).

采用方案2，遇到大洪水时，损失$2\ 000+60\ 000=62\ 000$(元)；没有大洪水时，损失

2 000 元. 因此，

$$EX_2 = 62\,000 \times 0.01 + 2\,000 \times (1 - 0.01) = 2\,600(\text{元}).$$

采用方案 3，遇到大洪水时，损失 60 000 元；遇到小洪水时，损失 10 000 元；无洪水时，损失为 0 元. 因此，

$$EX_3 = 60\,000 \times 0.01 + 10\,000 \times 0.25 + 0 \times (1 - 0.01 - 0.25) = 3\,100(\text{元}).$$

由此可见，平均而言方案 2 的损失最小，可供选择.

练习

1. 已知随机变量 X 的分布列如下表：

X	0	2	4	6
P	0.1	0.2	m	0.2

则 EX 的值为(　　).

A. 2　　B. 2.4　　C. 3.6　　D. 不确定

2. 已知某离散型随机变量 ξ 的均值 $E\xi = \frac{7}{6}$，ξ 的分布列如下表：

ξ	0	1	2	3
P	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	b

则 $a =$ ________，$b =$ ________.

3. 有 10 件产品，其中 3 件是次品，从中任取 2 件，若 ξ 表示取到次品的件数，则 ξ 的均值为(　　).

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{8}{15}$　　C. $\frac{14}{15}$　　D. 1

3.2 离散型随机变量的方差

实例分析

均值能够反映随机变量取值的“平均水平”，但有时两个随机变量的均值相同，其取值却存在较大的差异. 如何来研究这种差异呢？

例如，有两批灯泡，其平均寿命都是 1 000 h，仅由这一指标还不能判断这两批灯泡质量的好坏. 事实上，虽然两批灯泡的平均寿命相当，但有可能其中一批灯泡大部分的寿命集中在 950 h～1 050 h；而另一批灯泡有可能一部分寿命很长，能达到 1 500 h，另一部分寿命很

短，只能达到 500 h 左右. 因此，为了判断灯泡质量的好坏，还需要进一步考察灯泡寿命 X 与其均值 EX 的偏离程度. 若偏离程度小，则灯泡的寿命比较稳定；若偏离程度大，则灯泡寿命的稳定性比较差.

设有 A，B 两种不同类型的灯泡，通过抽样，获得它们的"寿命"分别为 X，Y（单位：h）. 已知 X，Y 的分布列如表 6－13、表 6－14：

表 6－13

X	950	1 000	1 050
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

表 6－14

Y	700	1 000	1 300
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

根据 X，Y 的分布列计算可得 $EX=EY=1\,000$ h，也就是这两种灯泡的平均寿命都是 1 000 h. 进一步观察，我们可以发现，A 类型的灯泡寿命介于 950 h～1 050 h，B 类型的灯泡寿命介于 700 h～1 300 h，直观上看，A 类型的灯泡寿命 X 与其均值的偏离程度要小一些.

抽象概括

若离散型随机变量 X 的分布列如表 6－15：

表 6－15

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

则 $(x_i-EX)^2$ 描述了 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相对于均值 EX 的偏离程度，而 $DX=E(X-EX)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-EX)^2p_i$ 为这些偏离程度的加权平均，刻画了随机变量 X 与其均值 EX 的平均偏离程度. 我们称 DX 为随机变量 X 的**方差**，其算术平方根 $\sqrt{DX}$ 为随机变量 X 的**标准差**，记作 σ_X .

随机变量的方差 DX 和标准差 σ_X 都反映了随机变量的取值偏离于均值的平均程度. 方差（标准差）越小，则随机变量偏离于均值的平均程度越小；反之，方差（标准差）越大，则随机变量的取值越分散.

在上面的例子中，A 类型灯泡寿命 X 的方差为

$$DX=E(X-EX)^2=(-50)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{2}{3}+50^2\times\frac{1}{6}=\frac{2\,500}{3},$$

标准差为 $\sigma_X=\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$；

B类型灯泡寿命 Y 的方差为

$$DY=E(Y-EY)^2=(-300)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{2}{3}+300^2\times\frac{1}{6}=30\ 000,$$

标准差为 $\sigma_Y=100\sqrt{3}$.

显然，A类型灯泡的方差要小，质量要好.

例5 随机抛掷一枚均匀的骰子，求掷出的点数 X 的方差和标准差(结果精确到0.01).

解 掷出点数 X 的分布列如表6-16：

表6-16

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$EX=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5;$$

$$\begin{aligned}DX&=(1-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(2-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(3-3.5)^2\times\frac{1}{6}+\\&\quad(4-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(5-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(6-3.5)^2\times\frac{1}{6}\\&=\frac{35}{12}\approx2.92;\end{aligned}$$

$$\sigma_X=\sqrt{DX}\approx1.71.$$

例6 甲、乙两名工人加工同一种零件，两人每天加工的零件数相等，设 ξ，η 分别表示甲、乙两人所加工出的次品件数，且 ξ 和 η 的分布列分别如表6-17、表6-18：

表6-17

ξ	0	1	2
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

表6-18

η	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

试比较这两名工人谁的技术水平更高.

解 因为 $E\xi=0\times\dfrac{3}{5}+1\times\dfrac{1}{10}+2\times\dfrac{3}{10}=0.7$，

$$E\eta=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}=0.7,$$

即 $E\xi=E\eta$，说明甲、乙两名工人所加工出的平均次品件数相同，可以认为他们的技术水平相当.

又因为 $D\xi=(0-0.7)^2\times\frac{3}{5}+(1-0.7)^2\times\frac{1}{10}+(2-0.7)^2\times\frac{3}{10}=0.81$，

$D\eta=(0-0.7)^2\times\frac{1}{2}+(1-0.7)^2\times\frac{3}{10}+(2-0.7)^2\times\frac{1}{5}=0.61$，

所以 $D\xi>D\eta$，说明工人乙的技术比较稳定.

练 习

1. 设随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布，求 DX.
2. 已知随机变量 X 的分布列如下表：

X	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

求 DX 和 σ_X.

习题 6－3

A 组

1. 若随机变量 ξ 的分布列如下表，则 $E\xi$ 的值为________.

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$2x$	$3x$	$7x$	$2x$	$3x$	x

2. 已知 X 表示抛掷两枚均匀骰子掷出的点数之和，求 X 的均值.
3. 有甲、乙两种棉花，从中各抽取等量的样品进行检验，结果如下：

$X_甲$	28	29	30	31	32
P	0.1	0.15	0.5	0.15	0.1

$X_乙$	28	29	30	31	32
P	0.13	0.17	0.4	0.17	0.13

其中 X 表示纤维长度(单位:mm)，根据纤维长度的均值和方差比较甲、乙两种棉花的质量.

4. 设进入某商场的每一位顾客购买甲种商品的概率为 0.5，购买乙种商品的概率为 0.6，且购买甲种商品与购买乙种商品相互独立，各顾客之间购买商品也是相互独立的.

(1) 求进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种的概率；

(2) 求进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种的概率；

(3) 设 ξ 表示进入商场的 3 位顾客中至少购买甲、乙两种商品中的一种的人数，求 ξ 的分布列及均值.

B 组

1. 在一次购物抽奖活动中，假设某 10 张券中有一等奖奖券 1 张，可获价值 50 元的奖品；有二等奖奖券 3 张，每张可获价值 10 元的奖品；其余 6 张没有奖. 某顾客从此 10 张券中任抽 2 张，求该顾客获得的奖品总价值 ξ 的分布列和均值 $E\xi$.

2. A，B 两个代表队进行乒乓球对抗赛，每队三名队员，A 队队员是 A_1，A_2，A_3，B 队队员是 B_1，B_2，B_3，按以往多次比赛的统计，对阵队员之间胜负的概率如下表：

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场，每场胜队得 1 分，负队得 0 分，设 ξ，η 分别表示 A 队、B 队最后所得总分. 求：

(1) ξ，η 的分布列；

(2) $E\xi$，$E\eta$.

§4 二项分布与超几何分布

4.1 二项分布

实例分析

某射击运动员进行了 4 次射击，假设每次射击命中目标的概率都为 $\frac{3}{4}$，且各次命中目标与否是相互独立的. 用 X 表示这 4 次射击中命中目标的次数，如何表示 X 的分布列和均值呢?

每次射击都有两种可能的结果：命中目标或没有命中目标，并且每次射击命中目标的概率都是 $p=\frac{3}{4}$，每次射击没有命中目标的概率均为 $1-p=\frac{1}{4}$. 在 4 次射击中，命中目标的次数 X 的可能取值为 0，1，2，3，4.

用事件 $A_k(k=1,2,3,4)$ 表示“第 k 次射击命中目标”，用事件 $B_k(k=0,1,2,3,4)$ 表示“运动员进行 4 次射击，命中目标 k 次”.

当 $X=0$，即 4 次都没有命中目标（事件 B_0 发生）时，由于 $B_0=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$，每次射击都是独立的，从而

$$P(X=0)=P(B_0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})=\left(1-\frac{3}{4}\right)^4.$$

当 $X=1$，即 4 次射击恰有 1 次命中目标（事件 B_1 发生）时，由于 $B_1=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$，从而

$$\begin{aligned}P(X=1)=P(B_1)&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)\\&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)\\&=4\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^3=\mathrm{C}_4^1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-1}.\end{aligned}$$

事实上，当 $X=k(k=0,1,2,3,4)$ 时，4 次射击有 k 次命中目标，有 $(4-k)$ 次没有命中目标（事件 B_k 发生），这包含 C_4^k 种情况. 根据互斥事件的概率加法公式和相互独立事件的概率乘法公式，可得

$$P(X=k)=P(B_k)=\mathrm{C}_4^k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-k}(k=0,1,2,3,4).$$

这样，X 的分布列就可以写成如表 6-19 的形式：

表 6-19

X	0	1	2	3	4
P	$C_4^0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^4$	$C_4^1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^3$	$C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^2$	$C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\right)^1$	$C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(1-\frac{3}{4}\right)^0$

思考交流

在上面的问题中，将一次射击看成做了一次试验，思考并回答下列问题：

(1) 一共进行了几次试验？每次试验有几种可能的结果？

(2) 如果将每次试验的两种结果分别称为"成功"(命中目标)和"失败"(没有命中目标)，那么每次试验成功的概率是多少？它们相同吗？

(3) 各次试验是否相互独立？在随机变量 X 的分布列的计算中，独立性具体应用在哪里？

抽象概括

在研究随机现象时，经常要在相同条件下重复做大量试验来发现规律. 一般地，在相同条件下重复做 n 次伯努利试验，且每次试验的结果都不受其他试验结果的影响，称这样的 n 次独立重复试验为 **n 重伯努利试验**.

一般地，在 n 重伯努利试验中，用 X 表示这 n 次试验中成功的次数，且每次成功的概率均为 p，则 X 的分布列可以表示为

$$\boxed{P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n).}$$

若一个随机变量 X 的分布列如上所述，则称 X 服从参数为 n,p 的**二项分布**，简记为 $X\sim B(n,p)$.

显然，两点分布是二项分布在参数 $n=1$ 时的特殊情况.

思考交流

下列随机变量 X 服从二项分布吗？如果服从二项分布，其参数 n,p 分别是什么？

(1) 抛掷 n 枚均匀的相同骰子，X 表示"掷出的点数为 1"的骰子数；

(2) n 个新生婴儿，X 表示男婴的个数；

(3) 某产品的次品率为 p，X 表示 n 个产品中的次品的个数；

(4) 女性患色盲的概率为 0.25%，X 表示任取 n 个女性中患色盲的人数.

例 1 某公司安装了 3 台报警器，它们彼此独立工作，且发生险情时每台报警器报警的概率均为 0.9. 求发生险情时，下列事件的概率：

(1) 3 台都没报警；　　(2) 恰有 1 台报警；

(3) 恰有 2 台报警；　　(4) 3 台都报警；

(5) 至少有 2 台报警；　　(6) 至少有 1 台报警.

解 设 X 表示在发生险情时 3 台报警器中报警的台数，由题意知 $X\sim B(3,0.9)$，它的分布列为

$$P(X=k)=C_3^k\,0.9^k\,(1-0.9)^{3-k}(k=0,1,2,3),$$

如表 6-20：

表 6-20

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0.001	0.027	0.243	0.729

(1) 3 台都没报警的概率为 $P(X=0)=0.001$；

(2) 恰有 1 台报警的概率为 $P(X=1)=0.027$；

(3) 恰有 2 台报警的概率为 $P(X=2)=0.243$；

(4) 3 台都报警的概率为 $P(X=3)=0.729$；

(5) 至少有 2 台报警的概率为 $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=0.243+0.729=0.972$；

(6) 至少有 1 台报警的概率为 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0.001=0.999$.

例 2 一批产品中，次品率为 $\frac{1}{3}$. 现连续抽取 4 次，每次抽取 1 件产品，用随机变量 ξ 表示抽取的次品的件数，求 $E\xi$ 和 $D\xi$.

解 由题意知 $\xi\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，它的分布列为

$$P(\xi=k)=C_4^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-k}(k=0,1,2,3,4),$$

如表 6-21：

表 6-21

k	0	1	2	3	4
$P(\xi=k)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$E\xi=0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{24}{81}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{1}{81}=\frac{4}{3};$$

$$D\xi=\left(0-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{16}{81}+\left(1-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{32}{81}+\left(2-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{24}{81}+\left(3-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{8}{81}+\left(4-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{1}{81}=\frac{8}{9}.$$

一般地，若随机变量 $X \sim B(n,p)$，则

$$\boxed{EX=np, DX=np(1-p).}$$

特殊地，若随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布，则

$$\boxed{EX=p, DX=p(1-p).}$$

有人这样认为，抛掷一枚均匀的硬币 100 次，恰好 50 次正面朝上的概率很大. 你同意他的想法吗?

动手实践

1. 全班每人抛掷一枚均匀的硬币 100 次（或利用科学计算器产生随机数进行模拟），记录正面朝上的次数. 计算恰好得到了 50 次正面朝上的同学人数占全班同学总人数的比例.

2. 每人再做一次试验，计算恰好得到了 50 次正面朝上的同学人数占全班同学总人数的比例.

分析理解

有人给出了一个抛掷均匀硬币的模拟试验[①]，试验相当于 100 个人，每人都抛掷 100 次均匀硬币，记录各自掷出正面朝上的次数如下：

54	46	53	55	46	54	41	48	51	53
48	46	40	53	49	49	48	54	53	45
43	52	58	51	51	50	52	50	53	49
58	60	54	55	50	48	47	57	52	55
48	51	51	49	44	52	50	46	53	41
49	50	45	52	52	48	47	47	47	51
45	47	41	51	49	59	50	55	53	50
53	52	46	52	44	51	48	51	46	54
45	47	46	52	47	48	59	57	45	48
47	41	51	48	59	51	52	55	39	41

在这 100 个数字中，50 出现了 7 次，因此，“抛掷 100 次均匀的硬币，恰好出现 50 次正面朝上”的频率是 $\frac{7}{100}=0.07$.

① 参见费勒著《概率论及其应用》.

我们也可以从理论上计算这个概率.用 X 表示 100 次抛掷中正面朝上的次数,则易知 X 服从参数为 $n=100,p=\frac{1}{2}$ 的二项分布.因此,100 次抛掷中恰有 50 次正面朝上的概率为

$$P(X=50)=C_{100}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100-50}=C_{100}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\approx 0.08.$$

由此可见,前面算出的频率与理论上的概率值是很接近的.

人们也许存在着这样的误解,认为"抛掷 100 次均匀的硬币出现 50 次正面朝上"是必然的,或者说它的概率应该很大,但通过做试验和计算表明这个概率只有 8%左右.由此可见,学习概率的知识有时能够帮助我们澄清一些误解.

例 3 某车间有 5 台机床,每台机床正常工作与否彼此独立,且正常工作的概率均为 0.2.设每台机床正常工作时的电功率为 10 kW,但因电力系统发生故障现总功率只能为 30 kW,问此时车间不能正常工作的概率有多大(结果精确到 0.001).

分析 我们将每台机床是否能正常工作看成一次试验,那么一共有 5 次试验,并且它们彼此是独立的;在每次试验中,把正常工作看作"成功",不正常工作看作"失败",那么每次试验"成功"的概率都是 0.2.如果令 X 为 5 台机床中正常工作的台数,那么 X 服从参数为 $n=5,p=0.2$ 的二项分布.

而题目中"车间不能正常工作"是指总功率超过 30 kW,即 $X\geqslant 4$.

解 设 X 为 5 台机床中正常工作的台数,则 X 服从参数为 $n=5,p=0.2$ 的二项分布,即

$$P(X=k)=C_5^k 0.2^k(1-0.2)^{5-k}(k=0,1,2,3,4,5).$$

于是,由题意可得

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 4)&=P(X=4)+P(X=5)\\&=C_5^4\times 0.2^4\times 0.8+C_5^5\times 0.2^5\times 0.8^0\\&\approx 0.007.\end{aligned}$$

这是一个概率很小的事件,几乎不会发生.因此,如果车间不能正常工作时不会造成破坏性后果,那么在总功率只能为 30 kW 的情况下仍可以正常安排生产.

练 习

1. 设随机变量 X 服从二项分布 $B\left(6,\frac{1}{2}\right)$,则 $P(X=3)=$(　　).

A. $\frac{5}{16}$　　B. $\frac{3}{16}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{3}{8}$

2. 若某人每次射击命中目标的概率都为 0.6,则经过 3 次射击,此人至少有 2 次命中目标的概率为(　　).

A. $\frac{81}{125}$　　B. $\frac{54}{125}$　　C. $\frac{36}{125}$　　D. $\frac{27}{125}$

3. 设随机变量 $\xi\sim B(10,0.8)$,求 $E\xi$.

4.2 超几何分布

实例分析

已知在 10 件产品中有 4 件次品，现从这 10 件产品中任取 3 件，用 X 表示取得次品的件数，试写出 X 的分布列.

首先，从这 10 件产品中任取 3 件，共有 C_{10}^3 种取法，每一种取法都是等可能的.

已知在 10 件产品中有 4 件次品，故 X 的可能取值为 0，1，2，3.

当 $X=0$ 时，表示"任取的 3 件产品中不含次品"，即从 4 件次品中取出 0 件，再从 6 件正品中取出 3 件，共有 $C_4^0C_6^3$ 种取法，故事件$\{X=0\}$的概率为

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}.$$

当 $X=1$ 时，表示"任取的 3 件产品中恰有 1 件次品"，即从 4 件次品中取出 1 件，再从 6 件正品中取出 2 件，共有 $C_4^1C_6^2$ 种取法，故事件$\{X=1\}$的概率为

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$

同理，可得

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}.$$

事实上，当 $X=k(k=0,1,2,3)$时，表示"任取的 3 件产品中恰有 k 件次品"，即从 4 件次品中取出 k 件，再从 6 件正品中取出$(3-k)$件，共有 $C_4^kC_6^{3-k}$ 种取法，故事件$\{X=k\}$的概率为

$$P(X=k)=\frac{C_4^kC_6^{3-k}}{C_{10}^3}(k=0,1,2,3).$$

因此，随机变量 X 的分布列如表 6－22：

表 6－22

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

抽象概括

一般地，设有 N 件产品，其中有 $M(M\leqslant N)$件次品. 从中任取 $n(n\leqslant N)$件产品，用 X 表

示取出的 n 件产品中次品的件数，那么

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \max\{0, n-(N-M)\} \leqslant k \leqslant \min\{n, M\}.$$

其中 $n \leqslant N, M \leqslant N, n, M, N \in \mathbf{N}_+$.

公式中的 k 可以取的最小值为 $\max\{0, n-(N-M)\}$，而不一定是 0. 例如，有 100 件产品，其中有 20 件次品，从中任取 85 件产品，此时，至少要取到 5 件次品，而不是 0 件.

若一个随机变量 X 的分布列由上式确定，则称随机变量 X 服从参数为 N, M, n 的**超几何分布**.

思考交流

下列随机变量 X 是否服从超几何分布？如果服从超几何分布，其参数 N, M, n 分别是多少？

(1) 一个班共有 45 名学生，其中女生 20 人，现从中任选 7 人，用 X 表示选出的女生人数；

(2) 从一副扑克牌（去掉大、小王，共 52 张）中取出 10 张牌，用 X 表示取出的黑桃的张数.

例 4 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛：

(1) 求所选 3 人都是男生的概率；

(2) 求所选 3 人中恰有 1 名女生的概率；

(3) 求所选 3 人中至少有 1 名女生的概率；

(4) 设所选 3 人中女生的人数为 X，求 X 的分布列及 EX.

解 依题意知从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛，共有 C_6^3 种选法，且每一种选法都是等可能的.

(1) 所选 3 人都是男生的概率为 $\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$.

(2) 所选 3 人中恰有 1 名女生的概率为 $\frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$.

(3) 所选 3 人中至少有 1 名女生的概率为 $\frac{C_2^1 C_4^2+C_2^2 C_4^1}{C_6^3}=\frac{4}{5}$.

(4) 依题意知 X 服从参数为 6,2,3 的超几何分布，其分布列为

$$P(X=k)=\frac{C_2^k C_{6-2}^{3-k}}{C_6^3}(k=0,1,2),$$

如表 6－23：

表 6－23

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

根据均值的定义，可知

$$EX=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1.$$

一般地，当随机变量 X 服从参数为 N,M,n 的超几何分布时，其均值为 $EX=\frac{nM}{N}$.

练　习

1. 已知某社区的 10 位选民中有 5 位支持候选人甲，现随机采访他们中间的 4 位，求其中至少有 2 位支持候选人甲的概率.
2. 从 4 名男生和 3 名女生中任选 3 人参加辩论比赛，设随机变量 X 表示所选 3 人中女生的人数.
   (1) 求 X 的分布列；
   (2) 求 X 的均值.

习题 6－4

A　组

1. 设随机变量 X 服从二项分布 $B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，求：
   (1) $P(X=2)$；　　(2) $P(X\geqslant 1)$.
2. 某班有 30 名男生和 10 名女生，现从中随机选取 5 名学生，计算所选学生中女生的人数 X 的分布列和均值.
3. 某篮球运动员投篮的命中率为 0.7，现投了 6 次球.
   (1) 求恰有 4 次命中的概率；
   (2) 求至多有 4 次命中的概率；
   (3) 设命中的次数为 X，求 EX.
4. 假设 5 名工人独立地工作，每名工人在 1 h 内平均有 12 min 需要用电$\left(\text{即任一时刻需要用电的概率为}\frac{12}{60}\right)$.
   (1) 求在同一时刻恰有 3 名工人需要用电的概率；
   (2) 如果在同一时刻最多只能供给 3 名工人所需的电力，求超过负荷的概率.

5. 高二(1)班的联欢会设计了一项游戏：准备了 10 张相同的卡片，其中只在 5 张卡片上印有“奖”字. 游戏者从 10 张卡片中任意抽取 5 张，如果抽到 2 张或 2 张以上印有“奖”字的卡片，就可获得一件精美小礼品；如果抽到的 5 张卡片都印有“奖”字，除精美小礼品外，还可获赠一套丛书. 一名同学准备试一试，那么获得精美小礼品的概率是多少？能获赠一套丛书的概率又是多少？

6. 袋中有除颜色外完全相同的 2 个白球和 3 个黑球.
   (1) 采取放回抽样方式，从中依次摸出两个球，求两个球颜色不同的概率；
   (2) 采取不放回抽样方式，从中依次摸出两个球，求在第一次摸到黑球的条件下，第二次摸到黑球的概率；
   (3) 采取放回抽样方式，从中依次摸出两个球，记 X 为摸出的白球个数，求 X 的分布列、均值和方差；
   (4) 采取不放回抽样方式，从中依次摸出两个球，记 Y 为摸出的白球个数，求 Y 的分布列、均值和方差.

B 组

1. 设随机变量 $X \sim B(2,p)$，$Y \sim B(4,p)$，若 $P(X \geqslant 1)=\frac{5}{9}$，则 $P(Y \geqslant 1)=$______.

2. 一袋中有除颜色外完全相同的 5 个白球和 3 个红球，现从袋中往外取球，每次任取一个记下颜色后放回，直到红球出现10 次时停止，设停止时共取了 ξ 次球，则 $P(\xi=12)=$( ).

   A. $C_{12}^{10}\left(\frac{3}{8}\right)^{10}\left(\frac{5}{8}\right)^{2}$ B. $C_{11}^{9}\left(\frac{3}{8}\right)^{9}\left(\frac{5}{8}\right)^{2}\frac{3}{8}$

   C. $C_{11}^{9}\left(\frac{5}{8}\right)^{9}\left(\frac{3}{8}\right)^{2}$ D. $C_{11}^{9}\left(\frac{3}{8}\right)^{9}\left(\frac{5}{8}\right)^{2}$

3. 球车中装有 12 个排球，其中 9 个是新的，3 个是旧的. 从球车中任取 3 个来用，用完后装回球车中(新球用完后变为旧球)，此时球车中旧球的个数 ξ 是一个随机变量，求 ξ 的分布列.

4. 现有 20 个除颜色外完全相同的球，其中 10 个红球，10 个黑球. 游戏规则如下：玩游戏者先交10 元押金，然后随机地摸 10 个球. 根据摸得球的颜色决定是否退还押金或追加奖励，具体规则如下表：

摸出的 10 个球的颜色情况	是否退还押金	是否追加奖励
10 个球颜色相同(两种可能)	退还	追加奖励 10 元
有 9 个颜色相同(两种可能)	退还	追加奖励 8 元
有 8 个颜色相同(两种可能)	退还	追加奖励 6 元
有 7 个颜色相同(两种可能)	退还	追加奖励 4 元
有 6 个颜色相同(两种可能)	退还	不追加奖励
有 5 个颜色相同(一种可能)	不退还	不奖励

总之，在所有可能的 11 种情形中，玩游戏者有 8 种情形是赚钱，2 种情形是不赔不赚，1 种情形是输钱. 他应该去玩这种游戏吗？

§5 正态分布

问题提出

前面讨论了离散型随机变量，它们的取值是可以一一列举的. 但在实际问题中，还有许多随机变量可以取某一区间中的所有值. 例如：

1. 某一自动装置无故障运转的时间 X 是一个随机变量，它可以取区间 $(0,+\infty)$ 内的所有值.

2. 某种产品的寿命（使用时间）X 是一个随机变量，它可以取区间 $[0,b]$ 或 $[0,+\infty)$ 内的所有值.

怎样描述这样的随机变量的分布情况呢？

分析理解

我们来看一个产品寿命的例子. 设 X 表示某产品的寿命（单位：h）. 人们对该产品有如下的了解：寿命小于 500 h 的概率为 0.71，寿命在 500 h～800 h 的概率为 0.22，寿命在 800 h～1 000 h 的概率为 0.07，由此我们可以画出图 6－5. 但此图是比较粗糙的，例如，它没有告诉我们产品寿命在 200 h～400 h 的概率到底是多少. 如果需了解得更多，图中的区间应分得更细，如图 6－6. 为了完全了解产品寿命的分布情况，需要将区间无限细分，最终得到一条曲线，如图 6－7. 这条曲线称为随机变量 X 的分布密度曲线，这条曲线对应的函数称为 X 的分布密度函数，记为 $f(x)$.

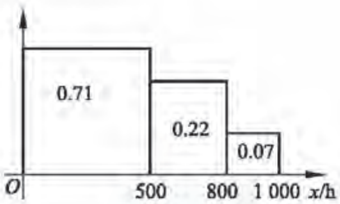


图 6－5

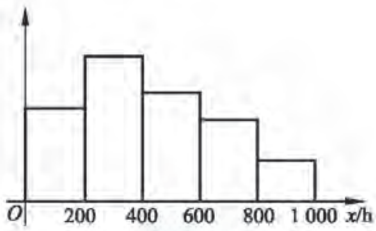


图 6－6

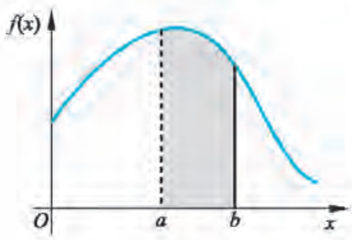


图 6－7

如果知道了随机变量 X 的分布密度曲线，则 X 取值于区间 $(a,b]$ 的概率是该曲线下相应“曲边梯形”（如图 6－7 中的阴影部分）的面积.

人们把具有分布密度函数的随机变量称为连续型随机变量，最常见的一类连续型随机变量是由误差引起的. 一般地，误差在 0 附近的概率大，远离 0 的概率小，误差大于 0 的概率与小于 0 的概率相同，即误差的分布具有对称性. 因此，这一类连续型随机变量 X 的分布密度曲线一般是形状像"钟"的光滑曲线(如图 6－8).

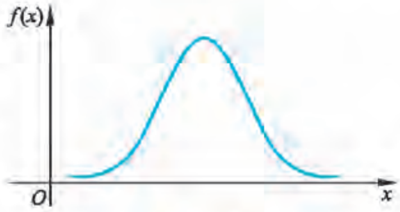


图 6－8

抽象概括

由误差引起的连续型随机变量其分布密度函数图象如图 6－8，对应的分布密度函数解析式为

$$\boxed{\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in(-\infty,+\infty),}$$

其中实数 $\mu,\sigma(\sigma>0)$为参数，这一类随机变量 X 的分布密度(函数)称为**正态分布密度(函数)**，简称**正态分布**，对应的图象为**正态分布密度曲线**，简称为**正态曲线**.

正态分布是最常见、最重要的连续型随机变量的分布，是刻画误差分布的重要模型，因此也称为**误差模型**.

下面我们看正态分布的特点：

如果一个随机变量 X 服从正态分布，那么对于任何实数 $a,b(a<b)$，随机变量 X 在区间$(a,b]$的概率可以用 $P(a<X\leqslant b)$来表示. 它的几何意义就是随机变量 X 的分布密度曲线在区间$(a,b]$对应的曲边梯形面积的值(如图 6－9).

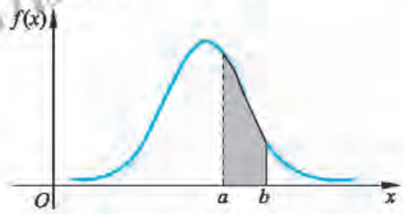


图 6－9

如果随机变量 X 服从正态分布，那么这个正态分布完全由参数 $\mu,\sigma(\sigma>0)$确定，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 其中 $EX=\mu,DX=\sigma^2$.

正态曲线有如下性质：

(1) 曲线在 x 轴的上方，与 x 轴不相交.

(2) 曲线是单峰的，关于直线 $x=\mu$ 对称.

(3) 曲线的最高点位于 $x=\mu$ 处.

(4) 当 $x<\mu$ 时，曲线上升；当 $x>\mu$ 时，曲线下降；并且当曲线向左、右两边无限延伸时，以 x 轴为渐近线(如图 6－10).

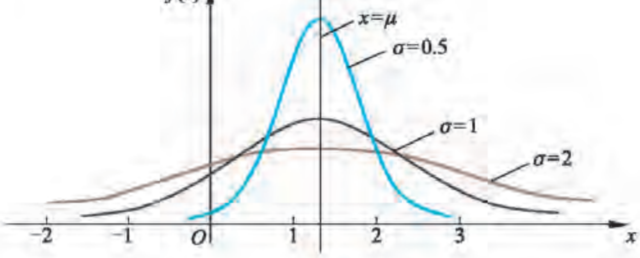


图 6－10

因为正态分布完全由 μ 和 σ 确定，所以正态曲线还具有下列特点：

(1) 当 σ 一定时，曲线的位置由 μ 确定，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移.

(2) 当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定. σ 越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越分散；σ 越小，曲线越“高瘦”，表示总体的分布越集中.

如图 6－11，正态分布随机变量 X 在区间 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma]$ $(\sigma>0)$ 上取值的概率为阴影部分的面积.

特别地，

$$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0.682\,6,$$
$$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0.954\,4,$$
$$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)\approx 0.997\,4.$$

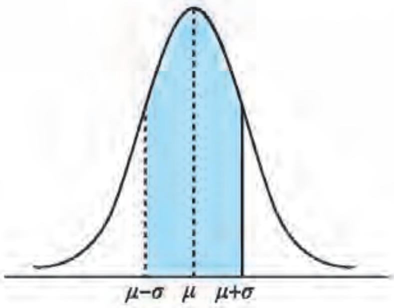


图 6－11

因此，随机变量 X 在区间 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma]$，$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$，$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 上取值的概率分别约为 68.3%，95.4%，99.7%. 而随机变量 X 在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 外取值的概率只有0.3%，通常认为这种情况在一次试验中几乎是不可能发生的，认为是小概率事件. 因此，在实际应用中，通常认为服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 X 只取区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 之间的值，并称之为 **3σ 原则**.

例 1 根据正态曲线的函数解析式，找出其均值 μ 和标准差 σ.

(1) $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, x\in\mathbf{R}$；　　(2) $\varphi(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{4}}, x\in\mathbf{R}$.

解 将所给的函数解析式与正态分布密度函数的解析式对照可得

(1) $\mu=0,\sigma=1$；　　(2) $\mu=1,\sigma=\sqrt{2}$.

例 2 某设备在正常运行时，产品的质量服从正态分布，其参数分别为 $\mu=500$ g，$\sigma=1$ g. 为了检查设备运行是否正常，质量检查员需要随机地抽取产品，测量其质量. 当检查员随机地抽取一个产品，测得其质量为 504 g 时，他立即要求停止生产，检查设备，他的决定是否有道理?

解 检查员的决定是有道理的，理由如下：

当该设备正常运行时，产品的质量服从正态分布，其参数分别为 $\mu=500$ g，$\sigma=1$ g，所以根据正态分布的性质可知产品质量在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$，即$(497,503]$ 之间的概率约为 99.7%，而产品的质量超出这个范围的概率只有 0.3%，这是一个几乎不可能发生的事件. 但是，检查员随机抽取的产品为 504 g，这说明设备的运行可能不正常，因此检查员的决定是有道理的.

这个例子反映了质量控制的基本思想，它在实际生活中具有广泛的应用.

习题 6－5

A 组

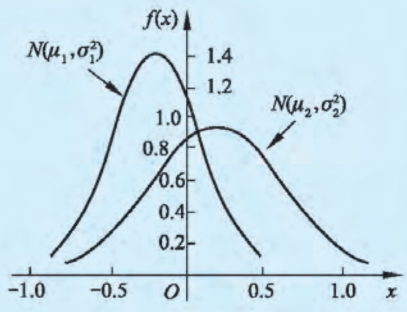
1. 设两个正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)(\sigma_1>0)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)(\sigma_2>0)$ 相应的分布密度曲线如图，则有（　　）.

   A. $\mu_1<\mu_2,\sigma_1<\sigma_2$

   B. $\mu_1<\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$

   C. $\mu_1>\mu_2,\sigma_1<\sigma_2$

   D. $\mu_1>\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$



（第 1 题）

2. 若随机变量 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，其分布密度函数为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}(x\in\mathbf{R})$，则 σ 的值为（　　）.

   A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

3. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，$P(\xi\leqslant 4)=0.84$，则 $P(\xi\leqslant 0)$ 的值为（　　）.

   A. 0.16　　B. 0.32　　C. 0.68　　D. 0.84

4. 一批电阻的阻值 X（单位：Ω）服从正态分布 $N(1\,000,5^2)$，现从甲、乙两箱成品中各随机抽取一只电阻，测得阻值分别为 1 011 Ω 和 982 Ω，可以认为________.（填写所有正确结论的序号）

   ① 甲、乙两箱电阻均可出厂；

   ② 甲、乙两箱电阻均不可出厂；

   ③ 甲箱电阻可出厂，乙箱电阻不可出厂；

   ④ 甲箱电阻不可出厂，乙箱电阻可出厂.

信息技术应用

利用 GeoGebra 探究概率分布

GeoGebra 具有一些基本概率计算功能，可以用来模拟随机现象、计算常用分布的值等. 我们仅以正态分布为例进行简要介绍.

要使用 GeoGebra 的概率功能，需要在菜单栏的“视图”选项中选择“概率统计视图”，此时出现一个交互式的对话框，允许在“分布”和“统计”功能之间进行选择（默认为

“分布”)，如图 6 - 12.

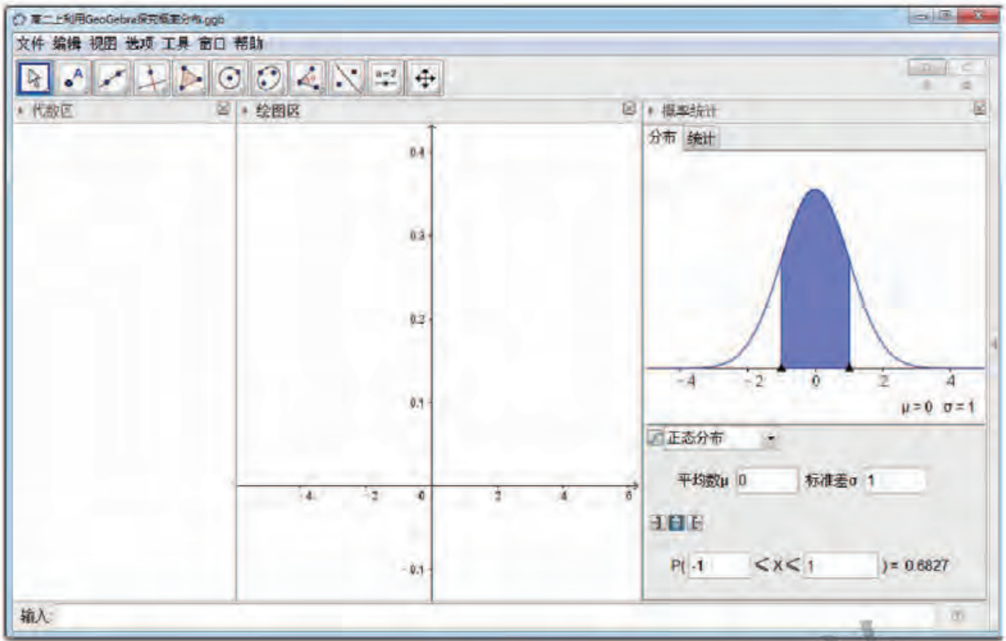


图 6 - 12

在“分布”选项下，可以选择分布函数的类型、每种分布函数所涉及的参数，以及要计算的区间等.

概率统计视图中产生的分布图象可以直接导入到绘图区使用，具体步骤如下：

(1) 先拖动边界上的小三角形选择计算的区间或直接输入计算的区间；

(2) 在正态曲线上单击鼠标右键，并在对话框中选择“复制到绘图区”(如图 6 - 13)；

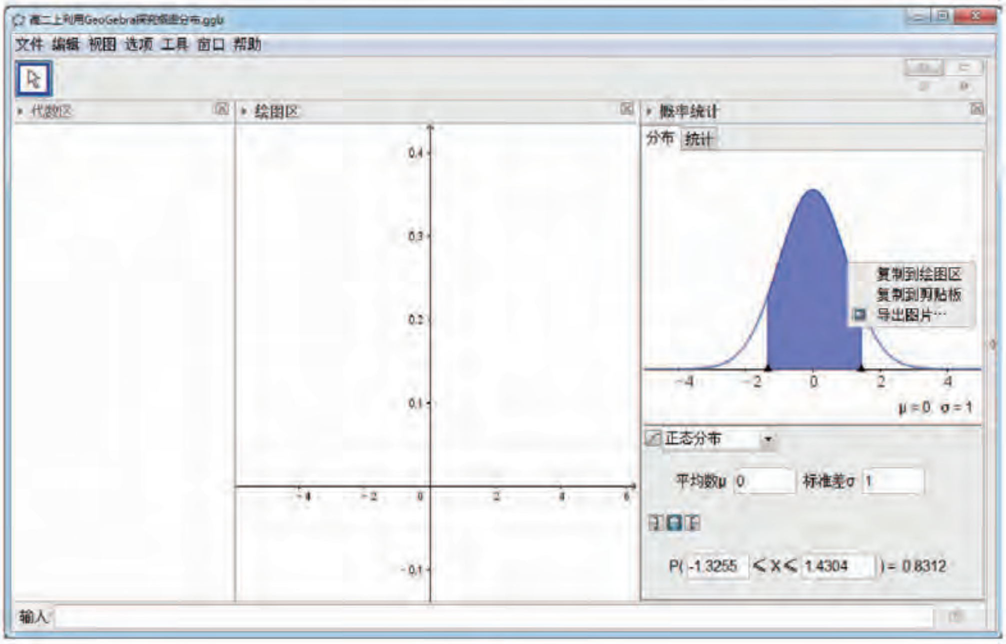


图 6 - 13

(3) 该正态曲线就会出现在绘图区，且显示其对应的密度函数、随机变量在相应区间上的概率 p. 在绘图区的图象中依然可以拖动边界上的小三角形来改变计算的区间(如图 6-14).

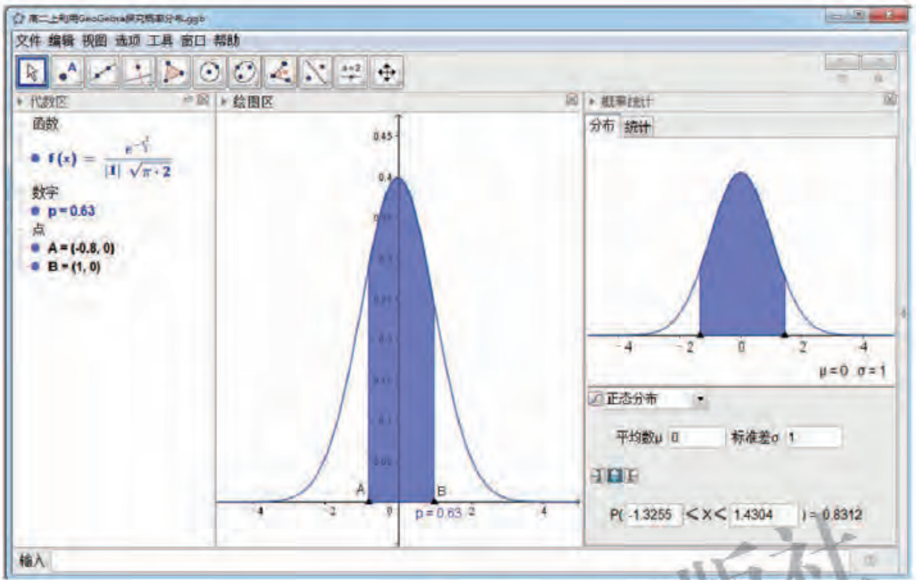


图 6-14

在“统计”选项下，可以选择各种不同的假设检验方法、输入相关参数并得到对应的结果(如图 6-15).

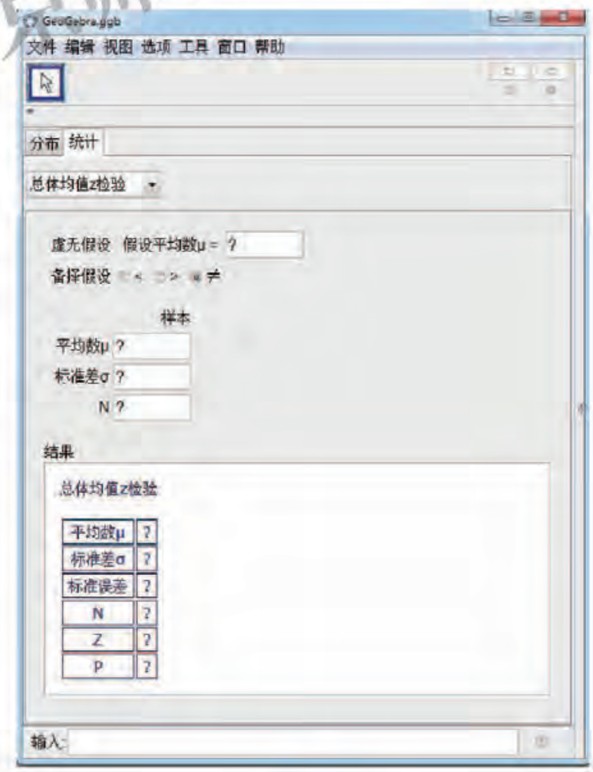
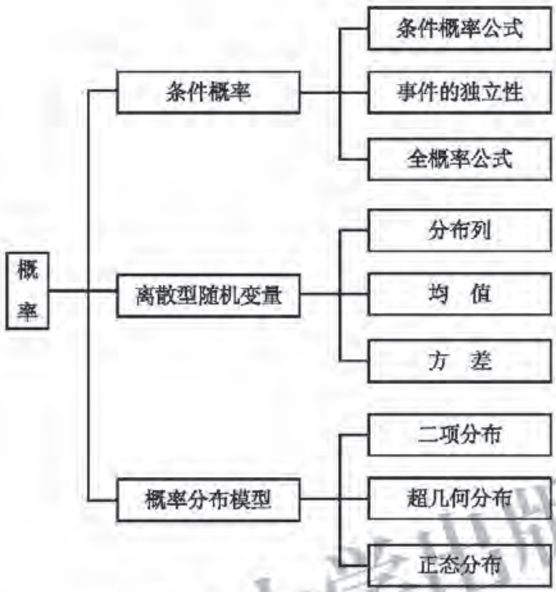


图 6-15

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

1. 随机事件的条件概率

(1) 结合古典概型，了解条件概率，能计算简单随机事件的条件概率.

(2) 结合古典概型，了解条件概率与独立性的关系.

(3) 结合古典概型，会利用乘法公式计算概率.

(4) 结合古典概型，会利用全概率公式计算概率. * 了解贝叶斯公式.

2. 离散型随机变量及其分布列

(1) 通过具体实例，了解离散型随机变量的概念，理解离散型随机变量分布列及其数字特征(均值、方差).

(2) 通过具体实例，了解伯努利试验，掌握二项分布及其数字特征，并能解决简单的实际问题.

(3) 通过具体实例，了解超几何分布及其均值，并能解决简单的实际问题.

3. 正态分布

(1) 通过误差模型，了解服从正态分布的随机变量. 通过具体实例，借助频率直方图的几何直观，了解正态分布的特征.

(2) 了解正态分布的均值、方差及其含义.

三、需要关注的问题

1. 为什么要引入随机变量的概念？举例说明离散型随机变量的含义.

2. 离散型随机变量的分布列对于刻画随机现象有什么重要意义？

3. 二项分布、超几何分布是如何定义的？这两个分布中分别包括哪些参数？它们的含义分别是什么？

4. 什么是离散型随机变量的均值和方差？请举一个生活中的例子说明它们的用处.

5. 正态分布曲线有什么性质？借助教科书中的图加以说明.

6. 学完本章后，哪些例子给你留下深刻的印象？还有哪些不理解的问题？你能在生活中找一些例子，并尝试用本章知识来解决它吗？

复习题六

A 组

1. 已知随机变量 X 所有可能的取值的集合是$\{-2,0,3,5\}$,且 $P(X=-2)=\frac{1}{4}$, $P(X=3)=\frac{1}{2}$,$P(X=5)=\frac{1}{12}$,则 $P(X=0)$ 的值为（　　）.

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{8}$

2. 下列说法正确的是(　　).

A. 离散型随机变量 X 的均值 EX 反映了 X 取值的概率的平均值

B. 离散型随机变量 X 的方差 DX 反映了 X 取值的平均水平

C. 离散型随机变量 X 的均值 EX 反映了 X 取值的平均水平

D. 离散型随机变量 X 的方差 DX 反映了 X 取值的概率的平均值

3. 设随机变量 X 服从 $B(n,p)$, $EX=8$,$DX=1.6$,则 n,p 的值分别为(　　).

A. 100 和 0.08　　B. 20 和 0.4　　C. 10 和 0.2　　D. 10 和 0.8

4. 关于正态曲线的形状,下列描述正确的是(　　).

A. 由 σ 确定,σ 越大,曲线越“矮胖”　　B. 由 μ 确定,μ 越大,曲线越“矮胖”

C. 由 σ 确定,σ 越大,曲线越“高瘦”　　D. 由 μ 确定,μ 越大,曲线越“高瘦”

5. 把 10 枚均匀的骰子全部抛掷,设 ξ 表示掷出的点数为 6 的骰子个数,则 $P(\xi\leqslant 2)=$(　　).

A. $C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{8}$　　B. $C_{10}^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+C_{10}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{9}$

C. $C_{10}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{9}+C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{8}$　　D. 以上都不对

6. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且 $P(X\leqslant C)=P(X>C)$,则 C 的值为（　　）.

A. 0　　B. σ　　C. $-\mu$　　D. μ

7. 已知随机变量 X 的分布列如下：

X	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	x	0.1

则 $P(1\leqslant X\leqslant 3)$ 的值为________.

8. 某处有水龙头共 5 个,调查表明每个水龙头被打开的概率为 $\frac{1}{10}$,用随机变量 ξ 表示同时被打开的水龙头的个数,则 $P(\xi=3)$ 的值为________.

9. 设随机变量 X 的取值为 a,b,若 $P(X=a)=p$,则 $EX=$________, $DX=$________.

10. 设随机变量 X 的分布列如下：

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$1-2q$	q^3	$-\frac{7}{3}q^2+\frac{8}{3}q-\frac{1}{2}$

(1) 求 q 的值；

(2) 求 $P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)$.

11. 一名学生每天骑自行车上学，从家到学校的途中有五个交通岗，假设他在各交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{1}{3}$. 求这名学生在首次遇到红灯或到达目的地前所经过的路口个数 X 的分布列.

12. 从一批有 10 件合格品与 3 件次品的产品中，一件一件地抽取产品，设各产品被抽到的可能性相同. 若每次抽到的产品都不放回，求直到取出合格品为止时所需抽取次数 X 的分布列.

13. 设甲、乙、丙三人每次射击命中目标的概率分别为 0.7，0.6 和 0.5.

(1) 若三人各向目标射击一次，求至少有一人命中目标的概率；

(2) 若三人各向目标射击一次，求恰有两人命中目标的概率；

(3) 若甲单独向目标射击三次，求恰好命中两次的概率；

(4) 若甲单独向目标射击三次，求命中次数 X 的分布列、均值和方差.

B 组

1. 将一枚均匀的骰子先后抛掷 3 次，至少出现一次掷出的点数为 6 的概率是(　　).

A. $\frac{2}{216}$　　B. $\frac{25}{216}$　　C. $\frac{31}{216}$　　D. $\frac{91}{216}$

2. 袋中有除颜色外完全相同的 4 个红球和 3 个黑球，现从该袋中随机取出 4 个球，设取到一个红球得 2 分，取到一个黑球得1 分，则得分 ξ 的均值是________.

3. 某保险公司新开发一项保险业务，若在一年内事件 E 发生，则公司要赔偿 a 元. 设一年内事件 E 发生的概率为 p，为使公司收益的期望值为 a 的 10%，公司应要求顾客交纳保险金________元.

4. 某商场举行抽奖促销活动，抽奖规则是：从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出 1 个球，记下颜色后放回，摸出 1 个红球可获得奖金 10 元；摸出 2 个红球可获得奖金 50 元. 现有甲、乙两位顾客，规定：甲摸一次，乙摸两次，令 ξ 表示甲、乙摸球后获得的奖金总额. 求 ξ 的分布列和均值.

5. 一接待中心有 A，B，C，D 四部热线电话. 已知某一时刻电话 A，B 占线的概率均为 0.5，电话 C，D 占线的概率均为 0.4，各部电话是否占线相互之间没有影响. 假设该时刻有 ξ 部电话占线，试求随机变量 ξ 的分布列和它的均值.

7 第七章 统计案例

“不同学科成绩之间是否存在相关性?”“吸烟与患肺癌是否有关?”……这些都是日常生活中常见的一些问题.

本章将在已经学习的统计和概率知识的基础上,通过对以上问题进行讨论,了解和使用一些常见的统计方法,进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想,以及统计方法使用的广泛性,提升数据分析、逻辑推理等核心素养.

那些默默无闻的统计学家已经改变了世界,不是发现新的事实或技术发展,而是改变了人类推理和实验的方法,以及观念形成的方式。

——哈金(Ian Hacking,1936—)

§ 1 一元线性回归

1.1 直线拟合

实例分析

在现实生活中，反映量与量之间的函数关系非常普遍，但也存在一些量与量之间不满足函数关系，如人的身高与体重. 一般说来，人的身高越高，体重就越重，二者确实有关系. 但是身高相同的人，体重却不一定相同，也就是说，给定身高 h 没有唯一的体重 m 与之对应. 在现实生活中，这样的例子还有很多，如人的年龄与血压、农作物的施肥量与产量等.

为了了解人的身高与体重的关系，我们随机抽取 9 名 15 岁的男生，测得他们的身高(单位：cm)、体重(单位：kg)如表 7－1：

表 7－1

编　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
身高/cm	165	157	155	175	168	157	178	160	163
体重/kg	52	44	45	55	54	47	62	50	53

从表 7－1 中不难看出，同一身高 157 cm 对应着不同的体重 44 kg 和 47 kg，即体重不是身高的函数. 如果把身高看作横坐标、体重看作纵坐标，在平面直角坐标系中画出对应的点(如图 7－1)，就会发现，随着身高的增长，体重基本上呈现直线增加的趋势.

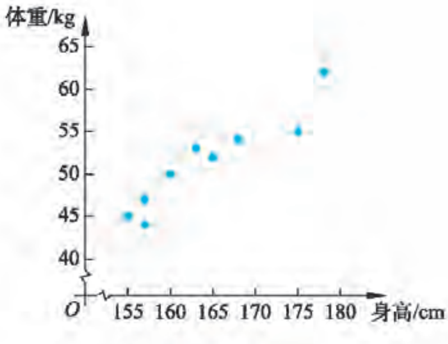


图 7－1

在图 7－1 中，每个点对应的一对数据 (x_i, y_i)，称为**成对数据**. 这些点构成的图称为**散点图**.

从散点图上可以看出，如果变量之间存在着某种关系，这些点会有一个大致趋势，这种趋势通常可以用一条光滑的曲线来近似地描述. 这样近似描述的过程称为**曲线拟合**. 若在两个变量 X 和 Y 的散点图中，所有点看上去都在一条直线附近波动，此时就可以用一条直线来近似地描述这两个量之间的关系，称之为**直线拟合**.

那么，应当如何求出这条直线呢?

方法 1　选取散点图中的两个点，使得其余的点在这两个点所连直线两侧分布得尽可能一样多，如有人选取了(165,52)和(168,54)这两个成对数据，得到直线方程为 $2x-3y-$

$174=0$. 因此，一个身高 166 cm 的 15 岁男生，他的体重大致为 52.667 kg.

方法 2 将所有的点分成两部分，一部分是身高在 165 cm 以下的，一部分是身高在 165 cm 以上(含 165 cm)的；然后每部分的点求一个平均点：165 cm 以下的身高、体重的平均数(取整近似)作为一个平均点，即(158,48)，165 cm 以上(含 165 cm)的身高、体重的平均数(取整近似)作为另一个平均点，即(172,56)；最后将这两点连接成一条直线，得到直线方程为 $4x-7y-296=0$. 因此，一个身高 166 cm 的 15 岁男生，他的体重大致为 52.571 kg.

上面两种方法都有一定的道理. 用方法 1，若 $x=175$ cm，则可计算 $y\approx58.667$ kg；用方法 2，若 $x=175$ cm，则可计算 $y\approx57.714$ kg.

思考交流

实际上，还有很多直线拟合的方法，你能想到哪些方法呢？

练　习

1. 下表是某小卖部 6 天卖出热茶的杯数(单位：杯)与当天气温(单位：℃)的对比表：

气温/℃	26	18	13	10	4	−1
杯数/杯	20	24	34	38	50	64

(1) 根据上表中的数据画出散点图.

(2) 你能从散点图中发现当天气温与卖出热茶的杯数近似地呈现什么关系吗？

(3) 如果近似呈线性关系，请画出一条直线来近似地表示这种线性关系.

(4) 如果某天的气温是 −5 ℃，预测这天小卖部卖出热茶的杯数.

1.2 一元线性回归方程

对于给定的两个变量 X 和 Y(如身高和体重)，可以把其成对的观测值 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n) 表示为平面直角坐标系中的 n 个点. 现在希望找到一条直线 $Y=a+bX$，使得对每一个 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，由这个直线方程计算出来的值 $a+bx_i$ 与实际观测值 y_i 的差异尽可能小. 为此，希望 $[y_1-(a+bx_1)]^2+[y_2-(a+bx_2)]^2+\cdots+[y_n-(a+bx_n)]^2$ 达到最小. 换句话说，我们希望 a，b 的取值能使上式达到最小. 这个方法称为**最小二乘法**.

先研究简单的情形，考虑 3 对数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，即：求 a，b 的值，使得偏差 $y_i-(a+bx_i)(i=1,2,3)$ 的平方和最小，即 $[y_1-(a+bx_1)]^2+[y_2-(a+bx_2)]^2+[y_3-(a+bx_3)]^2$

达到最小. 下面我们用向量的方法解决这个问题.

首先,用向量的语言描述问题.

要用向量的语言描述偏差 $y_i-(a+bx_i)(i=1,2,3)$,容易想到将偏差作为向量的分量,即$(y_1-(a+bx_1),y_2-(a+bx_2),y_3-(a+bx_3))$.

这样,"求 a,b 的值,使得偏差 $y_i-(a+bx_i)(i=1,2,3)$ 的平方和最小"的问题就等价于:求 a,b 的值,使得向量

$$(y_1-(a+bx_1),y_2-(a+bx_2),y_3-(a+bx_3))$$

的长度最小. 下面我们分析这个向量:

$$\begin{aligned}&(y_1-(a+bx_1),y_2-(a+bx_2),y_3-(a+bx_3))\\=&(y_1,y_2,y_3)-(a+bx_1,a+bx_2,a+bx_3)\\=&(y_1,y_2,y_3)-[(a,a,a)+(bx_1,bx_2,bx_3)]\\=&(y_1,y_2,y_3)-[a(1,1,1)+b(x_1,x_2,x_3)]\\=&\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX}).\end{aligned}$$

其中,$\overrightarrow{OY}=(y_1,y_2,y_3)$,$\overrightarrow{OI}=(1,1,1)$,$\overrightarrow{OX}=(x_1,x_2,x_3)$,均为已知向量.

至此,"求 a,b 的值,使得偏差 $y_i-(a+bx_i)(i=1,2,3)$ 的平方和最小"的问题就转化为:求 a,b 的值,使$\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})$的长度最小.

其次,用向量的方法思考问题.

如图 7-2,$\overrightarrow{OI}$和$\overrightarrow{OX}$确定一个平面,记作 α. 由平面向量基本定理可知,对任意的 a,b,$a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX}$都在平面 α 内;反之,平面 α 内的任意向量都可以用 $a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX}$ 来表示. 也就是说,当 a,b 变化时,$a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OM}$的端点 M 是平面 α 内的一个动点.

如图 7-2,$\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})=\overrightarrow{MY}$,其中,点 Y 是平面 α 外的一个定点,点 M 是平面 α 内的一个动点.

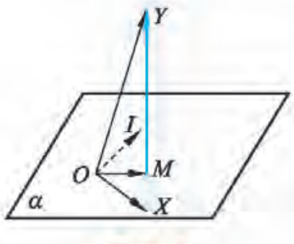


图 7-2

要使$|\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})|$最小,即$|\overrightarrow{MY}|$最小,由点到平面距离的定义,当$\overrightarrow{MY}\perp\alpha$ 时,线段 MY 的长度最短,即$\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})$与平面 α 垂直时,$\overrightarrow{MY}$的长度最小.

根据线面垂直的判定定理,要使 $\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})$与平面 α 垂直,只需其与平面 α 内的两个不共线的向量 $\overrightarrow{OI}$和 $\overrightarrow{OX}$均垂直.

最后,用向量的方法解决问题.

求$|\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})|$最小时的 a,b 的值,就是求 $\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})$与 $\overrightarrow{OI}$和 $\overrightarrow{OX}$的数量积分别为 0 时的 a,b 的值,即

$$\begin{cases}[\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})]\cdot\overrightarrow{OI}=0,\\ [\overrightarrow{OY}-(a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OX})]\cdot\overrightarrow{OX}=0.\end{cases}$$

用向量的坐标表示，即

$$\begin{cases}[(y_1,y_2,y_3)-a(1,1,1)-b(x_1,x_2,x_3)]\cdot(1,1,1)=0,\\ [(y_1,y_2,y_3)-a(1,1,1)-b(x_1,x_2,x_3)]\cdot(x_1,x_2,x_3)=0.\end{cases}$$

化简，得

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}y_i-3a-b\sum_{i=1}^{3}x_i=0,\\ \sum_{i=1}^{3}x_iy_i-a\sum_{i=1}^{3}x_i-b\sum_{i=1}^{3}x_i^2=0.\end{cases}$$

若记 $\sum_{i=1}^{3}y_i=3\overline{y},\sum_{i=1}^{3}x_i=3\overline{x}$,

则

$$\begin{cases}\overline{y}-a-b\overline{x}=0,\\ \sum_{i=1}^{3}x_iy_i-3a\overline{x}-b\sum_{i=1}^{3}x_i^2=0.\end{cases}$$

如果把它的解记作 $\hat{a},\hat{b}$，得到：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_iy_i-3\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{3}x_i^2-3\overline{x}^2}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-3\overline{x}\,\overline{y}}{x_1^2+x_2^2+x_3^2-3\overline{x}^2},\qquad ①$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.\qquad ②$$

①，②两式推广到 n 对数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 仍然成立，即：使 $[y_1-(a+bx_1)]^2+[y_2-(a+bx_2)]^2+\cdots+[y_n-(a+bx_n)]^2$ 达到最小的 a,b 取值为

$$\hat{b}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n-n\overline{x}\,\overline{y}}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-n\overline{x}^2},$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

其中，$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),\overline{y}=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$.

这时直线方程 $Y=\hat{a}+\hat{b}X$ 称作 Y 关于 X 的**线性回归方程**，相应的直线称作 Y 关于 X 的**回归直线**(如图 7-3)，$\hat{a},\hat{b}$ 是这个**线性回归方程的系数**.

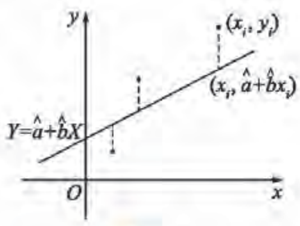


图 7-3

根据表 7-1 中身高、体重的数据，利用上述方法得到身高和体重满足的线性回归方程为

$$Y=0.648X-55.139.$$

由此可知，一个身高 166 cm 的 15 岁男生，他的体重大致为 52.429 kg.

同理，一个身高 175 cm 的 15 岁男生，他的体重大致为 58.261 kg.

在这里需要强调的是：身高和体重之间并没有函数关系，我们得到的线性回归方程只是

对其变化趋势的一种近似描述. 对一个给定身高的人，人们可以用这个方程来估计这个人的体重，这是十分有意义的.

根据最小二乘法的思想和公式，利用计算机中的 Excel 软件，可以很方便地求出线性回归方程. 具体步骤如下：

> **注 意**
>
> 不同版本的 Excel 软件，步骤和图形显示可能会有所不同.

(1) 输入所有数据，并将所有数据选中，再选择菜单栏中的“插入”，单击图表中“插入散点图（X，Y）或气泡图”下拉菜单中散点图的第一个图，形成散点图，并单击图表右侧第一个“图表元素”，勾选“趋势线”（如图 7－4）.

图 7－4

(2) 右击图表中的直线，出现“设置趋势线格式”，单击后，勾选“显示公式”，即可得到回归直线的线性回归方程（如图 7－5）.

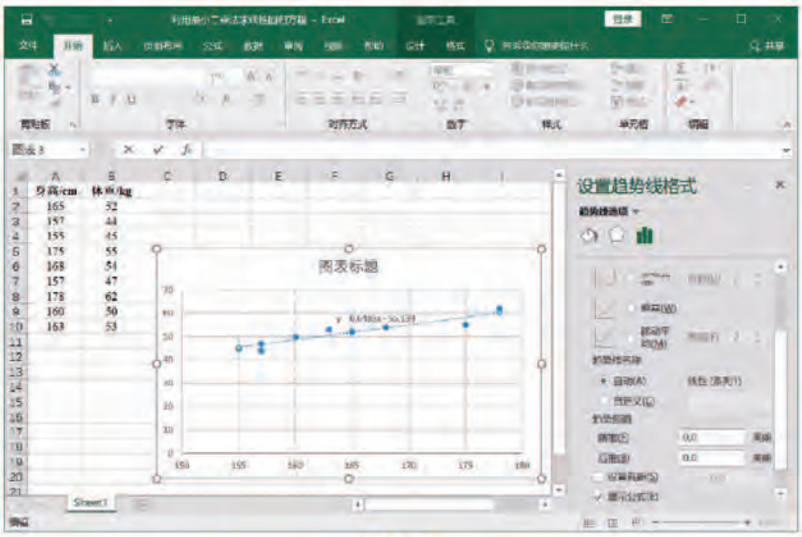


图 7－5

例 1 在本章第 1.1 节的练习中，从散点图可以看出，某小卖部 6 天卖出热茶的杯数 Y(单位：杯) 与当天气温 X(单位：℃) 之间存在近似的线性关系. 数据如表 7－2.

表 7－2

气温 X/℃	26	18	13	10	4	-1
杯数 Y/杯	20	24	34	38	50	64

(1) 试用最小二乘法求出 Y 关于 X 的线性回归方程；

(2) 如果某天的气温是 -3 ℃，请预测这天可能会卖出热茶多少杯.

解 (1) 从散点图 7－6 中可以看出，表 7－2 中的两个变量有近似的线性关系.

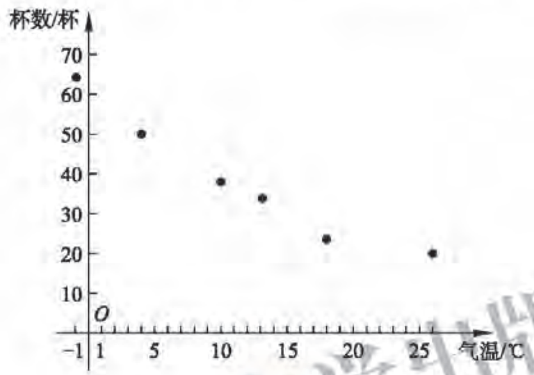


图 7－6

先列表(如表 7－3)，并求得 $\bar{x}=\frac{35}{3}$，$\bar{y}=\frac{115}{3}$.

表 7－3

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	26	20	676	520
2	18	24	324	432
3	13	34	169	442
4	10	38	100	380
5	4	50	16	200
6	-1	64	1	-64
合　计	70	230	1 286	1 910

进而，由 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 的表达式可得

$$\hat{b}=\frac{1\ 910-6\times\frac{35}{3}\times\frac{115}{3}}{1\ 286-6\times\frac{35}{3}\times\frac{35}{3}}\approx -1.648,$$

$$\hat{a}\approx 57.557.$$

于是，Y 对 X 的线性回归方程为

$$Y=57.557-1.648X.$$

(2) 由最小二乘法得出的线性回归方程可知，当某天的气温是-3℃时，卖出热茶的杯数估计为

$$57.557-1.648\times(-3)=62.501\approx63.$$

练 习

1. 请用 Excel 软件完成此题.

一位运动生理学家根据训练水平 X(单位：kg·m/min，即每分将 1 kg 物体升高 1 m)来预测心脏血液输出量 Y(单位：L/min，即每分由心脏输出的血液的体积). 他选取四个训练水平：0，300，600，900. 随机抽取 20 人构成一个样本，随机分成四组，每个水平一组，每组 5 人训练 15 min 后，测量他们的心脏血液输出量，结果如下表. 求 Y 关于 X 的线性回归方程；若给定训练水平为 700 kg·m/min，请预测心脏血液输出量的值.

个体编号	训练水平 X/(kg·m/min)	心脏血液输出量 Y/(L/min)
1	0	4.4
2	0	5.6
3	0	5.2
4	0	5.4
5	0	4.4
6	300	9.1
7	300	8.6
8	300	8.5
9	300	9.3
10	300	9.0
11	600	12.8
12	600	13.4
13	600	13.2
14	600	12.6
15	600	13.2
16	900	17.0
17	900	17.3
18	900	16.5
19	900	16.8
20	900	17.2

习题 7－1

1. 一个车间为了规定工时定额，需要确定加工零件所花费的时间，为此进行了 10 次试验，收集数据如下：

零件数 X/个	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
加工时间 Y/min	62	68	75	81	89	95	102	108	115	122

(1) 画出散点图；

(2) 求 Y 关于 X 的线性回归方程；

(3) 关于加工零件的个数与加工时间，你能得出什么结论？

2. 有人收集了 10 年来某城市的居民年收入（即此城市所有居民在一年内的收入的总和）与某种商品的销售额的有关数据：

年　份	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
年收入 X/亿元	32.2	31.1	32.9	35.8	37.1	38.0	39.0	43.0	44.6	46.0
商品销售额 Y/万元	25.0	30.0	34.0	37.0	39.0	41.0	42.0	44.0	48.0	51.0

(1) 画出散点图；

(2) 求 Y 关于 X 的线性回归方程；

(3) 如果这座城市居民的年收入达到 40 亿元，试估计这种商品的销售额.

§ 2 成对数据的线性相关性

2.1 相关系数

问题提出

给定两个随机变量(X,Y)的 7 组成对数据：

$$(1,0),\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right),(0,1),\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right),(-1,0),\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right),(0,-1),$$

利用最小二乘法，可以得到Y关于X的线性回归方程为

$$Y=0.143X+0.102.$$

这时，X和Y是否具有线性关系呢？

分析理解

如图 7－7，易知这 7 组成对数据均位于单位圆上，所以X和Y不具备线性关系.

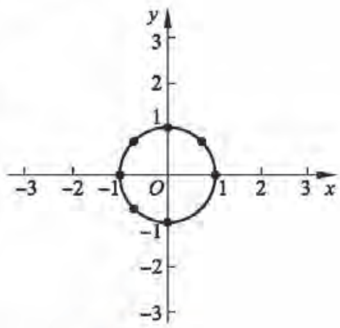


图 7－7

因此，为了使建立的线性回归方程有意义，在利用最小二乘法求线性回归方程之前，我们需要先对变量之间的线性关系作一个判断，如果数据不多，可以根据给定的数据画出散点图，再从直观上进行观测. 但是对一般的情形又如何判断呢？

为了解决这个问题，我们引入(线性)相关系数的概念，通过计算两个随机变量间的(线性)相关系数，来判断它们之间线性相关程度的大小.

给定随机变量X和Y，由本章第 1.2 节可知，由 3 对数据(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)得到的Y关于X的线性回归方程为$Y=\hat{a}+\hat{b}X$.

由$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$可知，$(\bar{x},\bar{y})$一定满足线性回归方程，从而有

$$\bar{y}=\hat{a}+\hat{b}\bar{x}. \qquad ①$$

若X和Y的线性相关性好，则y_i和$\hat{a}+\hat{b}x_i\ (i=1,2,3)$的差应该不大，最理想的状况应该是

$$y_1=\hat{a}+\hat{b}x_1,\ y_2=\hat{a}+\hat{b}x_2,\ y_3=\hat{a}+\hat{b}x_3. \qquad ②$$

由①式知，②式等价于

$$y_1-\bar{y}=\hat{b}(x_1-\bar{x}),\ y_2-\bar{y}=\hat{b}(x_2-\bar{x}),\ y_3-\bar{y}=\hat{b}(x_3-\bar{x}). \qquad ③$$

记向量 $\boldsymbol{u}=(x_1-\overline{x},x_2-\overline{x},x_3-\overline{x})$，$\boldsymbol{v}=(y_1-\overline{y},y_2-\overline{y},y_3-\overline{y})$，则③式可记为$\boldsymbol{v}=\hat{b}\boldsymbol{u}$.

这表明，线性回归方程最理想的状况是向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 共线（向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的夹角为 0 或 π）. 因此，可以用向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 夹角的大小来刻画 X 和 Y 线性相关的程度，记

$$r=\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$=\frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+(x_3-\overline{x})(y_3-\overline{y})}{\sqrt{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2}\sqrt{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+(y_3-\overline{y})^2}}.$$

显然$|r|\leqslant1$. $|r|$值越接近 1，说明 X 和 Y 的线性相关性越强；$|r|$值越接近 0，说明 X 和 Y 的线性相关性越弱.

在处理很多实际问题时，常常需要把一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 标准化，即把它转化为均值为 0、方差为 1 的数据. 如何实施呢？

令 $x_i'=\dfrac{x_i-\overline{x}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}(i=1,2,\cdots,n)$，不难验证 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$是均值为 0、方差为 1 的数据，称它为原来数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准化.

在前面的成对数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$中，把 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 分别标准化，得到

$$\boxed{x_i'=\frac{x_i-\overline{x}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}},\quad y_i'=\frac{y_i-\overline{y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}(i=1,2,\cdots,n).}$$

此时，向量$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，$(y_1',y_2',\cdots,y_n')$的夹角余弦值与向量 $\boldsymbol{u}=(x_1-\overline{x},x_2-\overline{x},\cdots,x_n-\overline{x})$，$\boldsymbol{v}=(y_1-\overline{y},y_2-\overline{y},\cdots,y_n-\overline{y})$的夹角余弦值相同.

抽象概括

一般地，设随机变量 X,Y 的 n 组观测值分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，记

$$r=\frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{\sqrt{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}\sqrt{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots+(y_n-\overline{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}},$$

称 r 为随机变量 X 和 Y 的**样本(线性)相关系数**.

为了计算的方便，我们再给出如下式子：

$$\boxed{r=\frac{(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-n\overline{x}^2}\sqrt{(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-n\overline{y}^2}}.}$$

显然，样本(线性)相关系数 r 的取值范围为$[-1,1]$.

$|r|$值越接近 1，随机变量之间的线性相关程度越强；$|r|$值越接近 0，随机变量之间的线性相关程度越弱.

当 $r>0$ 时，两个随机变量的值总体上变化趋势相同，此时称两个随机变量正相关；

当 $r<0$ 时，两个随机变量的值总体上变化趋势相反，此时称两个随机变量负相关；

当 $r=0$ 时，此时称两个随机变量线性不相关.

例 1 计算表 7－1 中随机变量之间的样本相关系数 r(结果保留到小数点后的第 9 位)，并谈谈通过计算发现了什么.

解 根据表 7－1，得到表 7－4.

表 7－4

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	165	52	27 225	2 704	8 580
2	157	44	24 649	1 936	6 908
3	155	45	24 025	2 025	6 975
4	175	55	30 625	3 025	9 625
5	168	54	28 224	2 916	9 072
6	157	47	24 649	2 209	7 379
7	178	62	31 684	3 844	11 036
8	160	50	25 600	2 500	8 000
9	163	53	26 569	2 809	8 639
合 计	1 478	462	243 250	23 968	76 214

由此可得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2=243\ 250$，$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_9^2=23\ 968$，$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_9y_9=76\ 214$，$\bar{x}=\dfrac{1\ 478}{9}$，$\bar{y}=\dfrac{462}{9}$.

因此，
$$r=\frac{(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_9y_9)-9\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2)-9\bar{x}^2}\sqrt{(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_9^2)-9\bar{y}^2}}$$
$$=\frac{76\ 214-9\times\dfrac{1\ 478}{9}\times\dfrac{462}{9}}{\sqrt{243\ 250-9\times\left(\dfrac{1\ 478}{9}\right)^2}\times\sqrt{23\ 968-9\times\left(\dfrac{462}{9}\right)^2}}$$
$$\approx 0.939\ 853\ 007.$$

由此可知，身高和体重具有很强的正相关性. 从图 7－8 可以看出，散点图呈现的结果与样本相关系数 r 的计算结果一致.

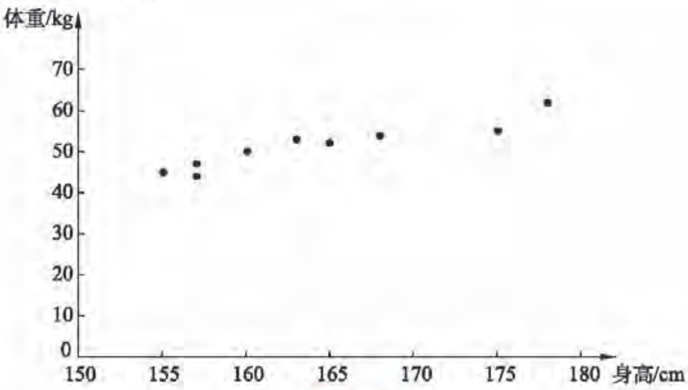


图 7－8

例 2 计算表 7 - 5 中两个随机变量之间的样本相关系数 r，并谈谈通过计算发现了什么.

表 7 - 5

X	-5	-4	-3	0	3	4	5
Y	0	3	4	5	4	3	0

解 根据表 7 - 5 中的数据，得到表 7 - 6.

表 7 - 6

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	-5	0	25	0	0
2	-4	3	16	9	-12
3	-3	4	9	16	-12
4	0	5	0	25	0
5	3	4	9	16	12
6	4	3	16	9	12
7	5	0	25	0	0
合 计	0	19	100	75	0

由此可得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_7^2=100$，$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_7^2=75$，$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_7y_7=0$，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=\dfrac{19}{7}$.

因此，$$r=\frac{(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_7y_7)-7\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_7^2)-7\bar{x}^2}\sqrt{(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_7^2)-7\bar{y}^2}}=0.$$

由此可知，样本数据不具有线性相关性，建立线性回归方程是没有任何意义的. 从图 7 - 9 可以看出，表格中的数据都在同一个半圆上，与样本相关系数 r 的计算结果一致.

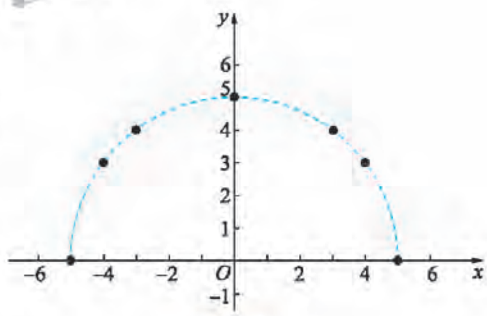


图 7 - 9

实际上，样本相关系数 r 越接近 1，两个随机变量之间的线性相关性就越强，用直线拟合的效果就越好. 样本相关系数 r 的值究竟大到什么程度就可以认为线性关系较强，这里不做进一步的分析，当然，可以通过阅读统计书籍获得.

练 习

1. 请用 Excel 软件完成此题.

下表是某区高二年级随机抽取的 20 名学生的语文和英语成绩，请计算语文成绩和英语成绩之间的相关系数.

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
语 文	57	58	63	57	75	77	67	57	66	77
英 语	82	35	35	74	80	83	82	60	74	70
学生序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
语 文	65	54	68	61	60	61	59	62	67	64
英 语	37	64	68	31	58	77	32	54	63	63.5

2.2 成对数据的线性相关性分析

我们知道，一名学生学习中的不同学科成绩有着密不可分的关系，但它们之间的相关性如何呢？与我们的普遍认识之间是否存在差异呢？下面以化学成绩和物理成绩为例加以说明.

例 3 表 7 - 7 中是在某校高二年级中抽取了 246 名学生的化学成绩(单位:分)和物理成绩(单位:分)，求这组成对数据中化学成绩和物理成绩的样本相关系数.

表 7 - 7

学号	化学	物理	学号	化学	物理	学号	化学	物理	学号	化学	物理	学号	化学	物理	学号	化学	物理
21012	88	99	20830	97	92	20727	65	86	20220	78	79	20836	80	68	20219	84	60
20823	92	99	20922	83	92	20903	70	79	20527	74	81	20216	73	76	20413	71	77
20920	89	93	20919	84	90	20704	88	93	20203	83	84	20839	64	74	20924	69	67
20921	75	96	20106	86	86	21027	87	81	20816	64	80	20808	78	86	20821	57	77
21042	94	92	20125	70	95	20214	82	83	20831	77	79	20416	84	71	20319	72	77
21040	90	89	21037	85	89	20832	87	83	20918	69	88	20311	82	82	20931	73	79
20729	85	96	20321	86	85	20402	83	88	21011	59	82	20815	76	81	20730	64	80
20811	92	99	21009	81	93	20927	80	87	20740	73	83	20420	68	74	20501	80	75
20715	94	90	20840	87	99	20524	74	78	20408	76	89	20906	66	82	20711	75	67
21038	88	92	21031	71	98	21033	65	96	21006	68	94	21029	66	90	20309	61	91
20427	84	97	21003	82	94	20829	88	77	20111	82	86	20733	75	77	20422	61	70
21005	87	94	21039	88	90	20807	71	71	20418	83	70	20218	83	65	20522	88	73
20819	90	96	20812	75	88	20907	80	95	21019	72	90	20528	78	75	20515	70	64
21023	78	97	21002	77	87	20820	78	81	20403	87	81	20525	77	77	20211	67	75
20723	90	94	21034	71	93	20806	74	95	20708	75	90	20511	78	72	20322	67	64
20802	87	89	20734	77	92	20222	81	81	20805	67	84	20410	85	67	20301	76	60
20928	68	95	20407	85	85	20710	78	93	21004	78	75	20834	64	76	20421	68	84
20912	85	93	20738	81	82	20913	82	92	20701	82	68	20930	78	78	20201	73	71
20713	91	89	21022	91	88	20323	83	79	21028	84	77	20107	68	79	20223	76	68
20706	87	85	21032	79	83	21026	83	86	20327	72	78	20424	74	73	20304	75	54
21014	89	100	20826	78	78	20724	81	87	20217	91	72	20415	69	84	20428	71	48
21016	82	90	20508	91	88	21007	95	76	20716	79	78	20226	79	65	20202	78	56
21036	82	91	20901	76	96	21024	78	85	20401	83	78	20206	75	69	20316	68	76
21010	78	95	20324	88	97	20518	84	85	20317	77	95	20225	88	74	20325	57	74
20728	74	94	20302	86	91	20731	82	90	20320	66	84	20118	79	71	20810	66	66
20709	91	91	20736	92	87	20208	70	85	20303	75	88	20103	70	74	20221	67	75
21030	84	96	20521	87	86	20722	85	87	20925	69	78	20804	83	64	20523	68	63
21041	74	96	20502	77	88	20417	81	81	20510	90	77	20224	70	94	20306	76	65
21013	88	100	20904	86	89	20703	83	90	20818	78	78	20109	67	82	20512	74	65
21020	87	99	20204	74	90	20702	81	76	20825	72	86	20127	86	80	20404	65	63
21021	91	90	20909	74	96	20803	75	78	20735	63	81	20814	65	75	20412	56	76
21035	86	88	20505	86	94	20932	72	74	20915	75	92	20205	80	80	20718	48	65
20714	75	94	20838	74	92	20902	83	89	20308	77	78	20721	66	70	20517	60	65
20916	90	98	20725	91	88	20115	74	90	20119	65	79	20110	74	79	20414	62	71
20822	82	92	20726	86	80	20732	87	86	20801	82	88	20116	74	78	20124	64	65

续表

学号	化学	物理	学号	化学	物理	学号	化学	物理	学号	化学	物理	学号	化学	物理	学号	化学	物理
20215	91	95	20914	69	91	20122	73	87	20504	88	81	20101	72	60	20513	61	58
20326	81	94	20423	85	82	20911	81	88	20809	66	75	20917	68	60	20313	73	53
21017	82	97	20707	83	93	20833	76	86	20926	64	81	20506	67	68	20503	73	62
20737	87	91	20817	88	89	20929	77	87	20824	68	83	20117	68	84	20405	75	65
21018	82	92	20827	80	90	20207	73	91	20905	65	79	20520	72	78	20123	73	60
20837	88	83	20908	80	82	20712	78	81	20429	82	79	20720	70	61	20212	58	67

解 鉴于学生人数较多，手动计算样本相关系数工作量较大，这里借助 Excel 软件进行分析（注意：分析时，需要将数据进行整理，排成 3 列，246 行）.

（1）画出它们的散点图，如图 7－10.

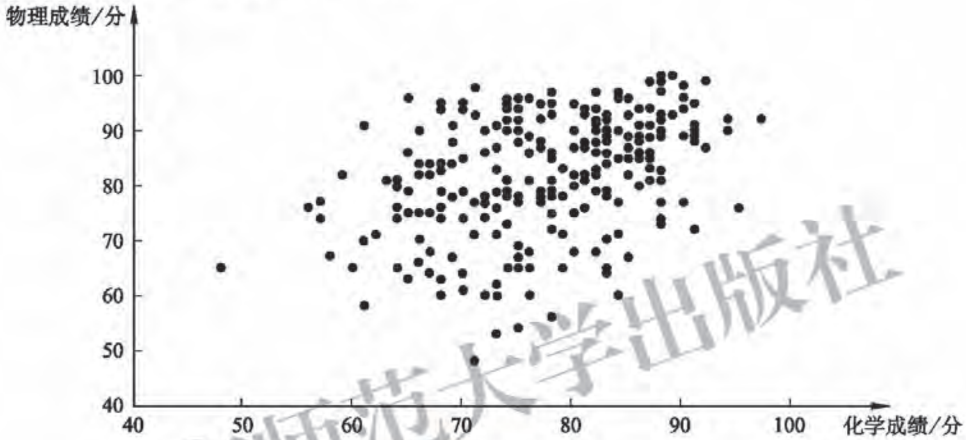


图 7－10

（2）求出样本相关系数 $r=0.397$.

这个结果说明该校高二年级学生的化学成绩和物理成绩之间的线性相关性比较弱.

思考交流

1. 如果抽取不同学校学生的成绩，结果又会如何呢？如果抽取不同地区学生的成绩呢？

2. 通过例 3，我们研究了学生化学成绩和物理成绩之间的线性相关性，那么与化学成绩有相关关系的学科成绩还有哪些呢？

练 习

1. 请结合本校不同年级的数学成绩与物理成绩，讨论它们之间相关性变化的趋势.
2. 不同年级数学成绩之间的相关性如何？如高一年级的数学成绩与高二年级的数学成绩之间的相关性.

习题 7－2

1. 请用 Excel 软件完成此题.

下表是例 3 中 246 名学生的数学成绩(单位:分)和物理成绩(单位:分),请结合例 3,试比较物理成绩分别与数学成绩、化学成绩的线性相关性.

学号	数学	物理	学号	数学	物理	学号	数学	物理	学号	数学	物理	学号	数学	物理	学号	数学	物理
21012	149	99	20830	115	92	20727	128	86	20220	120	79	20836	127	68	20219	125	60
20823	138	99	20922	129	92	20903	132	79	20527	130	81	20216	123	76	20413	132	77
20920	137	93	20919	132	90	20704	136	93	20203	135	84	20839	134	74	20924	107	67
20921	140	96	20106	138	86	21027	135	81	20816	135	80	20808	127	86	20821	126	77
21042	141	92	20125	132	95	20214	143	83	20831	131	79	20416	122	71	20319	122	77
21040	141	89	21037	123	89	20832	139	83	20918	122	88	20311	130	82	20931	106	79
20729	136	96	20321	133	85	20402	125	88	21011	137	82	20815	125	81	20730	113	80
20811	137	99	21009	135	93	20927	136	87	20740	123	83	20420	113	74	20501	124	75
20715	146	90	20840	140	99	20524	125	78	20408	114	89	20906	117	82	20711	124	67
21038	144	92	21031	144	98	21033	132	96	21006	145	94	21029	144	90	20309	123	91
20427	133	97	21003	126	94	20829	142	77	20111	131	86	20733	131	77	20422	109	70
21005	148	94	21039	136	90	20807	143	71	20418	113	70	20218	119	65	20522	114	73
20819	131	96	20812	135	88	20907	137	95	21019	137	90	20528	116	75	20515	116	64
21023	143	97	21002	140	87	20820	142	81	20403	139	81	20525	120	77	20211	128	75
20723	141	94	21034	142	93	20806	133	95	20708	128	90	20511	123	72	20322	103	64
20802	142	89	20734	135	92	20222	138	81	20805	134	84	20410	137	67	20301	116	60
20928	144	95	20407	145	85	20710	145	93	21004	148	75	20834	129	76	20421	129	84
20912	137	93	20738	139	82	20913	131	92	20701	137	68	20930	124	78	20201	121	71
20713	142	89	21022	140	88	20323	116	79	21028	123	77	20107	113	79	20223	107	68
20706	143	85	21032	137	83	21026	143	86	20327	128	78	20424	122	73	20304	119	54
21014	131	100	20826	138	78	20724	129	87	20217	128	72	20415	132	84	20428	113	48
21016	144	90	20508	138	88	21007	133	76	20716	119	78	20226	121	65	20202	127	56
21036	145	91	20901	135	96	21024	125	85	20401	139	78	20206	133	69	20316	126	76
21010	144	95	20324	125	97	20518	121	85	20317	132	95	20225	112	74	20325	117	74
20728	148	94	20302	126	91	20731	117	90	20320	130	84	20118	112	71	20810	115	66
20709	140	91	20736	139	87	20208	128	85	20303	132	88	20103	126	74	20221	108	75
21030	145	96	20521	150	86	20722	124	87	20925	137	78	20804	145	64	20523	116	63
21041	142	96	20502	132	88	20417	130	81	20510	116	77	20224	114	94	20306	122	65
21013	139	100	20904	138	89	20703	134	90	20818	122	78	20109	125	82	20512	127	65
21020	129	99	20204	129	90	20702	142	76	20825	129	86	20127	114	80	20404	133	63
21021	140	90	20909	136	96	20803	132	78	20735	120	81	20814	133	75	20412	121	76
21035	144	88	20505	130	94	20932	136	74	20915	135	92	20205	127	80	20718	129	65

续表

学号	数学	物理	学号	数学	物理	学号	数学	物理	学号	数学	物理	学号	数学	物理	学号	数学	物理
20714	141	94	20838	131	92	20902	128	89	20308	129	78	20721	125	70	20517	125	65
20916	133	98	20725	139	88	20115	120	90	20119	122	79	20110	131	79	20414	110	71
20822	135	92	20726	138	80	20732	130	86	20801	137	88	20116	120	78	20124	100	65
20215	135	95	20914	139	91	20122	118	87	20504	125	81	20101	139	60	20513	100	58
20326	134	94	20423	136	82	20911	121	88	20809	123	75	20917	131	60	20313	108	53
21017	139	97	20707	140	93	20833	136	86	20926	128	81	20506	143	68	20503	106	62
20737	122	91	20817	133	89	20929	139	87	20824	136	83	20117	115	84	20405	111	65
21018	143	92	20827	142	90	20207	134	91	20905	130	79	20520	110	78	20123	104	60
20837	141	83	20908	134	82	20712	138	81	20429	125	79	20720	119	61	20212	116	67

2. 为研究鲈鱼身长与体重的关系，芬兰某渔业公司记录了如下表所示的鲈鱼身长 X(单位:cm)与体重 Y(单位:g)的数据:

身长 X/cm	30.0	31.2	31.1	33.5	34.0	34.7	34.5	35.0	35.1	36.2
体重 Y/g	242.0	290.0	340.0	363.0	430.0	450.0	500.0	390.0	450.0	500.0
身长 X/cm	36.2	36.2	36.4	37.2	37.2	38.3	38.5	38.6	38.7	
体重 Y/g	475.0	500.0	500.0	600.0	600.0	700.0	700.0	610.0	650.0	

请画出散点图，并求鲈鱼身长 X 与体重 Y 间的样本相关系数.

信息技术应用

借助 Excel 软件计算表 7－1 中两个随机变量之间的样本相关系数

(1) 输入所有数据，并任选一个单元格，输入“样本相关系数=”，选择“样本相关系数=”后面的单元格(如图 7－11).

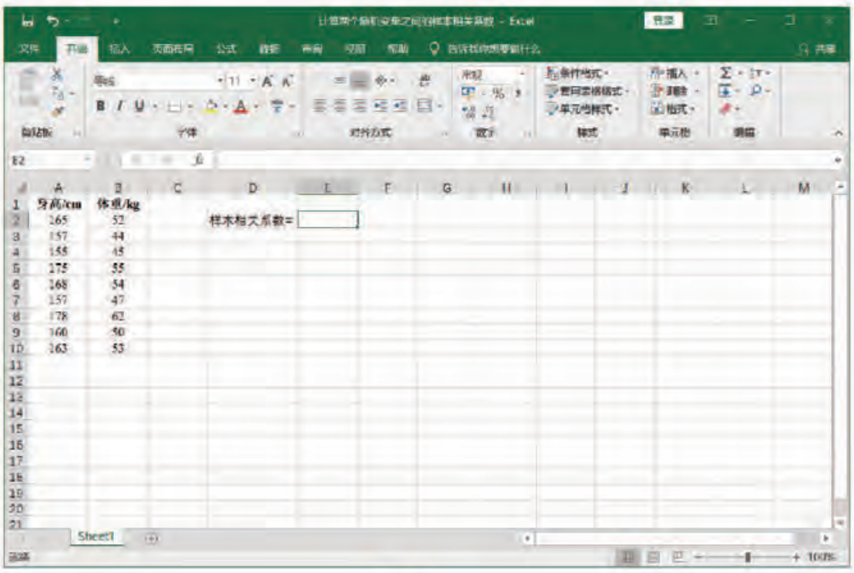


图 7－11

(2) 在“公式”菜单中，选择“插入函数”；在“或选择类别”对话框中选择“统计”，并下拉“选择函数”菜单，找到“CORREL”，单击“确定”(如图 7－12).

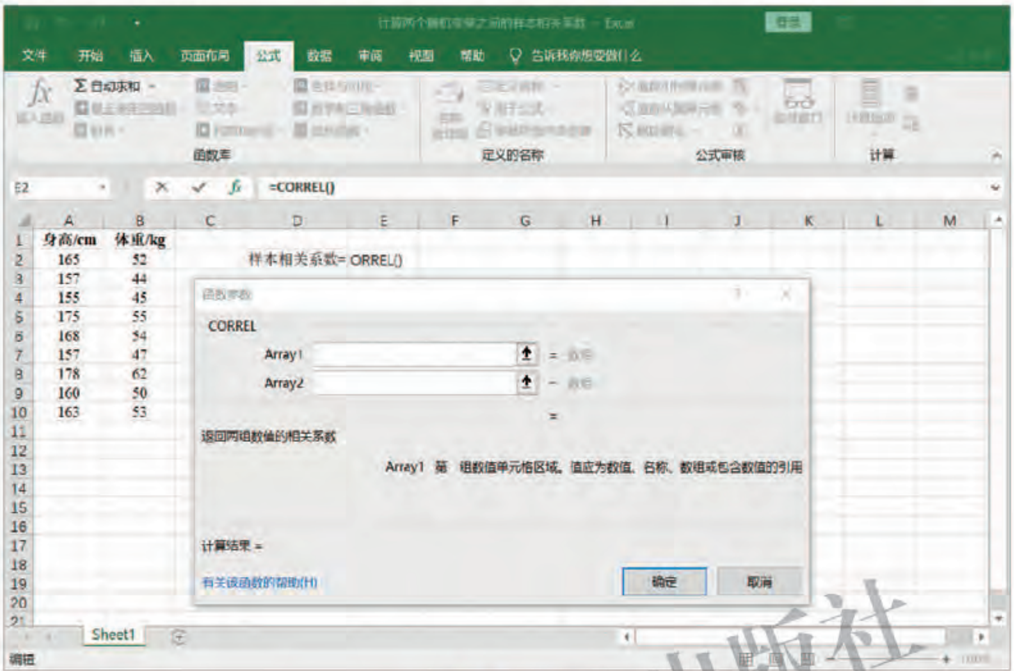


图 7－12

(3) 直接选择数据或者在“Array1(第一组数值)”后面输入“A2:A10”，在“Array2(第二组数值)”后面输入“B2:B10”，单击“确定”(如图 7－13).

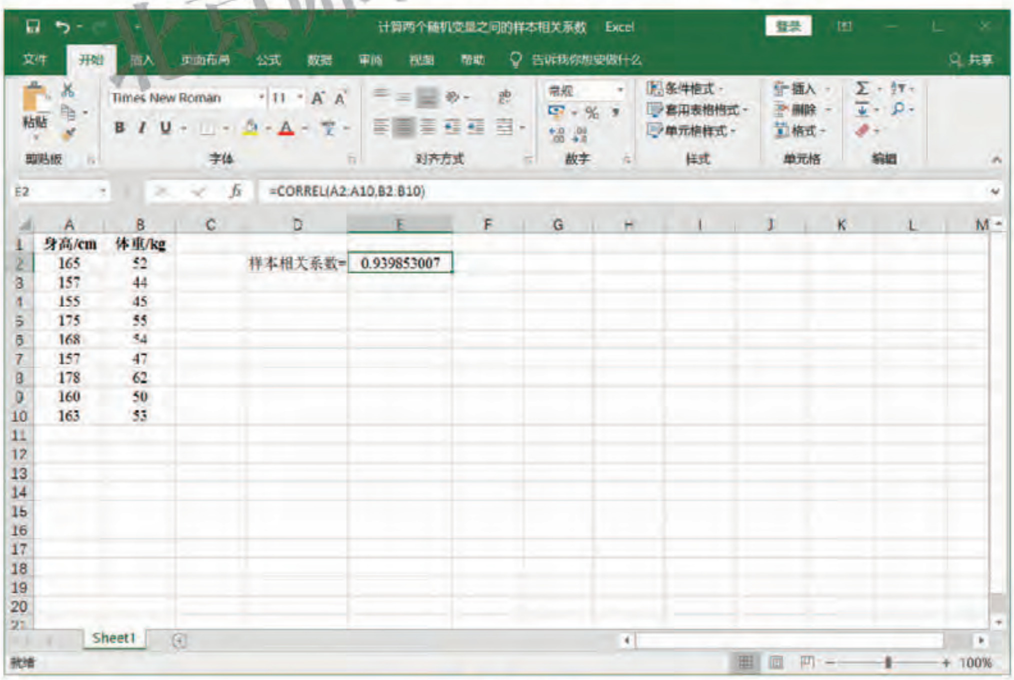


图 7－13

至此，求出样本相关系数为 0.939 853 007. 这与例 1 的结果一致.

§ 3 独立性检验问题

3.1 独立性检验

问题提出

我们知道，吸烟具有危害性. 它的根据又是什么呢？

为了调查吸烟与患肺癌是否有关系，某机构随机调查了 6 578 人，得到如表 7－8 的数据（单位：人）：

表 7－8

患肺癌情况 / 吸烟情况	患肺癌	未患肺癌
吸烟	56	1 932
不吸烟	23	4 567

上面是一张 2 行 2 列的表，在统计中称为 **2×2 列联表**. 在这个问题中，需要考虑两个变量：是否吸烟，是否患肺癌；每个变量应取两个值：吸烟、不吸烟，患肺癌、未患肺癌.

上表中的数据是根据调查得到的结果，如吸烟且患肺癌的人数是 56，不吸烟但患肺癌的人数是 23，等等. 我们的问题是：如何根据表格中的数据来判断吸烟与患肺癌是否有关系，即它们是否独立？这一问题称为 2×2 列联表的**独立性检验**.

分析理解

为了讨论方便，我们引入以下记号：

变量 A：A_1 表示吸烟，$A_2=\overline{A_1}$ 表示不吸烟；

变量 B：B_1 表示患肺癌，$B_2=\overline{B_1}$ 表示未患肺癌.

根据表 7－8，我们可以计算出吸烟与不吸烟的总人数分别是 1 988 和 4 590，患肺癌和未患肺癌的总人数分别是 79 和 6 499，调查的总人数为 6 578，得到表 7－9（单位：人）：

表 7－9

患肺癌情况 / 吸烟情况	患肺癌 B_1	未患肺癌 B_2	总　计
吸烟 A_1	56	1 932	1 988
不吸烟 A_2	23	4 567	4 590
总　计	79	6 499	6 578

假设"吸烟与否"与"是否患肺癌"没有关系，即吸烟与患肺癌是独立的. 根据直观经验，我们把吸烟人群中患肺癌的人所占百分比，与不吸烟人群中患肺癌的人所占百分比作比较. 如果吸烟不影响患肺癌，就意味着，无论吸烟与否，患肺癌的人所占的百分比应是基本一样的. 就此题而言：

吸烟人群中患肺癌的人所占百分比是$\frac{56}{1\ 988}\approx 2.82\%$；

不吸烟人群中患肺癌的人所占百分比是$\frac{23}{4\ 590}\approx 0.50\%$.

显然，吸烟人群中患肺癌的人所占百分比，与不吸烟人群中患肺癌的人所占百分比不相等，且相差较大. 由此我们可以推断，开始的假设可能是不成立的. 也就是说，患肺癌与吸烟可能是有关系的. 由吸烟人群中患肺癌的人所占的百分比较大，可以认为吸烟会对肺癌的发病率产生一定的影响.

另一方面，如果吸烟和患肺癌是独立的，那么就有 $P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)$，$P(A_1B_2)=P(A_1)P(B_2)$，$P(A_2B_1)=P(A_2)P(B_1)$，$P(A_2B_2)=P(A_2)P(B_2)$.

先讨论 $P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)$ 的情况. 我们可以列出频率表，并用既吸烟又患肺癌的人的频率来估计 $P(A_1B_1)$，用吸烟的人的频率来估计 $P(A_1)$，用患肺癌的人的频率来估计 $P(B_1)$，得到表 7－10.

表 7－10

患肺癌情况 / 吸烟情况	患肺癌 B_1	未患肺癌 B_2	总　计
吸烟 A_1	$\frac{56}{6\ 578}$	$\frac{1\ 932}{6\ 578}$	$\frac{1\ 988}{6\ 578}$
不吸烟 A_2	$\frac{23}{6\ 578}$	$\frac{4\ 567}{6\ 578}$	$\frac{4\ 590}{6\ 578}$
总　计	$\frac{79}{6\ 578}$	$\frac{6\ 499}{6\ 578}$	1

由此可得

既吸烟又患肺癌的人的频率是$\frac{56}{6\ 578}\approx 0.85\%$，

吸烟的人的频率是$\frac{1\ 988}{6\ 578}\approx 30.22\%$，

患肺癌的人的频率是$\frac{79}{6\ 578}\approx 1.20\%$.

显然，$30.22\%\times 1.20\%\approx 0.36\%\neq 0.85\%$. 由于根据表中数据计算出的值是频率值，它只是概率的估计值，因此即使变量之间独立，这两个数一般也不一定恰好相等. 但是当这两个数相差很大时，就可以得出：患肺癌与吸烟有关的可能性较大.

抽象概括

设 A,B 为两个变量，每一个变量都可以取两个值，

$$变量A:\quad A_1, A_2=\overline{A}_1;$$

$$变量B:\quad B_1, B_2=\overline{B}_1.$$

通过观察得到如表 7－11 的数据：

表 7－11

A \ B	B_1	B_2	总　计
A_1	a	b	$a+b$
A_2	c	d	$c+d$
总　计	$a+c$	$b+d$	$n=a+b+c+d$

其中，a 表示变量 A 取 A_1，且变量 B 取 B_1 时的数据；b 表示变量 A 取 A_1，且变量 B 取 B_2 时的数据；c 表示变量 A 取 A_2，且变量 B 取 B_1 时的数据；d 表示变量 A 取 A_2，且变量 B 取 B_2 时的数据.

设 $n=a+b+c+d$，用 $\frac{a}{n}$ 估计 $P(A_1B_1)$，$\frac{a+b}{n}$ 估计 $P(A_1)$，$\frac{a+c}{n}$ 估计 $P(B_1)$.

若有式子 $\frac{a}{n}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$，则可以认为 A_1 与 B_1 独立.

同理，若 $\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}$，则可以认为 A_1 与 B_2 独立；

若 $\frac{c}{n}=\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$，则可以认为 A_2 与 B_1 独立；

若 $\frac{d}{n}=\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}$，则可以认为 A_2 与 B_2 独立.

在 $\frac{a}{n}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$ 中，由于 $\frac{a}{n}$，$\frac{a+b}{n}$，$\frac{a+c}{n}$ 表示的是频率，不同于概率. 即使变量 A,B 之间独立，式子两边也不一定恰好相等. 但是当两边相差很大时，变量 A,B 之间就不独立.

练　习

1. 为了调查吸烟是否对患慢性支气管炎有影响，某机构随机调查了 5 896 人，得到如下的数据(单位：人)：

吸烟情况 \ 患慢性支气管炎情况	患慢性支气管炎	未患慢性支气管炎
吸　烟	54	1 896
不吸烟	28	3 918

请根据上面的数据分析吸烟是否对患慢性支气管炎有影响.

3.2 独立性检验的基本思想

在本章第3.1节研究吸烟是否对患肺癌有影响的问题中，我们表明了当$\left|\frac{a}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right|$过大时，变量之间不独立. 同理，我们知道当$\left|\frac{b}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right|$，$\left|\frac{c}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right|$，$\left|\frac{d}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right|$过大时，变量之间也不独立. 但这些量究竟要多大才能说明变量之间不独立呢？我们能不能选择一个量，用它的大小来检验变量之间是否独立呢？

统计学家选取以下统计量，用它的大小来检验变量之间是否独立：

$$\chi^2=n\left[\frac{\left(\frac{a}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right)^2}{\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}}+\frac{\left(\frac{b}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right)^2}{\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}}+\frac{\left(\frac{c}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right)^2}{\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}}+\frac{\left(\frac{d}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right)^2}{\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}}\right].$$

上面的式子看起来很复杂，但是经过化简可以得到：

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}. \qquad (*)$$

统计上已经证明：在变量A,B独立的前提下，当样本量很大时，χ^2近似服从一个已知的分布$\chi^2(1)$. 当χ^2较大时，说明变量之间不独立. 在统计中，用以下结果对变量的独立性进行判断.

(1) 当$\chi^2\leqslant 2.706$时，没有充分的证据判断变量A,B有关联，可以认为变量A,B是没有关联的；

(2) 当$\chi^2>2.706$时，有90%的把握判断变量A,B有关联；

(3) 当$\chi^2>3.841$时，有95%的把握判断变量A,B有关联；

(4) 当$\chi^2>6.635$时，有99%的把握判断变量A,B有关联.

对于本章第3.1节中吸烟与患肺癌的问题，由(*)式计算可得

$$\begin{aligned}\chi^2&=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\\&=\frac{6\,578\times(56\times 4\,567-1\,932\times 23)^2}{1\,988\times 4\,590\times 79\times 6\,499}\approx 62.698.\end{aligned}$$

因为$62.698>6.635$，所以有99%的把握判断吸烟与患肺癌是有关的.

练 习

1. 为了了解高中生是否喜欢参加体育锻炼和性别之间的关系，调查者随机调查了 500 名高中生的情况，调查结果如下(单位:人)：

性别 \ 参加体育锻炼情况	喜欢参加体育锻炼	不喜欢参加体育锻炼
男	197	48
女	135	120

试问:高中生是否喜欢参加体育锻炼和性别之间有关系吗?

3.3 独立性检验的应用

例 1 某组织对男、女青年是否喜爱古典音乐进行了一个调查，调查者随机调查了 146 名青年，表 7 - 12 给出了调查的结果(单位:人)：

表 7 - 12

性别 \ 喜爱古典音乐情况	喜 爱	不喜爱
男	46	30
女	20	50

试问:男、女青年喜爱古典音乐的程度是否有差异?

解 依题意知该问题是判断喜爱古典音乐是否与青年的性别有关. 根据表 7 - 12 中的数据计算得到表 7 - 13(单位:人)：

表 7 - 13

性别 \ 喜爱古典音乐情况	喜 爱	不喜爱	总 计
男	46	30	76
女	20	50	70
总 计	66	80	$n=146$

由(*)式计算得 $\chi^2=\dfrac{146\times(46\times50-30\times20)^2}{76\times70\times66\times80}\approx15.021$.

因为 $15.021>6.635$，所以有 99%的把握判断是否喜爱古典音乐与青年的性别有关.

例 2 容易生气的人更有可能患心脏病吗？某机构随机调查了2 796人，表 7－14 给出了调查的结果(单位：人)：

表 7－14

是否易怒 \ 患心脏病情况	患心脏病	未患心脏病
易　怒	27	606
不易怒	53	2 110

试问：容易生气的人是否更有可能患心脏病？

解 问题是要判断患心脏病是否与易怒有关. 根据表 7－14 中的数据计算得到表 7－15(单位：人)：

表 7－15

是否易怒 \ 患心脏病情况	患心脏病	未患心脏病	总　计
易　怒	27	606	633
不易怒	53	2 110	2 163
总　计	80	2 716	n=2 796

由(＊)式计算得 $\chi^2=\dfrac{2\ 796\times(27\times2\ 110-606\times53)^2}{633\times2\ 163\times80\times2\ 716}\approx5.805$.

因为 5.805＞3.841，所以有 95％的把握判断患心脏病与易怒有关.

例 3 生物学上对于人类头发的颜色与眼睛虹膜的颜色是否有关进行了调研，以下是一次调查结果，调查人数共 212 人. 调查结果如表 7－16(单位：人)：

表 7－16

头发的颜色 \ 眼睛虹膜的颜色	蓝　色	棕　色
红/金黄色	156	12
黑　色	20	24

试问：头发的颜色与眼睛虹膜的颜色有关吗？

解 问题是要判断头发的颜色是否与眼睛虹膜的颜色有关. 根据表 7－16 中的数据计算得到表 7－17(单位:人):

表 7－17

头发的颜色 \ 眼睛虹膜的颜色	蓝　色	棕　色	总　计
红/金黄色	156	12	168
黑　色	20	24	44
总　计	176	36	$n=212$

由(*)式计算得 $\chi^2=\dfrac{212\times(156\times24-12\times20)^2}{168\times44\times176\times36}\approx55.576$.

因为 $55.576>6.635$,所以有 99%的把握判断头发的颜色与眼睛虹膜的颜色有关.

练　习

1. 某县有甲、乙两所规范化学校,教育主管部门为了检验两校九年级学生的数学水平,从甲、乙两校的九年级学生中,分别随机抽取 55 人和 45 人(各占全校九年级学生总数的 15%)进行统一试题的数学测验. 测验结果如下表(单位:人):

学　校 \ 及格情况	及　格	不及格
甲　校	47	8
乙　校	30	15

试问:甲、乙两校九年级学生的数学成绩的差异是否显著?

习题 7－3

1. 请用独立性检验解决本章第 3.1 节练习中的问题.
2. 为了考察研制出的新药对预防某种疾病的效果,科学家进行了试验,得到如下结果(单位:人):

服用新药情况 \ 患病情况	患　病	未患病
服用新药	12	58
未服用新药	22	28

问:新药对预防此种疾病是否有效?

3. 下面是对智商在 40～69 之间的人的出生季节所做的一个调查，结果如下（单位：人）：

季节＼智商	40～54	55～69
夏和秋	30	48
春和冬	40	30

问：智商在 40～69 之间的人，智商与出生季节有关吗？

4. 为了了解高中生数学考试成绩是否和吃早点有关，调查者随机调查了 50 名高中生的情况，调查结果如下（单位：人）：

吃早点情况＼考试成绩	及格	不及格
吃早点	17	10
不吃早点	15	8

试问：高中生的数学考试成绩是否和吃早点有关？

5. 下表是老一代和年青一代对某影片的评价的调查，所得数据如表所示（单位：人）：

年代＼评价	评价高	评价一般
老一代	45	60
年青一代	36	51

试问：老一代和年青一代对影片的评价是否一致？

6. 选择生活中的一个大家比较关心的问题（如男、女同学对数学课的喜欢程度），利用独立性检验进行分析，并写出一份简明的分析报告.

本章小结

一、知识结构

- 统计案例
  - 一元线性回归
  - 成对数据的线性相关性
  - 独立性检验问题

二、学习要求

1. 成对数据的统计相关性

(1) 结合实例，了解样本相关系数的统计含义，了解样本相关系数与标准化数据向量夹角的关系.

(2) 结合实例，会通过相关系数比较多组成对数据的相关性.

2. 一元线性回归模型

(1) 结合具体实例，了解一元线性回归模型的含义，了解模型参数的统计意义，了解最小二乘原理，掌握一元线性回归模型参数的最小二乘估计方法，会使用相关的统计软件.

(2) 针对实际问题，会用一元线性回归模型进行预测.

3. 2×2 列联表

(1) 通过实例，理解 2×2 列联表的统计意义.

(2) 通过实例，了解 2×2 列联表独立性检验及其应用.

三、需要关注的问题

1. 你可以通过哪些方法来刻画随机变量之间的线性相关程度？
2. 当两个随机变量之间呈现出非线性的相关性时，你如何得到它们之间的回归方程？
3. χ^2 统计量在 2×2 列联表的独立性检验中起了什么作用？

复习题七

1. 家族中兄弟或姐妹的智商是否有相关性一直是教育工作者、社会学家、生理学家关注的一个问题，日本学者在 1989 年曾对 45 对兄弟的智商进行测试，得出下表的结果，其中，X 表示“哥哥的智商分数”，Y 表示“弟弟的智商分数”.

X	78	77	112	114	104	99	92	80	113
Y	114	68	116	123	107	81	76	90	91
X	99	97	80	84	89	100	111	75	94
Y	95	106	99	82	77	81	111	80	98
X	67	46	106	99	102	127	113	91	91
Y	82	56	117	98	89	113	112	103	93
X	96	100	97	82	43	77	109	99	99
Y	90	102	104	92	43	100	90	100	103
X	100	56	56	67	71	66	78	95	38
Y	103	67	67	67	66	63	76	86	64

(1) 请画出散点图，并求 Y 与 X 间的样本相关系数；

(2) 建立 Y 关于 X 的线性回归方程，并预测当 X 为 110 时 Y 的值.

2. 炼钢厂所用的盛钢水的钢包，由于钢水对耐火材料的侵蚀，容积会不断增大. 我们希望找出使用次数 X 与增大的容积 Y 之间的关系，试验数据见下表：

X	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
X	10	11	12	13	14	15	16	
Y	10.49	10.59	10.60	10.80	10.60	10.90	10.76	

试求 Y 关于 X 的线性回归方程，并预测当使用次数为 20 时增大的容积量.

3. 为了了解对生活满意程度与婚姻状况的关系，调查者随机对 150 人进行了调查，结果如下(单位：人)：

婚姻状况 \ 生活满意程度	满　意	不满意
已　婚	82	38
丧　偶	11	19

问：对生活的满意程度是否与婚姻状况有关?

4. 一个调查机构向某大学的毕业生发放调查表，下表是回收情况(单位：人)：

学　位 \ 寄回情况	寄　回	未寄回
学　士	78	11
博士和硕士	61	13

问：调查表的寄回与否是否与学位高低有关?

附录

部分数学专业词汇中英文对照表

中　文	英　文
直　线	straight line
倾斜角	angle of inclination
斜　率	slope
直线方程	equation of a straight line
点斜式	point-slope form
斜截式	slope-intercept form
截距式	intercept form
两点式	two-point form
圆	circle
圆的标准方程	standard equation of a circle
圆的一般方程	general equation of a circle
椭　圆	ellipse
焦　点	focus
焦　距	focal distance
双曲线	hyperbola
抛物线	parabola
渐近线	asymptotes
准　线	directrix
空间直角坐标系	three-dimensional rectangular coordinates system
向　量	vector
方向向量	direction vector
法向量	normal vector
三垂线定理	theorem of three perpendiculars
加法原理	addition principle
乘法原理	multiplication principle
排　列	permutation
组　合	combination
组合公式	combination formula

续表

中　文	英　文
二项式定理	binomial theorem
条件概率	conditional probability
随机变量	random variable
离散型随机变量	discrete random variable
伯努利试验	Bernoulli experiment
均值(数学期望)	mean(mathematical expectation)
方　差	variance
二项分布	binomial distribution
超几何分布	hypergeometric distribution
正态分布	normal distribution
曲线拟合	curve fitting
最小二乘法	method of least squares
回归方程	regression equation
回归直线	straight line of regression
相关系数	correlation coefficient

后　记

为了全面贯彻党的教育方针,落实立德树人根本任务,发展素质教育,推进教育公平,培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人. 根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》,北师大版普通高中教科书《数学》教材编写组编写的普通高中教科书,强调了数学课程的基础性和整体性,突出了思想性和应用性,帮助学生掌握现代生活进一步学习必需的数学知识、技能、思想和方法;提升学生的数学素养,引导学生会用数学眼光观察世界,会用数学思维思考世界,会用数学语言表达世界;促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展,探寻事物变化规律,增强社会责任感;在学生形成正确的人生观、价值观、世界观等方面发挥独特作用.

本套教材力求尊重学生的认知特点,关注学生的学习过程,创造多层次的学习活动,满足学生多样化的学习需求,促进学生全面而有个性的发展,为学生的终身发展奠定基础.

本套教材由众多学科专家、教育专家、心理学专家和特级教师参与编写,研究基础深厚,教育理念先进,一边编写一边实验,实验教师提出了很好的建议,在此特别表示感谢. 教材的建设是长期、艰苦的任务,需要每一位教师在教学实践中自主开发资源,创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作,对教材的逐步完善提供有力的支持.

本套教材主编王尚志、保继光,副主编张饴慈、李延林、张思明,编写组成员还有:董武、李红、关健、吴鹏、隋丽丽、汪香志、于伟东、白雪峰、黄延林、胡凤娟、薛文叙、梁丽平、李大永、任志瑜、赵春、顿继安、李军洪、马萍、吕建生、王建波、焦继红、赵敏.

本册教材由保继光、李延林担任主编,参与本册教材编写的人员还有:马萍、李军洪、顿继安、焦继红、任志瑜;最终由王尚志、保继光、张饴慈、李延林、张思明、薛文叙统稿,保继光、李延林定稿.

本套教材是在原普通高中课程标准实验教科书的基础上进行的修订,在此向原实验教科书编写团队的各位专家、教师,特别是严士健教授,致以衷心的感谢. 很多地方教研员、一线教师为本次教材的修订提供了宝贵的意见,在此一并表示感谢.

在教材中可能会出现错误或不当之处,恳请广大使用者批评指正. 欢迎来电来函与我们联系:北京师范大学出版社基础教育国标教材出版中心(100088),(010)58802811,shuxue3@bnupg. com.

北京师范大学出版社