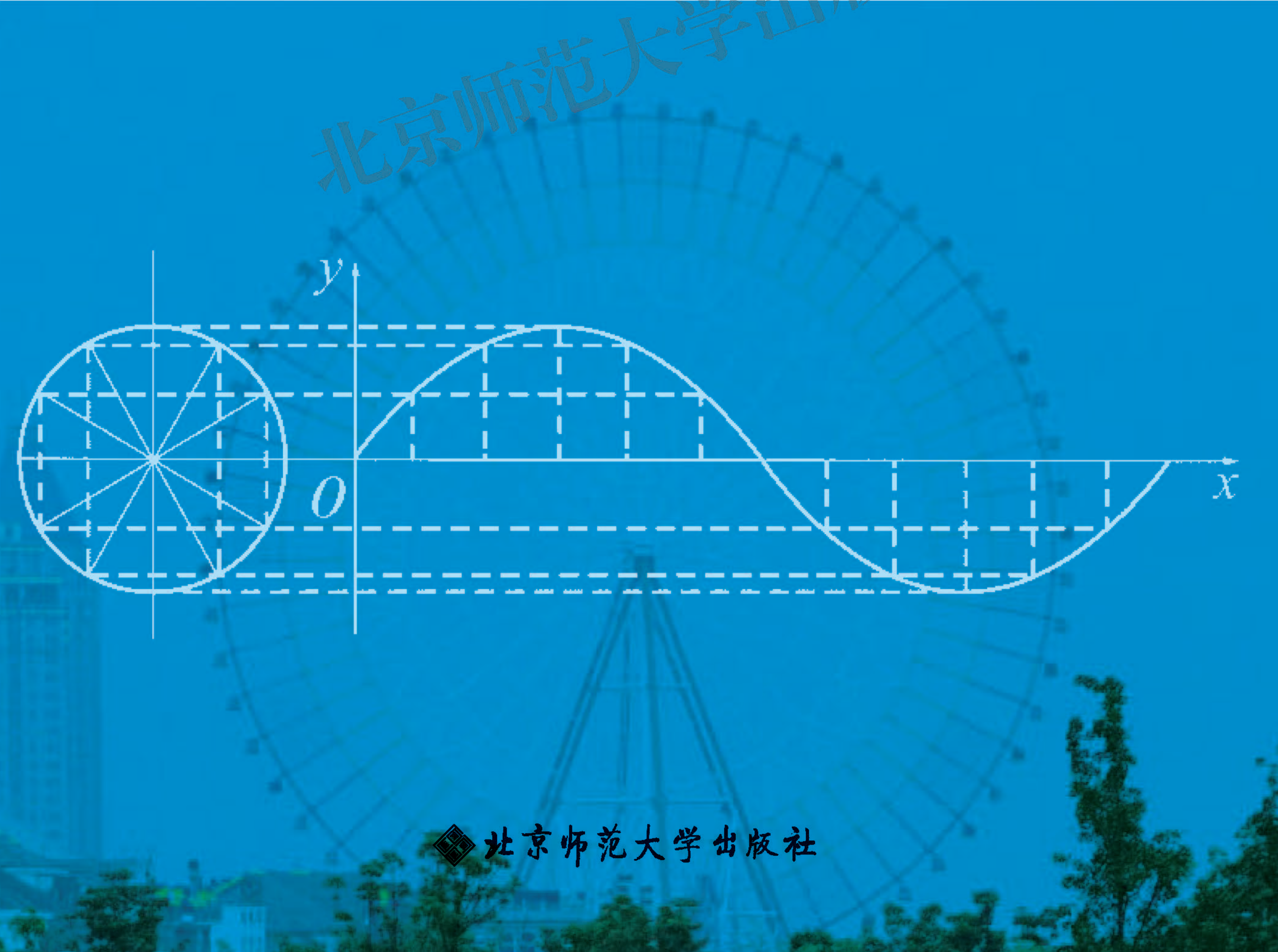
国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学 必修 第二册

SHUXUE



北京师范大学出版社

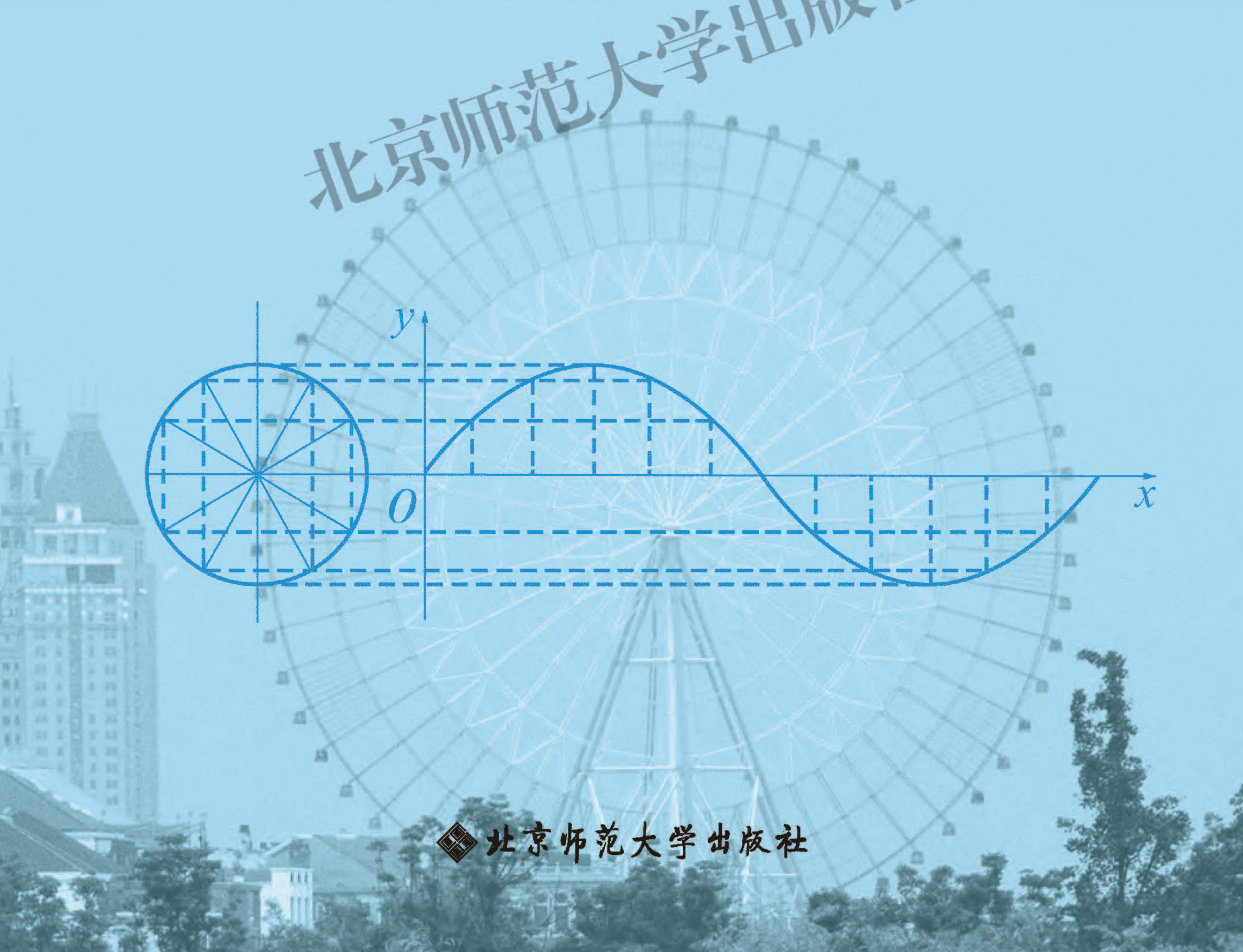
普通高中教科书

数学

必修

第二册

主编　王尚志　保继光



北京师范大学出版社

主编寄语

亲爱的同学们：

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更重要的数学知识和应用.

你们将获得更多的数学能力和素养.

你们将感受到更深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授人以鱼，不如授人以渔."学会打渔的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

"在数学中，什么是重要的(What is the key in Mathematics)?"20世纪六七十年代，很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键(The problem is the key in Mathematics). 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅要提高思考问题的能力，提高解决问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是很重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，它会给你带来乐趣.

本套教材由2册必修教材和2册选择性必修教材组成. 习题分为三类：一类是可供课堂学习时使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两个层级；还有一类是章复习题，分为A，B，C三个层级.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出、抽象概括、分析理解、思考交流等研究性学习过程.

根据课程标准的要求，数学建模活动与数学探究活动是高中阶段数学课程的重要内容. 本套教材从感悟数学应用、学习数学模型、掌握建模过程和实践数学建模四个层次整体设计了数学建模活动，在必修第一册、第二册和选择性必修第一册分别安排了一章的内容. 另外，在选择性必修第一册、第二册分别从几何和代数两个方面各安排了一次数学探究活动. 数学建模活动与数学探究活动有助于引导同学们递进地思考问题，充分地动手实践. 我们更希望

同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

重视数学的文化价值是数学教育发展的趋势，本套教材整体设计了“数学文化”栏目，包括：名人名言、阅读材料、拓展窗口、建模选材等，并在习题中呈现了对数学文化理解的要求. 教材在必修第一册第一章初步学习“数学文化”内容的基础上，特别设计“学习指导：数学文化”，对同学们后续学习数学文化有重要的指导意义.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、互联网都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多学多用，“技多不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”栏目，为同学们使用信息技术提供了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 特别地，在借助信息技术手段较多的必修第一册第四章，教材设计了“学法指导：利用信息技术学习数学”，引导同学们在学习时从具体学习对象中“跳”出来，利用信息技术手段发现数学规律. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的学校，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容有所了解. 教材中有关信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

目录

1

第一章 三角函数

地球围绕太阳转动引起的四季交替，地球自转引起的昼夜循环，这些都是周期变化. 大到宇宙，小到粒子，自然界许多运动都是周而复始，这些运动称为周期变化. 三角函数是体现周期变化最基本的数学模型，也是研究周期变化最主要的工具.

在本章学习中，首先拓展角的范围，建立角的新的度量单位——弧度，借助单位圆推广初中三角函数的概念，然后讨论三角函数的性质，给出分析函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 变化的思想方法，讨论参数 A,ω,φ 的几何意义和物理意义，并学习运用三角函数解决一些简单的实际问题，促进数学抽象、数学运算、逻辑推理、直观想象和数学建模等核心素养的发展.

§ 1 周期变化

实例分析

图 1 - 1 是水车的示意图. 水车上点 P 到水面的距离为 y，假设水车匀速，则每经过时间 t，点 P 又回到原来的位置，那么 y 每经过时间 t 就会取相同的值，因此，y 随时间 t 的变化是周期变化.

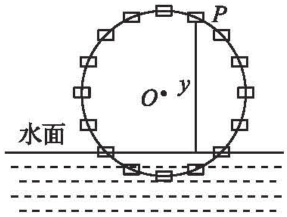


图 1 - 1

例 1 讨论函数 $f(x)=(-1)^{[x]}$ 的图象和性质.

解 在“函数”一章，已经学习了函数 $y=[x]$. 对于每一个实数 x，其函数值 $y=[x]$ 是不超过 x 的最大整数，它不是偶数就是奇数. 根据初中学习的幂运算，可以推出：当 $[x]$ 为偶数时，函数 $f(x)=(-1)^{[x]}=1$；当 $[x]$ 为奇数时，函数 $f(x)=(-1)^{[x]}=-1$.

在平面直角坐标系中，该函数的图象如图 1 - 2.

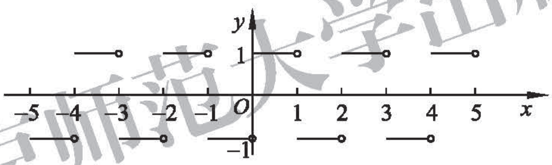


图 1 - 2

能从图 1 - 2 中得到函数 $f(x)=(-1)^{[x]}$ 的哪些性质？显然，对任意一个实数 x，每增加 2 的整数倍，其函数值保持不变. 这种变化是重复进行的，函数 $f(x)=(-1)^{[x]}$ 的变化是周期性的.

例 2 讨论函数 $f(x)=x-[x]$，画出它的图象，并观察其性质.

解 函数 $f(x)=x-[x]$ 是指一个数减去不超过这个数的最大整数. 它的图象如图1 - 3.

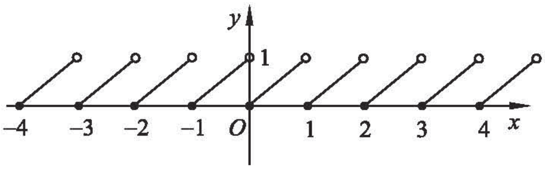


图 1 - 3

观察图 1 - 3，可以得到，对任意一个实数 x，每增加 1 的整数倍，其函数值保持不变. 这种变化是重复进行的，所以该函数变化也是一种周期变化. 这个函数是物理中很有用的锯齿波函数.

思考交流

请列举身边一些呈周期变化的函数，画出其图象，并指明其具体的变化特征.

抽象概括

一般地，对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在一个非零常数 T，使得对任意的 $x\in D$，都有 $x+T\in D$ 且满足

$$f(x+T)=f(x),$$

那么函数 $y=f(x)$ 称作**周期函数**，非零常数 T 称作这个函数的**周期**.

周期函数的周期不止一个. 例如，对于例 2 中的函数 $f(x)=x-[x]$ 来说，任何一个非零整数都是它的周期.

如果在周期函数 $y=f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就称作函数 $y=f(x)$ 的**最小正周期**. 若不加特别说明，本书所指周期均为函数的最小正周期.

例 3 讨论函数 $y=7+(-1)^n$，$n\in\mathbf{N}$ 是否为周期函数，如果是，请指出它的周期.

解 当 $n\in\mathbf{N}$ 时，该函数的取值为 8，6，8，6，8，…

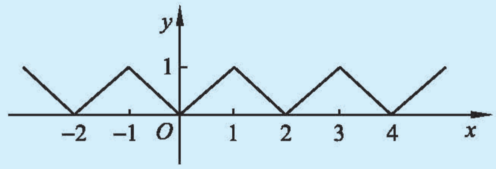
可见它是周期函数，且周期 $T=2$.

练　习

1. 钟表的分针每小时转一圈，它的变化是周期变化吗？
2. 函数 $f(x)=x^2$ 满足 $f(-3+6)=f(-3)$，那么，它是以 6 为周期的函数吗？
3. 周期函数 $y=f(x)$ 的图象如图.

(1) 求函数 $f(x)$ 的周期；

(2) 写出函数 $y=f(x)$ 的解析式.

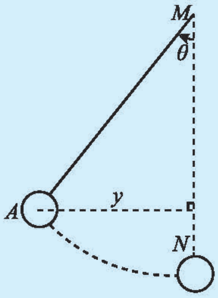


(第 3 题)

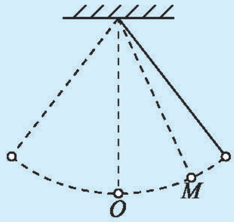
习题 1-1

A　组

1. 如图，钟摆从最高处 A 的位置开始摆动，每经过 1.8 s 又回到点 A. 那么，在图中钟摆达到最高位置点 A 时开始计时，经过1 min 后，请你估计钟摆在铅垂线的左边还是右边.



（第 1 题）

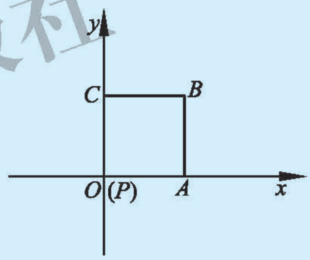


（第 2 题）

2. 如图，一个质点在平衡位置点 O 附近摆动，如果不计阻力，可将这个摆动看作周期运动. 它离开点 O 向右运动 4 s 后第 1 次经过点 M，再过 2 s 第 2 次经过点 M. 该质点再过多长时间第 3 次经过点 M?
3. 函数 $f(x)$是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,1]$.
(1) 画出函数 $f(x)$在区间$[-2,2]$上的图象，并求其单调区间、零点、最大值、最小值；
(2) 求 $f(7.5)$的值；
(3) 求 $f(x)$在区间 $[2n-1,2n+1]$上的解析式，其中 $n\in\mathbf{Z}$.

B 组

1. 如图放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动．设顶点 $P(x,y)$的纵坐标与横坐标的函数关系式是 $y=f(x)$，画出点 P 的运动轨迹，并讨论 $y=f(x)$是否为周期函数. 如果是，指出周期；如果不是，请说明理由.
说明：“正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动”包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动. 沿 x 轴正方向滚动是先以顶点 A 为中心顺时针旋转，当顶点 B 落在 x 轴上时，再以顶点 B 为中心顺时针旋转，如此继续. 类似地，正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动．



（第 1 题）

§ 2 任意角

2.1 角的概念推广

在初中,我们研究了 0°～360°的角,特别学习了锐角、直角、钝角、平角和周角等.

实例分析

在生活中,拧紧螺丝时,需要将扳手顺时针方向旋转;拧松螺丝时,需要将扳手逆时针方向旋转.可以旋转一圈,也可以旋转多圈.为了描述这种现象,需要对角的概念进行推广.

抽象概括

如图 1-4,平面内一条射线 OA 绕着它的端点 O 按箭头所示方向旋转到终止位置 OB,形成角 α.其中点 O 是角 α 的顶点,射线 OA 是角 α 的**始边**,射线 OB 是角 α 的**终边**.

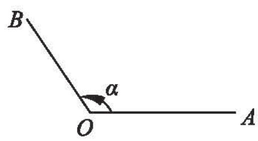


图 1-4

在数学上规定,按逆时针方向旋转形成的角叫作**正角**,按顺时针方向旋转形成的角叫作**负角**.如果一条射线没有作任何旋转,我们称它形成了一个**零角**.这样,零角的始边与终边重合,如果 α 是零角,那么 $\alpha=0°$.

如果一个角的终边沿逆时针或顺时针方向旋转 360°的整数倍,那么所得新角的终边与原角的终边重合.

图 1-5 中的角是 750°的正角;图 1-6 中,正角 $\alpha=210°$,负角 $\beta=-150°$,负角 $\gamma=-660°$.在跳水运动中,“转体 2 周”即“转体 720°”,“翻腾 3 周”即“翻腾 1 080°”,这些都是跳水动作的名称.对于一个钟表,分针按顺时针方向旋转,在旋转过程中与起始位置所形成的角总是负角.

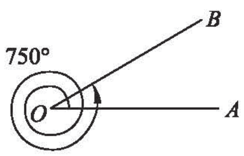


图 1-5

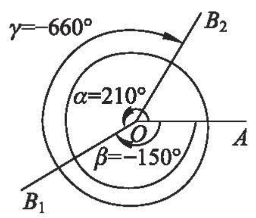


图 1-6

2.2 象限角及其表示

为了方便研究问题，本节及以后经常将角放在一个平面直角坐标系中，角的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的非负半轴．以角的终边(除端点外)在平面直角坐标系的位置对角分类：**角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角**；如果角的终边在坐标轴上，这个角就不属于任何象限．

例如，图 1－7 中，30°，390°和－690°角都是第一象限角；图 1－8 中，300°和－60°角都是第四象限角；图 1－9 中，585°角是第三象限角．

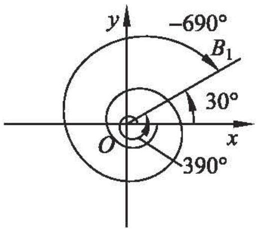


图 1－7

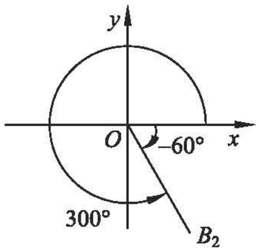


图 1－8

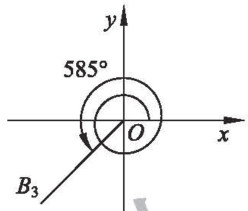


图 1－9

从图 1－7 中可以看出，390°和－690°角的终边都与 30°角的终边相同，并且这两个角都可以表示成 0°～360°的角与 k 个周角的和，其中 k 为整数，即

$$390°=30°+360° \quad (k=1),$$

$$-690°=30°+(-2)\times 360° \quad (k=-2).$$

设集合 $S=\{\beta|\beta=30°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$，则 390°，－690°角都是 S 的元素，30°角也是 S 的元素($k=0$)．容易看出：所有与 30°角终边相同的角，连同 30°角在内，都是集合 S 的元素；反之，集合 S 的任一元素的终边显然与 30°角终边相同．

抽象概括

一般地，给定一个角 α，所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\},$$

即任何一个与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与周角的整数倍的和．

例 1 判定下列各角是第几象限角：

(1) －60°；　(2) 945°；　(3) －950°12′．

解 (1) 因为－60°角的终边在第四象限，所以它是第四象限角；

(2) 因为 $945°=225°+2\times 360°$，所以 945°与 225°角的终边相同，而 225°角的终边在第三象限，所以 945°角是第三象限角；

(3) 因为 $-950°12'=129°48'+(-3)\times 360°$，而 129°48′角的终边在第二象限，所以

$-950°12'$角是第二象限角.

例 2 写出终边在平面直角坐标系 y 轴上的角的集合.

解 在 $0°\sim360°$范围内,终边在 y 轴上的角有两个,即 $90°$和 $270°$角(如图 1-10). 因此,所有与 $90°$角终边相同的角构成集合

$$S_1=\{\beta \mid \beta=90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\};$$

而所有与 $270°$角终边相同的角构成集合

$$S_2=\{\beta \mid \beta=270°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}.$$

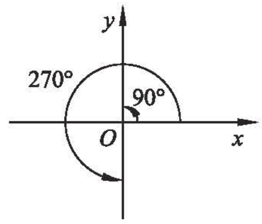


图 1-10

于是,终边在 y 轴上的角的集合

$$\begin{aligned}S=S_1\cup S_2&=\{\beta \mid \beta=90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta \mid \beta=270°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\beta \mid \beta=90°+2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta \mid \beta=90°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\beta \mid \beta=90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

例 3 写出与 $60°$角终边相同的角的集合 S,并把 S 中适合 $-360°\leqslant\beta<720°$的元素 β 写出来.

解 $S=\{\beta \mid \beta=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中适合 $-360°\leqslant\beta<720°$的元素应满足 $-360°\leqslant60°+k\cdot360°<720°$.

解得 $-\frac{7}{6}\leqslant k<\frac{11}{6}$. 又 $k\in\mathbf{Z}$,所以 $k=-1$, 0, 1.

所求元素分别是:

$$60°+(-1)\times360°=-300°,$$
$$60°+0\times360°=60°,$$
$$60°+1\times360°=420°.$$

思考交流

已知角 α 为锐角,那么角 α 的终边与角 $\alpha+180°$,$\alpha-180°$,$180°-\alpha$ 终边的几何关系分别是什么? 如果角 α 是任意角呢? 请画图说明.

练 习

1. 在平面直角坐标系中,判断下列各命题的真假:
   (1) 锐角是第一象限角;
   (2) 第一象限的角一定是锐角;

(3) 钝角是第二象限角；

(4) 第二象限的角一定是钝角；

(5) 终边相同的角一定相等；

(6) 相等的角终边一定相同；

(7) 小于 90°的角一定是锐角；

(8) 终边与直线 $y=\sqrt{3}x$ 重合的角表示为 $k\cdot360^\circ+60^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

2. 在 $0^\circ\sim360^\circ$范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是哪个象限的角：

(1) $-54^\circ18'$； (2) $395^\circ8'$； (3) $-1\,190^\circ30'$； (4) $1\,563^\circ$.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-720^\circ\leqslant\beta<360^\circ$ 的元素 β 写出来：

(1) 60°； (2) -45°； (3) $1\,303^\circ18'$； (4) -225°.

4. 在 $0^\circ\sim360^\circ$范围内，与 $-1\,000^\circ$角终边相同的是______，是第______象限角.

习题 1-2

1. 已知角 $\alpha=-130^\circ$，则角 α 的终边落在第______象限.

2. 与 -457°角终边相同的角的集合是________________.

3. 如果角 α 为锐角，那么 $k\cdot180^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}$ 所在的象限是__________.

4. 写出终边与坐标轴重合的角的集合.

5. 时针走了 1 h 20 min，则分针转过的角是________.

6. 若角 β 是第四象限角，则 $180^\circ-\beta$ 是第______象限角.

§ 3 弧度制

3.1 弧度概念

在几何的度量中，首先研究了线段长度的度量，其做法是：引入一个单位线段，以它为单位来度量其他线段或曲线（如圆周）的长度.

在单位线段的基础上，又引进了以单位线段为边长的单位正方形作为面积的度量单位，以单位线段为棱长的单位立方体作为体积的度量单位，并用这些度量单位度量图形的面积和体积.

对角的度量，选取一个周角，把它 360 等分而得到角的度量单位，用这个度量单位去度量其他角的大小. 显然，此时角的度量单位的确定与单位线段无关.

由此可见，在几何图形的各种度量中，除了角度之外，其他的度量（长度、面积、体积等）都是以单位线段为基础的.

问题提出

能否用线段的单位长度来建立角的度量单位，从而把几何度量都建立在一个共同的基础（长度的度量）上呢？

以角的顶点为圆心画**单位圆**（半径为单位长度 1 的圆），用这个角在此圆上所对应的弧的长度来度量这个角.

抽象概括

在单位圆中，把长度等于 1 的弧所对的圆心角称为 1 **弧度**的角. 其单位用符号 rad 表示，读作**弧度**（通常“弧度”或“rad”省略不写）. 在单位圆中，每一段弧的长度就是它所对圆心角的弧度数. 这种以弧度作为单位来度量角的方法，称作**弧度制**.

如图 1－11，在单位圆中，$\overset{\frown}{AB}$的长等于 1，$\angle AOB$ 就是 1 rad 的角；如图 1－12，在单位圆中，$\overset{\frown}{CD}$的长等于 2，$\angle COD$ 就是－2 rad 的角. 角的正负由角的终边的旋转方向决定.

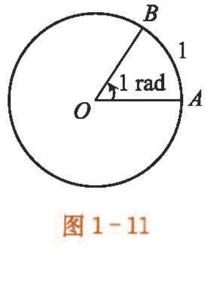


图 1－11

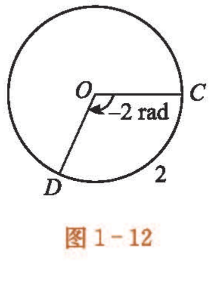


图 1－12

一般地,弧度与实数一一对应. 正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是 0.

3.2 弧度与角度的换算

弧度概念是由英国数学家科兹(Roger Cotes, 1682—1716)在1714年提出的. 作为一种对角的度量方法, 弧度制使三角函数的研究大为简化.

问题提出

角可以分别用角度和弧度度量,角度和弧度之间有什么关系呢?

分析理解

根据弧度的定义,可知

$$\boxed{\begin{aligned}&1^\circ=\frac{2\pi}{360}\ \text{rad}=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.017\ 45\ \text{rad};\\ &1\ \text{rad}=\frac{360^\circ}{2\pi}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ18'.\end{aligned}}\qquad \begin{aligned}&(1.1)\\ &(1.2)\end{aligned}$$

根据需要,可以用(1.1)式和(1.2)式进行弧度与角度的换算.

对于任意角,每一个角 β 都可以表示成

$$\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ(0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ,k\in\mathbf{Z}).$$

而 360° 角对应 2π 弧度角,因此只需把角 α 用弧度角 α' 表示,就可以得到角 β 的弧度角 β',即

$$\beta'=\alpha'+2k\pi(0\leqslant\alpha'<2\pi,k\in\mathbf{Z}).$$

例 1 (1) 把 45° 化成弧度; (2) 把 -600° 化成弧度.

解 (1) $45^\circ=45\times\frac{\pi}{180}\ \text{rad}=\frac{\pi}{4}\ \text{rad}$;

(2) $-600^\circ=-600\times\frac{\pi}{180}\ \text{rad}=-\frac{10\pi}{3}\ \text{rad}$.

例 2 (1) 把 $\frac{3\pi}{5}$ 化成度; (2) 把 $-\frac{9\pi}{4}$ 化成度.

解 (1) $\frac{3\pi}{5}\ \text{rad}=\frac{3\pi}{5}\times\frac{180^\circ}{\pi}=108^\circ$;

(2) $-\frac{9\pi}{4}\ \text{rad}=-\frac{9\pi}{4}\times\frac{180^\circ}{\pi}=-405^\circ$.

下面是一些特殊角的度数与弧度数的对应表(如表 1－1):

表 1－1

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

对于 $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$之外的特殊角,不难得到它们的弧度数.

例如,$420^\circ=360^\circ+60^\circ=\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\ \text{rad}=\frac{7\pi}{3}\ \text{rad}$.

考虑如图 1－13 的模型.

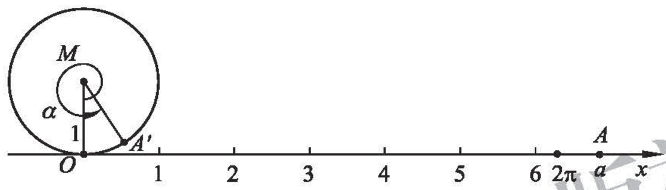


图 1－13

单位圆 M 与数轴相切于原点 O,把数轴看成一个“皮尺”. 对于任意一个正数 a,它对应正半轴上的点 A,把线段 OA 按逆时针方向缠绕到圆 M 上,点 A 对应单位圆上点 A',这样就得到一个以点 M 为顶点,以 MO 为始边,经过逆时针旋转以 MA' 为终边的圆心角 α,该角的弧度数为正数 a.

思考交流

对于任意一个负数 b,如何利用“皮尺”缠绕的方法,在上述的圆 M 中找到与弧度数为 b 相对应的圆心角 β?

在半径为 r 的圆中,若圆心角 A 为 n°,则它对应的弧长 $l=\frac{|n|}{360}\cdot 2\pi r$. 又此时角 A 的弧度数 $\alpha=\frac{n}{360}\cdot 2\pi$,因此,$l=|\alpha|r$,即

$$|\alpha|=\frac{l}{r}.$$

即圆心角的弧度数的绝对值等于该角所对的弧长与半径之比.

练 习

1. 把下列各角的角度化成弧度：

(1) $135°$； (2) $90°$； (3) $60°$； (4) $-420°$.

2. 把下列各角的弧度化成度：

(1) $\frac{\pi}{6}$； (2) $-\frac{2\pi}{3}$； (3) $\frac{11\pi}{9}$； (4) $\frac{19\pi}{6}$.

3. 时间经过 4 h，时针、分针各转了多少度？各等于多少弧度？
4. 用弧度制表示终边在 x 轴上的角的集合.
5. 求下列各式的值(可以用计算器)：

(1) $\sin\frac{\pi}{3}$； (2) $\tan\frac{\pi}{6}$； (3) $\cos 1.2$； (4) $\sin 1$.

6. 分别用角度制、弧度制下的弧长公式，计算在半径为 2 cm 的圆中，$60°$的圆心角所对的弧的长度.
7. 把下列各角化成 $\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha<2\pi, k\in\mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是哪个象限的角：

(1) $\frac{23\pi}{6}$； (2) $-1\ 680°$； (3) $-\frac{18\pi}{7}$； (4) $755°$.

8. 设扇形的弧长为 18 cm，半径为 12 cm，求这个扇形的面积.

习题 1－3

A 组

1. $-\frac{29\pi}{6}$是第______象限角.
2. 将$-1\ 845°$化成 $\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha<2\pi, k\in\mathbf{Z})$的形式.
3. 若 $\alpha=-10$，则 α 为第______ 象限角.
4. $-300°=$______rad；$\frac{8\pi}{5}$ rad$=$______°.
5. 用弧度制分别写出第一至第四象限角的集合.
6. 在半径不等的两个圆中，相等的圆心角所对的弧长与半径之比是常数.

B 组

1. 利用弧度制证明扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}lr$，其中 l 是扇形的弧长，r 是圆的半径.
2. 在半径为 R 的圆中，$120°$的圆心角所对的弧长为________，面积为 $2R^2$ 的扇形的圆心角等于______弧度.
3. 已知某扇形的周长是 6 cm，面积是 2 cm²，则该扇形的圆心角的弧度数为________.
4. 已知一扇形的圆心角为 α，所在圆的半径为 R，该扇形的周长为 $4R$，则该扇形中所含弓形的面积是多少？(注：弓形是指在圆中由弦及其所对的弧组成的图形.)

§ 4 正弦函数和余弦函数的概念及其性质

4.1 单位圆与任意角的正弦函数、余弦函数定义

一、锐角的正弦函数和余弦函数

在初中，我们研究了直角三角形的边角关系，得到了锐角的正弦值和余弦值. 下面我们在平面直角坐标系中，利用单位圆（以后常设单位圆的圆心在原点）进一步研究锐角 α 的正弦函数和余弦函数.

如图 1－14，对于锐角 α，角 α 的终边与单位圆交于点 $P(u,v)$，故 u 是由角 α 唯一确定的，v 也是由角 α 唯一确定的.

过点 P 向 x 轴作垂线，垂足为 M. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OMP$ 中，$OP=1$，$OM=u$，$MP=v$，有

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{v}{1}=v,\quad \cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{u}{1}=u.$$

由此可知，对于锐角 α 来说，点 P 的纵坐标 v 是该角的正弦值，点 P 的横坐标 u 是该角的余弦值.

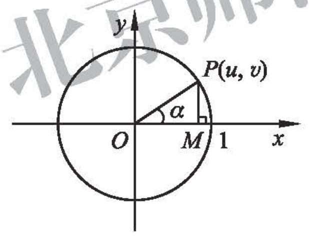


图 1－14

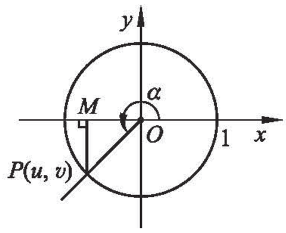


图 1－15

对于每一个锐角 α，都有唯一的坐标 (u,v) 与之对应，在弧度意义下，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，称 $v=\sin\alpha$ 为**锐角 α 的正弦函数**，$u=\cos\alpha$ 为**锐角 α 的余弦函数**.

二、任意角的正弦函数和余弦函数

如图 1－15，给定任意角 α，作单位圆，角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(u,v)$，点 P 的纵坐标 v、横坐标 u 都是唯一确定的. 仿照上述定义，把点 P 的纵坐标 v 叫作角 α 的正弦值，把点 P 的横坐标 u 叫作角 α 的余弦值.

于是，在弧度意义下，对于 $\alpha\in\mathbf{R}$，称 $v=\sin\alpha$ 为任意角 α 的正弦函数，$u=\cos\alpha$ 为任意角 α 的余弦函数.

例 1 已知任意角 α 终边上除原点外的一点 $Q(x,y)$，求角 α 的正弦函数值、余弦函数值.

解 先考虑角 α 的终边不在坐标轴上的情形.

如图 1－16. 设角 α 的终边与单位圆交于点 P，则点 P 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，且 $OP=1$.

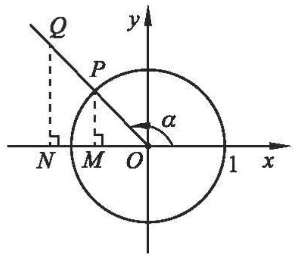


图 1－16

点 $Q(x,y)$ 在角 α 的终边上，则 $OQ=\sqrt{x^2+y^2}$.

分别过点 P,Q 作 x 轴的垂线 PM,QN，垂足为 M,N. 易知 $\triangle POM\backsim\triangle QON$.

所以 $\dfrac{|PM|^{①}}{|OP|}=\dfrac{|QN|}{|OQ|}$，即 $\dfrac{|\sin\alpha|}{1}=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

因为点 P 和点 Q 在同一象限，所以 $\sin\alpha$ 和 y 的符号相同，于是得到 $\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

同理，$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

当角 α 的终边在坐标轴上时，容易验证上述等式仍然成立.

抽象概括

设角 α 终边上除原点外的一点 $Q(x,y)$，则

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \cos\alpha=\frac{x}{r}},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

例 2 在单位圆中，$\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$.

(1) 画出角 α；

(2) 求角 α 的正弦函数值和余弦函数值.

解 (1) 如图 1－17，以原点为角的顶点，以 x 轴的非负半轴为始边，顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$，与单位圆交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 M. 于是 $\alpha=\angle MOP=-\dfrac{\pi}{4}$ 即为所作的角.

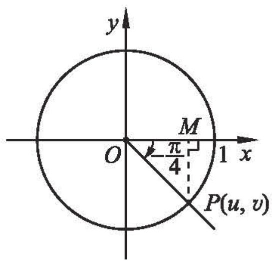


图 1－17

(2) 设点 $P(u,v)$，则 $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$v=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=v=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=u=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

① $|PM|$ 表示两点间的距离.

思考交流

在单位圆中，画出下列各特殊角，求各角终边与单位圆的交点坐标(u,v)，并将各特殊角的正弦函数值、余弦函数值填入表 1－2：

表 1－2

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$v=\sin\alpha$														
$u=\cos\alpha$														

观察此表格中的数据，你能发现函数 $v=\sin\alpha$ 和 $u=\cos\alpha$ 的变化有什么特点吗？

练　习

1. 已知角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $\sin\alpha=$______，$\cos\alpha=$______.
2. 已知角 β 的终边经过点 $M(-3,-1)$，则 $\sin\beta=$______，$\cos\beta=$______.
3. 在单位圆中，确定下列三角函数值的符号：

   (1) $\sin 151°$；　(2) $\cos\frac{16\pi}{5}$；　(3) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$；　(4) $\cos 271°$.
4. 在单位圆中，$\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

   (1) 画出角 α；　(2) 求角 α 的终边与单位圆的交点坐标.
5. 求下列各式的值：

   (1) $\sin(-30°)$；　(2) $\cos(-150°)$；　(3) $\sin\frac{4\pi}{3}$；

   (4) $\cos\frac{2\pi}{3}$；　(5) $\sin\frac{3\pi}{2}$；　(6) $\cos\pi$.
6. 若角 θ 的终边上有一点 $P(a,a)(a\neq0)$，则 $\sin\theta$ 的值是______.
7. 若角 θ 的终边经过点 $P(-6t,-8t)(t\neq0)$，则 $\sin\theta-\cos\theta$ 的值是______.

4.2　单位圆与正弦函数、余弦函数的基本性质

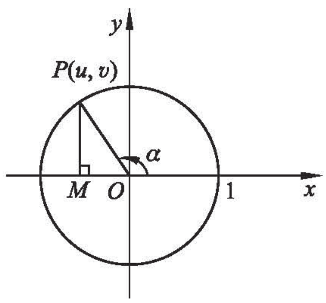


图 1－18

观察图 1－18，设任意角 α 的终边与单位圆交于点 $P(u,v)$，当自变量 α 变化时，点 P 的横坐标、纵坐标也在变化. 因此，根据正弦函数 $v=\sin\alpha$ 和余弦函数 $u=\cos\alpha$ 的定义，不难看出它们具有以下基本性质.

一、定义域

正弦函数、余弦函数的定义域均是 $\mathbf{R}$.

二、最大(小)值、值域

当自变量 $\alpha\in\mathbf{R}$ 时，$0\leqslant|\sin\alpha|\leqslant 1$，$0\leqslant|\cos\alpha|\leqslant 1$.

当 $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，正弦函数 $v=\sin\alpha$ 取得最大值 1；当 $\alpha=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，正弦函数取得最小值 -1.

当 $\alpha=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，余弦函数 $u=\cos\alpha$ 取得最大值 1；当 $\alpha=(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，余弦函数取得最小值 -1.

因为函数 $v=\sin\alpha$，$u=\cos\alpha$ 均能取到 -1 和 1 之间的任意值，所以它们的值域均为 $[-1,1]$.

三、周期性

根据正弦函数、余弦函数的定义(如图 1-19)，有

终边相同的角的正弦函数值相等，即对任意 $k\in\mathbf{Z}$，$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$，$\alpha\in\mathbf{R}$；

终边相同的角的余弦函数值相等，即对任意 $k\in\mathbf{Z}$，$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$，$\alpha\in\mathbf{R}$.

上述两个等式说明：对于任意一个角 α，每增加 2π 的整数倍，其正弦函数值、余弦函数值均不变，所以正弦函数 $v=\sin\alpha$ 和余弦函数 $u=\cos\alpha$ 均是周期函数. 对任何 $k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0$，$2k\pi$ 均是它们的周期，最小正周期为 2π.

周期性是正弦函数、余弦函数最重要的性质.

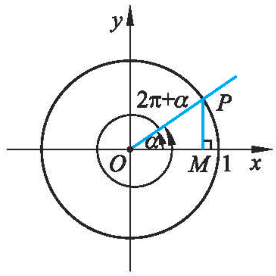


图 1-19

四、单调性

根据正弦函数的定义，在单位圆中，如图 1-20，当角 α 由 $-\dfrac{\pi}{2}$ 增加到 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin\alpha$ 的值由 -1 增加到 1；如图 1-21，当角 α 由 $\dfrac{\pi}{2}$ 增加到 $\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\sin\alpha$ 的值由 1 减小到 -1. 因此正弦函数

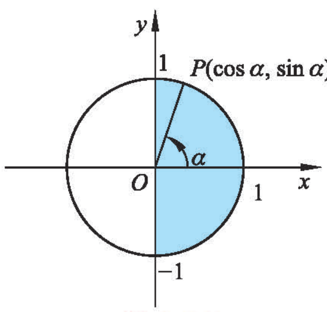


图 1-20

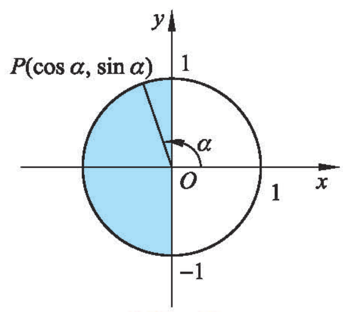


图 1-21

在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递减．

由正弦函数的周期性可知，对任意的$k\in\mathbf{Z}$，正弦函数在区间$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，在区间$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递减.

思考交流

请借助单位圆，讨论余弦函数的单调性.

五、正弦函数值和余弦函数值的符号

根据正弦函数和余弦函数的定义，如图1-22，在平面直角坐标系中，当点$P(u,v)$在上半平面时，正弦函数($v=\sin\alpha$)值为正，即点P在第一、第二象限或y轴的正半轴时，正弦函数值为正；当点P在x轴上时，正弦函数值为零；当点P在平面直角坐标系的下半平面时，正弦函数值为负，即点P在第三、第四象限或y轴的负半轴时，正弦函数值为负.

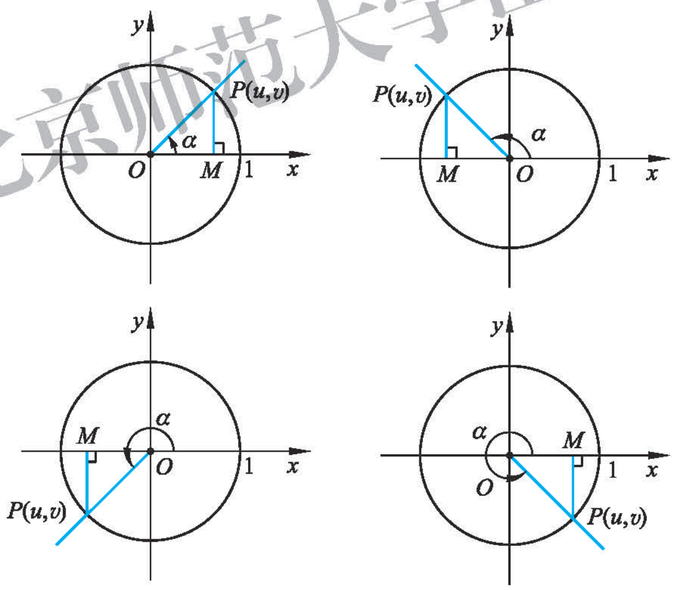


图1-22

同理，当点P在平面直角坐标系的右半平面时，余弦函数值为正，即点P在第一、第四象限或x轴的正半轴时，余弦函数值为正；当点P在y轴上时，余弦函数值为零；当点P在左半平面时，余弦函数值为负，即点P在第二、第三象限或x轴的负半轴时，余弦函数值为负.

例 3 借助单位圆，讨论函数$v=\sin\alpha$在给定区间上的单调性.

(1) $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$；　　(2) $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]$.

解 画出图 1-23，可知：

(1) 函数 $v=\sin\alpha$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增；

(2) 函数 $v=\sin\alpha$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right]$上单调递减.

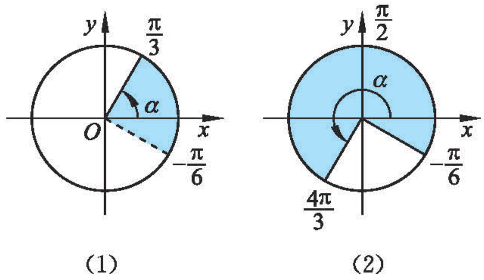


图 1-23

例 4 求函数 $v=\cos\alpha$ 在区间$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right]$上的最大值和最小值，并写出取得最大值和最小值时自变量 α 的值.

解 画出图 1-24，可知：

当$\alpha=\frac{11\pi}{6}$时，函数 $v=\cos\alpha$ 取得最大值，最大值为 $\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $\alpha=\pi$ 时，函数 $v=\cos\alpha$ 取得最小值，最小值为 $\cos\pi=-1$.

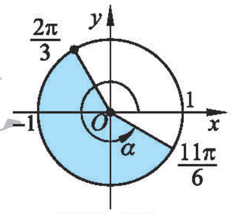


图 1-24

练　习

1. 求下列函数的单调区间：

(1) $v=\sin\alpha$，$\alpha\in[-\pi,\pi]$；　　(2) $u=\cos\alpha$，$\alpha\in[-\pi,\pi]$；

(3) $v=\sin\alpha$，$\alpha\in\left[-\pi,\frac{\pi}{6}\right]$；　　(4) $u=\cos\alpha$，$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$.

2. 求下列函数的最大值和最小值，并写出分别取得最大值和最小值时自变量 α 的值：

(1) $y=2\sin\alpha,\alpha\in\left[\frac{25\pi}{6},\frac{14\pi}{3}\right]$；　　(2) $y=3\cos\alpha,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]$；

(3) $y=-\frac{1}{2}\sin\alpha,\alpha\in\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{2\pi}{3}\right]$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=1-\sin\alpha$；　　(2) $y=\frac{1}{1+\sin\alpha}$；

(3) $y=\sqrt{\frac{1}{2}-\cos\alpha}$.

4. 求下列函数的值域：

(1) $y=-\sin\alpha,\alpha\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$；　　(2) $y=3\cos\alpha,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$.

4.3 诱导公式与对称

一、$\sin\alpha,\cos\alpha$ 与 $\sin(-\alpha),\cos(-\alpha)$ 的关系

在平面直角坐标系中，设任意角 α 和 $-\alpha$ 的终边与单位圆的交点分别为点 P 和 P'，如图 1-25. 不难看出，这两个角的终边 OP,OP' 关于 x 轴对称. 因此，点 P 和 P' 的横坐标相等，纵坐标的绝对值相等且符号相反. 即

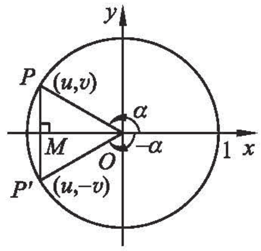


图 1-25

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，所以正弦函数 $v=\sin\alpha$ 是奇函数；

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，所以余弦函数 $u=\cos\alpha$ 是偶函数.

二、$\sin\alpha,\cos\alpha$ 与 $\sin(\alpha\pm\pi),\cos(\alpha\pm\pi)$ 的关系

在平面直角坐标系中，设任意角 α 的终边与单位圆的交点为 P，当点 P 沿逆(顺)时针方向旋转 π 弧度至点 P' 时，点 P' 就是 $\alpha\pm\pi$ 的终边与单位圆的交点(如图 1-26). 不难看出，点 P' 与点 P 关于原点对称. 因此，它们的横坐标的绝对值相等且符号相反，纵坐标的绝对值也相等且符号相反. 即

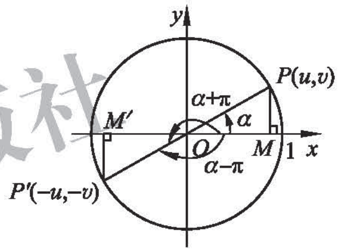


图 1-26

$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha,\quad \sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha,\quad \cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha.$$

三、$\sin\alpha,\cos\alpha$ 与 $\sin(\pi-\alpha),\cos(\pi-\alpha)$ 的关系

在平面直角坐标系中，如图 1-27，任意角 α 与 $\pi-\alpha$ 的终边关于 y 轴对称. 因此，点 P 和点 P' 的纵坐标相等，横坐标的绝对值相等且符号相反. 即

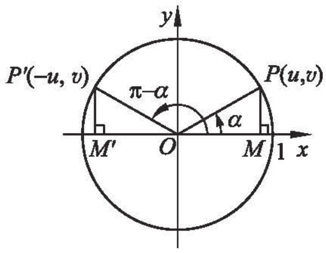


图 1-27

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

这两个公式也可以由前两组公式推出：

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(\alpha-\pi)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha.$$

思考交流

在学习上述公式时，如何体会轴对称、中心对称的作用？

例 5 画出下列各组中的两个角的终边与单位圆的交点，说出它们的对称关系.

(1) $\frac{5\pi}{4}$ 与 $\frac{\pi}{4}$； (2) $\frac{2\pi}{3}$与$\frac{\pi}{3}$； (3) $\frac{11\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$； (4) $-\frac{31\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$.

解 (1) 如图 1－28，$\frac{5\pi}{4}$ 与$\frac{\pi}{4}$的终边与单位圆的交点关于原点对称；

(2) 如图 1－29，$\frac{2\pi}{3}$与$\frac{\pi}{3}$的终边与单位圆的交点关于 y 轴对称；

(3) 如图 1－30，$\frac{11\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$的终边与单位圆的交点关于 x 轴对称；

(4) 如图 1－31，$-\frac{31\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$的终边与单位圆的交点关于 y 轴对称.

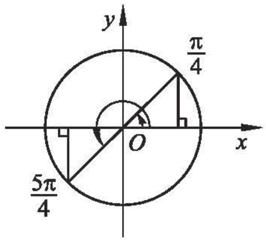


图 1－28

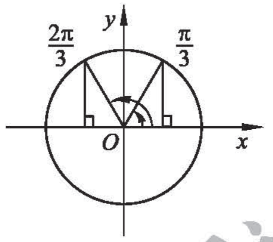


图 1－29

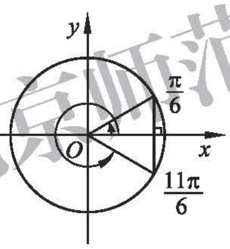


图 1－30

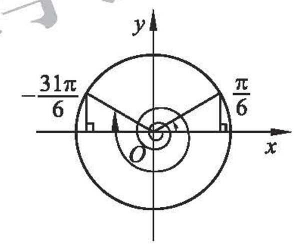


图 1－31

例 6 求下列三角函数值：

(1) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$； (2) $\cos\frac{2\pi}{3}$； (3) $\sin\frac{11\pi}{6}$； (4) $\cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$.

解 (1) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\frac{5\pi}{4}=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(2) $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$；

(3) $\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$；

(4) $\cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)=\cos\frac{31\pi}{6}=\cos\left(\frac{7\pi}{6}+4\pi\right)=\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

练 习

1. 求下列三角函数值：

(1) $\cos 135°$； (2) $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)$； (3) $\cos(-1\ 110°)$； (4) $\sin\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)$；

(5) $\sin 870°$； (6) $\cos\dfrac{11\pi}{4}$； (7) $\sin(-210°)$； (8) $\cos\left(-\dfrac{83\pi}{6}\right)$.

2. 计算：$\cos\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)\sin\dfrac{5\pi}{3}\sin\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)\cos\dfrac{10\pi}{3}$.

3. 角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(-\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{13}\right)$，分别写出点 P 关于 x 轴、y 轴和原点对称的点的坐标，并求角 $\pi-\alpha$，$-\alpha$，$\pi+\alpha$，$2\pi-\alpha$ 的正弦函数值、余弦函数值.

4. 利用单位圆，求适合下列条件的角 α 的集合.

(1) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； (2) $\sin\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$.

4.4 诱导公式与旋转

观察图 1－32，设锐角 α 的终边与单位圆交于点 $P(u,v)$，将终边绕点 O 沿逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到点 P'，即 $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ 的终边与单位圆交于点 P'.

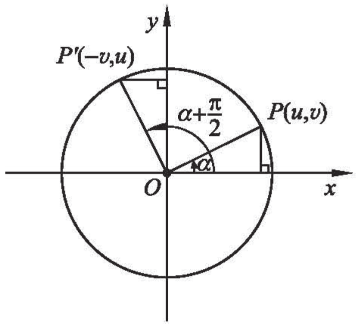


图 1－32

由平面几何知识可知：

点 P' 的坐标为 $(-v,u)$. 所以点 P 的横坐标 $\cos\alpha$ 与点 P' 的纵坐标 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 相等，即

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha;$$

点 P 的纵坐标 $\sin\alpha$ 与点 P' 的横坐标 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的绝对值相等且符号相反，即

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha.$$

以上结论对任意角 α 都成立，即对任意角 α，有

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha.$$

例 7 证明：$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$，$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$.

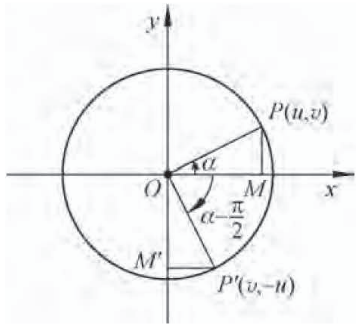


图 1－33

证明 设锐角 α 的终边与单位圆交于点 $P(u,\ v)$. 由图 1－33 可知，点 P 的横坐标$\cos\alpha$与点 P'的纵坐标 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$的绝对值相等且符号相反，即$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$.

点 P 的纵坐标 $\sin\alpha$ 与点 P'的横坐标 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$相等，即 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$.

以上结论对任意角 α 都成立，即对任意角 α，有

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha,\ \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha.$$

抽象概括

对任意角 α，下列关系式均成立(其中 $k\in\mathbf{Z}$).

$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$	$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$\sin(\alpha+\pi)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\alpha+\pi)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$	$\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

通常称上述公式为正弦函数、余弦函数的**诱导公式**.

至此，我们在平面直角坐标系中，对角 α 的终边经过对称或旋转得到了诱导公式. 我们发现，$\frac{\pi}{2}$ 是这些诱导公式中旋转的最小角度，而 π，$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$又都是 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍；还有，中心对称也可以用旋转 π 表示. 于是，我们试图用旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍来分析诱导公式.

1. 先分析 $\alpha+\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\pi$，$\alpha-\pi$ 和 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

(1) $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 可以看作角 α 的终边旋转了 $\frac{\pi}{2}$；

(2) $\alpha+\pi$ 可以看作角 α 的终边旋转了 $\frac{\pi}{2}$ 的 2 倍；

(3) $\alpha-\pi$ 与 $\alpha+\pi$ 的终边重合，其三角函数值均相等；

(4) $\alpha+2k\pi$ 可以看作角 α 的终边旋转了 $\frac{\pi}{2}$ 的 $4k(k\in\mathbf{Z})$倍.

2. 再分析 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 和 $\pi-\alpha$

(1) 显然，$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 也就是$-\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$，$\alpha-\frac{\pi}{2}$ 与 $\alpha+\frac{3\pi}{2}$ 的终边重合，其三角函数值均相等，即求 $\alpha-\frac{\pi}{2}$的三角函数时，可以将 $\alpha-\frac{\pi}{2}$ 看作角 α 的终边旋转了 $\frac{\pi}{2}$ 的 3 倍；

(2) $\pi-\alpha$ 也就是$-(\alpha-\pi)$.

综上所述，除了关于$-\alpha$ 的诱导公式 $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ 和 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，对于其他诱导公式中的角，都可以看作 $\alpha+\frac{n\pi}{2}$，其中 $n=1,2,3,4k(k\in\mathbf{Z})$. 只需注意，关于 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 和 $\pi-\alpha$的诱导公式，在做了 $\alpha+\frac{3\pi}{2}$ 和 $\alpha-\pi$ 的公式变化之后，还要借助于$-\alpha$ 的诱导公式.

用这样的观点看诱导公式，得到如下结论：当 n 取奇数 1 或 3 时，公式的等号两边一个是正弦函数，另一个是余弦函数；当 n 取偶数 2 或 $4k(k\in\mathbf{Z})$时，公式的等号两边都是正弦函数或都是余弦函数，其符号由角所在的象限决定.

由于我们比较熟悉锐角三角函数，诱导公式的一个重要作用是将不是锐角的正弦函数、余弦函数问题转化为锐角的正弦函数、余弦函数问题.

例 8 求下列函数值：

(1) $\sin\frac{11\pi}{4}$；　　(2) $\sin\left(-\frac{55\pi}{6}\right)$；

(3) $\sin\frac{5\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{11\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{4}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\sin\frac{11\pi}{4}&=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi\right)\\&=\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{55\pi}{6}\right)&=-\sin\frac{55\pi}{6}=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+9\pi\right)\\&=-\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\end{aligned}$$

(3) $\sin\frac{5\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{11\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 9 化简：$\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(3\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha-\pi)\sin(3\pi-\alpha)\cos(-\alpha-\pi)}$.

解 由诱导公式，有

$$\text{原式}=\frac{(-\sin\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{-\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}$$

$$=\frac{-\sin\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha}{-\sin\alpha\sin\alpha\ (-\cos\alpha)}$$

$$=1.$$

练 习

1. 已知角 α 的终边经过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，分别求角 α，$\frac{\pi}{2}+\alpha$，$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的正弦函数值、余弦函数值.

2. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-0.3$，求下列各三角函数值：

(1) $\cos\alpha$； (2) $\cos(\pi+\alpha)$； (3) $\cos(-\alpha)$； (4) $\cos(2\pi-\alpha)$； (5) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

3. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{1}{3}$，求 $\sin(-3\pi+\alpha)$ 的值.

4. 已知 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$，求 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ 和 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ 的值.

5. 化简：

(1) $\sin(\alpha-2\pi)\sin(\alpha+\pi)-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\alpha-\pi)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$；

(2) $\dfrac{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\alpha-3\pi)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

习题 1－4

A 组

1. 设角 α 的终边经过下列各点，求角 α 的正弦函数值、余弦函数值：

(1) $(2,\sqrt{5})$； (2) $(-3,4)$； (3) $(-\sqrt{3},-1)$； (4) $(5,-12)$.

2. 确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\sin 185°$； (2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{5}\right)$； (3) $\cos 7.6\pi$；

(4) $\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$； (5) $\cos 940°$； (6) $\cos\left(-\frac{59\pi}{17}\right)$.

3. 设点 $P(-2,v)$是角 θ 终边上一点，且 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，求 v 的值.

4. 在下表空白处填上适当的数值(可以用计算器，精确到 0.000 1)：

α	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$							0.923 9	
α	$\frac{17\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{23\pi}{8}$	3π
$\sin\alpha$	0.382 7							
$\cos\alpha$								

5. 利用单位圆和 $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$的正弦函数值、余弦函数值，可以求出区间$\left[-\frac{7\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right]$内哪些角的正弦函数值、余弦函数值？并求出这些角的正弦函数值、余弦函数值.

6. 已知角 α 的终边在函数 $y=-2x(x\leqslant 0)$的图象上，求$\cos\alpha$和 $\sin(\pi+\alpha)$的值.

7. 已知角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $\sin\alpha=$______，$\cos\alpha=$________.

8. 已知角 θ 的终边经过点 $P(3a-9,a+2)$，且 $\cos\theta<0$，$\sin\theta>0$，则实数 a 的取值范围是________.

9. 化简：

(1) $1-\sin(\alpha-2\pi)\sin(\pi+\alpha)-2\sin^2(-\alpha)$；

(2) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)+\sin(-\alpha-\pi)\sin(\alpha-2\pi)}{\sin(4\pi-\alpha)\sin(5\pi+\alpha)}$；

(3) $p\sin\pi+q\cos\frac{\pi}{2}+k\cos 2\pi$；

(4) $-p^2\cos 180°+q^2\sin 90°-2pq\cos 0°$；

(5) $a^2\cos 2\pi-b^2\sin\frac{3\pi}{2}+ab\cos\pi-ab\sin\frac{\pi}{2}$.

B 组

1. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$,求 $\sin(\pi-\alpha)$的值.

2. 求满足 $\cos\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$的 α 的取值范围.

3. 已知 $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$,求下列各三角函数的值:

   (1) $\sin(3\pi+\alpha)$; (2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; (3) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$.

4. 已知角 α 的终边在直线 $y=x$ 上,求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

5. 已知角 α 的终边经过点 $P(-3,b)$,且 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,求 b 和 $\sin\alpha$ 的值.

6. 利用单位圆讨论函数 $l=\sin\alpha+\cos\alpha,\alpha\in[0,2\pi]$的符号.

§ 5 正弦函数、余弦函数的图象与性质再认识

在§3中引入了弧度制，在§4中我们借助单位圆学习了正弦函数、余弦函数的概念、性质和诱导公式. 从现在起，正弦函数和余弦函数分别表示为 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$，并在平面直角坐标系中讨论它们的图象和性质. 应该注意到，由于自变量 x 是用弧度表示的，这里讨论的函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是 **R** 的两个子集中元素之间的对应，它们都是周期函数，自变量 x 可以与角度无关. 因此，自然界大量的周期现象（如简谐振动、潮汐现象等）都可以用这类函数来描述.

5.1 正弦函数的图象与性质再认识

一、正弦函数的图象

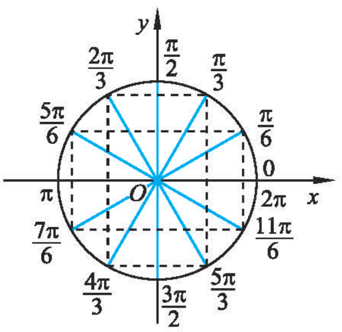
先画出正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图象.

在区间 $[0,2\pi]$ 上取一系列的 x 值，例如 $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\cdots,2\pi$，并借助单位圆获得对应的正弦函数值（如图 1-34(1)），列表（如表 1-3）.

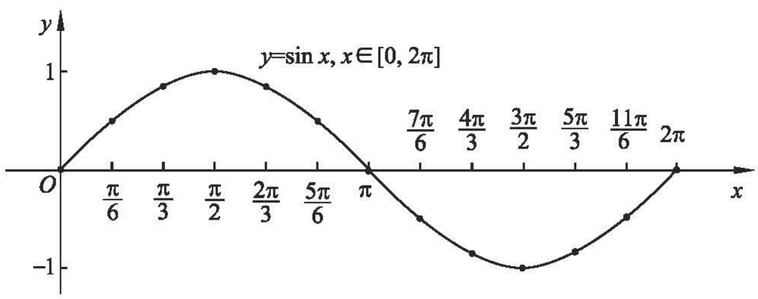
表 1-3

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

利用表 1-3 中的数据，先在平面直角坐标系内描点，结合对函数 $y=\sin x$ 性质的了解，用光滑曲线顺次连接，就可以得到函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图象（如图 1-34(2)）.



(1)



(2)

图 1-34

将函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象向左、右平移(每次平移 2π 个单位长度),就可以得到正弦函数 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$ 的图象(如图 1-35). 正弦函数的图象称作**正弦曲线**.

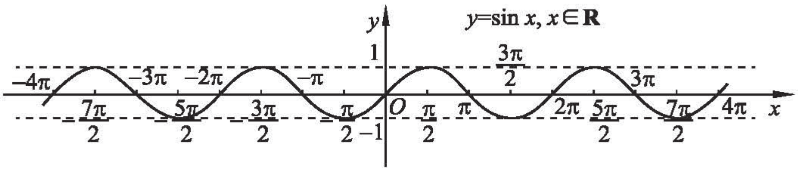


图 1-35

二、正弦函数性质的再认识

请观察正弦函数的图象(如图 1-35),进一步理解正弦函数的性质.

分析理解

1. 定义域

正弦函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

2. 周期性

从正弦函数的图象(如图 1-35)可以看到,当自变量 x 的值增加 2π 的整数倍时,函数值重复出现. 即正弦函数是周期函数,它的最小正周期为 2π. 同样,也可以从诱导公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x, k\in\mathbf{Z}$ 中得到正弦函数的最小正周期为 2π.

因此,为了研究问题方便,可以任意选取一个 2π 长度的区间,讨论 $y=\sin x$ 的性质,然后延拓到定义域 $\mathbf{R}$ 上.

3. 单调性

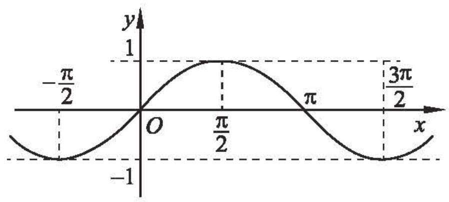


图 1-36

在正弦函数 $y=\sin x$ 图象中,选取长度为 2π 的区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$,观察图 1-36,可以看出,当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时,$\sin x$ 的值由 -1 增大到 1;当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时,$\sin x$ 的值由 1 减小到 -1. 因此,正弦函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减. 由正弦函数的周期性可知,正弦函数在每一个区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递增,在每一个区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递减.

4. 最大(小)值和值域

设集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

当 $x\in A$ 时,正弦函数 $y=\sin x$ 取得最大值 1;反之,当正弦函数 $y=\sin x$ 达到最大值 1 时,$x\in A$.

当 $x\in B$ 时,正弦函数 $y=\sin x$ 取得最小值-1;反之,当正弦函数 $y=\sin x$ 达到最小值-1时,$x\in B$.

从正弦函数的图象(如图 1-35)可以看出,正弦曲线夹在两条平行线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间.所以正弦函数的值域是$[-1,1]$.

5. 奇偶性

正弦曲线关于原点对称,如图 1-35. 由诱导公式 $\sin(-x)=-\sin x$ 可知,正弦函数是奇函数.

思考交流

探索正弦函数图象的对称性. 它有对称轴吗? 有对称中心吗?

例 1 比较下列各组三角函数值的大小:

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)$与$\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)$; (2) $\sin\frac{18\pi}{7}$与$\sin\frac{23\pi}{9}$.

解 (1) 如图 1-37.

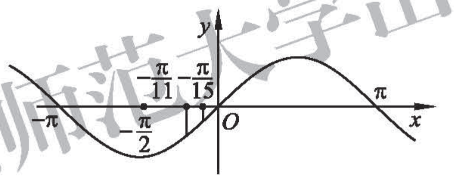


图 1-37

因为$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{11}<-\frac{\pi}{15}<0$,且正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上单调递增,

所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)$.

(2) $\sin\frac{18\pi}{7}=\sin\left(2\pi+\frac{4\pi}{7}\right)=\sin\frac{4\pi}{7}$, $\sin\frac{23\pi}{9}=\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{9}\right)=\sin\frac{5\pi}{9}$.

因为$\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{9}<\frac{4\pi}{7}<\pi$,且正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减,

所以 $\sin\frac{4\pi}{7}<\sin\frac{5\pi}{9}$,即 $\sin\frac{18\pi}{7}<\sin\frac{23\pi}{9}$.

三、五点(画图)法

在一个周期内,例如$[0,2\pi]$,从正弦函数的图象(如图 1-38)可以看出:$x=0,\pi,2\pi$ 是 $y=\sin x$的零点;$x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$分别是 $y=\sin x$ 的最大值点、最小值点. 它们在正弦曲线中起着关键作用.

根据正弦曲线的基本性质，描出 $(0,0)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\dfrac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$这五个关键点后，函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象就基本确定了(如图 1－39). 因此，在精确度要求不太高时，常常先描出这五个关键点，然后用光滑曲线将它们顺次连接起来，就得到正弦函数的简图. 这种作正弦曲线的方法称为“**五点(画图)法**”.

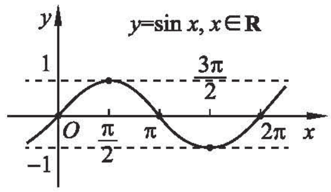


图 1－38

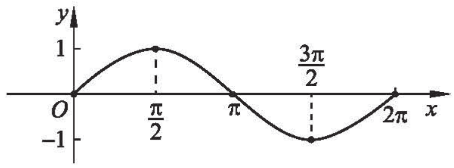
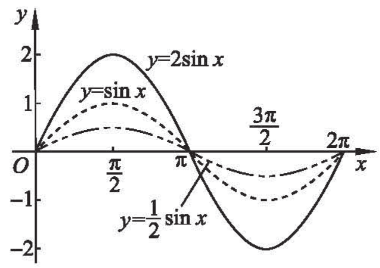


图 1－39

信息技术建议



在绘图软件中画出函数 $y=A\sin x$ 的图象，拖动 A，观察图象的变化.

例 2 画出函数 $y=-\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图象.

解 利用五个关键点确定 $y=\sin x$ 的图象，这五个关键点也是画 $y=-\sin x$ 图象的关键点. 按五个关键点列表(如表 1－4).

表 1－4

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=-\sin x$	0	-1	0	1	0

于是得到函数 $y=-\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的五个关键点为

$$(0,0),\left(\frac{\pi}{2},-1\right),(\pi,0),\left(\frac{3\pi}{2},1\right),(2\pi,0).$$

描点，并用光滑曲线将它们顺次连接起来，就画出函数 $y=-\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图象，如图 1－40.

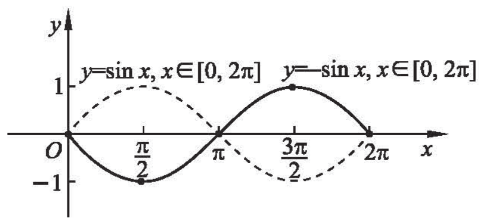


图 1－40

例 3 画出函数 $y=\sin x-1$ 的图象，并讨论它的性质.

解 函数 $y=\sin x$ 的周期是 2π，按五个关键点列表(如表 1-5).

表 1-5

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=\sin x-1$	-1	0	-1	-2	-1

于是得到函数 $y=\sin x-1$ 在$[0,2\pi]$上的五个关键点为

$$(0,-1),\left(\frac{\pi}{2},0\right),(\pi,-1),\left(\frac{3\pi}{2},-2\right),(2\pi,-1).$$

描点，并用光滑曲线将它们顺次连接起来，就画出函数 $y=\sin x-1$ 在区间$[0,2\pi]$上的图象. 将其按周期延拓到 **R** 上得到 $y=\sin x-1$ 在实数集上的图象，如图1-41.

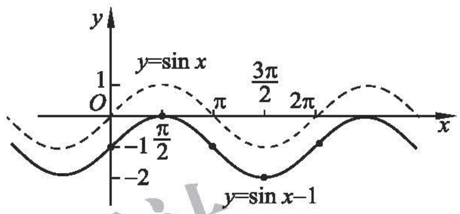


图 1-41

观察图象得出 $y=\sin x-1$ 的性质(如表 1-6).

表 1-6

函　数	$y=\sin x-1$
定义域	**R**
值　域	$[-2,0]$
奇偶性	既不是奇函数，也不是偶函数
周期性	周期函数，周期是 2π
单调性	在每一个闭区间$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$($k\in\mathbf{Z}$)都单调递增； 在每一个闭区间$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$($k\in\mathbf{Z}$)都单调递减
最大值与最小值	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，最大值为 0； 当 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，最小值为 -2

练 习

1. 画出下列函数在区间$[0,2\pi]$上的图象：

(1) $y=2+\sin x$； (2) $y=\sin x-2$； (3) $y=3\sin x$.

2. 选择题：

(1) $y=1+\sin x, x\in[0,2\pi]$的图象与直线 $y=\frac{3}{2}$的交点的个数为（ ），并说明理由.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2) 函数 $y=\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，则 y 的取值范围是（ ），并说明理由.

A. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　C. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

(3) 当 $x\in[-\pi,\pi]$时，函数 $y=3\sin x$（ ），并说明理由.

A. 在区间$[-\pi,0]$上单调递增，在区间$[0,\pi]$上单调递减

B. 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，在区间$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$，$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上分别单调递减

C. 在区间$[-\pi,0]$上单调递减，在区间$[0,\pi]$上单调递增

D. 在区间$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$，$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上分别单调递增，在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减

3. 求下列函数的周期.

(1) $y=\sin\frac{3}{2}x, x\in\mathbf{R}$； (2) $y=\sin 4x, x\in\mathbf{R}$； (3) $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right), x\in\mathbf{R}$.

4. 比较 $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$ 与 $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$的大小.

5. 观察正弦曲线，写出满足 $\sin x>0$ 的 x 的取值范围.

6. 函数 $y=2+\sin x$ 在区间______上单调递增，在区间______上单调递减；当 $x=$______时，y 取最大值______；当 $x=$______时，y 取最小值______.

7. 函数 $y=4\sin x, x\in[-\pi,\pi]$，在区间______上单调递增，在区间______上单调递减；当 $x=$______时，y 取最大值______；当 $x=$______时，y 取最小值______.

5.2 余弦函数的图象与性质再认识

一、余弦函数的图象

在区间$[0,2\pi]$上取一系列的 x 值，例如 $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\cdots,2\pi$ 列表（如表 1－7）.

利用表 1－7 中的数据，先在平面直角坐标系内描点，结合对函数 $y=\cos x$ 性质的了解，用光滑曲线将它们顺次连接起来，就可以得到区间$[0,2\pi]$上 $y=\cos x$ 的图象（如图 1－42）.

表 1－7

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y=\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

由周期性可知，函数 $y=\cos x$ 在区间 $[2k\pi,2(k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0$ 上与在区间 $[0,2\pi]$ 上的函数图象形状完全相同，只是位置不同. 将函数 $y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象向左、右平移(每次平移 2π 个单位长度)，就可以得到余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象(如图 1－43). 余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象称作**余弦曲线**.

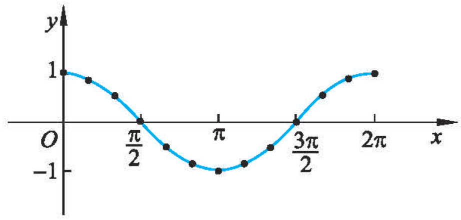


图 1－42

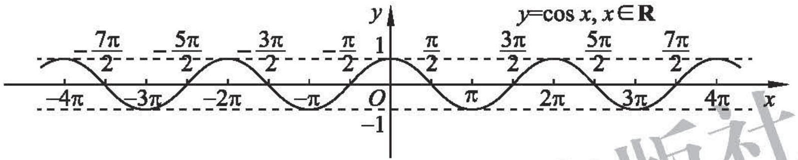


图 1－43

图 1－43 给出了余弦曲线的基本形状. 在一个周期内，例如区间 $[0,2\pi]$，以下五个点 $(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(\pi,-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,1)$ 起着关键的作用，它们分别表示了余弦曲线与 x 轴的交点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，余弦函数取得最大值时的点为 $(0,1)$，$(2\pi,1)$，取得最小值时的点为 $(\pi,-1)$.

根据余弦曲线的基本性质，描出这五个点后，函数 $y=\cos x$ 在区间 $x\in[0,2\pi]$ 的图象就基本确定了(如图 1－44). 因此，在精确度要求不太高时，常常先描出这五个关键点，然后用光滑曲线将它们顺次连接起来，就得到余弦函数的简图. 这种作余弦曲线的方法也称为“**五点(画图)法**”.

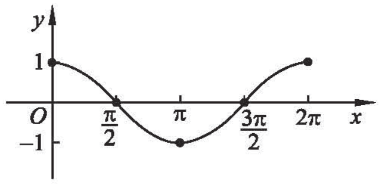


图 1－44

由诱导公式 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 可知，$y=\cos x$ 的图象就是函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象. 即余弦函数 $y=\cos x$ 的图象可以通过将正弦曲线 $y=\sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到(如图 1－45).

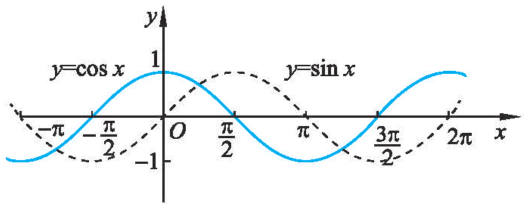


图 1－45

为了得到 $y=\sin x$ 和 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 之间的平移量，通常只需理清函数 $y=\sin x$ 上的点(0,0)平移到什么位置. 因此，令 $x+\frac{\pi}{2}=0$，得到 $x=-\frac{\pi}{2}$，即点(0,0)平移到点 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$. 这就说明正弦函数 $y=\sin x$ 图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，即可得到余弦函数 $y=\cos x$ 的图象.

例 4 画出函数 $y=\cos(x-\pi)$ 在一个周期上的图象.

解 按五个关键点列表(如表 1－8).

表 1－8

$x-\pi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$y=\cos(x-\pi)$	1	0	-1	0	1

于是得到函数 $y=\cos(x-\pi)$ 在区间 $[\pi,3\pi]$ 上的五个关键点为

$$(\pi,1),\left(\frac{3\pi}{2},0\right),(2\pi,-1),\left(\frac{5\pi}{2},0\right),(3\pi,1).$$

描点，并用光滑曲线将它们顺次连接起来，就画出函数 $y=\cos(x-\pi)$ 在一个周期上的图象(如图 1－46).

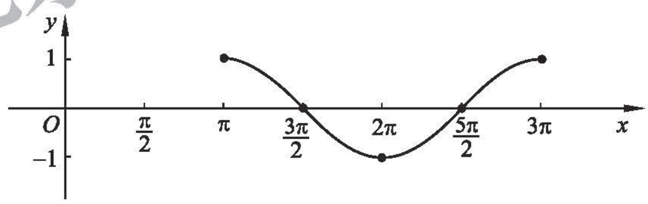


图 1－46

也可以利用诱导公式 $y=\cos(x-\pi)=-\cos x$，画出 $y=-\cos x$ 的图象.

思考交流

画出下列函数在区间 $[0,2\pi]$ 上的图象：

(1) $y=2+\cos x$； (2) $y=3\cos x$.

二、余弦函数性质的再认识

类比对正弦函数性质再认识的学习方式，通过观察图 1－43 得到余弦函数 $y=\cos x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上的主要性质.

1. 定义域

余弦函数的定义域是 **R**.

2. 周期性

由于余弦函数 $y=\cos x$ 的图象是由正弦曲线 $y=\sin x$ 向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度得到的. 可以证明,余弦函数是周期函数,它的最小正周期是 2π.

因此,为了研究问题方便,通常选取区间$[0,2\pi]$讨论其性质,然后延拓到它的定义域 **R** 上.

3. 单调性

由图 1-45 看到,当 x 由 $-\pi$ 增大到 0 时,$\cos x$ 的值由 -1 增大到 1;当 x 由 0 增大到 π 时,$\cos x$ 的值由 1 减小到 -1. 因此,余弦函数在区间$[-\pi,0]$上单调递增,在区间$[0,\pi]$上单调递减. 由余弦函数的周期性可知,余弦函数在区间$[(2k-1)\pi,2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递增,在区间$[2k\pi,(2k+1)\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递减.

4. 最大(小)值和值域

当 $x=2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,余弦函数取得最大值 1;

当 $x=(2k+1)\pi$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,余弦函数取得最小值 -1.

余弦函数的值域是$[-1,1]$.

5. 奇偶性

余弦函数的图象关于 y 轴对称(如图 1-43). 由诱导公式 $\cos(-x)=\cos x$ 可知,余弦函数是偶函数.

例 5 画出函数 $y=\cos x-1$ 在一个周期上的图象,并根据图象讨论函数的性质.

解 函数 $y=\cos x$ 的最小正周期是 2π,按五个关键点列表(如表 1-9).

表 1-9

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1
$y=\cos x-1$	0	-1	-2	-1	0

于是得到函数 $y=\cos x-1$ 在区间$[0, 2\pi]$上的五个关键点为

$$(0,0),\left(\frac{\pi}{2},-1\right),(\pi,-2),\left(\frac{3\pi}{2},-1\right),(2\pi,0).$$

描点,并用光滑曲线将它们顺次连接起来,就画出函数 $y=\cos x-1$ 在区间$[0,2\pi]$上的图象(如图 1-47).

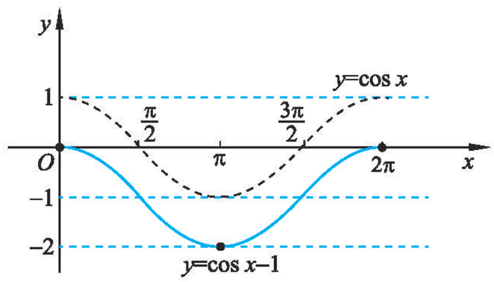


图 1-47

由函数 $y=\cos x-1$ 的图象得到它的主要性质(如表 1-10):

表 1-10

函　数	$y=\cos x-1$
定义域	**R**
值　域	$[-2,0]$
奇偶性	偶函数
周期性	周期函数，周期是 2π
单调性	在每一个闭区间 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 都单调递增； 在每一个闭区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 都单调递减
最大值与最小值	当 $x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，最大值为 0； 当 $x=(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，最小值为 -2

思考交流

请借助余弦函数 $y=\cos x$ 的图象，求满足不等式 $\cos x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 的 x 的取值范围.

练　习

1. 选择题.

(1) $y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=\dfrac{1}{3}$ 的交点的个数为(　　)，并说明理由.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2) 下列命题中正确的是(　　)，并说明理由.

A. 函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

B. 函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减

C. 函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减

D. 函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上单调递减

(3) 函数 $y=2\cos x$，当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 时，(　　)，并说明理由.

A. 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减

B. 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减

C. 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递增，在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 及 $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减

D. 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$及$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递增，在区间$[0,\pi]$上单调递减

(4) 函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都单调递增的区间是(　　).

A. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$　　B. $\left[2k\pi-\pi,2k\pi-\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right](k\in\mathbf{Z})$　　D. $\left[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

2. 比较 $\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$与 $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$的大小.

3. 观察余弦曲线，写出满足 $\cos x<0$ 的 x 的取值范围.

4. 画出下列函数的图象，并根据图象讨论函数的性质：

(1) $y=2\cos x,x\in\mathbf{R}$；　　(2) $y=-\cos x,x\in[0,2\pi]$.

5. 函数 $y=1+\cos x$ 在区间______上单调递增，在区间______上单调递减；当 $x=$______时，y 取最大值______；当 $x=$______时，y 取最小值______.

6. 函数 $y=3\cos x,x\in[-\pi,\pi]$，在区间______上单调递增，在区间______上单调递减；当 $x=$______时，y 取最大值______；当 $x=$______时，y 取最小值______.

习题 1-5

A　组

1. 在区间$[0,2\pi]$上画出下列函数的图象，并根据图象和解析式讨论函数性质：

(1) $y=3+\sin x$；　　(2) $y=2-\sin x$；

(3) $y=3+\cos x$；　　(4) $y=2-\cos x$.

2. 求使下列函数取得最大值、最小值的自变量 x 的集合，并分别写出最大值、最小值：

(1) $y=-4\sin x$；　　(2) $y=1-\frac{1}{3}\sin x$；

(3) $y=-\frac{2}{3}\cos x$；　　(4) $y=1+\frac{3}{4}\cos x$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1+2\sin x}$；　　(2) $y=\sqrt{\frac{1}{2}+\sin x}$；

(3) $y=\frac{1}{1-\cos x}$；　　(4) $y=\sqrt{-\cos x}$.

4. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=1+2\sin x$；　　(2) $y=-\frac{1}{2}\sin x$；

(3) $y=1+\frac{1}{2}\cos x$；　　(4) $y=-\frac{2}{3}\cos x$.

5. 下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？

(1) $y=1-\sin x$；　　(2) $y=-3\sin x$；

(3) $y=1-\cos x$；　　(4) $y=|\cos x|$.

6. 请运用正弦函数图象小结正弦函数、余弦函数的性质及诱导公式.

B 组

1. 根据正弦函数的图象，写出使下列不等式成立的 x 的取值范围：

(1) $2\sin x-\sqrt{2}\leqslant 0$；　　(2) $\sqrt{3}+2\sin x>0$；

(3) $2\cos x-1\leqslant 0$；　　(4) $\sqrt{3}+2\cos x>0$.

2. 在同一平面直角坐标系内画出正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图象，并回答下列问题.

(1) 写出满足 $\sin x=\cos x$ 的 x 的值；

(2) 写出满足 $\sin x>\cos x$ 的 x 的取值范围；

(3) 写出满足 $\sin x<\cos x$ 的 x 的取值范围；

(4) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，分别写出满足 $\sin x=\cos x$，$\sin x>\cos x$，$\sin x<\cos x$ 的 x 值的集合.

3. 请画出函数 $y=\cos x-|\cos x|$ 的图象，你能从图中发现此函数具备哪些性质？(可以借助信息技术画图)

§ 6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质与图象

问题提出

“南昌之星”摩天轮于 2006 年竣工，总高度 160 m，直径 153 m. 匀速旋转一圈需时30 min. 以摩天轮的中心为原点建立平面直角坐标系，画示意图，如图 1－48.

图 1－48

设座舱 A 为起始位置如图 1－49，OA 与 x 轴所形成的角的大小为$-\frac{\pi}{2}$. 因为转一圈需要 30 min，所以每分所转的角度为$\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$.

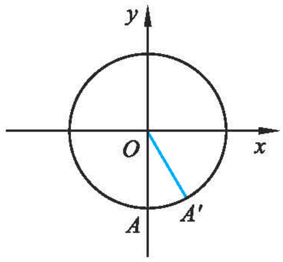


图 1－49

经过 x min 后，OA 旋转到 OA'，OA'与 x 轴所形成角的大小为$\frac{\pi}{15}x-\frac{\pi}{2}$.

因为直径为 153 m，总高度为 160 m，所以 OA 的长为 76.5 m，轮子的最低点与地面距离为 $160-153=7$(m)，原点 O 距离地面的距离为 $7+76.5=83.5$(m). 从而点 A'到地面的距离 y 与时间 x 的关系为

$$y=76.5\sin\left(\frac{\pi}{15}x-\frac{\pi}{2}\right)+83.5.$$

在物理和工程技术中会遇到一些问题，其中的函数关系都是形如

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)\text{（其中 }A,\omega,\varphi\text{ 是常数，}A>0,\omega>0\text{）}$$

的形式. 这类函数有什么性质呢?

从解析式来看，若 $A=1,\omega=1,\varphi=0$，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$就是 $y=\sin x$. 下面，我们就来探究 A,ω,φ 的取值对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的影响.

6.1 探究 ω 对 $y=\sin \omega x$ 的图象的影响

实例分析

考虑这类函数的一个特例：$y=\sin 2x, x\in \mathbf{R}$.

1. 周期

由 $\sin 2x=\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi)$，根据周期函数的定义，$y=\sin 2x$ 是周期函数，π 是 $y=\sin 2x$ 的最小正周期．

2. 图象

在函数 $y=\sin x$ 五个关键点的基础上，列表（如表 1－11）.

表 1－11

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y=\sin 2x$	0	1	0	-1	0

由此得到函数 $y=\sin 2x$ 的五个关键点为

$$(0,0),\left(\frac{\pi}{4},1\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{3\pi}{4},-1\right),(\pi,0).$$

画出该函数在一个周期 $[0,\pi]$ 上的图象．由函数 $y=\sin 2x$ 的周期性，把图象向左、右延拓，得到 $y=\sin 2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象（如图 1－50）.

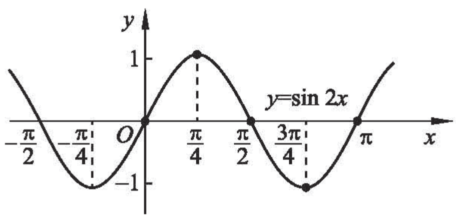


图 1－50

从函数 $y=\sin 2x$ 的图象看出，将函数 $y=\sin x$ 图象上每个点的横坐标都缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，就得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象（如图 1－51），且最小正周期变为 π.

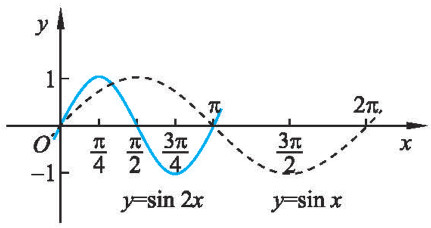


图 1－51

3. 单调性

从图象上可以看出，函数 $y=\sin 2x$ 在区间 $\left[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增；在区间 $\left[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递减．

4. 最大(小)值和值域

在区间 $[0,\pi]$ 上，当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，函数 $y=\sin 2x$ 取得最大值 1；当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，函数 $y=\sin 2x$ 取得最小值 -1. 由函数 $y=\sin 2x$ 的周期性可知，当 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，它取得最大值 1；当 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，它取得最小值 -1.

函数 $y=\sin 2x$ 的图象夹在两条平行线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间，所以它的值域是 $[-1,1]$.

例 1 求函数 $y=\sin\frac{1}{3}x$ 的周期，并画出其图象.

解 由 $y=\sin x$ 的周期性可知，$\sin\frac{1}{3}x=\sin\left(\frac{1}{3}x+2\pi\right)=\sin\frac{1}{3}(x+6\pi)$. 根据周期函数的定义，$y=\sin\frac{1}{3}x$ 是周期函数，6π 是它的最小正周期.

在函数 $y=\sin x$ 五个关键点的基础上，列表(如表 1-12).

表 1－12

$\frac{1}{3}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
$y=\sin\frac{1}{3}x$	0	1	0	-1	0

由此得到函数 $y=\sin\frac{1}{3}x$ 的五个关键点为

$$(0,0),\left(\frac{3\pi}{2},1\right),(3\pi,0),\left(\frac{9\pi}{2},-1\right),(6\pi,0).$$

画出该函数在一个周期 $[0,6\pi]$ 上的图象. 由函数 $y=\sin\frac{1}{3}x$ 的周期性，把图象向左、右延拓，得到 $y=\sin\frac{1}{3}x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象(如图 1－52).

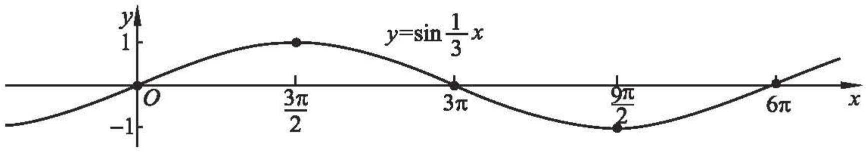


图 1-52

从函数 $y=\sin\frac{1}{3}x$ 的图象看出，对同一个 x 值，将函数 $y=\sin x$ 图象上每个点的横坐标都伸长到原来的 3 倍，纵坐标不变，就得到函数 $y=\sin\frac{1}{3}x$ 的图象(如图 1-53).

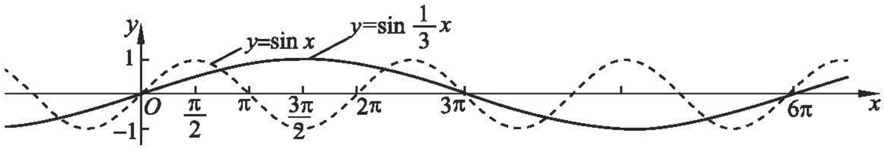


图 1-53

抽象概括

一般地，对于 $\omega>0$，有

$$\sin\omega x=\sin(\omega x+2\pi)=\sin\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right).$$

根据周期函数的定义，$T=\frac{2\pi}{\omega}$是函数 $y=\sin\omega x$ 的最小正周期.

函数 $y=\sin\omega x$ 的图象是将函数 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{\omega}$(当 $\omega>1$时)或伸长(当 $0<\omega<1$ 时)到原来的$\frac{1}{\omega}$(纵坐标不变)得到的.

通常称周期的倒数$\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$为**频率**.

练　习

1. 求下列函数的周期：

(1) $y=\sin\frac{1}{4}x$；　　(2) $y=\sin\frac{3\pi}{2}x$.

2. 函数 $y=\sin\frac{3}{4}x$ 的周期是多少？它的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

3. 画出下列函数在一个周期上的图象，并讨论其性质：

(1) $y=\sin 4x$；　　(2) $y=\sin\frac{3}{2}x$.

6.2 探究 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响

实例分析

考虑这类函数的一个特例：$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

我们已经知道，函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象是由函数 $y=\sin x$ 的图象平移得到的. 令 $x-\frac{\pi}{3}=0$，得 $x=\frac{\pi}{3}$，即函数 $y=\sin x$ 图象上的点 $(0,0)$ 平移到点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，所以函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象是将函数 $y=\sin x$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到的. 从而将刻画函数 $y=\sin x$ 基本形状的五个关键点

$$(0,0),\left(\frac{\pi}{2},1\right),(\pi,0),\left(\frac{3\pi}{2},-1\right),(2\pi,0)$$

向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到刻画函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 基本形状的五个关键点为

$$\left(\frac{\pi}{3},0\right),\left(\frac{5\pi}{6},1\right),\left(\frac{4\pi}{3},0\right),\left(\frac{11\pi}{6},-1\right),\left(\frac{7\pi}{3},0\right).$$

画出该函数在一个周期 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]$ 上的图象. 由函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期性，把图延拓到 $\mathbf{R}$，得到该函数在 $\mathbf{R}$ 上的图象（如图 1-54）.

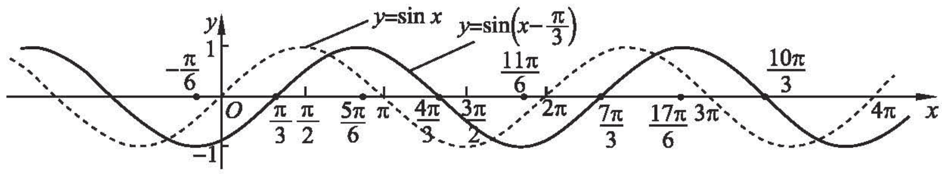


图 1-54

从图象上可以看出，函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递增；在区间 $\left[2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{11}{6}\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递减.

当 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，它取得最大值 1；当 $x=2k\pi+\frac{11\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，它取得最小值 -1.

函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象夹在两条平行线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间，所以它的值域是 $[-1,1]$.

思考交流

怎样通过平移函数 $y=\sin x$ 的图象得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象?

抽象概括

函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 与函数 $y=\sin x$ 的周期相同，由 $x+\varphi=0$，得 $x=-\varphi$，即函数 $y=\sin x$ 图象上的点 $(0,0)$ 平移到了点 $(-\varphi,0)$.

函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象，可以看作将函数 $y=\sin x$ 图象上的所有点向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)平移 $|\varphi|$ 个单位长度得到的.

实例分析

下面再来研究函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的性质.

1. 周期

由 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\sin\left[2(x+\pi)+\frac{\pi}{6}\right]$.

根据周期函数的定义，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 是周期函数，π 是它的最小正周期. 即函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 与函数 $y=\sin 2x$ 周期相同.

2. 图象

通过表 1－13 确定五个关键点.

表 1－13

$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	0	1	0	-1	0

由此得到在区间 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$ 上刻画该函数基本形状的五个关键点为

$$\left(-\frac{\pi}{12},0\right),\left(\frac{\pi}{6},1\right),\left(\frac{5\pi}{12},0\right),\left(\frac{2\pi}{3},-1\right),\left(\frac{11\pi}{12},0\right).$$

画出函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$上的图象. 由函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的周期性,把图象向左、右延拓,就可得到它在 $\mathbf{R}$ 上的图象(如图 1 - 55). 它也可以由函数 $y=\sin 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$得到.

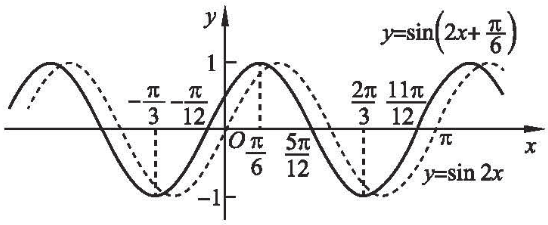


图 1 - 55

3. 单调性

从图 1 - 55 可以看出,函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在区间$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递增,在区间$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递减.

4. 最大(小)值和值域

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$取得最大值 1;当 $x=k\pi+\frac{2\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,它取得最小值-1.

函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象夹在两条平行线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间,所以它的值域是$[-1,1]$.

抽象概括

函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$与函数 $y=\sin \omega x$ 有相同的周期,由 $\omega x+\varphi=0$,得 $x=-\frac{\varphi}{\omega}$,即函数 $y=\sin \omega x$ 图象上的点$(0,0)$平移到点$\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right)$. 函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象,可以看作将函数 $y=\sin \omega x$ 图象上的所有点向左$(\varphi>0)$或向右$(\varphi<0)$平移$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$个单位长度得到的.

在函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$中,φ 决定了 $x=0$ 时的函数值,通常称 φ 为**初相**,$\omega x+\varphi$ 为**相位**.

练 习

1. 函数 $y=\sin\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系?

2. 画出下列函数在一个周期上的图象，并讨论其性质.

(1) $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $y=\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 选择题，并说明选项正确或错误的理由.

(1) 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象上的每个点(　　).

A. 横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变

B. 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变

C. 纵坐标伸长为原来的 2 倍，横坐标不变

D. 纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，横坐标不变

(2) 为了得到函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象上的每个点(　　).

A. 横坐标向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，纵坐标不变

B. 横坐标向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，纵坐标不变

C. 横坐标向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，纵坐标不变

D. 横坐标向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，纵坐标不变

6.3　探究 A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响

实例分析

研究函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期，并画出它的图象.

函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 与函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 有相同的周期，即它的周期是 π.

前面已经画出了函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，并讨论了它的性质，所以从解析表达式上容易得到，对于同一个 x 值，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上点的纵坐标等于函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上点的纵坐标的 2 倍. 这表明，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，可以看作是将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)而得到的，

如图 1-56.

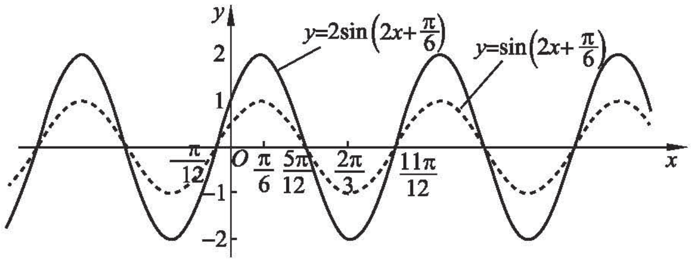


图 1-56

抽象概括

$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0)$的图象是将 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象上的每个点的纵坐标伸长(当 $A>1$ 时)或缩短(当 $0<A<1$ 时)到原来的 A 倍(横坐标不变)得到的. A 决定了函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的值域以及函数的最大值和最小值,通常称 A 为**振幅**.

* 思考交流

函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 与函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象有什么不同?①

综上关于 ω,φ,A 这三个参数的讨论,可知探究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,x\in\mathbf{R})$ 性质的一般步骤:

第 1 步,确定周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$;

第 2 步,在 $y=\sin x$ 五个关键点$(0,0)$,$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$,$(\pi,0)$,$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$,$(2\pi,0)$的基础上确定该函数的五个关键点;

第 3 步,用光滑曲线顺次连接五个关键点,即可画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$在一个周期上的图象,再利用其周期性把图象延拓到 $\mathbf{R}$,就可以得到它在 $\mathbf{R}$ 上的图象;

第 4 步,借助图象讨论性质.

实际上,这也是讨论周期函数的一般方法和步骤.

例 2 画出函数 $y=\cos\frac{1}{2}x$ 的图象,并讨论其基本性质.

解 **方法 1** 直接运用 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的结果. 先变形,$y=\cos\frac{1}{2}x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x\right)=$

---

① 前加"*"者为选学内容,不作考试要求.

$\sin\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$，再用上面的一般方法来研究.

方法 2 使用类似 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的研究方法.

(1) 周期

因为 $y=\cos x$ 的周期是 2π，所以 $\cos\frac{1}{2}x=\cos\left(\frac{1}{2}x+2\pi\right)=\cos\frac{1}{2}(x+4\pi)$，该函数的周期为 $T=4\pi$.

(2) 图象

刻画函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上图象基本形状的五个关键点为

$$(0,1),\ \left(\frac{\pi}{2},0\right),\ (\pi,-1),\ \left(\frac{3\pi}{2},0\right),\ (2\pi,1).$$

由此得到刻画函数 $y=\cos\frac{1}{2}x$ 在 $[0,4\pi]$ 上图象基本形状的五个关键点为

$$(0,1),\ (\pi,0),\ (2\pi,-1),\ (3\pi,0),\ (4\pi,1).$$

用光滑曲线顺次连接五个关键点画出函数 $y=\cos\frac{1}{2}x$ 在区间 $[0,4\pi]$ 上的图象. 由它的周期性，把图象向左、右延拓，就可以得到它在 $\mathbf{R}$ 上的图象(如图 1-57).

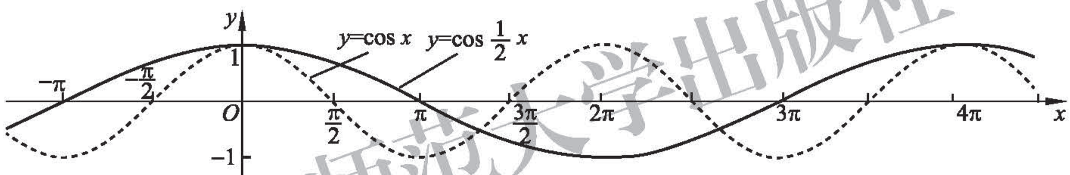


图 1-57

(3) 其他性质

设 $u=\frac{1}{2}x$，则函数 $y=\cos u$ 的单调递增区间是 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

由 $2k\pi-\pi\leqslant\frac{1}{2}x\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $4k\pi-2\pi\leqslant x\leqslant 4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $y=\cos\frac{1}{2}x$ 的单调递增区间是 $[4k\pi-2\pi,4k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

类似地，函数 $y=\cos\frac{1}{2}x$ 的单调递减区间是 $[4k\pi,4k\pi+2\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

函数 $y=\cos u$，$u\in\mathbf{R}$ 取得最大值的 u 的集合是 $\{u\mid u=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

由 $\frac{1}{2}x=2k\pi$，得 $x=4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以当 $x\in\{x\mid x=4k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 时，函数 $y=\cos\frac{1}{2}x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最大值 1.

类似地，当 $x\in\{x\mid x=4k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 时，函数 $y=\cos\frac{1}{2}x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最小值 -1.

函数 $y=\cos\frac{1}{2}x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域为 $[-1,1]$.

练 习

1. 画出函数 $y=\cos\frac{1}{3}x$ 的图象，并讨论其基本性质.

2. 画出函数 $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，并讨论其基本性质.

习题 1－6

A 组

1. 选择题，并说明选项正确或错误的理由.

(1) 为了得到函数 $y=\cos\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的图象，只需将余弦函数 $y=\cos x$ 图象上各点(　　).

A. 横坐标向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，纵坐标不变

B. 横坐标向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，纵坐标不变

C. 横坐标向左平移$\frac{1}{3}$个单位长度，纵坐标不变

D. 横坐标向右平移$\frac{1}{3}$个单位长度，纵坐标不变

(2) 为了得到函数 $y=\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上各点(　　).

A. 横坐标伸长为原来的$\frac{4}{3}$倍，纵坐标不变

B. 横坐标缩短为原来的$\frac{3}{4}$，纵坐标不变

C. 纵坐标伸长为原来的$\frac{4}{3}$倍，横坐标不变

D. 纵坐标缩短为原来的$\frac{3}{4}$，横坐标不变

(3) 将函数 $y=\cos\left(2x+\frac{4\pi}{5}\right)$ 的图象上各点向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度，再把横坐标缩短为原来的一半，纵坐标伸长为原来的 4 倍，则所得到的图象的函数解析式是(　　).

A. $y=4\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)$　　B. $y=4\cos\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)$

C. $y=4\sin\left(4x+\frac{4\pi}{5}\right)$　　D. $y=-4\sin\left(4x+\frac{4\pi}{5}\right)$

2. 画出下列函数在一个周期上的图象：

(1) $y=4\sin\frac{1}{3}x$；　　(2) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$；

(3) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$；　　(4) $y=\frac{5}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

3. 不画图，写出下列函数的振幅、周期和初相，并说明这些函数的图象可以由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过怎样的变换得到：

(1) $y=5\sin\left(\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{8}\right)$；　　(2) $y=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{1}{5}x-\frac{\pi}{7}\right)$；

(3) $y=8\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$；　　(4) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{10}\right)$.

4. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{5}x-\frac{\pi}{3}\right)$；　　(2) $y=4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}x\right)$；

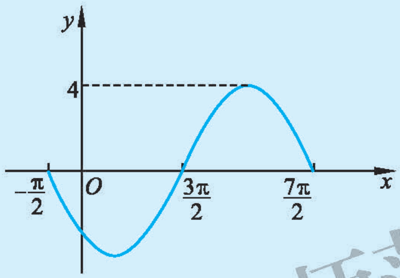
(3) $y=\frac{1}{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(4) $y=3\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. 求下列函数的最大值、最小值以及达到最大(小)值时 x 的值的集合：

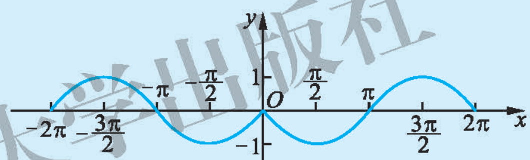
(1) $y=\frac{3}{2}\sin\left(2\pi x+\frac{4\pi}{3}\right)$；　　(2) $y=-6\sin\left(2.5x+\frac{\pi}{2}\right)$.

B 组

1. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<2\pi)$一个周期的图象如图所示，试确定 A,ω,φ 的值.



(第 1 题)



(第 3 题)

2. 将函数 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{1}{2}\right)$的图象作怎样的变换可以得到函数 $y=\cos x$的图象？

3. 与图中曲线对应的函数是(　　).

A. $y=|\sin x|$　　B. $y=\sin|x|$

C. $y=-\sin|x|$　　D. $y=-|\sin x|$

4. 有以下四种变换方式：

①向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再将每个点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$；

②向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，再将每个点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$；

③每个点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，再向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度；

④每个点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度.

其中能将函数 $y=\sin x$ 的图象变为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象的是(　　)，并说明理由.

A. ①④　　B. ①③　　C. ②④　　D. ②③

信息技术应用

探究 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象

工具: GeoGebra、几何画板、图形计算器或其他数学软件.

步骤:

第一步,画出一组$y=\sin\omega x$的图象,ω取不同的值(如图 1-58):

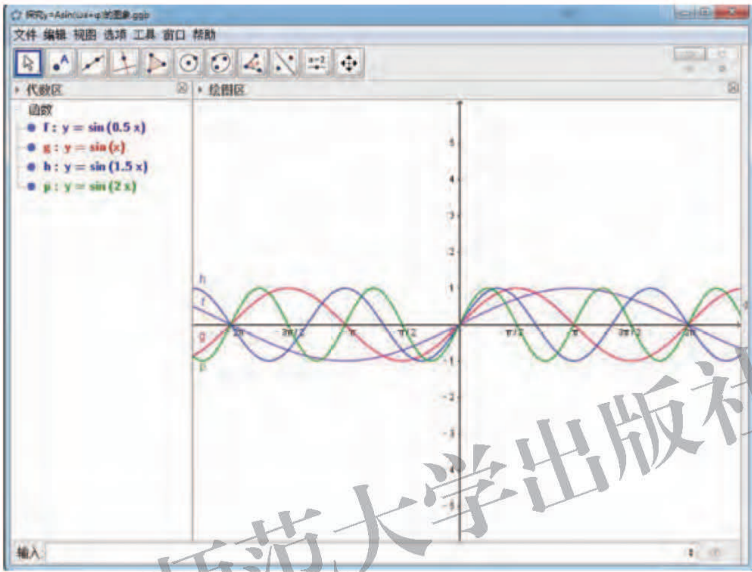


图 1-58

画出更多类似的图象,体会函数 $y=\sin\omega x$ 中的参数ω 对图象的影响及规律.

第二步,画出一组 $y=\sin(x+\varphi)$的图象,φ取不同的值(如图 1-59):

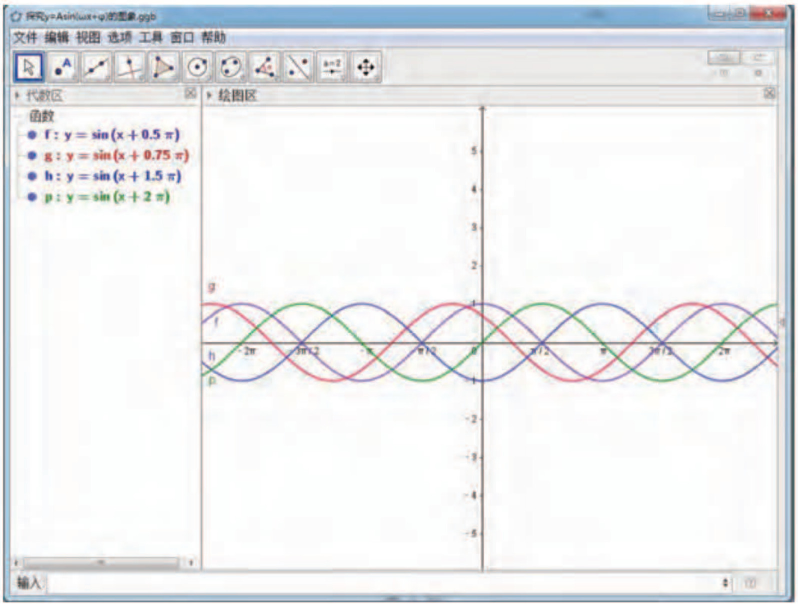


图 1-59

画出更多类似的图象，体会函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 中的参数 φ 对图象的影响及规律.

第三步，画出一组 $y=A\sin x$ 的图象，A 取不同的值（如图 1－60）：

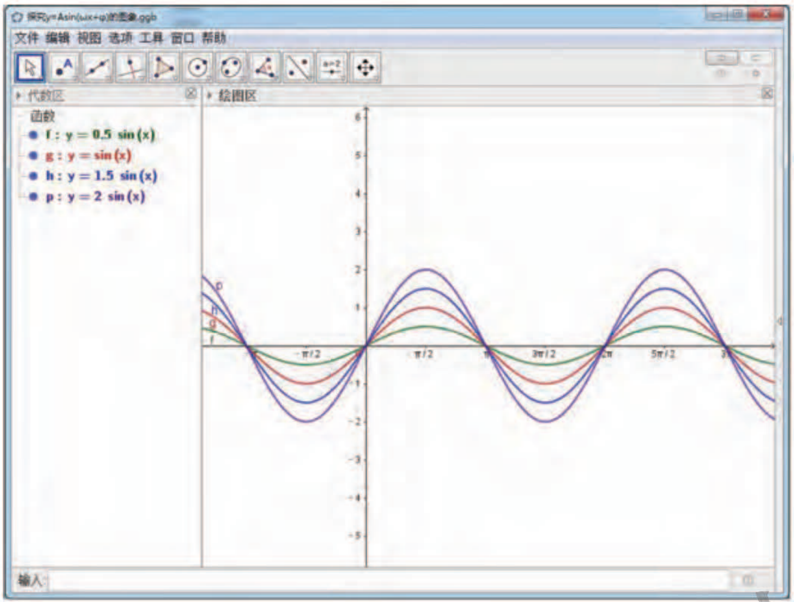


图 1－60

画出更多类似的图象，体会函数 $y=A\sin x$ 中的参数 A 对图象的影响及规律.

第四步，探究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象可由函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换得到. 例如 $A=2,\omega=2,\varphi=3$ 时，具体步骤如下：

1. 先打开 GeoGebra，关闭网格；再在空白处点击右键，在右键菜单栏中选择“绘图区……”（如图 1－61）.

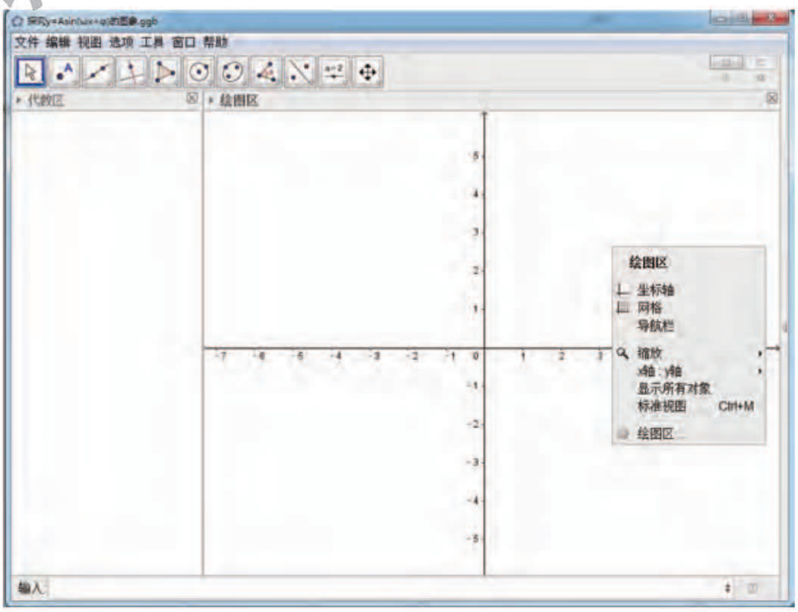


图 1－61

2. 然后在"设置—绘图区"中选择"x 轴",勾选"刻度间距:"后在下拉菜单中选择"π/2"(如图 1 - 62),即将 x 轴的刻度间距设置为 $\frac{\pi}{2}$.

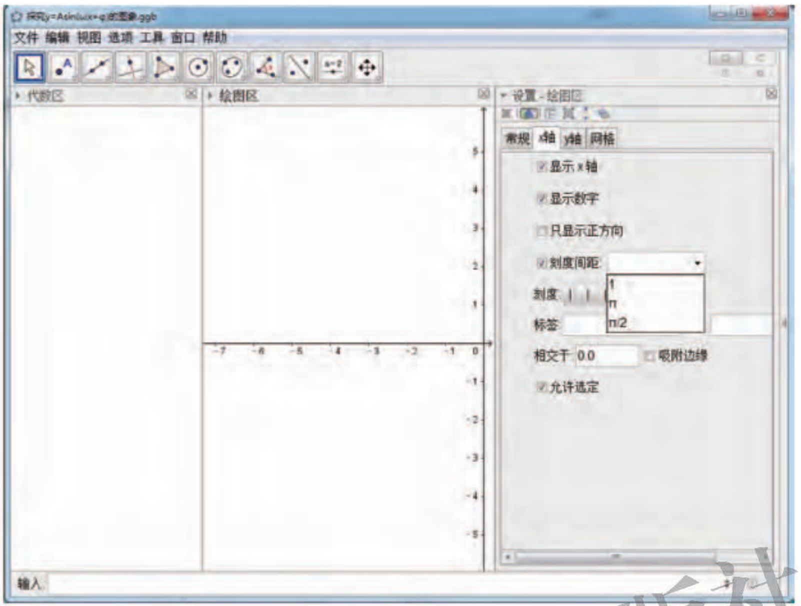


图 1 - 62

3. 添加三个滑动条并依次设置滑动条名字为 A, φ, ω,区间均默认为 $[-5,5]$;最后输入函数"$y = A * \sin(\omega x + \varphi)$",并将滑动条"$\varphi = 1$"直接拖动为"$\varphi = 0$",如图1 - 63.

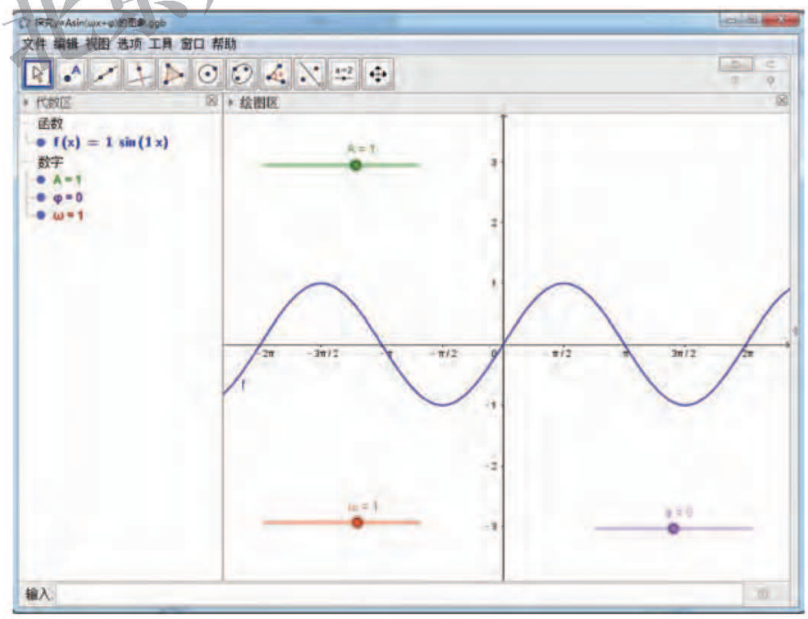


图 1 - 63

4. 先将滑动条“$A=1$”直接拖动为“$A=2$”，如图 1－64；

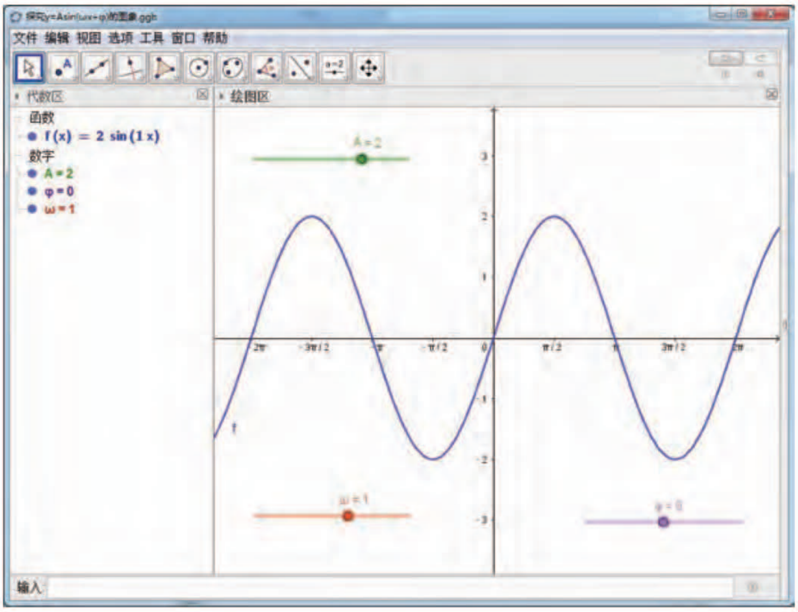


图 1－64

再将滑动条“$\omega=1$”直接拖动为“$\omega=2$”，如图 1－65；

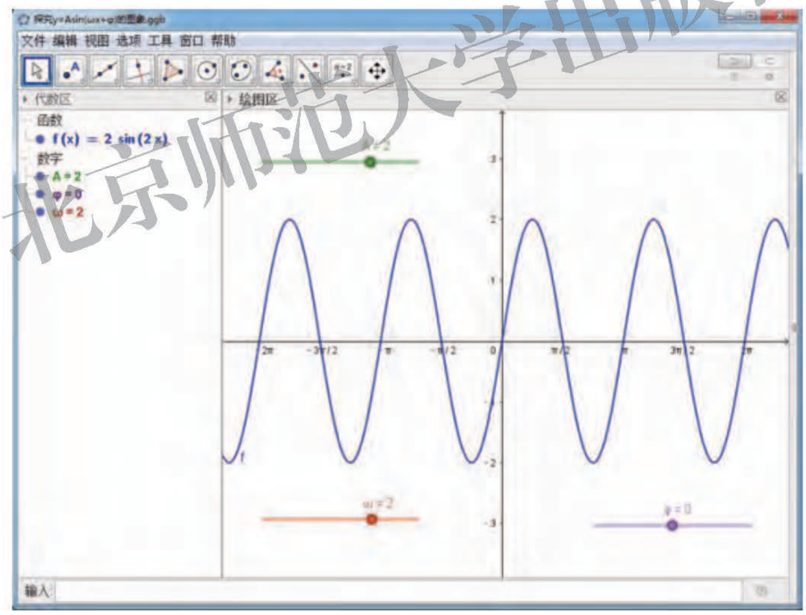


图 1－65

最后将滑动条“$\varphi=0$”直接拖动为“$\varphi=3$”,即可得函数 $y=2\sin(2x+3)$ 的图象,如图 1-66.

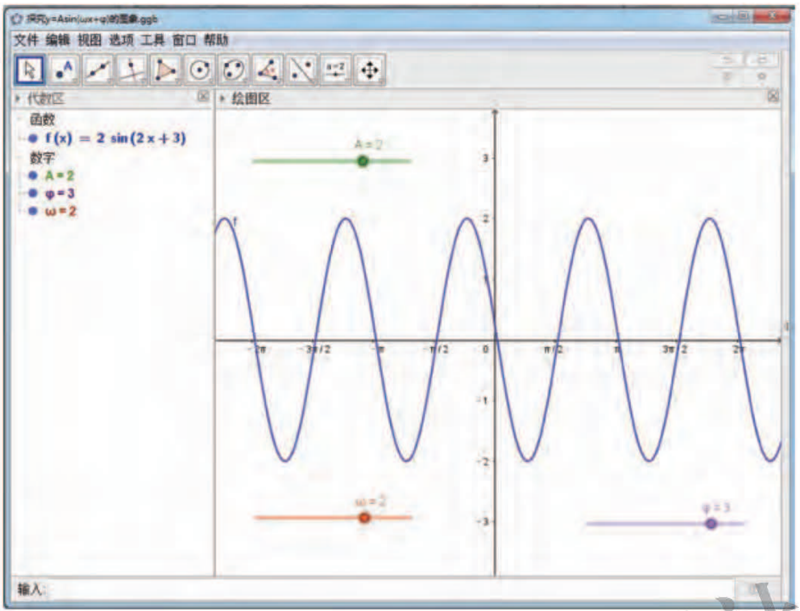


图 1-66

注意:三个滑动条拖动的顺序可以任意,皆可经过相应的变换得到所要求的函数.

第五步,根据以上研究,请分析解决以下问题:

1. 参数 A,ω,φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象有什么影响?
2. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象可由函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换得到?

§ 7 正切函数

在前两节中，我们学习了正弦函数、余弦函数，并借助它们的图象研究其性质. 下面我们学习正切函数.

7.1 正切函数的定义

根据函数的定义，比值$\dfrac{\sin x}{\cos x}$是x的函数，称为x的**正切函数**，记作$y=\tan x$，其中定义域为$\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

正切函数可以用来刻画以角为自变量的函数，这时x表示的是弧度制意义下角的大小. 特别地，当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$与初中所学的正切函数值是一致的.

对于角α的正切函数，我们考虑下面两道例题.

例1 求下列角α的正切函数值：

(1) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$；　　(2) $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

解 (1) 因为$\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$，所以$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由正切函数的定义，得$\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=-1$.

(2) 因为$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，所以$\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由正切函数的定义，得　$\tan\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{4}}{\cos\dfrac{3\pi}{4}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=-1$.

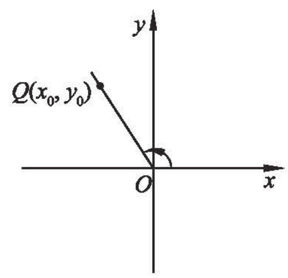


图 1-67

例2 如图 1-67，设角α的终边上任取一点$Q(x_0, y_0)$ $(x_0\neq0)$，求角α的正切函数值.

解 设 $|OQ|=r$，因为 $x_0\neq 0$，所以角 α 的终边不在 y 轴上.

$$\sin\alpha=\frac{y_0}{r},\cos\alpha=\frac{x_0}{r}.$$

由正切函数的定义，得 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{y_0}{r}}{\frac{x_0}{r}}=\dfrac{y_0}{x_0}.$

通过例 2，我们得到一个结论：若角 α 的终边上任取一点 $Q(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$，则

$$\tan\alpha=\frac{y_0}{x_0}.$$

这个结论可以用来计算正切函数值.

7.2 正切函数的诱导公式

由正弦函数、余弦函数的诱导公式，对任意整数 k，有

$$\tan(x+k\pi)=\frac{\sin(x+k\pi)}{\cos(x+k\pi)}=\begin{cases}\dfrac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x, & k\text{ 为奇数},\\ \dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x, & k\text{ 为偶数},\end{cases}$$

即 $\tan(x+k\pi)=\tan x$，

其中 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq 0)$ 是正切函数的周期，π 是它的最小正周期.

同时，还可以得到

$$\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x,$$

所以正切函数是奇函数.

信息技术建议

利用数学软件或图形计算器分别绘制函数

$y=\tan x$ 与 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，

$y=\tan x$ 与 $y=\tan(-x)$，

$y=\tan x$ 与 $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，

$y=\tan x$ 与 $y=\tan(\pi-x)$，

$y=\tan x$ 与 $y=\tan(x+\pi)$

的图象，观察同一自变量值所对应不同函数值之间的关系，归纳得出诱导公式.

思考交流

当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，角 x 与角 $-x$，$x+\pi$，$\pi-x$，$x+\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}-x$ 的正切函数值有什么关系？

正切函数的诱导公式可由正弦函数、余弦函数相应的诱导公式得到：

$$\tan(x+k\pi)=\tan x \qquad (k\in\mathbf{Z})$$
$$\tan(-x)=-\tan x$$
$$\tan(x+\pi)=\tan x$$
$$\tan(\pi-x)=-\tan x$$
$$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan x}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$$

其中的 x 是使等式两边都有意义的任意实数.

利用诱导公式，可以把任意实数 x 的正切函数值问题转化为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的正切函数值问题. 当 x 表示角的大小时，可将任意角的正切函数值问题转化为锐角的正切函数值问题.

例 3 求值：

(1) $\tan\frac{37\pi}{6}$； (2) $\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$； (3) $\tan\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$.

解 (1) $\tan\frac{37\pi}{6}=\tan\left(\frac{\pi}{6}+6\pi\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(2) $\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)=-\tan\frac{17\pi}{6}=-\tan\left(-\frac{\pi}{6}+3\pi\right)=-\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(3) $\tan\left(-\frac{31\pi}{6}\right)=-\tan\frac{31\pi}{6}=-\tan\left(\frac{\pi}{6}+5\pi\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.3 正切函数的图象与性质

类比画正弦函数图象的方法，首先画出函数 $y=\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，再利用周期性将其延拓到整个定义域上，为此只需在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上取一系列的 x 值，例如，$-\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{6}$，0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$，列表(如表 1-14).

表 1-14

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y=\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

利用表 1-14 中的数据，先在平面直角坐标系内描点，然后用光滑曲线顺次连接，就可以得到函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象(如图 1-68).

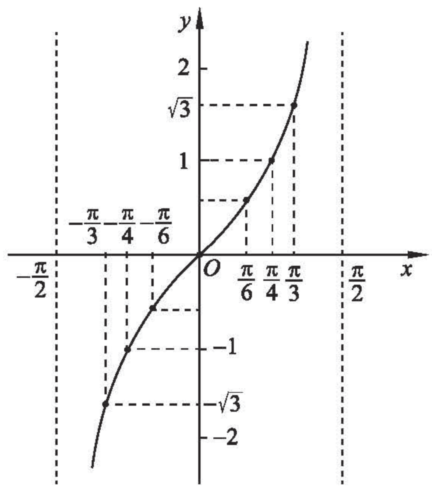


图 1-68

因为正切函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的函数，所以它在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, $k\neq 0$ 上与在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数图象形状完全相同. 函数 $y=\tan x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向左、右平移(每次平移 π 个单位长度)，就可以得到正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left\{x\in\mathbf{R}\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ 上的图象(如图 1-69). 正切函数的图象称作**正切曲线**.

从图 1-69 可以看出，正切曲线是由被相互平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ 所隔开的无穷多支曲线组成的. 这些直线称作正切曲线各支的渐近线.

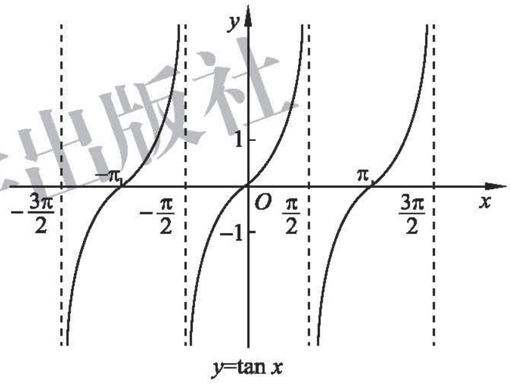


图 1-69

思考交流

观察图 1-69，探究正切函数 $y=\tan x$ 的主要性质及其证明思路.

1. 定义域

正切函数的定义域是 $\left\{x\in\mathbf{R}\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. 值域

当 x 从左侧趋近 $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ 时，$\tan x$ 趋近正无穷大；当 x 从右侧趋近 $-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ 时，$\tan x$ 趋近负无穷大. 即 $y=\tan x$ 的值域是实数集 $\mathbf{R}$.

3. 周期性

正切函数是周期函数，周期是 $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, $k\neq 0$，最小正周期是 π.

4. 奇偶性

由 $\tan(-x)=-\tan x$ 可知，正切函数是奇函数. 正切曲线关于原点对称，$(k\pi,0)$ 都是它的对称中心.

5. 单调性

正切函数在每一个区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增.

例 4 画出下列函数的图象，并求出定义域、周期和单调区间：

(1) $y=\tan 2x$； (2) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 (1) 画出 $y=\tan 2x$ 的图象如图 1-70(画法略). 由 $y=\tan x$ 的定义域可知，函数 $y=\tan 2x$ 的自变量 x 应满足 $2x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. 所以函数 $y=\tan 2x$ 的定义域是 $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

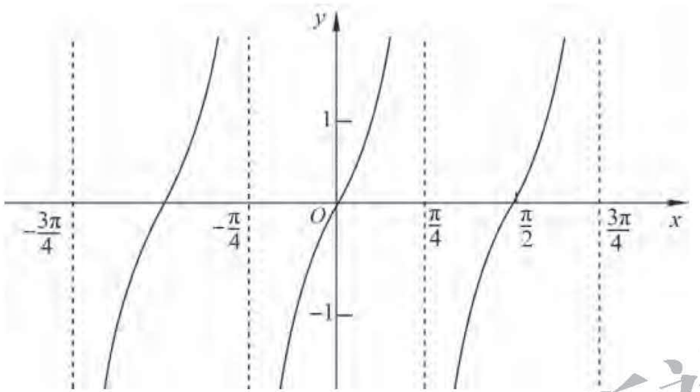


图 1-70

由于 $y=\tan x$ 的周期是 π，$\tan 2x=\tan(2x+\pi)=\tan 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，因此，函数 $y=\tan 2x$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$.

因为 $y=\tan x$ 的单调递增区间是 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$.

所以由 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<2x<k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

因此，函数 $y=\tan 2x$ 的单调递增区间是 $\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2) 画出 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象如图 1-71(画法略). 由 $y=\tan x$ 的定义域可知，函数 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的自变量 x 应满足 $x-\dfrac{\pi}{4}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 因此，函数 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的定义域是 $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

由于 $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}+\pi\right)=\tan\left[(x+\pi)-\dfrac{\pi}{4}\right]$，因此，函数 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是 π.

由 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x-\dfrac{\pi}{4}<k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\dfrac{\pi}{4}<x<k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

因此，函数 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间是 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right),\ k\in\mathbf{Z}$.

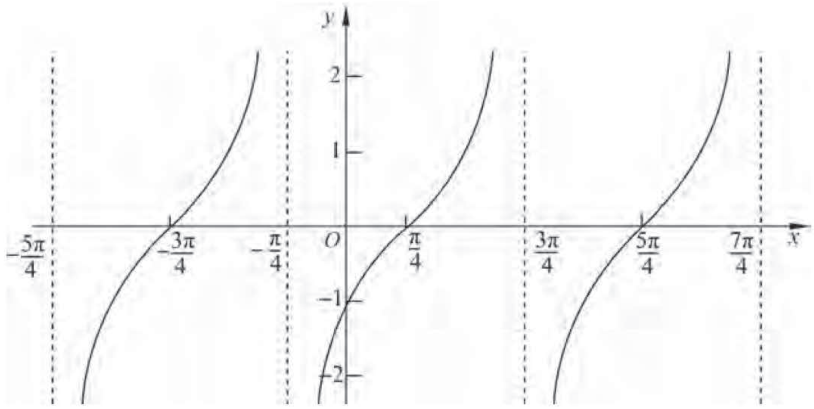


图 1-71

思考交流

请画出函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，并通过图象讨论该函数的性质.

例 5 比较下列各组中三角函数值的大小：

(1) $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ 与 $\tan\frac{7\pi}{5}$；　　(2) $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$ 与 $\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$.

解 (1) $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\tan\frac{3\pi}{4}=-\tan\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)$

$=-\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}$,

$\tan\frac{7\pi}{5}=\tan\left(\frac{2\pi}{5}+\pi\right)=\tan\frac{2\pi}{5}$.

由于 $y=\tan x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，且 $0<\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$,

因此 $\tan\frac{\pi}{4}<\tan\frac{2\pi}{5}$.

即 $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)<\tan\frac{7\pi}{5}$.

(2) $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=-\tan\frac{13\pi}{4}=-\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}$,

$\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)=-\tan\frac{17\pi}{5}=-\tan\left(\frac{2\pi}{5}+3\pi\right)=-\tan\frac{2\pi}{5}$.

由于 $y=\tan x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，且 $0<\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$,

因此 $\tan\frac{\pi}{4}<\tan\frac{2\pi}{5}$, $-\tan\frac{\pi}{4}>-\tan\frac{2\pi}{5}$,

即 $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)>\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$.

思考交流

如何确定函数 $y=\tan\omega x(\omega>0)$ 的周期？

练 习

1. 求值：

(1) $\tan\dfrac{4\pi}{3}$；　(2) $\tan\dfrac{14\pi}{3}$；　(3) $\tan\dfrac{5\pi}{6}$；　(4) $\tan(-675°)$.

2. 求下列函数的定义域、周期：

(1) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$；　(2) $y=\tan 4x$；　(3) $y=\tan\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3. 已知角 α 的终边经过下列各点，求 $\tan\alpha$ 的值：

(1) $\left(1,-\dfrac{1}{3}\right)$；　(2) $(-1,\sqrt{3})$；　(3) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. 观察正切曲线，写出满足下列条件的 x 的取值范围：

(1) $\tan x>0$；　(2) $\tan x=0$；　(3) $\tan x<0$.

5. 求函数 $y=\tan 3x$ 的定义域、周期和单调区间.

6. 比较下列各组中三角函数值的大小：

(1) $\tan 138°$ 与 $\tan 143°$；　(2) $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)$与 $\tan\left(-\dfrac{13\pi}{5}\right)$.

习题 1－7

A 组

1. 在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内，函数 $y=\tan x$ 与 $y=\sin x$ 的图象交点的个数是______.

2. 已知角 α 的终边落在直线 $y=-4x$ 上，且 $x\leqslant 0$，求 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的值.

3. 求函数 $y=-\tan\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$ 的定义域和周期.

4. 求函数 $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)$的定义域和单调区间.

5. 方程 $x-\tan x=0$ 的实数根个数是________.

6. 根据正切函数的图象，写出使下列不等式成立的 x 值的集合：

(1) $1+\tan x\geqslant 0$；　(2) $\tan x-\sqrt{3}\geqslant 0$.

7. 比较下列各组中三角函数值的大小：

(1) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$与 $\tan\left(-\dfrac{3\pi}{7}\right)$；　(2) $\tan 1\ 519°$ 与 $\tan 1\ 493°$.

B 组

1. 设 α 是锐角，利用单位圆证明下列不等式：

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$； (2) $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

2. 利用三角函数图象，分别求出 θ 的取值范围：

(1) $\tan\theta>-1$； (2) $\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$； (3) $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=\sin x$ 和 $y=\tan x$ ，$x\in[0,2\pi]$的图象，依据图象回答以下问题：

(1) 写出这两个函数图象的交点坐标；

(2) 写出使 $\tan x>\sin x$ 成立的 x 的取值范围；

(3) 写出使 $\tan x=\sin x$ 成立的 x 的取值范围；

(4) 写出使 $\tan x<\sin x$ 成立的 x 的取值范围；

(5) 写出使这两个函数有相同的单调性的区间.

4. 证明下述结论：

(1)正切函数 $y=\tan x$ 在$(0,2)$上是单调递增的.

(2)如果函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调递增，函数 $y=g(x)$在$[a,b]$上单调递减，且这两个函数在$[a,b]$上都取正值，则函数 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$在$[a,b]$上是单调递增的.

§ 8 三角函数的简单应用

周期现象是自然界中最常见的现象之一，三角函数是研究周期现象最重要的数学模型. 这一节将利用三角函数研究关于周期现象的简单的实际问题.

例 水车问题.

水车是一种利用水流的动力进行灌溉的工具，工作示意图如图 1－72. 设水车（即圆周）的直径为 3 m，其中心（即圆心）O 到水面的距离 $b=1.2$ m，逆时针匀速旋转一圈的时间是 $\frac{4}{3}$ min，水车边缘上一点 P 距水面的高度为 h（单位：m）.

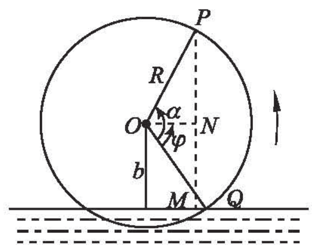


图 1－72

(1) 求 h 与旋转时间 t（单位：s）的函数解析式，并画出这个函数的图象；

(2) 当雨季河水上涨或旱季河流水量减少时，所求得的函数解析式中的参数将会发生哪些变化？若水车转速加快或减慢，函数解析式中的参数又会受到怎样的影响？

解 设点 P 在水面上时高度 h 为 0，当点 P 旋转到水面以下时，点 P 距水面的高度为负值.

(1) 过点 P 向水面作垂线，交水面于点 M，PM 的长度为点 P 的高度 h. 过水车中心 O 作 PM 的垂线，交 PM 于点 N，设 Q 为水车与水面交点，$\angle QON=\varphi$. 由已知，水车的半径 $R=1.5$ m；水车中心到水面的距离 $b=1.2$ m；水车旋转一圈所需的时间为 $T=\frac{4}{3}$ min$=80$ s，转速为 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{40}$ rad/s.

不妨从水车与水面交点 Q 时开始计时（$t=0$）. 旋转 t s 水车转动的角的大小为 α，即

$$\angle QOP=\alpha=\omega t=\frac{\pi}{40}t \text{ rad}.$$

从图中不难看出：

$$h=PM=PN+NM=R\sin(\alpha-\varphi)+b. \quad ①$$

因为 $\sin\varphi=\frac{1.2}{1.5}$，所以 $\varphi\approx53.1^\circ=0.295\pi$ rad. 因此

$$h\approx1.5\sin\left(\frac{\pi}{40}t-0.295\pi\right)+1.2, \quad ②$$

这就是点 P 距水面的高度 h 关于时间 t 的函数解析式.

找出使 $\frac{\pi}{40}t-0.295\pi$ 取 $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$ 的五个关键点，列表（如表 1－15）、描点，画出函

数在区间[0,91.8]上的图象(如图1-73):

表 1-15

t	11.8	31.8	51.8	71.8	91.8
$h\approx1.5\sin\left(\frac{\pi}{40}t-0.295\pi\right)+1.2$	1.2	2.7	1.2	−0.3	1.2

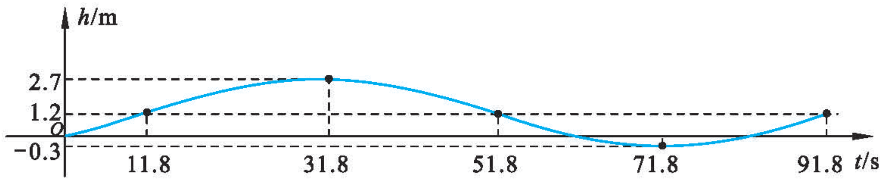


图 1-73

(2) 雨季河水上涨或旱季河流水量减少,将造成水车中心 O 与水面距离的改变,导致函数解析式中的参数 b 发生变化.水面上涨时参数 b 减小;水面回落时参数 b 增大.如果水车转速加快,将使周期 T 减小,转速减慢则使周期 T 增大.

面对实际问题建立数学模型,是一项重要的基本技能.这个过程并不神秘,就像这个例题,把问题提供的"条件"逐条地"翻译"成"数学语言"是很自然的.

练 习

1. 某昆虫种群数量1月1日低到700只,其数量随着时间变化逐渐增加,到当年7月1日高达900只,其数量在这两个值之间按正弦曲线规律改变.

   (1) 求出这种昆虫种群数量 y(单位:只)关于时间 t(单位:月)的函数解析式;

   (2) 画出这个函数的图象.

习题 1-8

A 组

1. 电流 I(单位:A)随时间 t(单位:s)变化的函数解析式是 $I=A\sin\omega t$, $t\in[0,+\infty)$,其中 $\omega=10\pi$ rad/s, $A=5$.

(1) 求电流 I 变化的周期;

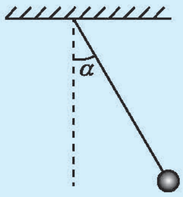
(2) 当 $t=0,\frac{1}{200},\frac{1}{100},\frac{3}{200},\frac{1}{50}$时,求电流 I.

2. 一个单摆如图所示,小球偏离铅垂线方向的角为 α rad,α 与摆动时间 t(单位:s)之间的函数解析式为 $\alpha(t)=\frac{1}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$. 求:

(1) 最初($t=0$)时 α 的值;

(2) 单摆摆动的频率;

(3) 经过多长时间单摆完成 5 次完整摆动?



(第 2 题)

3. 如图,挂在弹簧下方的小球做上下振动,小球在时间 t(单位:s)时相对于平衡位置(即静止的位置)的高度为 h(单位:cm),由下列关系式决定:

$$h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ t\in[0,+\infty).$$

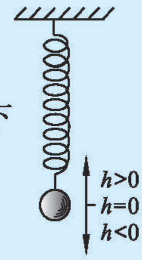
以横轴表示时间,纵轴表示高度,画出这个函数在一个周期的闭区间上的简图,并回答下列问题:

(1) 小球开始振动($t=0$)时的位置在哪里?

(2) 小球位于最高、最低位置时 h 的值是多少?

(3) 经过多长时间小球振动一次(即周期是多少)?

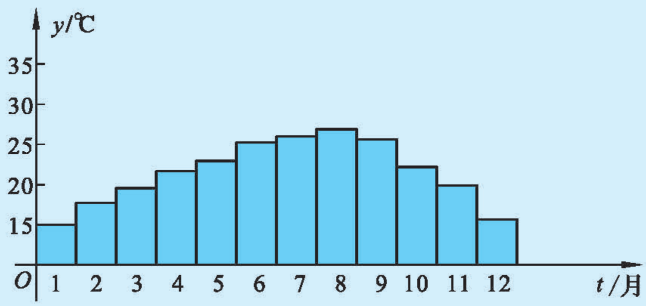
(4) 小球每 1 s 能往复振动多少次(即频率是多少)?



(第 3 题)

B 组

1. 某地为发展旅游业,在旅游手册中给出了当地一年每个月的月平均气温表,根据图中提供的数据,试用 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b$ 近似地拟合出月平均气温 y(单位:℃)与时间 t(单位:月)的函数关系,并求出其周期和振幅,以及气温达到最大值和最小值的时间.(答案不唯一)



(第 1 题)

阅读材料

数学与音乐

《梁祝》优美动听的旋律,《十面埋伏》的铮铮琵琶声,贝多芬令人激动的交响曲,田野里昆虫的鸣叫……当沉浸在这些美妙的音乐声中时,你是否想到了它们其实与数学有着密切的联系?

事实上,数学与音乐之间不仅有着密切的联系,而且相互交融形成了一个和谐统一的整体. 古希腊时代的毕达哥拉斯(Pythagoras,约前 580—约前 500)就已经发现了数学与音乐的关系. 他注意到如果振动弦的长度可表示成简单的整数之比,这时发出的将是和音,如 1∶2(八度音程),2∶3(五度音程)或 3∶4(四度音程).

乐曲中也存在着数学. 如图 1-74,是贝多芬(Ludwig van Beethoven,1770—1827)《欢乐颂》的一个片段:

图 1-74

如果以时间为横轴、音高为纵轴建立平面直角坐标系,那么写在五线谱中的音符就变成了坐标系中的点(如图 1-75):

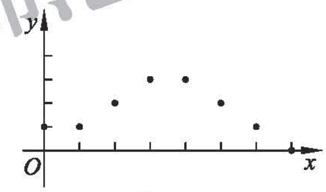


图 1-75

实际上,音乐中的五线谱就相当于一个平面直角坐标系,写在五线谱中的音符相当于平面直角坐标系中的点,两个相邻点横坐标的差就是前一个音符的音长,而一首乐曲就是一个音高 y 关于时间 x 的函数 $y=f(x)$.

忽上忽下跳动的音符也是有一定规律可循的. 在一首乐曲中常常会有一段音符反复出现,这就是它的主旋律. 它表达了该乐曲的主题. 从数学上看,乐曲的主旋律就是通过周期性表达的,可以用三角函数来表示.

下面就是西方乐曲《圣者的行进(When the Saints Go Marching In)》的主旋律(如图 1-76). 可以看出,其音高是随时间呈周期性变化的.

图 1-76

反过来，数学中也存在着音乐，我们可以利用函数来创作乐曲. 比如，在正弦函数图象上取出 6 个点(如图 1－77)，按照四分之四拍写在五线谱中，就得到一段乐曲(如图 1－78)：

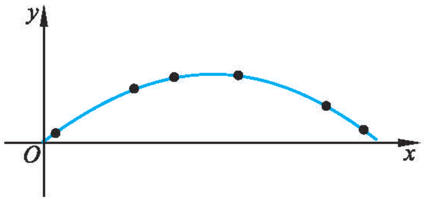


图 1－77

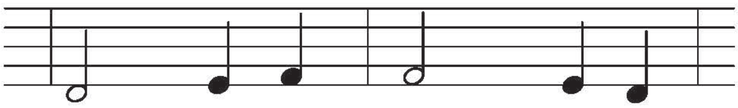


图 1－78

用数学作曲的典型代表人物就是 20 世纪 20 年代哥伦比亚大学的数学和音乐教授希林格(Joseph Schillinger，1895—1943). 他曾经把《纽约时报》上的一条商务曲线描述在坐标纸上，然后把它分成比例合适的小节，选取适当的点进行处理并演奏出来，结果竟然是一首曲调优美、与巴赫作品相似的乐曲！希林格甚至认为：根据一套准则，所有的音乐杰作都可以转变为数学公式. 他的学生格什温(George Jacob Gershwin，1898—1930)更是推陈出新，创建了一套用数学作曲的系统. 据说著名歌剧《波吉与贝丝(Porgy and Bess)》就是他使用这样的一套系统创作的.

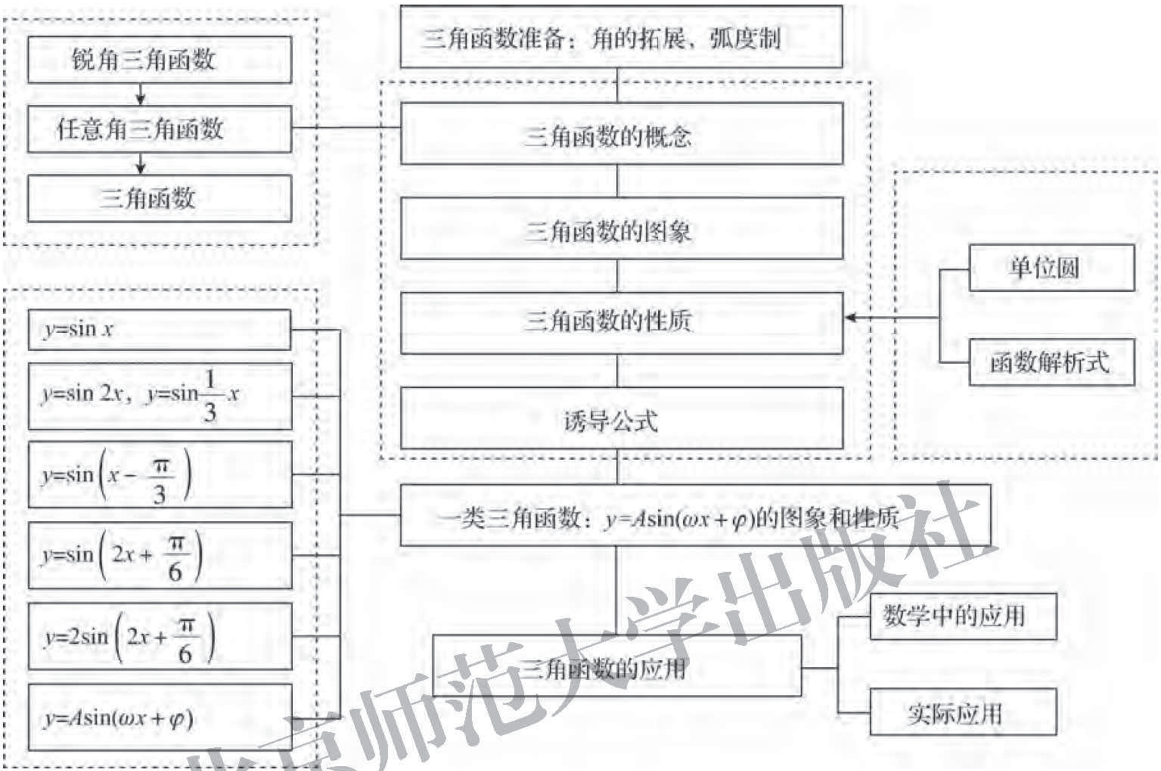
参考文献

1. T. H. Garland，C. V. Kahn. Math and Music：Harmonious Connections[M]. Dale Seymour Publications，1995.

2. 李文林. 数学史概论[M]. 第 2 版. 北京：高等教育出版社，2002.

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

三角函数是一类最典型的周期函数. 本章在用锐角三角函数刻画直角三角形中边角关系的基础上，借助单位圆建立一般三角函数的概念，体会引入弧度制的必要性；用几何直观和代数运算的方法研究三角函数的周期性、奇偶性(对称性)、单调性和最大(小)值等性质；利用三角函数构建数学模型，解决实际问题.

1. 角与弧度

了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化，体会引入弧度制的必要性.

2. 三角函数概念和性质

(1) 借助单位圆理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义，能画出这些三角函数的图象，了解三角函数的周期性、单调性、奇偶性、最大(小)值. 借助单位圆的对称性，利用定义推导出诱导公式($\alpha\pm\frac{\pi}{2}$，$\alpha\pm\pi$ 的正弦、余弦、正切).

(2) 借助图象理解正弦函数、余弦函数在$[0,2\pi]$上，正切函数在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的性质.

(3) 结合具体实例，了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义；能借助图象理解参数 ω,φ,A 的意义，了解参数的变化对函数图象的影响.

3. 三角函数应用

会用三角函数解决简单的实际问题，体会可以利用三角函数构建刻画事物周期变化的数学模型.

三、需要关注的问题

1. 为什么要引入弧度制？它对于研究三角函数有什么好处？

2. 任意角的正弦函数、余弦函数是怎样定义的？

3. 单位圆在定义三角函数、研究三角函数的性质、推导诱导公式中分别有什么作用？

4. 如何研究 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 A,ω,φ 是常数，$A>0,\omega>0$）的图象，A,ω,φ 对函数图象有什么影响？它们的物理意义分别是什么？

复习题一

A 组

1. 时钟的分针长 5 cm，从 2:10 到 2:35，分针转过的角是多少弧度？分针扫过的扇形面积是多少？分针尖端所走过的弧长是多少？（π 取 3.14，计算结果精确到 0.01）

2. 确定下列各式的符号：

(1) $\cos 2-\sin 2$；　　(2) $\sin 3\cos 4\tan 5$.

3. 已知角 α 的终边在函数 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图象上，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

4. 计算：

(1) $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{25\pi}{3}+\tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$；　　(2) $\sin 2+\cos 3+\tan 4$；（可以用计算器）

(3) $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)+\tan\left(-\frac{53\pi}{6}\right)$；　　(4) $\tan 675°-\sin(-330°)-\cos 960°$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-\tan x}$；　(2) $y=\frac{1}{1+2\sin x}$；　(3) $y=-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$；　(4) $y=\sqrt{1-\cos\frac{x}{2}}$.

6. 下列各式能否成立？请说明理由.

(1) $\sin^2x=1.3$；　(2) $\cos x\sin x=-\frac{3}{2}$；　(3) $\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$；　(4) $1-\cos^3x=-1$.

7. 求下列函数的最大值、最小值以及对应的 x 值的集合：

(1) $y=\sqrt{2}+\frac{\sin x}{\pi}$；　(2) $y=\frac{3}{2}-2\cos x$；　(3) $y=3\sin\left(\frac{3}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

8. 已知 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，分别求适合下列各条件的 x 的集合：

(1) $\cos x+\sin x<0$；　　(2) $\tan x+\sin x<0$.

9. 在区间 $[0,2\pi]$ 中求出：

(1) 使 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是单调递减的区间；

(2) 使 $y=\sin x$ 是单调递增的而 $y=\cos x$ 是单调递减的区间.

10. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=3\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $y=\frac{1}{5}\sin\left(3x-\frac{4\pi}{3}\right)$.

11. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2+\cos x$；　(2) $y=\left|\frac{1}{2}\sin x\right|$；　(3) $y=x^2\sin x$；　(4) $y=\cos x-\tan x$.

12. 不画图，写出下列函数的振幅、周期、初相，并说明怎样由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到它们的图象：

(1) $y=\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$；　　(2) $y=2\sin\left(\frac{x}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$.

13. 比较下列各组函数值的大小：

(1) $\sin\frac{32\pi}{5}$ 和 $\sin\frac{27\pi}{4}$；　(2) $\cos(-2\ 037°)$ 和 $\cos 852°$；　(3) $\tan\left(-\frac{18\pi}{7}\right)$ 和 $\tan\left(-\frac{43\pi}{8}\right)$.

B 组

1. 已知角 α 的终边在第四象限，确定下列各角终边所在的象限：

(1) $\frac{\alpha}{2}$；　(2) 2α；　(3) $\frac{\alpha}{3}$；　(4) 3α.

2. 一个扇形的弧长和面积的数值都是 5，求这个扇形圆心角的弧度数.

3. 求下列函数的值域：

(1) $y=2-3\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$；　(2) $y=\frac{3\sin x+1}{\sin x-2}$；

4. 分别求出使下列各组条件成立的 x 的集合：

(1) $\begin{cases}\cos x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x\geqslant\frac{1}{2};\end{cases}$　(2) $\tan x\geqslant-\sqrt{3}$.

5. 结合生活经验和其他学科的知识，举出三个周期函数的实例.

6. 讨论以下三个式子的意义：

$$30°+\sin 30°=?$$

$$\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=?$$

$$x+\sin x=?$$

谈谈引入弧度制的好处.

C 组

1. 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A$，$\omega$，$\varphi$ 是常数，$A>0$，$\omega>0$）. 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，试画图找出 $f(x)$ 的最小正周期.

2. 某港口的水深 y（单位：m）是时间 t（$0\leqslant t\leqslant 24$，单位：h）的函数，下面是该港口的水深数据：

t/h	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y/m	10	13	9.9	7	10	13	10.1	7	10

一般情况下，船舶航行时船底与海底的距离不小于 4.5 m 时就是安全的.

(1) 若有以下几个函数模型：$y=at+b$，$y=A\sin(\omega t+\varphi)$，$y=A\sin\omega t+K$，你认为哪个模型可以更好地刻画 y 与 t 之间的对应关系？请你求出该拟合模型的函数解析式；

(2) 如果船的吃水深度（船底与水面的距离）为 7 m，那么该船在什么时间段能够安全进港？若该船欲当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过多长时间？

3. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}|\sin x-\cos x|$（$x\in\mathbf{R}$），则 $f(x)$ 的值域是________.

2

第二章

平面向量及其应用

许多物理量都是既有大小又有方向的量，如力、速度、位移，以及电场强度、磁感应强度等，本章我们将引入一个既有大小又有方向的量，叫向量，它在数学中是一个最基本的概念，占有重要的地位.

向量是代数的研究对象，数的运算、代数式的运算和向量的运算是学习代数运算的三个重要阶段. 可促进逻辑推理、数学运算和数学建模的核心素养的发展.

向量又是几何的研究对象，可以刻画直线和平面等几何图形，描述平行和垂直等几何性质，解决长度、角度等几何问题，是发展直观想象核心素养的主要载体.

向量是沟通代数与几何的一座天然桥梁，把运算关系与图形关系联系起来，向量及其运算是重要的数学模型，在数学和实际中有着广泛的应用，有助于促进数学抽象、数学运算、直观想象和逻辑推理等核心素养的提升. 发展数学的应用意识，提高数学应用能力.

本章将学习向量的概念、向量的运算、平面向量的基本定理、平面向量及运算的坐标表示，以及向量在数学、物理和日常生活中的简单应用.

我们可以说，现在首次打开了通往崭新方法的大门；在未来的岁月里，这一拥有无数美妙神奇结果的新方法将赢得更多心灵的重视.

——伽利略(Galileo Galilei，1564—1642)

§ 1 从位移、速度、力到向量

1.1 位移、速度、力与向量的概念

一、向量的背景——位移、速度、力

在物理学中，我们学习过“位移”“速度”和“力”等物理量. 下面各情境分别反映了这些物理量.

情境 1 学校位于小明家北偏东 60°方向，距离小明家 2 000 m. 从小明家到学校，可能有长短不同的几条路. 无论走哪条路，位移都是向北偏东 60°方向移动了 2 000 m(如图 2 - 1).

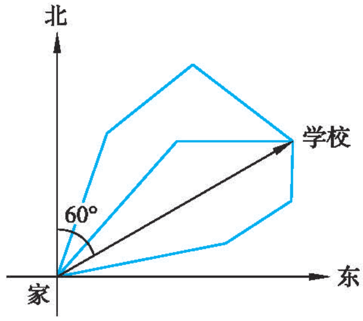


图 2 - 1

情境 2 某著名运动员投掷标枪时，其中一次记录为：出手角度 $\theta=43.242°$，出手速率为 $v=28.35$ m/s(如图 2 - 2).

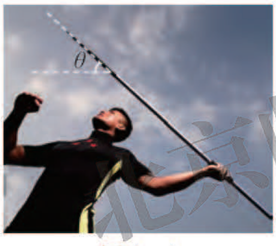


图 2 - 2

图 2 - 3

情境 3 如图 2 - 3，汽车沿倾斜角为 θ 的坡路向上行驶，汽车的牵引力为 $\boldsymbol{F}$.

思考交流

1. 上面三个情境中反映的物理量有什么共同的特点?
2. 请再举出一些含有类似性质的物理量实例进行分析，与同学交流.

二、向量的概念与表示

基于上述讨论，我们发现，位移、速度和力这些物理量都是既有大小又有方向的量，它们和长度、面积、质量等只有大小的量不同. 在现实世界中，像位移、速度、力等既有大小又有方向的量还有很多，如加速度、动量等.

抽象概括

既有大小又有方向的量统称为**向量**.

那些只有大小没有方向的量称为数量(如年龄、长度、体重、面积、体积等).

在物理学中,位移、速度和力通常用一条带箭头的线段表示,箭头表示这些量的方向,线段长度表示这些量的大小.

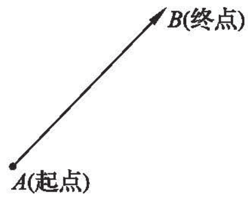


图 2-4

在数学中,这种具有方向和长度的线段称为**有向线段**(如图 2-4).以 A 为起点,B 为终点的有向线段,记作$\overrightarrow{AB}$.线段 AB 的长度称为**有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度**,记作$|\overrightarrow{AB}|$.

向量可以用有向线段表示,其中有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向.向量也可以用黑斜体小写字母如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$或 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$(书写)来表示(如图 2-5).向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小,记作$|\boldsymbol{a}|$,又称作**向量的模**.

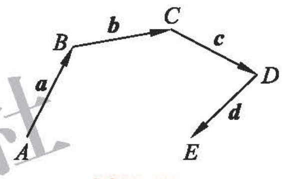


图 2-5

长度为 0 的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,任何方向都可以作为零向量的方向.模等于 1 个单位长度的向量称为**单位向量**.

例 1 小明从学校的教学楼出发,向北走了 1 500 m 到达图书馆,2 h 后又从图书馆向南偏东 60°走了 1 000 m 到食堂就餐,用餐后又从食堂向西走了 2 000 m 来到操场运动.请选择适当的比例尺画图,用向量表示小明每次的位移.

解 设比例尺为 1∶50 000,如图 2-6.小明的位移表示如下:

向量$\overrightarrow{OA}$表示从教学楼到图书馆的距离与方向;

向量$\overrightarrow{AB}$表示从图书馆到食堂的距离与方向;

向量$\overrightarrow{BC}$表示从食堂到操场的距离与方向.

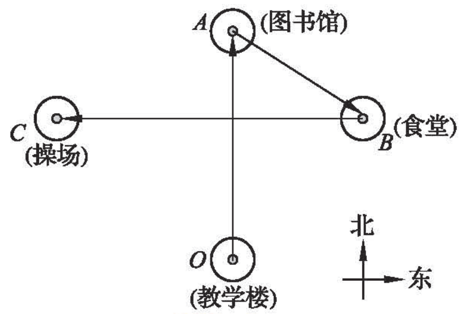


图 2-6

练 习

1. 画图表示小船的下列位移(用 1∶500 000 的比例尺):

   (1) 由 A 地向东北方向航行 15 km 到达 B 地;

   (2) 由 A 地向北偏西 30°方向航行 20 km 到达 C 地;

   (3) 由 C 地向正南方向航行 25 km 到达 D 地.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中有三点 $A(1,0)$,$B(-1,2)$,$C(-2,2)$.请用有向线段分别表示由 A 到 B,由 B 到 C,由 C 到 A 的位移.

1.2 向量的基本关系

一、相等向量

在物理学中，两个物体运动速度相等是指它们的方向相同、大小相等；两个力相等不仅包括方向相同、大小相等，还包括作用点相同.

在数学中，**相等向量**是指它们的长度相等且方向相同. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

若两条有向线段方向相同、长度相等，则它们表示的向量是相等的. 代表相等向量的有向线段与起点位置无关. 直观地说，一条有向线段在平移过程中，虽然位置不同，但表示的是相等向量. 例如，在图 2－7 中，

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_3B_3}.$$

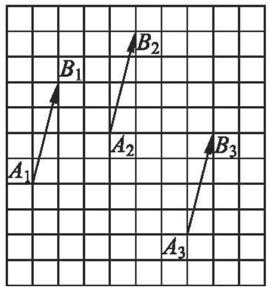


图 2－7

二、共线向量

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反（如图 2－8），则称这两个向量为**共线向量**或平行向量，也称这两个向量共线或平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

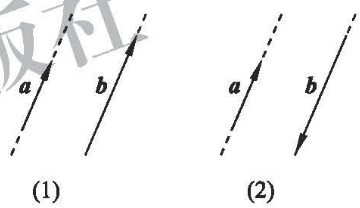


图 2－8

两个向量共线或平行，是指表示这两个向量的有向线段所在的直线重合或平行.

若两个向量的长度相等、方向相反，则称它们互为**相反向量**. 相反向量是共线向量. 若其中一个向量为 $\boldsymbol{a}$，则它的相反向量记作$-\boldsymbol{a}$.

规定**零向量与任一向量共线**，即对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{0}/\!/\boldsymbol{a}$. 零向量的相反向量仍是零向量.

例 2 如图 2－9，点 D，E，F 分别是等边三角形 ABC 的边 AB，BC，AC 的中点. 在以点 A，B，C，D，E，F 为起点或终点的向量中：

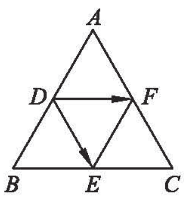


图 2－9

（1）找出与向量$\overrightarrow{DE}$相等的向量；

（2）找出与向量$\overrightarrow{DF}$共线的向量.

解 根据三角形的中位线定理，得

（1）在以点 A，B，C，D，E，F 为起点或终点的向量中，与向量$\overrightarrow{DE}$相等的向量有：$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{FC}$；

（2）在以点 A，B，C，D，E，F 为起点或终点的向量中，与向量$\overrightarrow{DF}$共线的向量有：$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{FD}$.

三、向量的夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如图 2-10，在平面内选一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\theta=\angle AOB$（$0°\leqslant\theta\leqslant180°$）称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**.

当 $\theta=0°$时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=180°$时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向；当 $\theta=90°$时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

规定**零向量可与任一向量垂直**，即对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{0}\perp\boldsymbol{a}$.

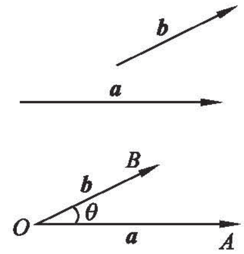


图 2-10

例 3 如图 2-11(1)，等边三角形 ABC 中，点 D,E,F 分别是边 AB,BC,AC 的中点，指出如下各组向量的夹角.

(1) $\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{DF}$； (2) $\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{EF}$； (3) $\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{EB}$.

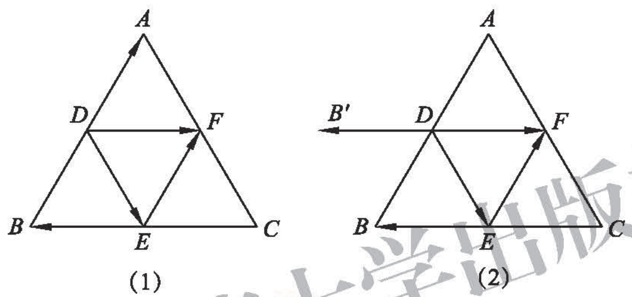


图 2-11

解 (1) $\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{DF}$的夹角是$\angle EDF=60°$；

(2) 因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，所以$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{EF}$的夹角等于$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{DA}$的夹角，即$\angle EDA=120°$；

(3) 如图 2-11(2)，延长 FD 至 B'，使 $DB'=FD$，则$\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{EB}$，则$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{EB}$的夹角等于$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{DB'}$的夹角，即$\angle EDB'=120°$.

练 习

1. 用有向线段表示两个相等的向量，这两个有向线段一定重合吗?
2. 判断下列结论是否正确(正确的在括号内画"√"，错误的画"×")，并说明理由.
   (1) 长度相等的两个向量一定是相等向量. ( )
   (2) 相等向量的起点必定相同. ( )
   (3) 向量$\overrightarrow{AB}$的长度与向量$\overrightarrow{BA}$的长度相等. ( )
   (4) 物理学中的作用力和反作用力是一对共线向量. ( )
   (5) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. ( )
3. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2BC$，点 M,N 分别为 AB 和 CD 的中点，在以点 A,B,C,D,M,N 为起点或终点的向量中，相等的非零向量共有多少对?
4. 在等边三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为______；点 E 为 BC 的中点，则$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{EC}$的夹角为______.

习题 2－1

1. 选择适当的比例尺，用有向线段表示下列向量.

(1) 终点 A 在起点 O 正东方向 3 m 处；

(2) 终点 B 在起点 O 正西方向 3 m 处；

(3) 终点 C 在起点 O 东北方向 4 m 处；

(4) 终点 D 在起点 O 西南方向 2 m 处.

2. 用有向线段表示下列物体运动的速度.

(1) 向正东方向匀速行驶的汽车在 2 h 内的位移是 60 km(用 1∶1 000 000 的比例尺)；

(2) 做自由落体运动的物体在 1 s 末的速度(用 1 cm 的长度表示速度 2 m/s).

3. 用有向线段分别表示一个方向向上、大小为 20 N 的力，以及一个方向向下、大小为 30 N 的力(用 1 cm的长度表示大小为 10 N 的力).

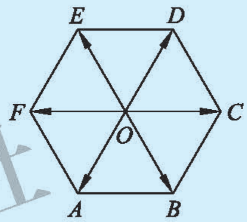
4. 如图，设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，请完成以下问题.

(1) 分别写出与$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$相等的向量；

(2) 分别写出与$\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{OE}$,$\overrightarrow{OF}$共线的向量；

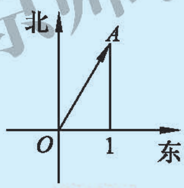
(3) 分别写出$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OE}$的夹角；

(4) 分别写出$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{FA}$的夹角.

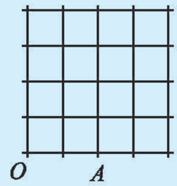


(第 4 题)

5. 如图，某船从点 O 出发沿北偏东 30°的方向行驶至点 A 处，求该船航行向量$\overrightarrow{OA}$的长度(单位：n mile).



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 在如图所示的网格图中，每个小方格的边长为 1 个单位长度，请你用直尺和圆规画出下列向量.

(1) $\overrightarrow{OA}$；

(2) $\overrightarrow{OB}$，使$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$；

(3) $\overrightarrow{CD}$，使$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}$；

(4) $\overrightarrow{DE}$，使$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{OA}$.

阅读材料

向量的发展历史与符号由来

向量最早出现在物理学中.很多物理量如力、速度、位移，以及电场强度、磁感应强度等都是向量.早在公元前350年前，古希腊著名学者亚里士多德(Aristotle，前384—前322)就知道了力可以表示成向量，两个力的合力可根据平行四边形法则来得到.随后，学者们在物理学研究中便很自然地将力学与向量联系起来.然而当时向量还未能从中抽象出来作为数学的研究对象，大部分的研究成果都是建立在物理学的应用领域中.

“向量”一词来自力学、解析几何中的有向线段，最先使用有向线段表示向量的是英国科学家牛顿(Isaac Newton，1642—1727).1687年，牛顿在其著作《自然哲学的数学原理》一书中提到，物理中的几个概念，如速度、动量和力，从其数学结构上看它们是向量，并采用了有向线段来表示这些向量.

18世纪末期，丹麦测量学家韦塞尔(Caspar Wessel，1745—1818)提出了复数的几何解释：任意复数 $a+bi$ 都可以与复平面上的一个点或一个向量(以坐标原点为起点)一一对应，并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算.数学王子高斯(Johann Carl Friedrich Gauss，1777—1855)后来致力于研究该平面，人们就常常把这样的平面称为高斯复平面.

复数的出现使得向量可以代数化，向量理论从此得到发展，于是数学家们意识到平面上的向量可以通过复数来表示和研究，但是对于空间向量却无能为力.直到19世纪中期，英国数学家哈密顿(William Rowan Hamilton，1805—1865)发现了四元数 $a+bi+cj+dk$(包括数量部分和向量部分)，使向量理论有了更好的发展.

向量是一种具有几何性质的量，除零向量外，总可以用箭头表示方向、线段长表示大小的有向线段来表示它.1806年，瑞士人阿尔冈(Jean Robert Argand，1768—1822)用 AB 表示一个有向线段或向量.1827年，莫比乌斯(August Ferdinand Möbius，1790—1868)用 $\overrightarrow{AB}$ 表示起点为 A、终点为 B 的向量，这种用法被数学家广泛接受.另外，哈密顿、吉布斯(Josiah Willard Gibbs，1839—1903)等人则以小写希腊字母表示向量.1912年，朗之万(Paul Langevin，1872—1946)用 α 表示向量.之后，字母上加箭头表示向量的方法逐渐流行，尤其在手写稿中.在印刷中，常用黑斜体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等表示向量.

§ 2 从位移的合成到向量的加减法

数因为运算而威力无穷. 与数的运算类比，向量能进行哪些运算呢？人们从位移、力、速度的合成和数的运算得到启发，引进向量的运算.

2.1 向量的加法

一、向量加法的定义

实例分析

天车是大型生产车间或工地进行起重作业的重要设备. 如图 2-12，物体在天车的作用下，同时进行竖直方向的位移和水平方向的位移，实际位移$\overrightarrow{AB}$可以看作竖直方向的位移$\overrightarrow{AD}$与水平方向的位移$\overrightarrow{AC}$的合成.

位移$\overrightarrow{AB}$是以AC，AD为邻边的$\square ACBD$的对角线，位移的合成遵循平行四边形法则.

实际上，力的合成和速度的合成，也与位移的合成一样，都遵循平行四边形法则.

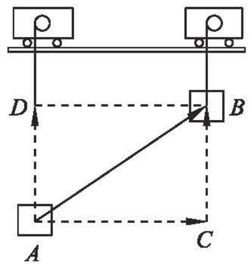


图 2-12

抽象概括

求两个向量和的运算，称为**向量的加法**.

已知两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如图 2-13，在平面内任取一点 A，作有向线段$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以有向线段$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AD}$为邻边作$\square ABCD$，则有向线段$\overrightarrow{AC}$表示的向量即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求两个向量和的作图方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

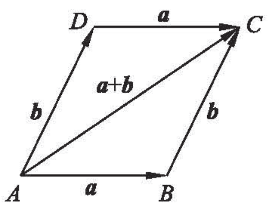


图 2-13

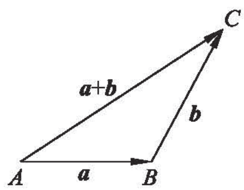


图 2-14

显然，如图 2-14，作有向线段$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以有向线段$\overrightarrow{AB}$的终点为起点，作有向线段$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 A，C 得到有向线段$\overrightarrow{AC}$，也可以表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 这种求两个向量和的作图方法称为向量加法的**三角形法则**.

若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，图 2-15 表示了两个共线向量求和的情形.

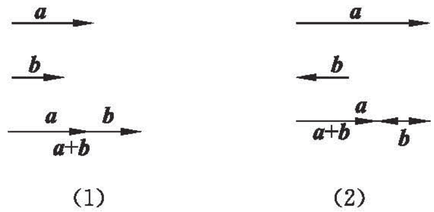


图 2-15

也就是说，若两个共线向量方向相同，则它们的和向量方向与原方向一致，大小为两个向量大小之和(如图 2-15(1))；若两个共线向量方向相反且大小不相等，则它们的和向量方向与较大向量的方向一致，大小是两个向量大小差的绝对值(如图 2-15(2)).

由向量加法的定义可知，互为相反向量的两个向量的和为零向量，即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

例 1　如图 2-16，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

解　**作法 1**　(平行四边形法则)：如图 2-17 在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA，OB 为邻边作▱$OBCA$，则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

作法 2　(三角形法则)：如图 2-18 在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

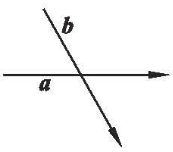


图 2-16

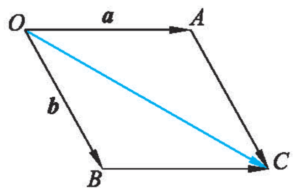


图 2-17

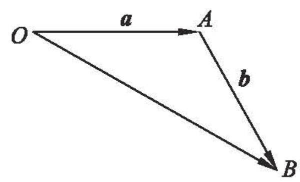


图 2-18

思考交流

对任意的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$之间具有怎样的大小关系？通过作图进行解释.

例 2　轮船从 A 港沿北偏东 60°方向行驶了 40 n mile 到达 B 处，再由 B 处沿正北方向行驶 40 n mile 到达 C 处. 求此时轮船与 A 港的相对位置.

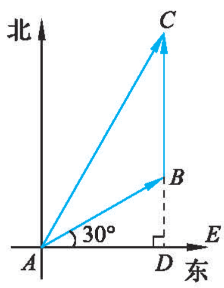


图 2-19

解　如图 2-19，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$分别表示轮船的两次位移，则$\overrightarrow{AC}$表示轮船的合位移，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

设正东方向所在直线为 AE，过点 B 作 AE 的垂线，垂足为点 D. 在

Rt△ADB 中，$\angle ADB=90°$，$\angle DAB=30°$，$|\overrightarrow{AB}|=40$ n mile.

所以
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{DB}|&=|\overrightarrow{AB}|\cdot\sin\angle DAB\\&=40\cdot\sin 30°\\&=20(\text{n mile}),\\|\overrightarrow{AD}|&=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle DAB\\&=40\cdot\cos 30°\\&=20\sqrt{3}(\text{n mile}).\end{aligned}$$

在 Rt△ADC 中，$\angle ADC=90°$，$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{DB}|+|\overrightarrow{BC}|=60$ (n mile)，由勾股定理得
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|&=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2}\\&=\sqrt{(20\sqrt{3})^2+60^2}\\&=40\sqrt{3}(\text{n mile}).\end{aligned}$$

由 $|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AD}|$，得 $\angle CAD=60°$.

因此，此时轮船位于 A 港北偏东 30°，且距 A 港 $40\sqrt{3}$ n mile 的 C 处.

二、向量加法的运算律

问题提出

我们熟知，数的加法满足结合律和交换律，即对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$，有
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),$$
$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

那么向量的加法运算满足哪些运算律呢？

分析理解

向量的加法也满足结合律和交换律，即
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

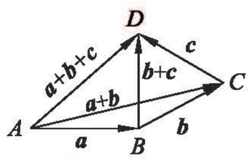


图 2-20

先证明向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的加法满足结合律. 由图 2-20 可知
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},$$

所以
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

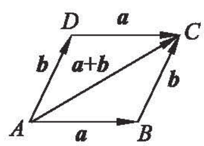


图 2-21

再证明向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的加法满足交换律. 由图 2-21 可知
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},$$

所以
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

例 3 如图 2－22，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$，作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$，并说出多个向量求和的方法及依据.

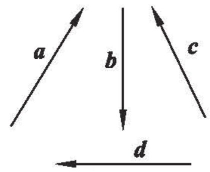


图 2－22

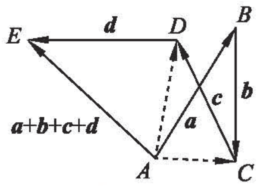


图 2－23

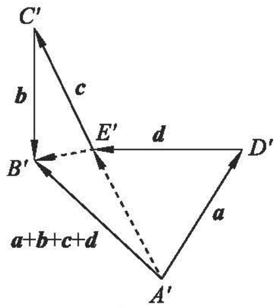


图 2－24

解 可以按照不同的次序与组合进行这四个向量的加法.

方法 1 如图 2－23，在平面上任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{d}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}&=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}]+\boldsymbol{d}\\&=(\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AD}+\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

方法 2 如图 2－24，在平面上任取一点 A'，作$\overrightarrow{A'D'}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D'E'}=\boldsymbol{d}$，$\overrightarrow{E'C'}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{C'B'}=\boldsymbol{b}$，则

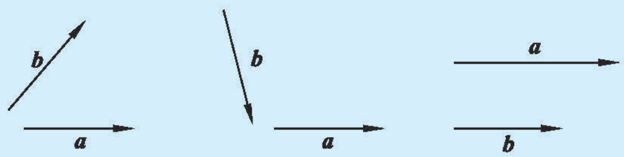
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})=\overrightarrow{A'E'}+\overrightarrow{E'B'}=\overrightarrow{A'B'}.$$

由于向量的加法满足结合律与交换律，因此求 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的和可以按以下步骤进行：任取一点 O，依次作有向线段$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{\alpha}_n$，$\overrightarrow{OA_n}$即为这 n 个向量之和.

当然，也可以把 n 个向量分为若干组，先求每组向量之和，再求出这些组向量和的和.

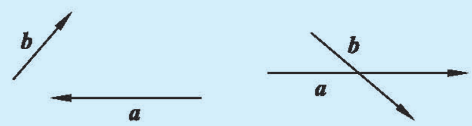
练 习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，用向量加法的三角形法则作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



(1) (2) (3)

（第 1 题）



(1) (2)

（第 2 题）

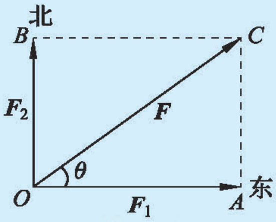
2. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，用向量加法的平行四边形法则作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.
3. 填空：

   (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$__________；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$__________.
4. 小船向正东方向行驶了 10 km，又向正北方向行驶了 17.3 km. 求小船两次位移的合位移.
5. 如图，两个人共同用力将一块牌匾拉上墙头. 其中一人用了 450 N 的拉力，另一人用了 600 N 的拉力. 当两人所用拉力的夹角是 90°时，求两人的合力.

（第 5 题）

6. 如图，小娟、小明两人共提一桶水匀速前行．已知两人手臂上的拉力大小相等且均为 F，两人手臂间的夹角为 θ，水和水桶的总重力为 $\boldsymbol{G}$，请你利用物理学中力的合成的相关知识分析拉力 $\boldsymbol{F}$ 与重力 $\boldsymbol{G}$ 的关系.


（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 同时作用在一个物体上，其中 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为 40 N，方向向东，$\boldsymbol{F}_2$ 的大小为 30 N，方向向北，求它们的合力.

2.2　向量的减法

我们知道，实数 α 减去实数 β，等于实数 α 加上实数 β 的相反数，即

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

类似地，**向量的减法**定义为：向量 $\boldsymbol{a}$ 减向量 $\boldsymbol{b}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

如图 2－25，给定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，作有向线段 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，故 $-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BO}$，则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA},$$

即如果把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在点 O，那么从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 指向被减向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A，得到的向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

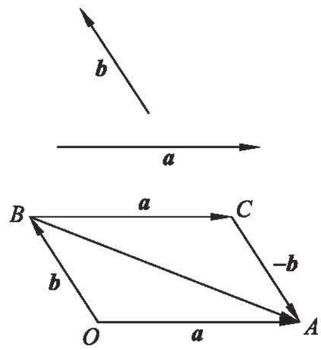


图 2－25

例 4　如图 2－26(1)，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

解　如图 2－26(2)，在平面上任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

再作 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，连接 BD，

则 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

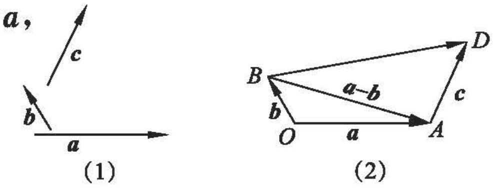


图 2－26

例 5　已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=8$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(1) 探索 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的关系；

(2) 求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解 如图 2-27，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边作$\square ABCD$，则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

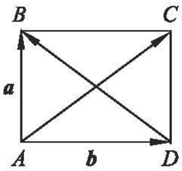


图 2-27

(1) 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，即$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，所以$\square ABCD$ 为矩形.

所以$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$，即$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

(2) 在 Rt$\triangle DAB$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AD}|=8$，由勾股定理，得

$|\overrightarrow{DB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2=6^2+8^2=100$.

所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{DB}|=10$.

例 6 如图 2-28，点 O 是$\square ABCD$ 外一点，试用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OD}$.

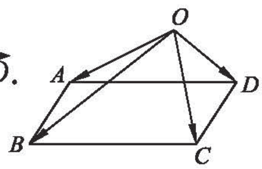


图 2-28

解 由于$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$，

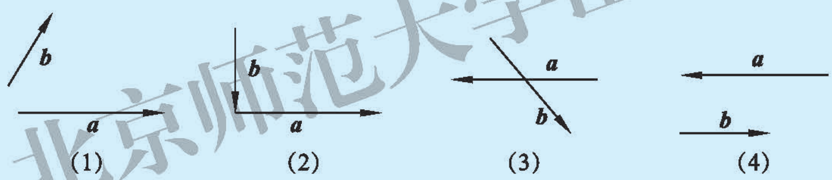
因此只需将$\overrightarrow{CD}$用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$表示.

而$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，

故$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

练 习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



(第 1 题)

2. 填空：

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$________；　(2) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$________；

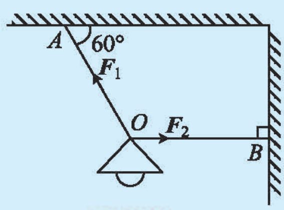
(3) $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=$________；　(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=$________.

习题 2-2

A 组

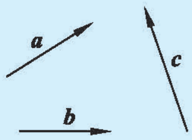
1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 分别表示下列位移："向北10 km""向南5 km""向西10 km""向东 5 km". 请说明向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}$ 的意义.

2. 已知图中电线 AO 与天花板的夹角为 60°，电线 AO 所受拉力 $\boldsymbol{F}_1$的大小为24 N；绳 BO 与墙壁垂直，所受拉力 $\boldsymbol{F}_2$的大小为 12 N. 求 $\boldsymbol{F}_1$和 $\boldsymbol{F}_2$的合力.

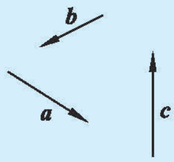


(第 2 题)

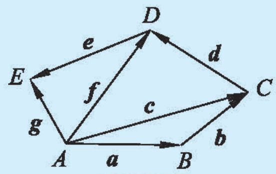
3. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.
4. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



（第 3 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 根据图示填空：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$__________；　　(2) $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=$__________；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=$__________；　　(4) $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}=$__________.

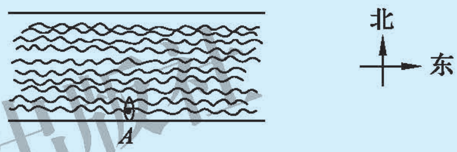
6. 化简：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=$__________；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=$__________；

(3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}=$__________；　　(4) $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=$__________.

7. 如果 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$，那么 A,B,C 三点是否一定是一个三角形的三个顶点？

8. 如图，一艘船从长江南岸点 A 出发，以 $2\sqrt{3}$ km/h的速度向垂直于对岸的方向行驶，同时江水的速度为向东 2 km/h.



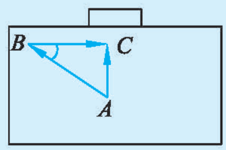
（第 8 题）

(1) 试用向量表示江水速度、船速以及该船实际航行的速度；

(2) 求船实际航行速度的大小与方向（方向用与江水速度间的夹角表示）.

B　组

1. 如图，在一场足球比赛中，中场队员在点 A 位置得球，将球传给位于点 B 的左边锋，随即快速直向插上. 边锋得球后看到对方后卫上前逼抢，于是将球快速横传至门前. 球到达点 C 时前插的中场队员正好赶到，直接射门得分. 设 $BC=30$ m，$\angle ABC=37°$.



（第 1 题）

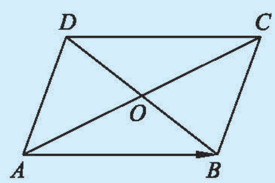
(1) 求中场队员从传球至射门这一过程中足球的位移；

(2) 这一过程中中场队员的位移与球的位移是否相等？

2. 雨滴在下落一定时间后的运动是匀速的，无风时雨滴下落的速度是 4.0 m/s. 现在有风，风使雨滴以 3.0 m/s 的速度水平向东移动，那么雨滴将以多大的速度着地？这个速度的方向怎样？

3. 如果小汽艇向着垂直河岸的方向行驶，在静水中的速度是 12 km/h，河水的流速是 6 km/h，那么小汽艇在河水中的实际运动速度是多大？方向怎样？要使小汽艇沿垂直河岸方向到达对岸码头，船头方向又应怎样？

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，向量 $\overrightarrow{AB}$ 是哪两个向量的和，哪两个向量的差？



（第 4 题）

§ 3 从速度的倍数到向量的数乘

3.1 向量的数乘运算

一、数乘运算的定义

实例分析

在疾风骤雨、雷电交加的夜晚，为什么我们总是先看到闪电，后听到雷声？这是因为光速远远大于声速. 经测量，光速大小约为声速的 8.8×10^5 倍.

一重物由高空自由落下，根据自由落体运动的速度公式 $v=gt$ 可知，它在 1 s 末和 2 s 末的速度大小分别为 $v_1=9.8$ m/s 和 $v_2=19.6$ m/s. 显然 $v_2=2v_1$，并且方向都是竖直向下.

以上实例说明在实际中存在这样的两个向量，它们是共线的，而且大小之间具有倍数关系. 因此，有必要定义实数与向量的乘积运算.

抽象概括

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，满足以下条件：

(1) 当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；

当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；

当 $\lambda=0$ 时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

这种运算称为**向量的数乘**.

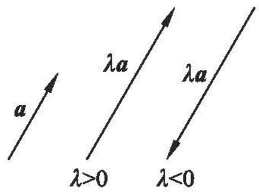


图 2-29

如图 2-29，由实数与向量数乘 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的定义可以看出，它的几何意义是：

当 $\lambda>0$ 时，表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段在原方向伸长或缩短为原来的 $|\lambda|$ 倍；

当 $\lambda<0$ 时，表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段在反方向伸长或缩短为原来的 $|\lambda|$ 倍.

由向量的数乘定义容易推出，在非零向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量是

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

它表明一个非零向量除以它的模（乘它的模的倒数）的结果是一个与原向量同方向的单位向量，这一过程称为向量的单位化.

二、数乘运算的运算律

设 λ,μ 为实数，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量，那么根据向量的数乘定义，可以得到以下运算律：

(1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

利用相似三角形的性质，从图 2－30，可以推出运算律(3)，其他运算律可以由向量的数乘定义直接得到.

向量的加法、减法和数乘的综合运算，通常称为向量的线性运算(或线性组合). 例如，$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$-3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$ 等都是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性运算. 若一个向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性运算得到，如 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 可以用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性表示.

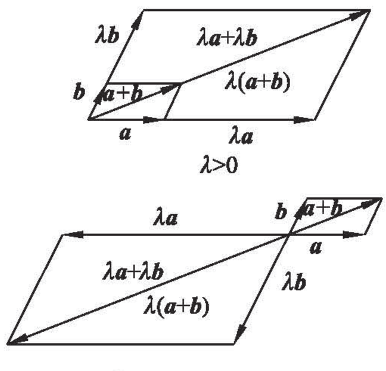


图 2－30

例 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量，计算下列各式：

(1) $(-3)\times4\boldsymbol{a}$；

(2) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}$；

(3) $(2\lambda-\mu)\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$($\lambda,\mu$ 为实数).

解 (1) 由数乘运算的运算律，得

$$(-3)\times4\boldsymbol{a}=(-3\times4)\boldsymbol{a}=-12\boldsymbol{a};$$

(2) 由数乘运算的运算律，得

$$\begin{aligned}&3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\\=&3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\\=&\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{7}{2}\boldsymbol{b};\end{aligned}$$

(3) 由数乘运算的运算律，得

$$\begin{aligned}&(2\lambda-\mu)\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\=&2\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}-\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\=&2\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}\\=&\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

例 2 设 $\boldsymbol{x}$ 是未知向量，解方程

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}-3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

解 原式可变形为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

$$2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}.$$

例 3 如图 2－31，已知点 O 是△ABC 所在平面内一点，点 D 为边 BC 的中点，且$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，说明向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AO}$的关系.

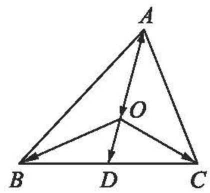


图 2－31

解 因为点 D 为 BC 边的中点，所以$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$.

又$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，所以$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$，

也就是 $2\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$.

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}$，

即向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AO}$共线且方向相同，长度是向量$\overrightarrow{AO}$长度的$\frac{3}{2}$倍.

练 习

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，说出下列向量与 $\boldsymbol{a}$ 的关系.

(1) $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$；　(2) $\overrightarrow{EF}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$；　(3) $\overrightarrow{OP}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}$.

2. 化简下列各式.

(1) $4(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}$；

(2) $\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-\frac{2}{3}(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}$.

3. 求下列未知向量 $\boldsymbol{x}$.

(1) $3\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

(2) $3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-4(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$.

4. 在△ABC 中，点 M 为边 AB 的中点，点 N 为边 AC 的中点，求证：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

5. 已知非零向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in[0,+\infty)$，$\overrightarrow{AQ}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，画图并说明$\overrightarrow{AQ}$是$\angle BAC$ 的平分线.

3.2 向量的数乘与向量共线的关系

一、共线(平行)向量基本定理

设 $\boldsymbol{b}$ 是非零向量. 由向量共线和数乘的定义可以直接推知,对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,$\lambda$ 是一个实数,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 反之,对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,是否存在一个实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$?

可以分以下两种情况讨论.

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,则 $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,即 $\boldsymbol{a}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$,$\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$;

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相反,则 $-\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,$\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{a}|\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,即 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$,$\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$.

所以一定存在唯一一个实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

这样就得到如下定理:

共线(平行)向量基本定理 给定一个非零向量 $\boldsymbol{b}$,则对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在唯一一个实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

例如,$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的 2 倍并且方向相反,则 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$.

例 4 如图 2-32,已知 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{BC}$,试判断 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 是否平行.

解 因为 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=3\overrightarrow{AC}$,

所以 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 平行.

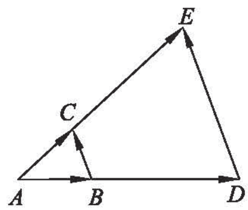


图 2-32

例 5 设 A,B,C,D 中的任何三个点不共线,用向量语言描述下列几何图形的特征.

(1) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

(2) 在梯形 $ABCD$ 中,上底 AD 长是下底 BC 长的一半;

(3) 点 D 是 $\triangle ABC$ 的重心.

解 由共线(平行)向量基本定理,得

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 且 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$(如图 2-33(1)).

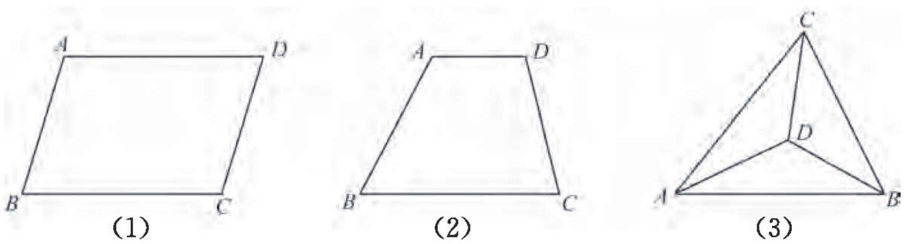


图 2-33

(2) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$(如图 2-33(2)).

(3) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$或$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$或$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$;也可以表示成$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$(如图 2-33(3)).

二、直线的向量表示

问题提出

能否用向量来刻画直线呢?

分析理解

图 2-34

如图 2-34,已知 A,B 两点确定一条直线 l,直线 l 上任意一点 P 所对应的向量$\overrightarrow{AP}$与向量$\overrightarrow{AB}$共线,从而$\overrightarrow{AP}$可以用$\overrightarrow{AB}$表示,即存在唯一实数 t,使得 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$. 这说明由一个点 A 和一个非零向量$\overrightarrow{AB}$可以唯一地确定过点 A 与向量$\overrightarrow{AB}$共线的直线 l.

抽象概括

通常可以用$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$表示过点 A,B 的直线 l,其中$\overrightarrow{AB}$称为直线 l 的**方向向量**.

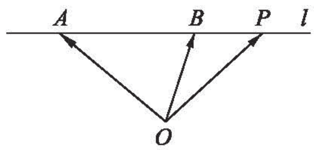


图 2-35

例 6 如图 2-35,已知 A,B 是直线 l 上的两个定点,点 O 是直线 l 外的一个定点,点 P 是直线 l 上的任意一点. 证明:存在唯一的实数 t,满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$.

证明 因为 A,B,P 都是直线 l 上的点,所以存在唯一实数 t,使得$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$.

因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$,

所以 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{AB}$,

即 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$.

本例给出了利用直线的向量表示来判断 A,B,P 三点共线的一种方法.

在例 6 中,若点 P 是 AB 的中点,则$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,这是线段 AB 中点的向量表达式.

思考交流

当 t 取何值时，P 是 AB 的中点？

练　习

1. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为不共线的非零向量，判断下列各题中的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 向量是否共线.

   (1) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1$；

   (2) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$；

   (3) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1$.

2. 已知向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$($A,B,O$ 三点不共线)，判断下列各题中的点 M,N,G 是否在直线 AB 上.

   (1) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$；

   (2) $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$；

   (3) $\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$.

3. 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为不共线的向量，$k\in\mathbf{R}$，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

   (1) 若 A,B,C 三点共线，求 k 的值；

   (2) 若 A,B,D 三点共线，求 k 的值.

习题 2-3

A　组

1. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 表示小船沿东北方向行驶了 2 km，则向量 $3\boldsymbol{a}$ 和 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ 的意义分别是什么？

2. 任作一向量$\overrightarrow{OA}$，再作向量$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

3. 求下列未知向量 $\boldsymbol{x}$.

   (1) $3\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a}\right)+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；

   (2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{x})=3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$；

   (3) $2(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

4. 判断下列各小题中的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是否共线：

   (1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{e}$；

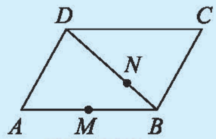
(2) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$（其中两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线）；

(3) $\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{e}$.

5. (1) 已知两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，且 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=6\boldsymbol{e}_1+23\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2$. 求证：$A$，$B$，$D$ 三点共线.

(2) 已知任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$. 试判断 A，B，C 三点之间的位置关系，并说明理由.

6. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 M 为 AB 的中点，点 N 在 BD 上，$3BN=BD$. 求证：M，N，C 三点共线.



（第 6 题）

B 组

1. 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足条件 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，试问表示它们的有向线段是否一定能构成三角形？$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足什么条件才能构成三角形？

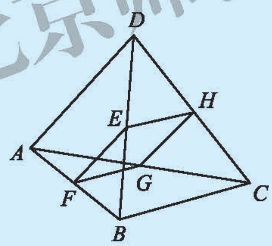
2. 在四边形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AD，BC 的中点. 求证：$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线.

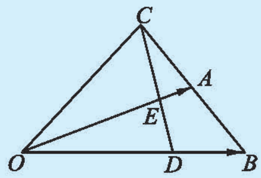
(1) 如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，求证：$A$，$B$，$D$ 三点共线；

(2) 欲使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线，试确定实数 k 的值.

4. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E，F，G，H 分别为 BD，AB，AC 和 CD 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 为平行四边形.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，点 B 与点 C 关于点 A 对称，点 D 在线段 OB 上，$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$，$DC$ 和 OA 交于点 E. 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{DC}$.

§ 4 平面向量基本定理及坐标表示

4.1 平面向量基本定理

如图 2－36，在物理学中，一个放在斜面上的物体所受的竖直向下的重力 $\boldsymbol{G}$，其作用体现在两个方向：与斜面平行的方向和与斜面垂直的方向，故在解决问题时，常常要把重力分解为使物体沿斜面下滑的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和垂直于斜面的力 $\boldsymbol{F}_2$. 在实际应用中，常常需要把一个力、速度、位移等分解为不同方向的分量的和.

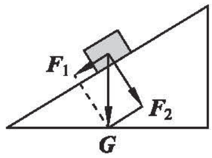


图 2－36

问题提出

任意两个向量做加法、减法或数乘运算的结果都是一个向量. 反过来，对于平面内给定的两个不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，任一向量 $\boldsymbol{a}$ 是否都可以用形如 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式表示呢？

分析理解

如图 2－37，给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，以及任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$. 过点 C 作平行于 OB 的直线，与直线 OA 交于点 M；过点 C 作平行于 OA 的直线，与直线 OB 交于点 N. 由共线（平行）向量基本定理可知，存在唯一的一对实数 λ_1，λ_2，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 又因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，所以 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 也就是说，任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式. 这种形式又称作向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性表示.

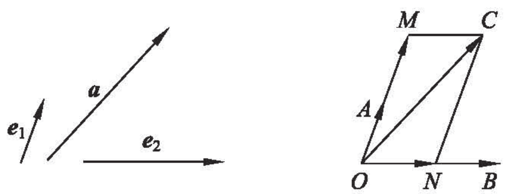


图 2－37

如图 2－38，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量，容易看出

$$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2,\ \overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2,$$

$$\overrightarrow{EF}=4\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2,\ \overrightarrow{GH}=-2\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2.$$

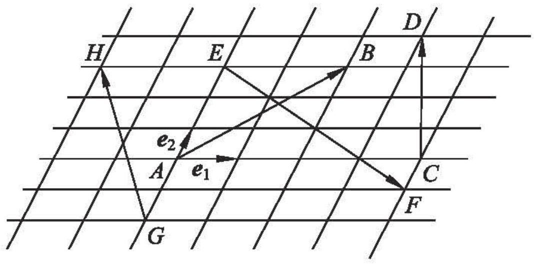


图 2－38

可以发现，平面内任意一个向量都可以由这个平面内两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 线性表示.

抽象概括

平面向量基本定理 如果 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，那么对该平面内任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的一对实数 λ_1,λ_2，使

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

我们把不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 叫作表示这一平面内所有向量的一组**基**，记为 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$.

若基中的两个向量互相垂直，则称这组基为**正交基**. 在正交基下向量的线性表示称为**正交分解**. 若基中的两个向量是互相垂直的单位向量，则称这组基为**标准正交基**. 在标准正交基下进行向量分解，许多有关度量的问题就变得较为简单.

例 1 如图 2-39，在▱$ABCD$ 中，点 E,F 分别为 BC,DC 的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BF}$ 和 $\overrightarrow{DE}$.

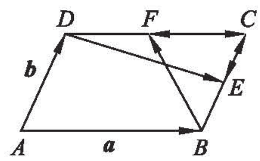


图 2-39

解 根据题意，得

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

所以 $$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

同理 $$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

例 2 如图 2-40，已知点 M,N,P 分别是△ABC 三边 BC，CA，AB 上的点，且 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，选择基 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$，试写出向量 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{NP}$ 在此基下的分解式.

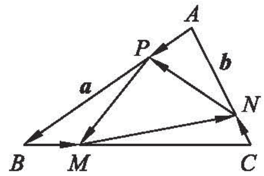


图 2-40

解 根据题意，得 $\overrightarrow{MC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，

$$\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{b},$$

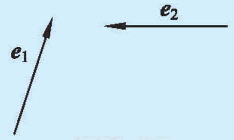
所以 $$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{3}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

同理 $$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b},$$

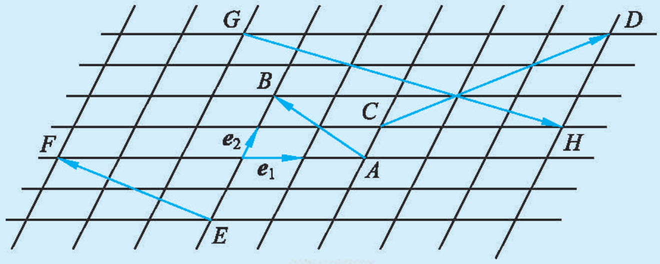
$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}.$$

练　习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，求作向量 $2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 下，分解下列向量：$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{GH}$.
3. 已知基 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$，实数 x,y 满足：$3x\,\boldsymbol{a}+(10-y)\boldsymbol{b}=(4y+4)\boldsymbol{a}+2x\,\boldsymbol{b}$，求 x,y 的值.
4. 已知▱$ABCD$ 的两条对角线交于点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，选择基 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$，试写出下列向量在此基下的分解式：$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}$.

4.2　平面向量及运算的坐标表示

一、平面向量的坐标表示

如图 2－41，在平面直角坐标系中，分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 作为标准正交基. 对于坐标平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$，以坐标原点 O 为起点作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$（通常称 $\overrightarrow{OP}$ 为位置向量）. 由平面向量基本定理可知，有且仅有一对实数 x，y，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.

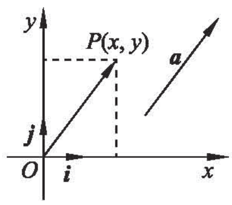


图 2－41

因此，$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$. 我们把 $(x,\ y)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在标准正交基 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 下的坐标，向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$.

在平面直角坐标系中，点 P 的位置被它的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 所唯一确定，设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，容易看出

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(x,\ y),$$

即点 P 的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标 $(x,\ y)$ 也就是点 P 的坐标；反之，点 P 在平面直角坐标系中的坐标也是点 P 所决定的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标.

在解决实际问题和数学问题中，常常需要建立标准正交基，用坐标的方法来讨论和解决问题.

例 3　在平面内，以点 O 的正东方向为 x 轴的正向，正北方向为 y 轴的正向建立平面直角坐标系. 质点在平面内做直线运动. 先画出下列位移向量在基 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ 下的正交分解，再求出

下列位移向量的坐标：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 表示沿东北方向移动了 2 个单位长度；

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 表示沿北偏西 30°方向移动了 3 个单位长度；

(3) 向量 $\boldsymbol{c}$ 表示沿南偏东 60°方向移动了 4 个单位长度.

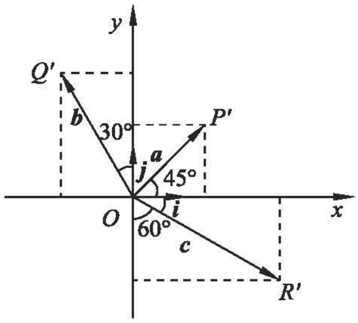


图 2-42

解 设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3, y_3)$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在基$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$下的正交分解，如图 2-42.

$$x_1=|\boldsymbol{a}|\cos 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},$$

$$y_1=|\boldsymbol{a}|\sin 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2};$$

$$x_2=|\boldsymbol{b}|\cos 120°=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}, y_2=|\boldsymbol{b}|\sin 120°=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$x_3=|\boldsymbol{c}|\cos(-30°)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}, y_3=|\boldsymbol{c}|\sin(-30°)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.$$

因此 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2)$.

二、平面向量运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$，根据向量的运算律，可得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j},$$

即 $$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2).}$$

同理 $$\boxed{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2).}$$

设 $\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}$，

即 $$\boxed{\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1).}$$

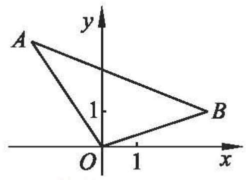


图 2-43

如图 2-43，设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1).$$

即 $$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1).}$$

抽象概括

两个向量和与差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和与差；

实数与向量数乘的坐标等于这个实数与向量的相应坐标的乘积；

一个向量的坐标等于其终点的坐标减去起点的坐标.

例 4 设点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$，若 M 是线段 AB 的中点，求点 M 的坐标.

解 如图 2－44，向量 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$.

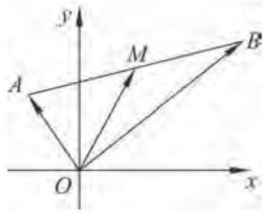


图 2－44

由向量的线性运算可知

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

所以中点 M 的坐标是 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

可以得出，若点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点 M 的坐标为 (x,y)，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$$

此公式为线段 AB 的**中点坐标公式**.

例 5 已知 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 的坐标.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)+(-3,4)=(-1,5)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,1)-(-3,4)=(5,-3)$，

$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=3(2,1)+4(-3,4)=(6,3)+(-12,16)=(-6,19)$.

例 6 已知点 $A(1,0)$，$B(0,2)$，$C(-1,-2)$，用向量的方法求 $\square ABCD$ 的顶点 D 的坐标.

解 如图 2－45，设点 D 的坐标为 (x,y)，由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，得

$$(0,2)-(1,0)=(-1,-2)-(x,y),$$

即 $(-1,2)=(-1-x,-2-y)$，

所以 $\begin{cases}-1-x=-1,\\ -2-y=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=-4.\end{cases}$

所以点 D 的坐标为 $(0,-4)$.

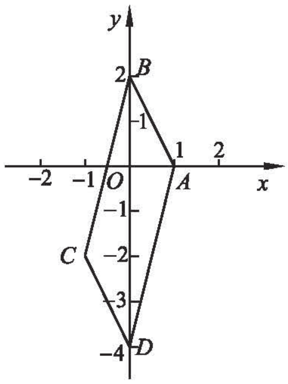


图 2－45

例 7 已知 $A(2,-4)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$，且 $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}$，求点 M 的坐标.

解 根据题意，得

$$\overrightarrow{CA}=(2-3,-4-4)=(-1,-8),\overrightarrow{CB}=(-1-3,3-4)=(-4,-1).$$

于是 $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}=2(-1,-8)+3(-4,-1)$

$=(-2,-16)+(-12,-3)=(-14,-19)$.

设点 M 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{CM}=(x-3,y-4)$.

因此 $\begin{cases}x-3=-14,\\ y-4=-19.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-11,\\ y=-15.\end{cases}$

所以点 M 的坐标为 $(-11,-15)$.

三、平面向量平行的坐标表示

在平面直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则由共线(平行)向量基本定理，存在实数 λ，使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即$(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)=(\lambda x_2,\lambda y_2)$，于是$\begin{cases}x_1=\lambda x_2,\\ y_1=\lambda y_2.\end{cases}$消去 λ，得 $x_1y_2-x_2y_1=0$. 因此，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$共线的必要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

另一方面，若 $x_1y_2-x_2y_1=0$，则由 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，不妨设 $x_2\neq0$，得 $y_1=\frac{x_1y_2}{x_2}$，于是 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)=\left(x_1,\frac{x_1y_2}{x_2}\right)=\frac{x_1}{x_2}(x_2,y_2)=\frac{x_1}{x_2}\boldsymbol{b}$，其中$\frac{x_1}{x_2}\in\mathbf{R}$. 所以，由共线(平行)向量基本定理，得 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 因此，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$共线的充分条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

这就是说，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$共线的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

例 8 已知 O 是坐标原点，$\overrightarrow{OA}=(k,12)$，$\overrightarrow{OB}=(4,5)$，$\overrightarrow{OC}=(10,k)$. 当 k 为何值时，A，B，C 三点共线？

解 依题意，得

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,5)-(k,12)=(4-k,-7),$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(10,k)-(4,5)=(6,k-5).$$

要使 A，B，C 三点共线，只需$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$共线，即

$$(4-k)(k-5)-6\times(-7)=0.$$

解得 $k=-2$ 或 $k=11$.

所以当 $k=-2$ 或 $k=11$ 时，A，B，C 三点共线.

练 习

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的坐标.

   (1) $\boldsymbol{a}=(-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$；　(2) $\boldsymbol{a}=(4,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,8)$；

   (3) $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-3)$；　(4) $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(0,3)$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的坐标.

3. 已知 A，B 两点的坐标，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的坐标.

   (1) $A(5,3)$，$B(4,-1)$；　(2) $A(-3,4)$，$B(6,3)$；

   (3) $A(0,3)$，$B(0,5)$；　(4) $A(3,0)$，$B(2,0)$.

4. 已知作用在原点上的三个力 $\boldsymbol{F}_1=(-1,-2)$，$\boldsymbol{F}_2=(3,2)$，$\boldsymbol{F}_3=(-1,2)$，求这些力的合力 $\boldsymbol{F}$ 的坐标.

5. 已知 A，B，C 三点的坐标分别为$(0,-3)$，$(1,-1)$，$(3,3)$，判断向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$是否共线.

习题 2-4

A 组

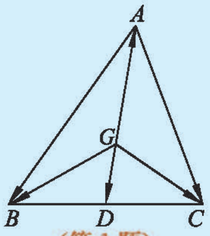
1. 如图，点 D 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

(1) 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$；

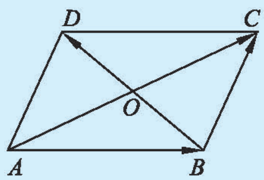
(2) 若点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，能否用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$？

(3) 若点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，求 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

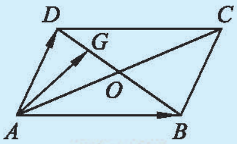
2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，设对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$.



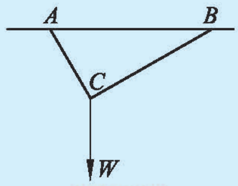
（第 1 题）



（第 2 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

3. 一架飞机沿仰角 30° 的方向以 80 m/s 的速度起飞. 飞机起飞时沿水平方向和竖直方向的速度分别是多少？

4. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，点 O 是 AC 与 BD 的交点，点 G 是 DO 的中点，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$.

5. 如图，用两根绳子把质量为 10 kg 的物体 W 吊在水平横杆 AB 上，$\angle ACW=150°$，$\angle BCW=120°$. 求物体平衡时，A 和 B 处所受力的大小.（绳子的质量忽略不计，$g=10\ \text{m/s}^2$）

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的坐标.

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-8,6)$，$\boldsymbol{c}=(4,6)$，求 $2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，并用标准正交基 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ 表示.

8. 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,1)$，求 $\overrightarrow{BC}$ 的坐标.

9. 在平面内以点 O 的正东方向为 x 轴正方向，正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系. 质点在平面内做直线运动，分别求下列位移向量的坐标：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 表示沿北偏东 60° 移动了 3 个单位长度；

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 表示沿西北方向移动了 4 个单位长度；

(3) 向量 $\boldsymbol{c}$ 表示沿南偏西 30° 移动了 3 个单位长度；

(4) 向量 $\boldsymbol{d}$ 表示沿东南方向移动了 4 个单位长度.

B 组

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(\lambda,1)$，且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，求 λ 的值.

2. 在 $\square ABCD$ 中，AC 为一条对角线. 若 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，则 $\overrightarrow{BD}$ 的坐标是多少？

3. 在 $\triangle AOB$ 中，$O(0,0)$，$A(0,5)$，$B(4,3)$，$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$AD$ 与 BC 相交于点 M，求点 M 的坐标.

4. 判断下列各组三点是否共线：

(1) $A(0,1)$，$B(4,1)$，$C(-1,2)$；

(2) $D(1,1)$，$E(-1,5)$，$F(3,-3)$；

(3) $G(1,1)$，$H(3,5)$，$L(-2,-5)$.

§ 5 从力的做功到向量的数量积

5.1 向量的数量积

一、向量的数量积的定义

实例分析

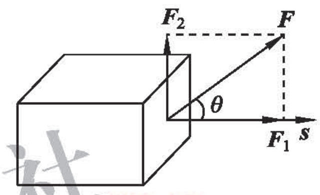


图 2-46

在物理学中，一个物体在力的作用下产生位移，就说这个力对物体做了功.

如果力的方向跟物体运动的方向相同，功就等于力的大小和位移大小的乘积.

如图 2-46，如果力 $\boldsymbol{F}$ 的方向与物体运动的方向成 θ 角，我们可以将力 $\boldsymbol{F}$ 进行分解：

与位移方向平行的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 满足 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|\cos\theta$，物体在 $\boldsymbol{F}_1$ 的方向上产生了位移 $\boldsymbol{s}$，因而力 $\boldsymbol{F}_1$ 对物体做的功为 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta\cdot|\boldsymbol{s}|$；

与位移方向垂直的分力 $\boldsymbol{F}_2$，由于没有使物体在该分力的方向上产生位移，因而对物体不做功.

综上可知，力 $\boldsymbol{F}$ 对物体做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$.

当 $0°\leqslant\theta<90°$ 时，$W>0$，即力 $\boldsymbol{F}$ 做正功；当 $\theta=90°$ 时，$W=0$，即力 $\boldsymbol{F}$ 不做功；当 $90°<\theta\leqslant 180°$ 时，$W<0$，即力 $\boldsymbol{F}$ 做负功.

力对物体所做的功是一个数量，它由力和位移两个向量来确定. 功可以看作力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 这两个向量的某种运算的结果.

抽象概括

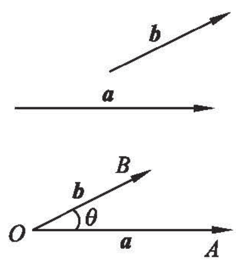


图 2-47

如图 2-47，已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\angle AOB$ 记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 或 $\theta(0°\leqslant\theta\leqslant 180°)$. $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积(或内积)**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

规定零向量与任一向量的数量积为 0.

当 $0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<90°$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=90°$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；当

$90°<\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \leqslant 180°$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$；当$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0°$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=180°$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

二、投影

如图 2－48，已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，过点 A 向直线 OB 作垂线，垂足为 A'，得到 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OA'}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 称为**投影向量**.

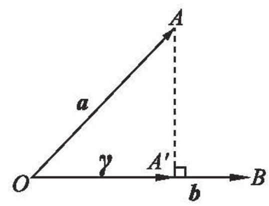


图 2－48

$|\boldsymbol{a}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$称为投影向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的数量，也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量，可以表示为 $\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

所以投影数量是数量积的特殊情况.

在图 2－46 的实例中，与位移 $\boldsymbol{s}$ 方向一致的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 的长度为 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$，即是力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{s}$ 方向上的投影数量.

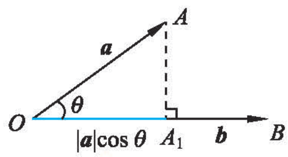


图 2－49

由向量投影的定义，可以得到向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义：$\boldsymbol{b}$ 的长度 $|\boldsymbol{b}|$ 与 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 的乘积（如图 2－49）；或 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

例 1 如图 2－50，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角$\theta=150°$. (1) 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) 求向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量，并画图解释.

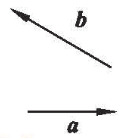


图 2－50

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

$$=3\times4\times\cos150°=12\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-6\sqrt{3};$$

(2) 如图 2－51，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，过点 B 作直线 OA 的垂线，垂足为 B_1，则 $OB_1=|\boldsymbol{b}|\cos\theta=4\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}$. 所以向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量为$-2\sqrt{3}$.

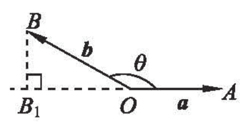


图 2－51

三、数量积的运算性质

1. 数量积的运算律

对任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和实数 λ：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 与数乘的结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) 关于加法的分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

2. 数量积的性质

(1) 若 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle$；

(2) 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，即 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\boldsymbol{a}^2$.

(4) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\neq 0)$；

(5) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时等号成立.

这些性质都可以用向量数量积的定义和几何意义来证明.

例 2　已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=6$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角 $\theta=120^\circ$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角 $\gamma=60^\circ$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影数量.

解　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影数量为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}&=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}+\boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\\&=|\boldsymbol{a}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|\cos\gamma\\&=4\cos 120^\circ+6\cos 60^\circ\\&=-2+3\\&=1.\end{aligned}$$

练　习

1. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，求分别在下列条件下 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值.

   (1) $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$；　(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；　(3) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.
4. 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$，且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{b}$.

   求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$.

5.2　向量数量积的坐标表示

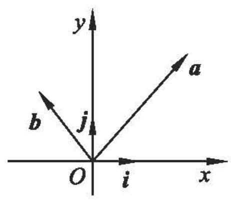


图 2-52

已知两个向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，怎样用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的坐标表示 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 呢？

如图 2-52，在平面直角坐标系中，设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别是 x 轴和 y 轴方向上

的单位向量，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$，所以

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.}$$

这就是说，**两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.**

由此还容易得出以下结论：

(1) 设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$，或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的起点和终点坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，那么

$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1),$$

$$\boxed{|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

这就是平面直角坐标系中**两点间的距离公式.**

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2,$$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\quad(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\neq0).}$$

特别地，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

例 3 已知 $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{3\times1+2\times(-1)}{\sqrt{3^2+2^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{26}}{26}.$$

例 4 (1) 已知定点 A 和向量 $\overrightarrow{AB}$，点 P 是直线 AB 外的一点，请写出点 P 到直线 AB 的距离的向量表示.

(2) 已知点 $A(1,1)$，向量 $\boldsymbol{m}=(2,1)$，过点 A 作以向量 $\boldsymbol{m}$ 为方向向量的直线为 l，求点 $P(3,5)$ 到直线 l 的距离.

解 (1)设 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，作向量 $\overrightarrow{AP}$（如图 2-53）.

则 $\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$ 表示向量 $\overrightarrow{AP}$ 在向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影数量，

$\left|\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|$ 是点 P 到直线 AB 的距离.

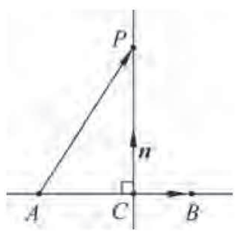


图 2-53

(2)设 $\boldsymbol{n} \perp l$，即 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{m}$，作向量$\overrightarrow{AP}$(如图 2-54).

设 $\boldsymbol{n}=(x,y)$，由于直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{m}=(2,1)$，又 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{m}$，

则 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}=(x,y)\cdot(2,1)=0$，

即 $2x+y=0$，令 $x=1$，得 $y=-2$，$\boldsymbol{n}=(1,-2)$.

由于 $A(1,1)$，$P(3,5)$，于是$\overrightarrow{AP}=(3,5)-(1,1)=(2,4)$.

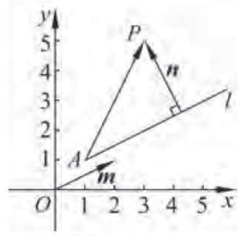


图 2-54

由(1)知，点 P 到直线 l 的距离 $d=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{(2,4)\cdot(1,-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right|=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

练　习

1. 判断下列各对向量是否垂直：

(1) $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,6)$；　(2) $\boldsymbol{a}=(7,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,14)$；

(3) $\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(2,\frac{2}{3}\right)$；　(4) $\boldsymbol{a}=(3,5)$，$\boldsymbol{b}=(5,-3)$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,2\sqrt{3}-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

3. 已知三点 $A(1,2)$，$B(0,1)$，$C(-2,5)$，试判断$\triangle ABC$ 的形状，并给出证明.

4. 已知点 $A(2,1)$，向量 $\boldsymbol{m}=(2,-2)$，过点 A 以向量 $\boldsymbol{m}$ 为方向向量的直线为 l，求点 $P(-3,4)$到直线 l 的距离.

5.3　利用数量积计算长度与角度

向量的数量积是研究几何图形度量和位置关系问题的有力工具. 涉及长度、夹角、平行、垂直等几何问题，通常可以运用向量的数量积运算加以解决.

一、向量长度的计算

例 5　已知向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos\theta,\sin\theta)$，求 $|\boldsymbol{a}|$ 的最大值和最小值.

解　依题意有 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sqrt{3\cos^2\theta+1}$.

又 $0\leqslant|\cos\theta|\leqslant1$，故 $|\boldsymbol{a}|$ 的最大值为 2，最小值为 1.

例 6　用向量方法证明：平行四边形两条对角线的平方和等于四条边的平方和.

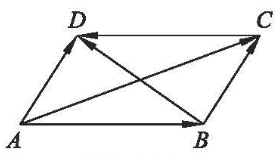


图 2-55

已知：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

求证：$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$.

证明　如图 2-55，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

因此 $$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|^2&=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\\&=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2.\end{aligned}$$

同理 $$\begin{aligned}|\overrightarrow{BD}|^2&=|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

所以 $|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{DA}|^2$,

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2.$$

即平行四边形两条对角线的平方和等于四条边的平方和.

二、向量夹角的计算

例 7 如图 2-56,已知 $A(1,2)$,$B(2,3)$,$C(-2,5)$,试用向量的方法判断$\triangle ABC$的形状.

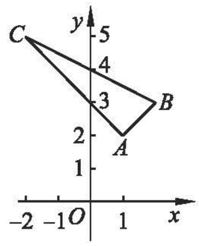


图 2-56

解 $\overrightarrow{AB}=(1,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-3,3)$,

于是 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,1)\cdot(-3,3)=-3+3=0$,

所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,$\angle A=90^\circ$,即$\triangle ABC$是直角三角形.

例 8 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$的夹角为 60°,求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$的夹角.

解 因为 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$,

所以 $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1)\\&=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1\\&=\frac{1}{2}-2+1-1\\&=-\frac{3}{2},\end{aligned}$$

$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|^2=|\boldsymbol{e}_1|^2+2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+|\boldsymbol{e}_2|^2=3$,

$|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1|^2=4|\boldsymbol{e}_1|^2-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+|\boldsymbol{e}_2|^2=3$.

于是 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$,又$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0^\circ,180^\circ]$,

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°.

练　习

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.
2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，计算下列各式：

   (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　　(2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$.
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，分别求出满足下列条件的 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，并给出几何直观解释：

   (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$；

   (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$；

   (3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.

习题 2－5

A　组

1. (1) 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，能否推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$？为什么？

   (2) 判断 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是否成立？为什么？
2. 根据下列条件，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的大小.（精确到 $1°$）

   (1) $\boldsymbol{a}=(5,-7)$，$\boldsymbol{b}=(6,4)$；

   (2) $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,3)$.
3. 先根据下列条件画图，观察并判断以 A，B，C 为顶点的三角形的形状，然后进行证明.

   (1) 已知 $A(7,5)$，$B(2,3)$，$C(6,-7)$；

   (2) 已知 $A(-1,-1)$，$B(2,3)$，$C(3,-1)$；

   (3) 已知 $A(2,5)$，$B(5,2)$，$C(10,7)$.
4. 已知 $A(-1,0)$，$B(0,2)$，求满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=5$，$|\overrightarrow{AD}|^2=10$ 的点 D 的坐标.
5. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,0)$，$\boldsymbol{b}=(k,5)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $135°$，求 k 的值.
6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.
7. 用向量方法证明：菱形的两条对角线互相垂直.

B　组

1. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，同时满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角.
2. 如何利用向量的数量积判断两个向量的夹角是锐角还是钝角？请你梳理并举例说明平面向量的数量积的具体用途.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,k)$，根据下列条件求 k 的值.

   (1) $\angle A=90°$；　　(2) $\angle B=90°$；　　(3) $\angle C=90°$.
4. 已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(\cos\alpha,\sin\alpha)$，求证：$AC\perp BC$.

§ 6 平面向量的应用

6.1 余弦定理与正弦定理

一、余弦定理

问题提出

三角形中边角关系很丰富，本节继续研究. 如已知两边及其夹角，怎么求出此角的对边呢？已知三条边，又怎么求出它的三个角呢？

分析理解

我们利用向量来研究.

如图 2-57，在$\triangle ABC$中，设$|\overrightarrow{BC}|=a$，$|\overrightarrow{AC}|=b$，$|\overrightarrow{AB}|=c$，根据向量的数量积，可得

$$\begin{aligned}a^2&=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2\\&=|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A+|\overrightarrow{AB}|^2\\&=b^2-2bc\cos A+c^2,\end{aligned}$$

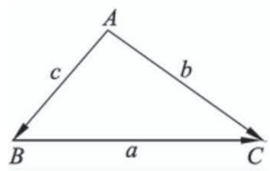


图 2-57

即 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

抽象概括

余弦定理 三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角余弦的积的两倍，即

$$\boxed{\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A,\\b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B,\\c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}}$$

余弦定理是勾股定理的推广.

利用余弦定理，可以由三角形的三条边，求出它三个角的大小.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

例 1 如图 2-58，有两条直线 AB 和 CD 相交成 $80°$ 角，交点是 O. 甲、乙两人同时从点 O 分别沿 OA，OC 方向出发，速度分别是 4 km/h，4.5 km/h. 3 h 后两人相距多远？（精确到 0.1 km）

解 经过 3 h，甲到达点 P，$|OP|=4\times3=12$(km)，乙到达点 Q，$|OQ|=4.5\times3=13.5$(km). 在 $\triangle OPQ$ 中，依余弦定理，得

$$\begin{aligned}|PQ|&=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2-2|OP|\cdot|OQ|\cos\angle POQ}\\&=\sqrt{12^2+13.5^2-2\times12\times13.5\cos80°}\\&\approx16.4(\text{km}).\end{aligned}$$

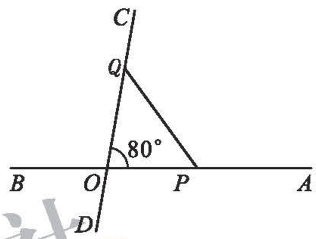


图 2-58

因此，3 h 后两人相距约 16.4 km.

例 2 图 2-59 是古希腊数学家特埃特图斯（Theaetetus，约前 417—前 369）用来构造无理数 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，…的图形. 试计算图中线段 BD 的长度及 $\angle DAB$ 的大小.（长度精确到 0.1，角度精确到 $1°$）

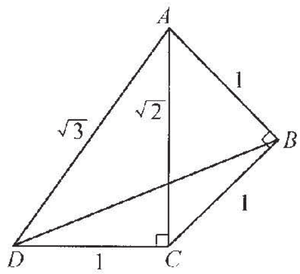


图 2-59

解 在 $\triangle BCD$ 中，$BC=1$，$CD=1$，$\angle BCD=135°$，

$$\begin{aligned}BD^2&=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD\\&=1^2+1^2-2\times1\times1\cos135°\\&=2+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

所以 $BD\approx1.8$.

在 $\triangle ABD$ 中，$AB=1$，$BD=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$AD=\sqrt{3}$，

$$\begin{aligned}\cos\angle DAB&=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}\\&=\frac{1^2+(\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{2})}{2\times1\times\sqrt{3}}\\&=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\\&\approx0.1691.\end{aligned}$$

所以 $\angle DAB\approx80°$.

> **信息技术建议**
>
> 解三角形的实际问题中，数字计算往往较繁，这时可借助计算器或其他的计算工具.

思考交流

你还能用其他方法求线段 BD 的长度及 $\angle DAB$ 的大小吗?

用余弦定理重新解答例 2,由此你有什么想法?

例 3 在$\triangle ABC$中,a,b,c分别是角A,B,C的对边,已知A是锐角,且$\cos 2A=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 若$mbc=b^2+c^2-a^2$,求实数m的值;

(2) 若$a=\sqrt{3}$,求$\triangle ABC$面积的最大值.

解 由A是锐角,且$\cos 2A=-\dfrac{1}{2}$,得$2A=\dfrac{2\pi}{3}$, $A=\dfrac{\pi}{3}$.

(1)$mbc=b^2+c^2-a^2$可变形为$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{m}{2}$.

依据余弦定理,可知$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{m}{2}$,即$\dfrac{m}{2}=\dfrac{1}{2}$.

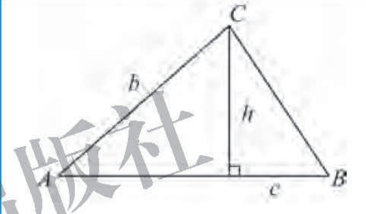
所以$m=1$.

(2)因为$\sin A=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$bc=b^2+c^2-a^2\geqslant 2bc-a^2$,即$bc\leqslant a^2$.

故$S_{\triangle ABC}=\dfrac{bc}{2}\sin A\leqslant\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

即所求$\triangle ABC$面积的最大值是$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.



$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ch=\dfrac{1}{2}cb\sin A$.

练 习

1. 在$\triangle ABC$中,已知$b=1,c=2,A=60^\circ$,则$a=$__________.
2. $\triangle ABC$的三边之比为$3:5:7$.求这个三角形的最大角.
3. 在$\triangle ABC$中,已知$b=2.730$,$c=4.297$,$A=58^\circ 30'$.解这个三角形.(边长精确到0.001,角度精确到$1'$)

二、正弦定理

问题提出

如图 2-60,若$\triangle ABC$是直角三角形,$C=90^\circ$,则由

$$\sin A=\frac{a}{c},\sin B=\frac{b}{c},$$

可知

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c.$$

因为 $C=90^\circ, \sin C=1$,

所以 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

对等边三角形,这个等式无疑也成立;对其他三角形,它是否仍然成立呢?

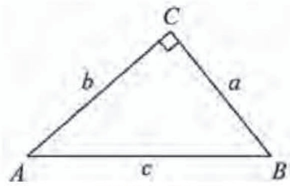


图 2-60

分析理解

如图 2-61,$\triangle ABC$ 是锐角三角形,CD 是边 AB 上的高,根据三角函数的定义,

$$CD=a\sin B,$$
$$CD=b\sin A,$$

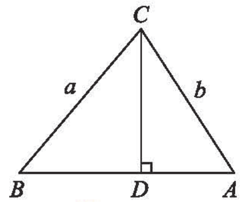


图 2-61

所以 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同理 $$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

即 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

因此,对锐角三角形,以上等式仍然成立.

探究:当$\triangle ABC$ 是钝角三角形时,以上等式是否仍然成立?

抽象概括

正弦定理 在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.}$$

运用由特殊到一般的方法发现了正弦定理,这种思想方法经常用于发现客观规律.

例 4 某地出土一块古代玉佩(如图 2-62),其一角已破损.现测得如下数据:$BC=2.57$ cm,$CE=3.57$ cm,$BD=4.38$ cm,$B=45^\circ$,$C=120^\circ$.为了复原,请计算原玉佩另两边的长.(精确到 0.01 cm)

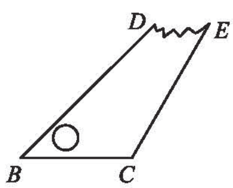


图 2-62

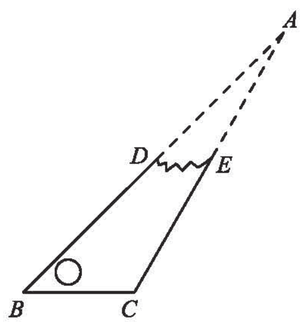


图 2-63

解 将 BD,CE 分别延长相交于点 A(如图 2－63).在$\triangle ABC$ 中,

$$BC=2.57\text{ cm},\ B=45^\circ,\ C=120^\circ,$$
$$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ.$$

由正弦定理,得
$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B},$$

所以
$$AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{2.57\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}\approx 7.02(\text{cm}).$$

同理
$$AB\approx 8.60(\text{cm}).$$

因此,原玉佩另两边的长分别约为 7.02 cm,8.60 cm.

练 习

1. 在$\triangle ABC$ 中,$a=0.15$,$C=103.4^\circ$,$B=75.85^\circ$,求 c 的长.(精确到 0.001)
2. 在$\triangle ABC$ 中,$c=4$,$a=2$,$C=45^\circ$,则 $\sin A=$__________.

例 5 求证:如图 2－64(1),以 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 为直径作外接圆,设这个外接圆的半径为 R,则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

证明 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$C=90^\circ$,$\frac{c}{\sin C}=c$,

又$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,且 $c=2R$.

所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

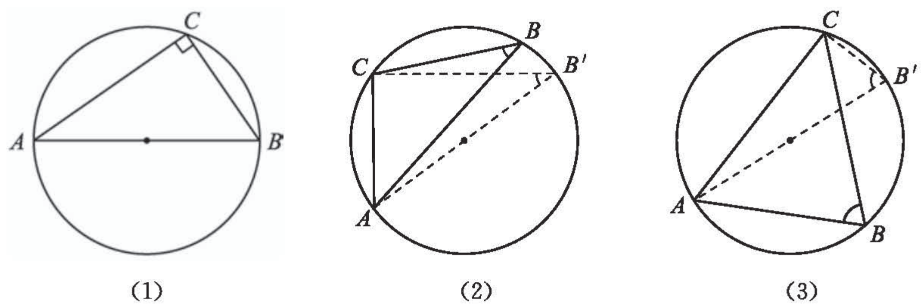


图 2－64

思考交流

对于钝角三角形(如图 2－64(2))、锐角三角形(如图 2－64(3)),上述结论还成立吗?

例 6 台风中心位于某市正东方向 300 km 处，正以 40 km/h 的速度向西北方向移动，距离台风中心 250 km 范围内将会受其影响. 如果台风风速不变，那么该市从何时起要遭受台风影响？这种影响持续多长时间？(精确到 0.1 h)

解 如图 2－65，设台风中心从点 B 向西北方向沿射线 BD 移动，该市位于点 B 正西方向 300 km 处的点 A.

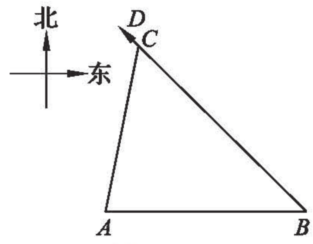


图 2－65

假设经过 t h，台风中心到达点 C. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=300$ km，$AC=250$ km，$BC=40t$ km，$B=45°$. 由正弦定理，得

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A},$$

$$\sin C=\frac{AB\sin B}{AC}=\frac{300\sin 45°}{250}=\frac{3}{5}\sqrt{2}\approx 0.848\ 5.$$

所以角 C 有两个解(如图 2－66)：

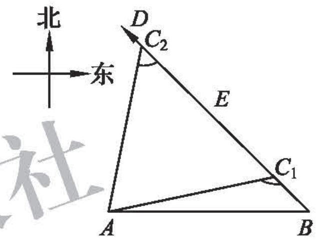


图 2－66

$$\angle AC_1B\approx 121.95°,\quad \angle AC_2B\approx 58.05°.$$

当 $\angle AC_1B\approx 121.95°$ 时，

$$\begin{aligned}\angle C_1AB&=180°-(B+\angle AC_1B)\\&\approx 180°-(45°+121.95°)\\&=13.05°.\end{aligned}$$

从而 $$BC_1=\frac{AC_1\sin A}{\sin B}=\frac{250\sin 13.05°}{\sin 45°}=250\sqrt{2}\sin 13.05°(\text{km}),$$

$$t_1=\frac{BC_1}{40}=\frac{250\sqrt{2}\sin 13.05°}{40}\approx 2.00\ (\text{h}).$$

同理，当 $\angle AC_2B\approx 58.05°$ 时，$BC_2=250\sqrt{2}\sin 76.95°$ km，$t_2\approx 8.61$ h.

$$t_2-t_1\approx 8.61-2.00\approx 6.6\ (\text{h}).$$

因此，约 2 h 后将要遭受台风影响，持续约 6.6 h.

思考交流

已知两条边的边长和其中一边的对角的大小解三角形，它的解有几种情况？

练 习

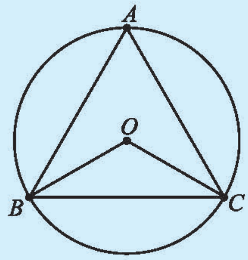
1. 在$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$A=\frac{\pi}{4}$，则$B=$________.

2. 在$\triangle ABC$中，分别根据下列条件解三角形，其中有两解的是（　　），并说明理由.

   A. $a=7, b=14, A=30°$　　　　B. $a=30, b=25, A=150°$

   C. $a=72, b=50, A=135°$　　　D. $a=30, b=40, A=26°$

3. 如图，$\triangle ABC$是半径为R的$\odot O$的内接正三角形. 求$\triangle ABC$的边长和$\triangle OBC$的外接圆半径.



（第 3 题）

4. 已知$\triangle ABC$的三个顶点是$A(-5,0)$，$B(3,-3)$，$C(0,2)$，求$\triangle ABC$的面积.

三、用余弦定理、正弦定理解三角形

正弦定理、余弦定理是两个重要定理，在解决与三角形有关的几何计算问题中有着广泛的应用.

在三角形的三条边和三个角这 6 个元素中，如果已知 3 个（至少含一边长），那么由余弦定理和正弦定理，就可以求得其他 3 个元素. 具体情形如下：

情形 1　已知两个角的大小和一条边的边长.

先由三角形内角和等于 180°求出第三个角的大小，然后依据正弦定理求得另外两条边的边长.

情形 2　已知两条边的边长及其夹角的大小.

先由余弦定理求出第三条边的边长，然后再由余弦定理求得第二、第三个角的大小.

情形 3　已知三条边的边长.

由余弦定理求出两个角，再利用三角形内角和等于 180°求出第三个角.

情形 4　已知两条边的边长和其中一边对角的大小.

首先，由正弦定理求出第二条边所对角的正弦，这时，要判断是两解、一解还是无解. 然后，根据三角形内角和等于 180°得到第三个角的大小. 最后，由余弦定理或正弦定理求得第三条边的边长.

例 7　如图 2－67，在梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AB=5$，$AC=9$，$\angle BCA=30°$，$\angle ADB=45°$. 求$\angle BAD$的正弦值和BD的长.

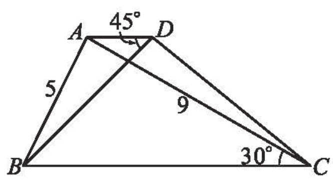


图 2－67

分析　观察到BD为$\triangle BDC$和$\triangle ABD$的公共边，由于$\triangle BDC$中已知量较少，故考虑通过解$\triangle ABD$求出BD的长. 在$\triangle ABD$中已知边AB的长及其所对角$\angle ADB$的度数，故只需要求出$\angle BAD$的正弦值，就可以利用正弦定理求出BD的长.

我们发现$\angle ABC$与$\angle BAD$互补，而$\angle ABC$所在的$\triangle ABC$中已知两边及其中一边的对角，可以由正弦定理求出$\angle ABC$的正弦值，再由$\angle BAD$与$\angle ABC$互补的条件，求出$\angle BAD$的正弦值，进而求出BD的长.

解 在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=9$，$\angle BCA=30°$. 由正弦定理，得

$$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC},$$

$$\sin\angle ABC=\frac{AC\sin\angle BCA}{AB}=\frac{9\sin 30°}{5}=\frac{9}{10}.$$

因为$AD /\!/ BC$，所以$\angle BAD=180°-\angle ABC$，于是

$$\sin\angle BAD=\sin\angle ABC=\frac{9}{10}.$$

在$\triangle ABD$中，由正弦定理，得

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD},$$

$$BD=\frac{AB\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\frac{5\times\frac{9}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

例 8 如图 2-68(1)，一次机器人足球比赛中，甲队 4 号机器人由点A开始做匀速直线运动，到达点B时，发现足球在点D处正以 2 倍于自己的速度向点A做匀速直线滚动. 已知$AB=4\sqrt{2}$ dm，$AD=17$ dm，$\angle BAD=45°$. 若忽略机器人原地旋转所需的时间，则该机器人最快可在何处截住足球?

解 机器人最快截住足球的地方是机器人与足球同时到达的地方. 如图 2-68(2)，设该机器人最快可在点C处截住足球，$BC=x$ dm，由题意，$CD=2x$ dm，$AC=AD-CD=(17-2x)$dm.

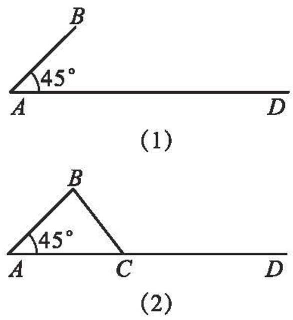


图 2-68

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A,$$

即 $x^2=(4\sqrt{2})^2+(17-2x)^2-2\times 4\sqrt{2}\times(17-2x)\cos 45°.$

解得 $x_1=5$， $x_2=\frac{37}{3}$.

所以 $AC=7$ dm，或 $AC=-\frac{23}{3}$ dm(不合题意，舍去).

例 8 中最后 AC 为什么会出现负值? 你能解释原因吗?

因此，该机器人最快可在线段AD上离点A处 7 dm 的点C处截住足球.

例 9 已知$\triangle ABC$的角A，B，C所对的边分别是a，b，c，向量$\boldsymbol{m}=(a,b)$，$\boldsymbol{n}=(\sin B,\sin A)$，$\boldsymbol{p}=(b-c,a-c)$.

(1) 若 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,求证:$\triangle ABC$ 为等腰三角形;

(2) 若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{p}$,$c=2$,$C=60°$,求$\triangle ABC$ 的面积.

(1) **证明** 因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,所以 $a\sin A=b\sin B$.

由正弦定理可得 $a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}$,其中 R 是$\triangle ABC$ 的外接圆半径,

所以 $a=b$.

即$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(2) **解** 因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{p}$,

所以$(a,b)\cdot(b-c,a-c)=ab-ac+ab-bc=2ab-c(a+b)=0$.

由 $c=2$,得 $ab=a+b$. ①

由余弦定理可知,$4=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$. ②

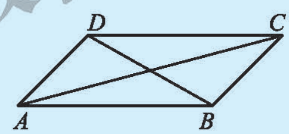
将①式代入②式,得$(ab)^2-3ab-4=0$.

所以 $ab=4$,或 $ab=-1$(不合题意,舍去).

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times\sin 60°=\sqrt{3}$.

练 习

1. 如图,在▱$ABCD$ 中,$\angle DAB=45°$.求证:$AC^2\cdot BD^2=AB^4+AD^4$.



(第 1 题)

在解决一些与三角形有关的实际问题时,正弦定理、余弦定理有着重要的作用.

例 10 自动卸货汽车采用液压机构(如图 2-69).设计时需要计算油泵顶杠 BC 的长度,已知车厢的最大仰角为 60°(指车厢 AC 与水平线之间的夹角),油泵顶点 B 与车厢支点 A 之间的距离为 1.95 m,AB 与水平线之间的夹角为 6°20′,AC 长为 1.40 m.计算 BC 的长度.(精确到 0.01 m)

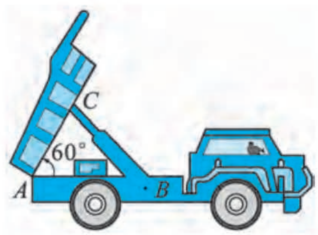


图 2-69

解 如图 2-70,在$\triangle ABC$ 中,$AB=1.95$ m,$AC=1.40$ m,$\angle BAC=60°+6°20'=66°20'$.

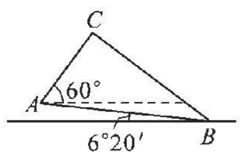


图 2-70

由余弦定理,得

$$\begin{aligned}BC^2&=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A\\&=1.95^2+1.40^2-2\times1.95\times1.40\cos 66°20'\\&\approx3.571,\end{aligned}$$

所以 $BC\approx1.89$(m).

因此,顶杆 BC 长约 1.89 m.

例 11 如图 2-71，C，D 两点相距 12 m，与烟囱底部 A 在同一水平直线上，利用高为 1.5 m的测角仪器，测得烟囱在点 C_1，D_1 的仰角分别是$\alpha=45°$和 $\beta=60°$. 计算烟囱的高 AB（精确到 0.01 m).

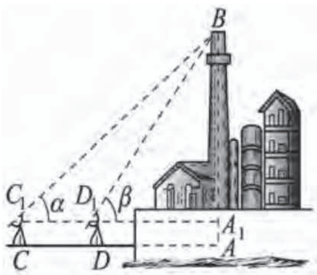


图 2-71

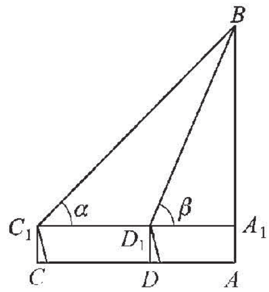


图 2-72

解 如图 2-72，在$\triangle BC_1D_1$ 中，$\angle BD_1C_1=180°-60°=120°$，$\angle C_1BD_1=60°-45°=15°$，$C_1D_1=CD=12$. 由正弦定理，得

$$\frac{C_1D_1}{\sin\angle C_1BD_1}=\frac{BC_1}{\sin\angle BD_1C_1},$$

$$BC_1=\frac{C_1D_1\sin\angle BD_1C_1}{\sin\angle C_1BD_1}=\frac{12\sin 120°}{\sin 15°}\approx 40.153(\text{m}).$$

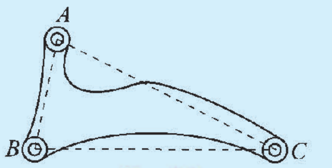
从而
$$A_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}BC_1\approx 28.392(\text{m}).$$

$$AB=A_1B+AA_1\approx 28.392+1.5=29.892\approx 29.89(\text{m}).$$

因此，烟囱的高约为 29.89 m.

练 习

1. 如图，在加工一个零件时，需要计算 A，C 两孔中心的距离，已知 $BC=60.5$ mm，$AB=15.8$ mm，$\angle ABC=80°$，则 $AC=$____mm.（精确到 0.01 mm）

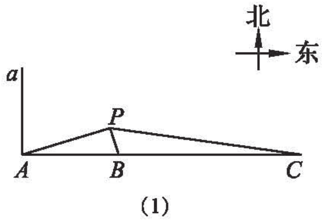


（第 1 题）

例 12 如图 2-73(1)，直线 a 表示海面上一条南北方向的海防警戒线，在 a 上点 A 处有一个水声监测点，另两个监测点 B，C 分别在点 A 的正东方 20 km 处和 54 km 处. 某时刻，监测点 B 收到发自静止目标 P 的一个声波，监测点 A，C 分别在 8 s 和 20 s 后相继收到这一信号. 在当时的气象条件下，声波在水中的传播速度是 1.5 km/s.

(1) 设 $PA=x$ km，用 x 分别表示 PB，PC，并求 x 的值；

(2) 求静止目标 P 到海防警戒线 a 的距离.（精确到 0.01 km）



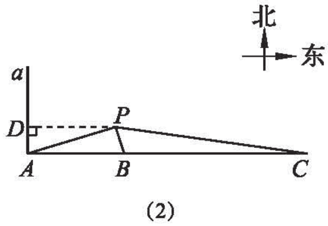


图 2-73

解 (1) 依题意，$PA-PB=1.5\times 8=12(\text{km})$，$PC-PB=1.5\times 20=30(\text{km})$.

因此 $$PB=(x-12)\text{km},\quad PC=(18+x)\text{km}.$$

在$\triangle PAB$中，$AB=20$ km，

$$\cos\angle PAB=\frac{PA^2+AB^2-PB^2}{2PA\cdot AB}=\frac{x^2+20^2-(x-12)^2}{2x\cdot 20}=\frac{3x+32}{5x}.$$

同理 $$\cos\angle PAC=\frac{72-x}{3x}.$$

由 $$\cos\angle PAB=\cos\angle PAC,$$

得 $$\frac{3x+32}{5x}=\frac{72-x}{3x}.$$

解得 $$x=\frac{132}{7}.$$

(2) 如图 2-73(2)，过点 P 作 a 的垂线，垂足为 D. 在 Rt$\triangle PDA$ 中，

$$PD=PA\cos\angle APD=PA\cos\angle PAB=x\cdot\frac{3x+32}{5x}.$$

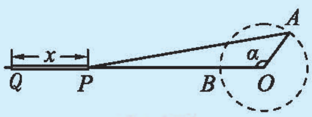
所以 $PD=\dfrac{3\times\frac{132}{7}+32}{5}=\dfrac{124}{7}\approx 17.71(\text{km})$.

因此，静止目标 P 到海防警戒线 a 的距离约为 17.71 km.

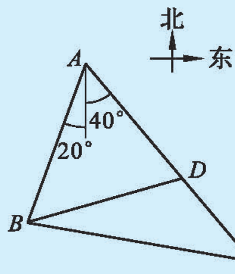
练 习

1. 下图为曲柄连杆机构示意图，当曲柄 OA 在水平位置 OB 时，连杆端点 P 在点 Q 的位置．当 OA 自 OB 按顺时针方向旋转角度 α 时，P 和 Q 两点之间的距离是 x cm，已知 $OA=25$ cm，$AP=125$ cm. 在下列条件下求 P 和 Q 两点之间的距离.（精确到 0.1 cm）

(1) $\alpha=50^\circ$；　(2) $\alpha=90^\circ$；　(3) $\alpha=135^\circ$；　(4) $OA\perp AP$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，某观察站 B 在城 A 的南偏西 20° 的方向，由城 A 出发的一条公路走向是南偏东 40°，在 B 处测得公路上距 B 处 31 km 的 C 处有一人正沿公路向 A 城走去，走了 20 km 之后到达 D 处，此时 B，D 间的距离为 21 km. 这个人还要走多少路才能到达 A 城？

6.2　平面向量在几何、物理中的应用举例

一、向量在几何证明中的应用

由于向量的运算有着鲜明的几何背景，几何图形的许多变化和性质，如平移、全等、长度、夹角等都可以用向量的线性运算及数量积表示，因此，用向量方法可以解决几何中的一些问题.

例 13　如图 2－74，$\square ABCD$ 中，点 E，F 在对角线 BD 上，并且 $BE=FD$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

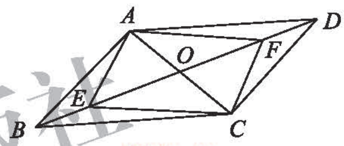


图 2－74

证明　由已知可设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}=\boldsymbol{b}$，则

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$，即边 AE，FC 平行且相等.

因此，四边形 $AECF$ 是平行四边形.

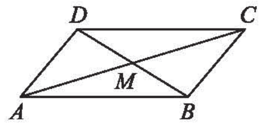


图 2－75

例 14　求证：平行四边形的对角线互相平分.

已知：如图 2－75，已知 $\square ABCD$ 的两条对角线相交于点 M.

求证：AC，BD 互相平分.

证明　设 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BD}$，则

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD},$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\&=\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AB}+y(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\\&=(1-y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

于是得到 $\overrightarrow{AM}$ 关于基 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$ 的两个分解式.

因为分解是唯一的，所以

$$\begin{cases}x=1-y,\\x=y.\end{cases}\quad 解方程组，得\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

所以点 M 是 AC 和 BD 的中点，即对角线 AC 和 BD 在交点 M 处互相平分.

例 15 已知 AD，BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高．求证：AD，BE，CF 相交于一点．

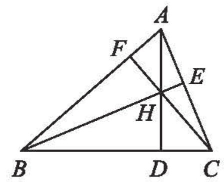


图 2－76

证明 如图 2－76，设 AD 与 BE 交于点 H，以下只需证明点 H 在 CF 上．

因为 $AD\perp BC$，$BE\perp CA$，

所以 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$．

也就是 $(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$， ①

$(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$． ②

①－②，得

$$\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=0,$$

即 $$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0,$$

所以 $$CH\perp AB.$$

又 $$CF\perp AB,$$

所以 C，H，F 三点共线，点 H 在 CF 上．

例 16 如图 2－77，点 O 是 $\square ABCD$ 两条对角线的交点，点 E，F 分别在边 CD，AB 上，且 $\dfrac{CE}{ED}=\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{2}$．

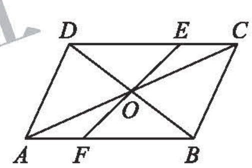


图 2－77

求证：点 E，O，F 在同一直线上．

证明 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．

由 $\dfrac{CE}{ED}=\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{2}$，可知点 E，F 分别是 CD，AB 的三等分点，

所以 $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

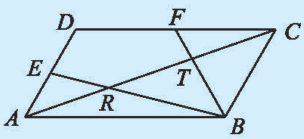
$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$．

因此 $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OE}$，又直线 FO、直线 OE 有公共点 O，故点 E，O，F 在同一直线上．

练 习

用向量的方法证明下列各题：

1. 证明：梯形的中位线等于两底和的一半．
2. 在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，点 M 为边 BC 的中点，求证：$AM\perp BC$．
3. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AD 和 DC 边的中点，BE，BF 分别交 AC 于点 R，T．你能发现 AR，RT，TC 之间的关系吗？



（第 3 题）

二、向量在物理中的应用举例

既有大小又有方向的物理量是数学中向量的现实原型，向量是解决许多物理问题的有力工具.

1. 向量的线性运算在物理中的应用

例 17 某人在静水中的游泳速度为 $4\sqrt{3}$ km/h，水流速度为 4 km/h，他必须朝哪个方向游才能沿与水流垂直的方向前进？实际前进的速度大小为多少？

解 如图 2－78，设水流速度为$\overrightarrow{OA}$，此人的实际速度为$\overrightarrow{OB}$，游泳速度为$\overrightarrow{OC}$.

由于实际速度＝游泳速度＋水流速度，因此$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

依题意，在 Rt△AOB 中，$|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{OA}|=4$.

所以$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-4^2}=4\sqrt{2}$，$\cos\angle BAO=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

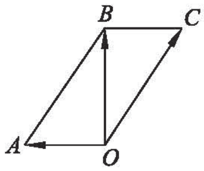
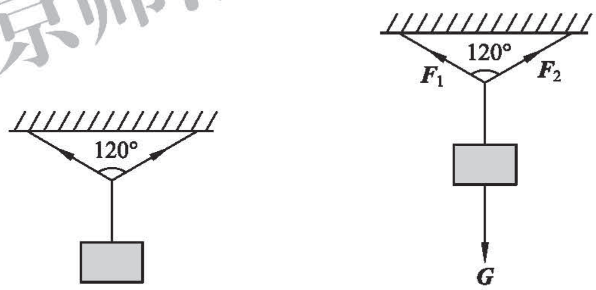


图 2－78

故此人应沿与河岸夹角余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$、逆着水流方向前进，实际前进的速度大小为$4\sqrt{2}$ km/h.

例 18 如图 2－79(1)，用两条成 120°角的等长的绳子悬挂一个灯具，已知灯具重 10 N，那么每根绳子的拉力大小分别为多少？



(1) (2)

图 2－79

解 如图 2－79(2)，设灯具的重力为 $\boldsymbol{G}$，每根绳的拉力分别为 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，则由题意得 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 与 $-\boldsymbol{G}$ 都成 60°角，且 $|\boldsymbol{F}_1|\cos 60^\circ+|\boldsymbol{F}_2|\cos 60^\circ=|\boldsymbol{G}|=10$，$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=10$. 即每根绳子的拉力大小都为 10 N.

2. 向量的数量积在物理中的应用

例 19 如图 2－80(1)，已知力 $\boldsymbol{F}$ 与水平方向的夹角为 30°(斜向上)，大小为 50 N，一个质量为 8 kg 的木块受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用在动摩擦因数 $\mu=0.02$ 的水平平面上运动了 20 m. 求力 $\boldsymbol{F}$ 和摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功.（$g=10$ N/kg）

解 设木块的位移为 $\boldsymbol{s}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 做功为

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 30^\circ=50\times20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=500\sqrt{3}(\mathrm{J}).$$

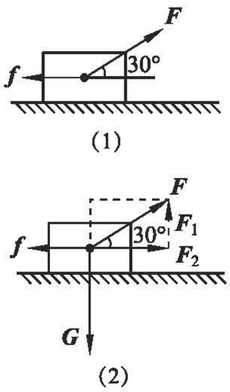


图 2-80

如图 2-80(2)，将力 $\boldsymbol{F}$ 分解，它在竖直方向上的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为

$$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|\sin 30^\circ=50\times\frac{1}{2}=25(\mathrm{N}).$$

设木块的重力为 $\boldsymbol{G}$，摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{f}|=|\mu(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}_1)|=(8\times10-25)\times0.02=1.1(\mathrm{N}),$$

因此，$\boldsymbol{f}$ 做功

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos 180^\circ=1.1\times20\times(-1)=-22(\mathrm{J}).$$

例 20 如图 2-81，已知质点由点 $A(20,15)$ 移动到点 $B(7,0)$ 的过程中，两恒力 $\boldsymbol{F}_1=(3,4)$，$\boldsymbol{F}_2=(6,-5)$ 作用于该质点.

(1) 求力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 分别对质点所做的功；

(2) 求力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的功.

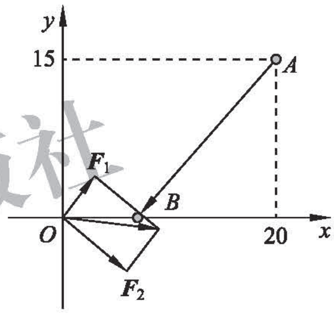


图 2-81

解 (1) $\overrightarrow{AB}=(7,0)-(20,15)=(-13,-15)$.

$$W_1=\boldsymbol{F}_1\cdot\overrightarrow{AB}=(3,4)\cdot(-13,-15)$$
$$=-99(\mathrm{J}),$$
$$W_2=\boldsymbol{F}_2\cdot\overrightarrow{AB}=(6,-5)\cdot(-13,-15)$$
$$=-3(\mathrm{J}).$$

所以力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 对质点所做的功分别为 -99 J 和 -3 J.

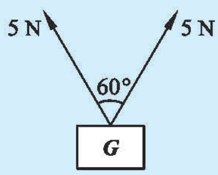
(2) $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\overrightarrow{AB}$

$$=[(3,4)+(6,-5)]\cdot(-13,-15)$$
$$=(9,-1)\cdot(-13,-15)$$
$$=-102(\mathrm{J}).$$

所以合力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的功为 -102 J.

练 习

1. 如图，两条绳提一个物体，每条绳的拉力大小均为 5 N，这时两条绳的夹角为 60°，求物重 $\boldsymbol{G}$ 的大小.



(第 1 题)

2. 一艘船从南岸出发，向北岸横渡. 根据测量，水流速度为 3 km/h，方向正东，风的方向为北偏西 30°，受风力影响，静水中船的漂行速度为3 km/h. 为了要使该船由南向北沿垂直于河岸的方向以 $2\sqrt{3}$ km/h 的速度横渡，求船本身的速度大小及方向.

3. 一架飞机从 A 地向北偏西 60° 的方向飞行 1 000 km 到达 B 地，然后向 C 地飞行，已知 C 地恰好在 A 地的南偏西 60°，并且 A，C 两地相距 2 000 km，求飞机从 B 地到 C 地的位移.
4. 已知力 $\boldsymbol{F}=(2,3)$ 作用于一物体，使物体从点 $A(2,0)$ 移动到点 $B(-2,3)$，求力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功.
5. 一个物体在大小为 6 N 的力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生大小为 100 m 的位移 $\boldsymbol{s}$，且力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 60°，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=$________J.

习题 2－6

A 组

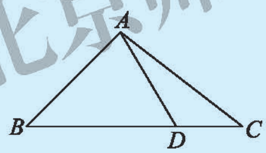
1. 在△ABC 中，$A=60^\circ$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则 $\dfrac{a}{\sin A}$ 的值为(   )，并说明理由.

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{81}$　　B. $\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$　　D. $2\sqrt{7}$

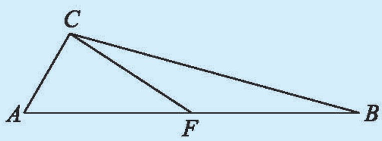
2. △ABC 中，$B=60^\circ$，$C=45^\circ$，$BC=8$，D 是边 BC 上的一点，且 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{BC}$，则 AD 的长为(   )，并说明理由.

A. $4(\sqrt{3}-1)$　　B. $4(\sqrt{3}+1)$　　C. $4(3-\sqrt{3})$　　D. $4(3+\sqrt{3})$

3. 如图，在△ABC 中，已知 $B=45^\circ$，D 是 BC 边上的一点，$AD=5$，$AC=7$，$DC=3$. 求 AB 的长.

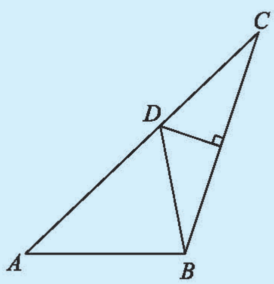


(第 3 题)

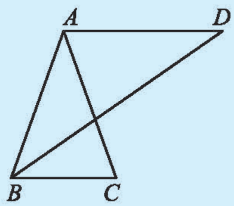


(第 4 题)

4. 如图，在△ABC 中，$AB=2$，$A=60^\circ$，点 F 为 AB 的中点，且 $CF^2=AC\cdot BC$. 求 AC 的长.
5. 如图，在△ABC 中，$AB=2$，$AC=4$，线段 CB 的垂直平分线交线段 AC 于点 D，$DA-DB=1$. 求 BC 的长及 $\cos\angle ACB$ 的值.



(第 5 题)



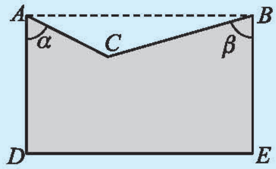
(第 6 题)

6. 如图，在△ABC 中，$AB=AC=3$，$BC=2$，$\angle B$ 的平分线交过点 A 且与 BC 平行的直线于点 D. 求△ABD 的面积.

7. 从甲处望乙处的仰角为 α，从乙处望甲处的俯角为 β，则 α 与 β 的关系为(　　)，并说明理由.

A. $\alpha>\beta$　　　　B. $\alpha=\beta$

C. $\alpha+\beta=90^\circ$　　　　D. $\alpha+\beta=180^\circ$



(第 8 题)

8. 如图为一角槽示意图，已知 $AB\perp AD$，$AB\perp BE$，并量得 $AB=85$ mm，$BC=78$ mm，$AC=32$ mm，则 $\alpha=$________，$\beta=$________.（精确到 0.1°）

9. 为了测量上海东方明珠塔的高度，某人站在 A 处测得塔尖的仰角为 75.5°，前进 38.5 m 后，到达 B 处测得塔尖的仰角为 80.0°. 试计算东方明珠塔的高度.（精确到 1 m）

10. 已知向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，在 $\triangle ABC$ 的中线 AM 上任取一点 P，试用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{AP}$.

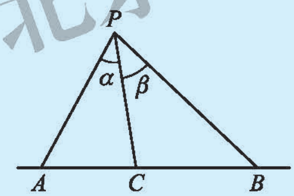
11. 设 M，N 分别是四边形 $ABCD$ 对边 AB，CD 的中点.

求证：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

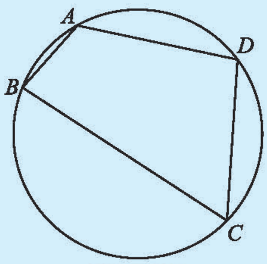
12. 一个质量为 100 g 的球从 1.8 m 的高处落到一个水平板上，又弹回到1.25 m的高度. 求在整个过程中重力对球所做的功.

B　组

1. 如图，一条直线上有三点 A，B，C，点 C 在点 A 与点 B 之间，点 P 是此直线外一点，设 $\angle APC=\alpha$，$\angle BPC=\beta$. 求证：$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA}$.



(第 1 题)

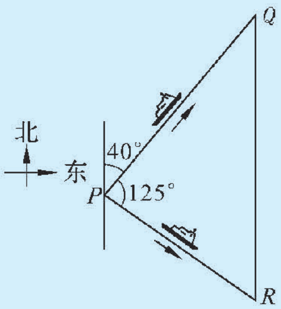


(第 2 题)

2. 如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

3. 如图，某日中午 12:00 甲船以 24 km/h 的速度沿北偏东 40°的方向驶离码头 P，下午 3:00 到达 Q 地. 下午 1:00 乙船沿北偏东 125°的方向匀速驶离码头 P，下午 3:00 到达 R 地. 若 R 在 Q 的正南方向，则乙船的航行速度是多少？（精确到 1 km/h）

4. 如图，飞机的航线和山顶在同一个铅直平面内，已知飞机的高度为海拔 20 250 m，速度为 189 km/h，飞行员先看到山顶的俯角为18°30′，经过 960 s 后，又看到山顶的俯角为 81°. 求山顶的海拔高度.（精确到1 m）



（第 3 题）

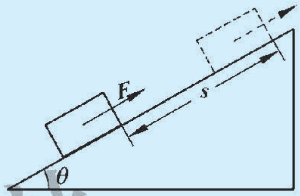
（第 4 题）

5. 已知点 O 为△ABC 所在平面内一点，且满足

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2.$$

求证：点 O 是三条高线的交点.

6. 如图，质量 $m=2.0$ kg 的木块，在平行于斜面大小为 10 N 向上的拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿倾角 $\theta=30°$ 的光滑斜面向上滑行 2.0 m 的距离.



（第 6 题）

(1) 分别求物体所受各力在这一过程中对物体做的功；

(2) 求在这一过程中物体所受各力对物体做的功的代数和；

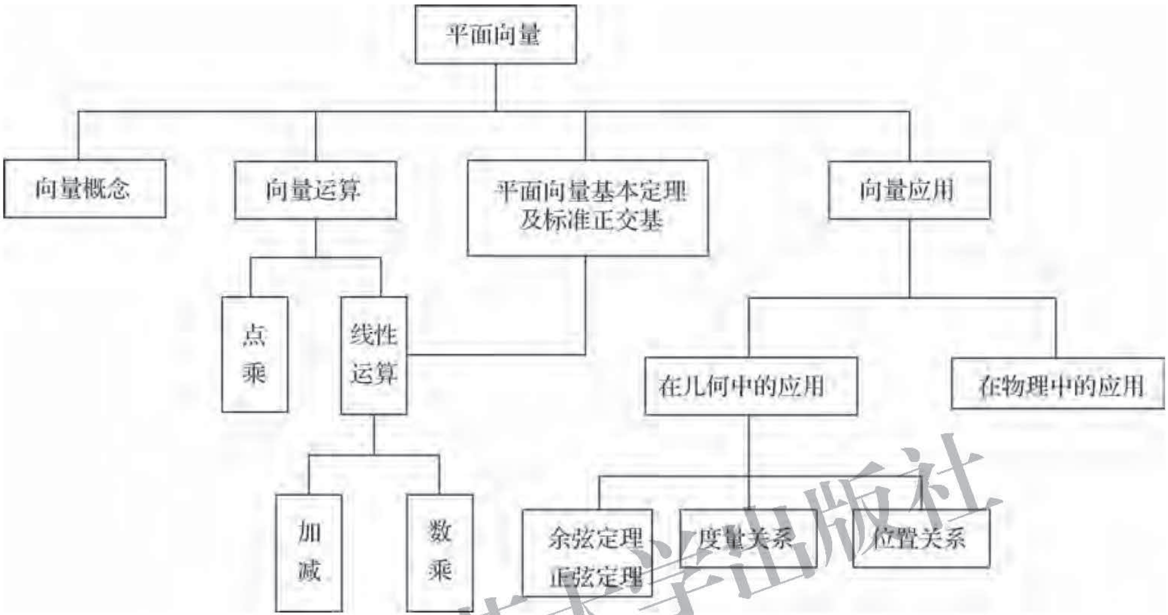
(3) 求物体所受合外力对物体所做的功，它与物体所受各个力对物体做功的代数和之间有什么关系？

7. 平面向量在几何中有哪些应用？在利用平面向量解决物理问题时，一般包括哪些解题步骤？

本章小结

一、知识结构

比较不同运算对象(数、代数式、向量)的差异,进一步体会运算在学习数学中的作用.



二、学习要求

向量理论具有深刻的数学内涵、丰富的物理背景. 向量既是代数研究对象,也是几何研究对象,是沟通几何与代数的桥梁. 向量是描述直线、曲线、平面、曲面以及高维空间数学问题的基本工具,是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础,在解决实际问题中发挥着重要作用.

学习本章,要理解平面向量的几何意义和代数意义;掌握平面向量的概念、运算、向量基本定理,以及向量的应用;用向量语言、方法表述和解决现实生活、数学和物理中的问题.

1. 向量概念

(1)通过对力、速度、位移等的分析,了解平面向量的实际背景,理解平面向量的意义和两个向量相等的含义.

(2)理解平面向量的几何表示和基本要素.

2. 向量运算

(1)借助实例和平面向量的几何表示,掌握平面向量加、减运算及其运算规则,理解其几何意义.

(2)通过实例分析,掌握平面向量数乘运算及运算规则,理解其几何意义. 理解两个平面向量共线的含义.

(3)了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

(4)通过物理中功等实例,理解平面向量数量积的概念及其物理意义,会计算平面向量的数量积.

(5)通过几何直观,了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义.

(6)会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

3. 向量基本定理及坐标表示

(1)理解平面向量基本定理及其意义.

(2)借助平面直角坐标系,掌握平面向量的正交分解及坐标表示.

(3)会用坐标表示平面向量的加、减运算与数乘运算.

(4)能用坐标表示平面向量的数量积,会表示两个平面向量的夹角.

(5)能用坐标表示平面向量共线、垂直的条件.

4. 向量应用与解三角形

(1) 会用向量方法解决简单的平面几何问题、力学问题以及其他实际问题,体会向量在解决数学和实际问题中的作用.

(2) 借助向量的运算,探索三角形边长与角度的关系,掌握余弦定理、正弦定理.

(3) 能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.

三、需要关注的问题

1. 向量的概念和向量运算的物理背景分别是什么?
2. 向量的概念和向量运算的几何背景分别是什么?
3. 比较向量运算与数和代数式的运算,向量运算给了我们什么启示?
4. 为什么平面向量基本定理是很重要的?
5. 向量的应用有哪些?
6. 为什么说向量是沟通几何与代数的桥梁?

复习题二

A 组

1. 判断题:

(1) 平行向量就是共线向量. ( )

(2) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 的模小于 $\boldsymbol{b}$ 的模,则 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$. ( )

(3) 质量、动量、功、加速度都是向量. ( )

(4) 若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线,则 A,B,C,D 四点必在一条直线上. ( )

(5) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反. ( )

(6) 在 $\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$. ( )

(7) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有共同的起点,则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量等于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. ( )

(8) 若 $\lambda\in\mathbf{R}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,当 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,则一定有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. ( )

(9) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$. ( )

(10) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. ( )

(11) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影是一个模等于 $|\boldsymbol{a}||\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$,方向与 $\boldsymbol{b}$ 相同或相反的向量. ( )

(12) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. ( )

2. 选择题,并说明选项正确的理由.

(1) 在四边形 $ABCD$ 中,若 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,则四边形 $ABCD$ 是( ).

A. 矩形　　B. 菱形　　C. 正方形　　D. 平行四边形

(2) 已知向量 $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{0}$,$\lambda\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1$,若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,则( ).

A. $\lambda=0$　　B. $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$　　C. $\boldsymbol{e}_1/\!/\boldsymbol{e}_2$　　D. $\boldsymbol{e}_1/\!/\boldsymbol{e}_2$ 或 $\lambda=0$

(3) 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个单位向量,下列四个命题中正确的是( ).

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等

B. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线

D. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

(4) 已知两个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 的夹角为 90°,它们的合力大小为 10 N,合力与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 60°,那么 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为( ).

A. $5\sqrt{3}$ N　　B. 5 N　　C. 10 N　　D. $5\sqrt{2}$ N

(5) 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 表示"向东航行 3 km",$\boldsymbol{b}$ 表示"向南航行 3 km",则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示( ).

A. 向东南航行 6 km　　B. 向东南航行 $3\sqrt{2}$ km

C. 向东北航行 $3\sqrt{2}$ km　　D. 向东北航行 6 km

(6) 河水的流速为 2 m/s,一艘小船想沿垂直于河岸方向以 10 m/s 的速度驶向对岸,则小船的静水速度大小为( ).

A. 10 m/s　　B. $2\sqrt{26}$ m/s　　C. $4\sqrt{6}$ m/s　　D. 12 m/s

(7) 设点 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则(　　).

A. $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(8) 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=1$，且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 $|\boldsymbol{a}|=$(　　).

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 填空题：

(1) 把所有单位向量的起点平移到一点 O，则其终点构成的图形是________；

(2) 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,1)$，则 $\overrightarrow{BC}=$________；

(3) 已知▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ 为基向量，则 $\overrightarrow{OD}=$________；

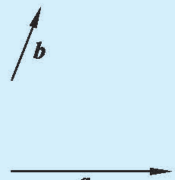
(4) 若 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=3$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________；

(5) 若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角是________；

(6) 设 $\boldsymbol{a}=(3,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，则实数 $\lambda=$________.

4. 飞机从 A 地向西北飞行 200 km 到达 B 地后，又从 B 地向东飞行 $100\sqrt{2}$ km 到达 C 地，再从 C 地向南偏东 60°飞行 $50\sqrt{2}$ km 到达 D 地，求飞机从 D 地飞回 A 地的位移.

5. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，请化简并求作出向量：$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-2\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$.



(第 5 题)

6. 已知 $A(2,1)$，$B(3,-1)$，$C(-3,0)$，求▱$ABCD$ 的顶点 D 的坐标.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(4,2)$，求与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量的坐标.

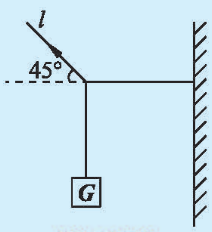
8. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足下列条件时，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值.

(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；　　(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 135°.

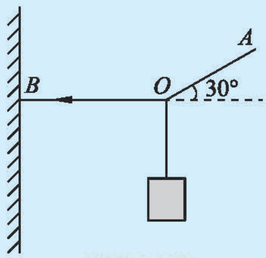
9. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{13}$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

10. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3)$，若存在向量 $\boldsymbol{c}$，使得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=4$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=9$，试求向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标.

11. 如图，在细绳 l 上作用着一个大小为 200 N 的力，与水平方向的夹角为 45°，细绳上挂着一个重物，使细绳的另一端与水平面平行，求物重 G 的大小.



(第 11 题)



(第 12 题)

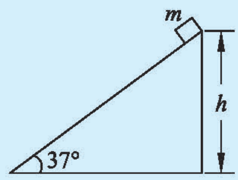
12. 如图，有一端 B 固定的细绳 BOA，在与水平面成 30°角的 OA 方向上作用着一个大小为 100 N 的力，此时 BO 呈水平状，而点 O 所吊的砝码静止. 求这个砝码的质量. 作用在 OB 方向上的力有多大？($g=10$ N/kg)

13. 质量 $m=2.0$ kg 的物体，在 4.0 N 的水平力作用下，由静止开始在光滑水平面上运动了 3 s，求水平力在 3 s 内对物体做的功.

14. 在$\triangle ABC$中,已知$A(4,1)$,$B(7,5)$,$C(-4,7)$,试判断$\triangle ABC$的形状.

B 组

1. 如图,在倾角为$37°$、高$h=2$ m的斜面上,质量为5 kg的物体沿斜面下滑,物体受到的摩擦力是它对斜面压力的0.5倍,$g=10$ N/kg. 求物体由斜面顶端滑到底端的过程中,物体所受各力对物体所做的功.



(第1题)

2. 已知$\overrightarrow{AB}=(6,1)$,$\overrightarrow{BC}=(x,y)$,$\overrightarrow{CD}=(-2,-3)$,当$\overrightarrow{BC}\,/\!/\,\overrightarrow{DA}$时,求实数$x$,$y$应满足的关系式.
3. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线,当且仅当k为何值时,向量$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$互相垂直?
4. 求证:顺次连接任意凸四边形各边中点,构成一个平行四边形.
5. 请找3道几何题,分别写出几何方法和向量方法,并比较两种方法的差异.

C 组

1. 本章章前语中说“数的运算、代数式的运算和向量的运算是学习代数运算的三个重要阶段”,你能说说这三种运算的联系与区别吗?
2. 请你探讨用向量描述三角形的重心、内心和垂心(可以独立研究,也可以和同学交流或网上查找).
3. 阅读下列一段文字,并回答问题.

二元一次方程组$\begin{cases} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c', \end{cases}$

用向量表示为$(ax+by,a'x+b'y)=(c,c')$. ①

由向量的加法与数乘法则,可将①式化为$(ax,a'x)+(by,b'y)=(c,c')$. ②

即$x(a,a')+y(b,b')=(c,c')$, ③

由平面向量基本定理“如果$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$是同一平面内两个不共线的向量,那么对该平面内任意一个向量$\boldsymbol{a}$,存在唯一的一对实数λ_1,λ_2,使$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$”知,若向量$(a,a')$,$(b,b')$不共线,那么存在唯一的一对实数$(x,y)$使得$x(a,a')+y(b,b')=(c,c')$成立.

这样,从向量角度认识方程组,这里向量(a,a'),(b,b')不共线,就是方程组的对应系数$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$,方程组有唯一解.

那么,能用向量方法解释方程组有无穷解及方程组无解的情况吗?

3 第三章 数学建模活动（二）

学习数学建模需要参与数学建模活动，在活动中学数学、用数学、做数学，交流分享数学. 本章强化数学建模的四个环节.

一切问题都可以转化为数学问题.

——笛卡儿（René Descartes，1596—1650）

§1 建筑物高度的测量

一、问题情境和任务

选择适用的方法，测量下面 3 个物体的高度.

(1)学校内的旗杆；

(2)学校内的一座教学楼；

(3)学校外一座看得见，但底部不可到达的建筑物.

如图为上述三类物体的实例.

二、实践流程建议

1. 成立测量小组.

2. 学习研讨，完成下列工作.

(1)选定测量目标和测量方法(注意控制测量误差、计算误差)；

(2)制订测量方案，写出计划书，最好选用两套方案测量同一个物体；

(3)准备相应的测量工具(需要时也可以自制一些简单的测量工具)；

(4)明确小组成员的任务分工.

3. 实施现场测量，记录测量数据.

4. 完成计算和报告，填写“测量工作报告表”(如表 3－1).

5. 成果交流.

交流时，关注测量过程和创新点，以实物、照片、幻灯片等形式展示.

表 3-1　测量工作报告表

完成时间：　　年　月　日

1. 本课题组的成员与分工

成员姓名	分工	主要工作与贡献

2. 本课题组选择的测量对象、所需工具

3. 测量的数学模型

4. 测量的数据和计算结果

5. 测量中的亮点和问题点(如独到的想法，减少测量误差的想法和做法，团结协作克服的困难，结果产生较大误差的原因分析等. 如有说明问题的照片或图片可以附在后边)

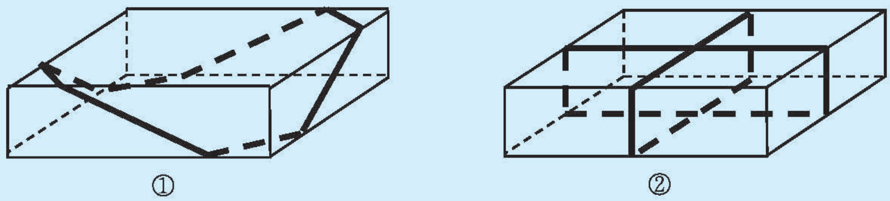
6. 与本次测量相关的可继续研究的小课题或待探究的问题(课题的拓广)

7. 用简单的语言，描述同学在完成此项工作中的感受

注：表格空间可根据需要自行调整，可以多页. 如有附件，可与此表装订在一起.

习题 3－1

1. 完成表 3－1，在班内交流.
2. 过年了，佳怡去探望奶奶，到商店买了一盒点心，售货员为她做了一个如图①的捆扎，并在角上配了一个花结，使得点心匣很漂亮，佳怡非常高兴. 售货员说，这种捆扎方式不仅显得漂亮，而且比一般的十字捆扎方式（如图②）用的包装绳短. 你同意这种说法吗？请说明理由.



（第 2 题）

§2 测量和自选建模作业的汇报交流

合作交流

1. 根据完成的测量要求，按小组或个人，完成一个测量结题报告或者写一篇建模小论文，在班级中宣讲交流.

请特别注意说明，测量模型或测量原理的选取，测量误差的减少，测量的结果，测量中的创新点、得意点、问题点等.

2. 也可以结合上学期自主选做的数学建模小课题的成果，进行结题交流. 请报告人事先完成结题报告，再进行成果展示交流.

请班里的其他同学相互给出评价，特别注意总结、交流、反思建模过程中的收获和问题，积累建模活动的经验.

3. 通过对各组建模结果的自评和互评，相互学习借鉴，学会欣赏他人的建模成果，展现同学学数学、用数学的过程，培养科学态度和创新精神.

表 3-2　结题报告参考提纲表

主题、项目	内容、表述
问题、背景、意义	
解决问题的方法和得到的结果	
前期的学习、资料和工具的准备	
假设、分析、建模、求解的主要过程	
对结果的解读和分析	
小组成员的分工和各自的主要贡献	
工作的收获或感受，得到的帮助和致谢	
主要参考文献	

思考交流

你认为好的建模过程和好的建模结果应该有哪些特点？写出几条.

练 习

1. 成立研究小组，完善《必修第二册》的自选问题并做数学建模；或者另选一个问题做数学建模课题研究. 开题、做题，并结题.

习题 3－2

1. 总结自己参加数学建模活动的具体收获、体会、经验和问题.
2. 将自己的建模成果做成一块展板，在班级或学校里展示交流. 并欢迎家长参观.
3. 评价一下自己或班里其他组同学的建模成果.

4

第四章

三角恒等变换

恒等变换是数学学习和应用中的一项重要的基本功，基本的三角恒等变换经常出现在物理学（尤其是力学）、电气工程、机械制造、图像处理，以及其他科学研究和工程实践中.

本章将学习基本的三角恒等变换公式及其简单应用，提高数学运算和逻辑推理等核心素养.

§ 1 同角三角函数的基本关系

1.1 基本关系式

如图 4-1，任意角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 P 到坐标原点 O 的距离为 1，所以

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{4.1}$$

另外，由正切函数的定义，有

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{4.2}$$

这两个关系式是同角三角函数的基本关系式.

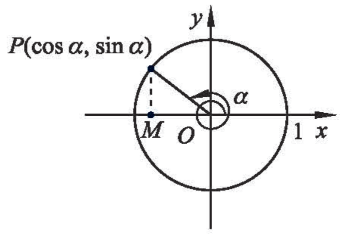


图 4-1

1.2 由一个三角函数值求其他三角函数值

由角 α 的某一个三角函数值，利用(4.1)和(4.2)这两个关系式，可以求出其他三角函数值.

例 1 已知 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$，且角 α 的终边在第二象限，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

解 由(4.1)式有

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

又角 α 的终边在第二象限，$\cos\alpha < 0$，所以

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5}.$$

再由(4.2)式有

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}.$$

例 2 已知 $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

解 由(4.1)式有

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}.$$

因为 $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}<0$，所以角 α 的终边在第二或第三象限.

当 α 的终边在第二象限时，$\sin\alpha>0$，

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{5}{13}\div\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{5}{12}.$$

当 α 的终边在第三象限时，$\sin\alpha<0$，

$$\sin\alpha=-\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(-\frac{5}{13}\right)\div\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{5}{12}.$$

例 3 已知 $\tan\alpha=m(m\neq0)$，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

解 由(4.1)和(4.2)这两个关系式，有

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, & ①\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=m. & ②\end{cases}$$

由②式得 $\sin^2\alpha=m^2\cos^2\alpha.$ ③

将③式代入①式得

$$m^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

从而 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{m^2+1}.$

因为 $\tan\alpha=m\neq0$，即角 α 的终边不在 x 轴、y 轴上，

所以 $$\cos\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}, & \text{当 }\alpha\text{ 是第一、第四象限角；}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}, & \text{当 }\alpha\text{ 是第二、第三象限角 .}\end{cases}$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\begin{cases}\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}, & \text{当 }\alpha\text{ 是第一、第四象限角；}\\ -\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}, & \text{当 }\alpha\text{ 是第二、第三象限角 .}\end{cases}$$

注 意

利用平方关系求三角函数值时，应根据角 α 的终边所在的象限确定所求三角函数值的符号.

练 习

1. 解下列各题：

(1) 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 为第一象限角，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

(2) 已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 为第三象限角，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

(3) 已知 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$，且 α 为第二象限角，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

2. 已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

3. 已知 $\cos\alpha=m(m\neq0)$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

1.3　综合应用

例 4　已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\tan\alpha$ 的值.

解　由已知条件和(4.1)式，有

$$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{5},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\end{cases}$$

消去 $\cos\alpha$，得

$$25\sin^2\alpha+5\sin\alpha-12=0.$$

解方程，得

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\text{或}\sin\alpha=-\frac{4}{5}.$$

因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，$\sin\alpha<0$，所以

$$\sin\alpha=-\frac{4}{5}.$$

代入已知条件，得

$$\cos\alpha=-\frac{3}{5}.$$

于是由(4.2)式有

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{3}.$$

求三角函数值的时候，通常是利用同角三角函数的基本关系和已知条件把问题归结为：解正弦(或余弦)函数值的一个一元二次方程，或者解正弦函数和余弦函数值的二元方程组.

例 5 已知 $\tan\alpha=3$，求$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

解 因为 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$，所以 $\cos\alpha\neq 0$.

所以$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}=\dfrac{3+1}{3-1}=2$.

思考交流

本例的解法比较巧妙，并不需要求得 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值. 但如果题目换成求$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha+3}{\sin\alpha-\cos\alpha}$呢？

证明恒等式，既可以利用恒等式的“左式减右式为零”进行证明，也可以证明恒等式的左式、右式分别等于同一个式子.

例 6 求证：$\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$(\cos\alpha\neq 0)$.

证明 由 $\cos\alpha\neq 0$，知 $\sin\alpha\neq 1$，所以 $1-\sin\alpha\neq 0$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}&=\frac{\cos^2\alpha-(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}\\&=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}\\&=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}\\&=0.\end{aligned}$$

所以原式成立.

例 7 求证：$\dfrac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}$.

证明 由(4.1)式有

$$\begin{aligned}\frac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\\&=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2}{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta},\end{aligned}$$

$$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}.$$

故 $\dfrac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}$.

练 习

1. 化简与求值：

(1) $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$；　　(2) $\dfrac{2\cos^2\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$.

2. 求证：

(1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；　　(2) $\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^2 x=1$；

(3) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

3. 已知 $\tan\alpha=1.5$，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

4. 已知 $\tan\alpha=-2$，求：

(1) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$；　　(2) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

习题 4－1

A 组

1. (1) 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha$ 在第四象限，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$，$\alpha$ 在第二象限，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值；

(3) 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值；

(4) 已知 $\cos x=\dfrac{2}{3}$，求 $\sin x$，$\tan x$ 的值.

2. 已知 $\sin\theta\neq\pm1$，用 $\sin\theta$ 表示 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$.

3. 求证：

(1) $\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$；

(2) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$；

(3) $(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$；

(4) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$.

B 组

1. 已知 $\sin x-\cos x=m$，求 $\sin x\cos x$.

2. 已知 $\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 $\sin^4 x+\cos^4 x$.

3. 同角三角函数的基本关系式主要有哪些方面的用途，谈谈你的体会.

§ 2 两角和与差的三角函数公式

2.1 两角和与差的余弦公式及其应用

问题提出

已知任意角 α,β 的正弦、余弦，能推出 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 的余弦吗？

分析理解

现在，考虑 $\cos(\alpha-\beta)$ 与角 α,β 的正弦和余弦的关系.

因为余弦函数是偶函数，所以可以只讨论 $\alpha\geqslant\beta$.

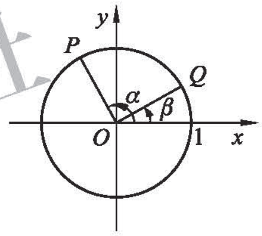


图 4-2

如图 4-2，设角 α,β 的终边与单位圆的交点分别记为 P,Q. 此时，点 P 和点 Q 的坐标分别为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 和 $(\cos\beta,\sin\beta)$.

如果 $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\pi$，那么可以用向量的数量积求 $\cos(\alpha-\beta)$. 由于向量 $\overrightarrow{OP}$ 和向量 $\overrightarrow{OQ}$ 都是单位向量，它们的夹角是 $\alpha-\beta$，根据向量数量积的定义知，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\cos(\alpha-\beta)$，再利用向量的坐标表示，得

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

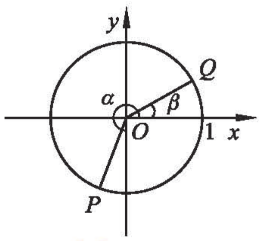


图 4-3

如果 $\pi<\alpha-\beta<2\pi$，那么 $2\pi-(\alpha-\beta)$ 是向量 $\overrightarrow{OP}$ 和向量 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角（如图 4-3）. 由诱导公式知，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\cos[2\pi-(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha-\beta).$$

所以 $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

对于任意角 α,β 来说，上述结论仍然成立. 证明过程请同学课下自己试一试.

这样，就得到了两角差的余弦公式：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta，记作 C_{\alpha-\beta}.$$

因为 $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$，所以由公式 $C_{\alpha-\beta}$，得

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

> 这里用的是加法和减法运算的联系. 因为 $C_{\alpha-\beta}$ 中对任意 α,β 都成立，所以把其中的 β 换成 $-\beta$ 也一定成立.

这就是两角和的余弦公式，记作 $C_{\alpha+\beta}$.

两角和与差的余弦公式总结如下：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{\alpha+\beta})$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{\alpha-\beta})$$

例 1 利用两角差的余弦公式求 $\cos 15°$的值.

解 我们熟知 30°，45°，60°的三角函数值，15°可用 60°−45°表示，也可用 45°−30°表示.

$$\begin{aligned}\cos 15° &= \cos(60°-45°)\\ &= \cos 60°\cos 45°+\sin 60°\sin 45°\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

另一种解法，请同学课下完成.

例 2 已知$\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\pi$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，求 $\cos\alpha$ 的值.

解 观察已知的两个角 $\alpha-\beta$，β 与未知角 α 之间的运算关系，可以得到 $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$. 因此，求 $\cos\alpha$ 的值可以看成求两个角 $\alpha-\beta$，β 和的余弦值.

因为$\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\pi$，所以 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$（如图 4－4）.

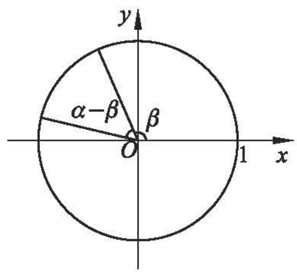


图 4－4

从而

$$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

因此

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos[(\alpha-\beta)+\beta]\\ &= \cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta\\ &= \frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}\\ &= -\frac{63}{65}.\end{aligned}$$

练 习

1. 利用公式 $C_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha-\beta}$证明：

 (1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$； (2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

2. 已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$的值.

3. 已知 $\cos\theta=-\frac{8}{17}$，θ 为第二象限角，求 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

4. 已知 $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，$\cos\beta=\frac{3}{4}$，$\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\cos(\alpha+\beta)$的值.

2.2 两角和与差的正弦、正切公式及其应用

借助诱导公式，根据两角和与差的余弦公式，可以推导出两角和与差的正弦公式.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]\\&=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin[\alpha+(-\beta)]\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

从而可得两角和与差的正弦公式，记作 $S_{\alpha\pm\beta}$.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \quad (S_{\alpha+\beta})$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \quad (S_{\alpha-\beta})$$

由正切函数的定义，有

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.\end{aligned}$$

分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$(当 $\cos\alpha\cos\beta\neq0$ 时)，得到两角和与差的正切公式，记作 $T_{\alpha+\beta}$，同理可得 $T_{\alpha-\beta}$.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\quad (T_{\alpha+\beta})$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.\quad (T_{\alpha-\beta})$$

从推导过程可以知道，α，β 均有一定的取值范围，即

$$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),$$

$$\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),$$

$$\alpha\pm\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),$$

这样，才能保证 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 及 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 都有意义.

公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$ 通常都叫作**和角公式**，而公式 $S_{\alpha-\beta}$，$C_{\alpha-\beta}$，$T_{\alpha-\beta}$ 通常都叫作**差角公式**.

例 3 已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，α 为第三象限角，求 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 的值.

解 由 α 为第三象限角，得

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}.$$

所以

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)\\&=-\frac{\sqrt{2}}{10};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)&=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)\\&=-\frac{\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

思考交流

在例 3 中，两个三角函数值相等，这是一个必然现象还是巧合？请你从 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ 与 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 之间的关系进行思考.

例 4 已知 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=-\dfrac{1}{3}$，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$. 求：

(1) $\tan(\alpha-\beta)$；　　(2) $\alpha+\beta$.

解 (1) $$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=7.$$

(2) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=1.$$

因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，所以 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$.

由于在 $\dfrac{\pi}{2}$ 与 $\dfrac{3\pi}{2}$ 之间，只有 $\dfrac{5\pi}{4}$ 的正切值等于 1，故

$$\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}.$$

练　习

1. 求下列各式的值：

(1) $\cos 105^\circ$；　　(2) $\cos\left(-\dfrac{25\pi}{12}\right)$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$；　　(2) $\sin 95^\circ\sin 35^\circ+\cos 95^\circ\cos 35^\circ$.

3. 已知 $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$，$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

4. 请用本节学过的公式验证和推导下列诱导公式：

(1) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$；

(2) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$________；　　(3) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$________.

5. 求 $\tan 15^\circ$，$\tan 105^\circ$ 的值.

6. 求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\tan 43^\circ+\tan 17^\circ}{1-\tan 43^\circ\tan 17^\circ}$；　　(2) $\dfrac{1+\tan\frac{5\pi}{12}}{1-\tan\frac{5\pi}{12}}$.

7. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{5}$，$\sin\beta=-\dfrac{15}{17}$，$\alpha,\beta$ 分别是第二、第三象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

8. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，$0^\circ<\alpha<90^\circ<\beta<180^\circ$. 求证：$\alpha+\beta=135^\circ$.

2.3 三角函数的叠加及其应用

由公式 $C_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha-\beta}$，$S_{\alpha+\beta}$，$S_{\alpha-\beta}$可以把$\alpha\pm\beta$的三角函数式转化成α，β的三角函数式．如果从右往左使用公式，可以将三角函数式化简.

例5 化简：

(1) $\sin 72^\circ\cos 42^\circ-\cos 72^\circ\sin 42^\circ$；　　(2) $\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

解 (1) 由公式 $S_{\alpha-\beta}$，得

$$\sin 72^\circ\cos 42^\circ-\cos 72^\circ\sin 42^\circ=\sin(72^\circ-42^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2};$$

(2) 可以将$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$分别看成 $\sin\frac{\pi}{6}$和 $\cos\frac{\pi}{6}$.

由公式 $S_{\alpha+\beta}$，得

$$\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right).$$

一般地，当 a，b 不同时为 0 时，

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

根据 $S_{\alpha+\beta}$，引入辅助角 φ，使得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi.$$

所以　$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$（$a$，$b$ 不同时为 0）.

其中角 φ 所在象限由 a，b 的符号确定，角 φ 的值由 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的值确定，也就是由 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$来确定.

例6 求 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的最大值和周期.

解

$$\begin{aligned}f(x)&=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)\\&=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

故当 $x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，也就是当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$取最大值 1，函数 $f(x)$的最大值为 2，周期 $T=2\pi$.

由例 6 可发现，利用两角和或差的三角函数公式，可以将某些三角函数式化简成为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，以利于研究这类三角函数的图象和性质．

思考交流

1. 求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最大值、最小值和周期.

2. 利用上述问题的研究方法，求函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$（a，b 不同时为 0）的最大值、最小值和周期.

例 7 已知三个电流瞬时值的函数解析式分别是

$$I_1=\sqrt{2}\sin\omega t,\ I_2=2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right),\ I_3=4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right),$$

其中 ω 为常数，t 为线圈旋转的时间．求它们合成后的电流瞬时值的函数解析式，并求出这个函数的振幅.

解 将三个电流瞬时值的函数解析式化成 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式.

由两角和与差的正弦公式有

$$\begin{aligned}I&=I_1+I_2+I_3\\&=\sqrt{2}\sin\omega t+2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)+4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\sin\omega t+2\left(\sin\omega t\cos\frac{\pi}{4}-\cos\omega t\sin\frac{\pi}{4}\right)+4\left(\sin\omega t\cos\frac{\pi}{4}+\cos\omega t\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=4\sqrt{2}\sin\omega t+\sqrt{2}\cos\omega t\\&=\sqrt{34}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\omega t+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos\omega t\right)\\&=\sqrt{34}(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)\\&=\sqrt{34}\sin(\omega t+\theta),\end{aligned}$$

其中 $\tan\theta=\frac{1}{4}$. 所以 $I=\sqrt{34}\sin(\omega t+\theta)$，且它的振幅是 $\sqrt{34}$.

由此可知，几个振幅和初相不同但频率相同的正弦波之和，总是等于另一个具有相同频率的正弦波，同时可求得这个正弦波的振幅和初相.

练　习

1. 化简：$\cos 18^\circ\cos 72^\circ-\sin 18^\circ\sin 72^\circ$.

2. 求下列函数的最大值和最小值，并画出它的图象.

(1) $f(x)=12\sin x+5\cos x$；

(2) $f(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$；

(3) $f(x)=\sqrt{2}(\cos 2x-\sin 2x)$.

3. 求函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期.

4. 求函数 $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间.

2.4 积化和差与和差化积公式

在讨论三角函数的一些问题过程中，有时需要把三角函数的积化为和或者差，有时又需要把和或者差化成积的形式.

一、三角函数的积化和差

前面已经学习了两角和与差的正弦、余弦公式，分别如下：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \quad ①$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \quad ②$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \quad ③$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \quad ④$$

请同学自己导出下面的**积化和差**公式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];\\&\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)];\\&\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];\\&\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].\end{aligned}}$$

积化和差公式可以将两个三角函数值的积化为另两个三角函数值的和乘常数的形式，常用于三角函数的求值和化简.

例 8 求 $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ 的值.

解 $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

例 9 求证 $\sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ = \frac{1}{8}$.

证明
$$\begin{aligned}\sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ &= \frac{1}{2}\sin 15^\circ \sin 75^\circ\\ &= -\frac{1}{4}[\cos(15^\circ + 75^\circ) - \cos(15^\circ - 75^\circ)]\\ &= -\frac{1}{4}(\cos 90^\circ - \cos 60^\circ) = -\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

二、三角函数的和差化积

从积化和差的 4 个公式可以得出

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta.$$

设 $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$, 则 $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$.

这样,上面得出的四个式子可以写成

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\\ &\sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};\\ &\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\\ &\cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.\end{aligned}}$$

这四个公式叫作**和差化积**公式,利用它们和其他三角函数关系式,我们可把某些三角函数的和或差化成积的形式.

例 10 把下列各式化为积的形式:

(1) $\sin 103^\circ + \sin 17^\circ$;　　(2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\sin 103^\circ + \sin 17^\circ &= 2\sin\frac{103^\circ+17^\circ}{2}\cos\frac{103^\circ-17^\circ}{2}\\ &= 2\sin 60^\circ\cos 43^\circ = \sqrt{3}\cos 43^\circ.\end{aligned}$$

(2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cdot\sin\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}$

$$=-2\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\sin\alpha.$$

例 11 把 $\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 化为积的形式.

解 $\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos x+\cos\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}$

$$=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right).$$

练 习

1. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\sin 54°+\sin 66°$；　(2) $\cos 40°+\cos 52°$；

(3) $\sin 3x-\sin 5x$；　(4) $\cos 50°-\cos 70°$.

2. 把下列各式化成和或差的形式：

(1) $\sin 64°\cos 20°$；　(2) $\sin 84°\cos 114°$；

(3) $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$；　(4) $\sin 2\sin 1.2$.

3. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\frac{1}{2}-\cos x$ ；　(2) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ；　(3) $\tan\alpha+\tan\beta$.

习题 4－2

A 组

1. 求下列函数值：

(1) $\cos\frac{\pi}{12}$；　(2) $\sin\frac{5\pi}{12}$；　(3) $\cos\left(-\frac{31\pi}{12}\right)$；

(4) $\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)$；　(5) $\tan\frac{\pi}{12}$；　(6) $\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$.

利用已学过的三角函数公式，你还能求出哪些角的三角函数值？请举 3 个例子.

2. 利用特殊角的三角函数值计算：

(1) $\sin 10°\cos 50°+\sin 50°\cos 10°$；　(2) $\cos 15°\cos 105°-\sin 105°\sin 15°$；

(3) $\cos^2 105°-\sin^2 105°$；　(4) $\sin 20°\sin 10°-\cos 10°\sin 70°$；

(5) $\dfrac{\tan 22^\circ+\tan 23^\circ}{1-\tan 22^\circ\tan 23^\circ}$;　　(6) $\dfrac{1-\tan 75^\circ}{1+\tan 75^\circ}$.

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$, α,β 均为第二象限角,求$\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$的值.

4. 已知 $\cos\varphi=\dfrac{3}{5}$, $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,求 $\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

5. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$, $\pi<\alpha<2\pi$,求 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$及$\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$的值.

6. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\tan\beta=-2$,求 $\tan(\alpha-\beta)$的值.

7. 已知 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$,求 $\tan\alpha$ 的值.

8. 已知 $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, 且 $\dfrac{5\pi}{2}<\alpha<\dfrac{7\pi}{2}$, 求 $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

9. 已知函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 的图象经过点$\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$和$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$.

(1) 求实数 a 和 b 的值;

(2) 当 x 为何值时, $f(x)$ 取得最大值.

B　组

1. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$,且 α 是第三象限角,你能求出 2α, $\dfrac{\alpha}{2}$ 的三角函数值吗?你能求出与 α 有关的其他角的三角函数值吗?

2. 化简:

(1) $\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha$;　　(2) $\sin\alpha+\cos\alpha$;

(3) $\dfrac{\tan 15^\circ+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan 15^\circ}$;　　(4) $\sin 200^\circ\sin 310^\circ+\cos 340^\circ\cos 50^\circ$.

3. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$,求$\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta}{\tan^2\beta\tan(\alpha+\beta)}$.

4. 画出从公式 $C_{\alpha-\beta}$ 到 $T_{\alpha\pm\beta}$, $T_{\alpha+\beta}$ 的知识结构框图.

5. 已知两个电流瞬时值函数解析式分别是

$$I_1=12\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right),\quad I_2=4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right),$$

求合成后的电流 $I=I_1+I_2$ 的函数解析式.

§ 3 二倍角的三角函数公式

3.1 二倍角公式

在两角和的正弦、余弦、正切公式中，令 $\beta=\alpha$，便得到

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (S_{2\alpha})$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad (C_{2\alpha})\\&=2\cos^2\alpha-1\\&=1-2\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \qquad (T_{2\alpha})$$

以上公式称为二倍角的正弦、余弦、正切公式，统称为**二倍角公式**．这些公式仅对于使等号两边都有意义的 α 成立．

例 1 已知角 α 是第二象限角，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和 $\tan 2\alpha$ 的值.

解 因为角 α 是第二象限角，所以 $\sin\alpha>0$.

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}.$$

由二倍角公式，有

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}=\frac{24}{7}.$$

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC=2BC$，求角 A 的正弦值.

解 如图 4－5，过点 A 作 BC 的垂线，垂足为 D. 设 $\angle BAD=\theta$，则 $\angle BAC=2\theta$.

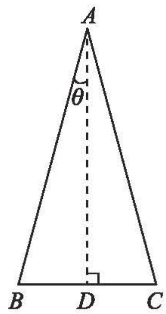


图 4－5

因为 $$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}AB,$$

所以 $$\sin\theta=\frac{BD}{AB}=\frac{1}{4}.$$

因为 $0<2\theta<\pi$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，于是 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

故 $$\sin\angle BAC=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

例 3 要把半径为 R 的半圆形木料截成矩形，应怎样截取，才能使矩形面积最大？

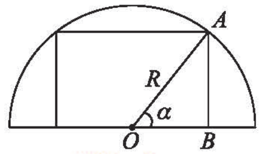


图 4－6

解 如图 4－6，设圆心为 O，矩形面积为 S，$\angle AOB=\alpha$，则

$$\begin{aligned}&AB=R\sin\alpha, OB=R\cos\alpha,\\&S=R\sin\alpha\cdot 2(R\cos\alpha)\\&\quad=2R^2\sin\alpha\cos\alpha\\&\quad=R^2\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

当 $\sin 2\alpha$ 取最大值 1，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，矩形面积最大，最大面积等于 R^2.

练 习

1. 求下列各式的值：
   (1) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$；
   (2) $\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ$；
   (3) $1-2\sin^2 15^\circ$；
   (4) $2\cos^2 30^\circ-1$；
   (5) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$；
   (6) $\frac{2\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ}$.
2. 已知 $\cos\alpha=\frac{7}{8}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 的值.
3. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{2}-1$，求 $\tan 2\alpha$ 的值.
4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{1}{3}$，求 $\sin(2A+B)$，$\tan(A+2B)$.

3.2 半角公式

在利用二倍角公式解决问题时，已知角 α 的一个三角函数值和它所在的象限就可以求出这个角的二倍角的所有三角函数值．如果已知一个角 α 的一个三角函数值，能否求出这个角的半角 $\frac{\alpha}{2}$ 的所有三角函数值？

在二倍角公式

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

中，用$\frac{\alpha}{2}$代替α得

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1.$$

由此得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

上式两边分别相除，可得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

又根据正切函数的定义，得到

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

这样我们就得到另外两个公式：

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

以上我们得到的5个有关半角三角函数的公式，称之为**半角公式**.

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\\ \cos\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\\ \tan\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\ &=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\ &=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.\end{aligned}}$$

在这些公式中，根号前面的符号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限相应的三角函数值的符号确定，若$\frac{\alpha}{2}$所在象限无法确定，则应保留根号前面的正、负两个符号.

例 4 求 $\sin\frac{\pi}{8}$ 的值.

解 由半角公式,有 $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

例 5 已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,求 $\cos\frac{\alpha}{2}$.

解 因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$.

所以
$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

练 习

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$,求 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$.
2. 求 $\cos\frac{\pi}{8}$ 和 $\tan\frac{\pi}{8}$ 的值.
3. 已知 $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{5}$,角 x 的终边在第一象限,求 $\tan\frac{x}{2}$ 的值.

习题 4-3

A 组

1. 求下列各式的值:

(1) $2\sin 75^\circ\cos 75^\circ$;　　(2) $\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}$;

(3) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$;　　(4) $1-2\sin^2 67^\circ30'$;

(5) $\dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$;　　(6) $\sin 15^\circ\sin 75^\circ$;

(7) $2\cos^2 150^\circ-1$;　　(8) $\dfrac{2\tan\frac{5\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{5\pi}{12}}$.

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ 的值.

3. 已知 $\cos\alpha=\frac{8}{17}$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

4. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\tan 2\alpha$，$\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

5. 已知等腰三角形一个底角的正弦值为$\frac{3}{5}$，求这个三角形的顶角的正弦、余弦及正切的值.

6. 已知 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$270^\circ<\alpha<360^\circ$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

7. 已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$180^\circ<\alpha<270^\circ$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

8. 已知 $\tan\alpha=2$，α 是锐角，求 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

9. 求证：

(1) $\tan\alpha-\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{2}{\tan 2\alpha}$；

(2) $\sin^2\frac{\alpha}{4}=\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$；

(3) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$；

(4) $1-\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

10. 已知等腰三角形顶角的余弦值为$\frac{5}{13}$，求这个三角形底角的正弦、余弦及正切的值.

B 组

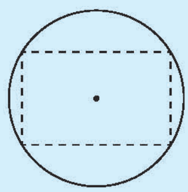
1. 已知 $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

2. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=3$，求 $\sin 2\theta-2\cos^2\theta$ 的值.

3. 求证：$\cos^4\theta=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta$.

4. 已知 $\sin\alpha$ 与 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的比是 $8:5$，$0^\circ<\alpha<180^\circ$，求 $\cos\alpha$，$\sin\frac{\alpha}{2}$ 和$\tan\frac{\alpha}{4}$ 的值.

5. 如图，把横截面是半径为 R 的圆木加工成横截面为矩形的木料，怎样加工才能使横截面面积最大？



(第 5 题)

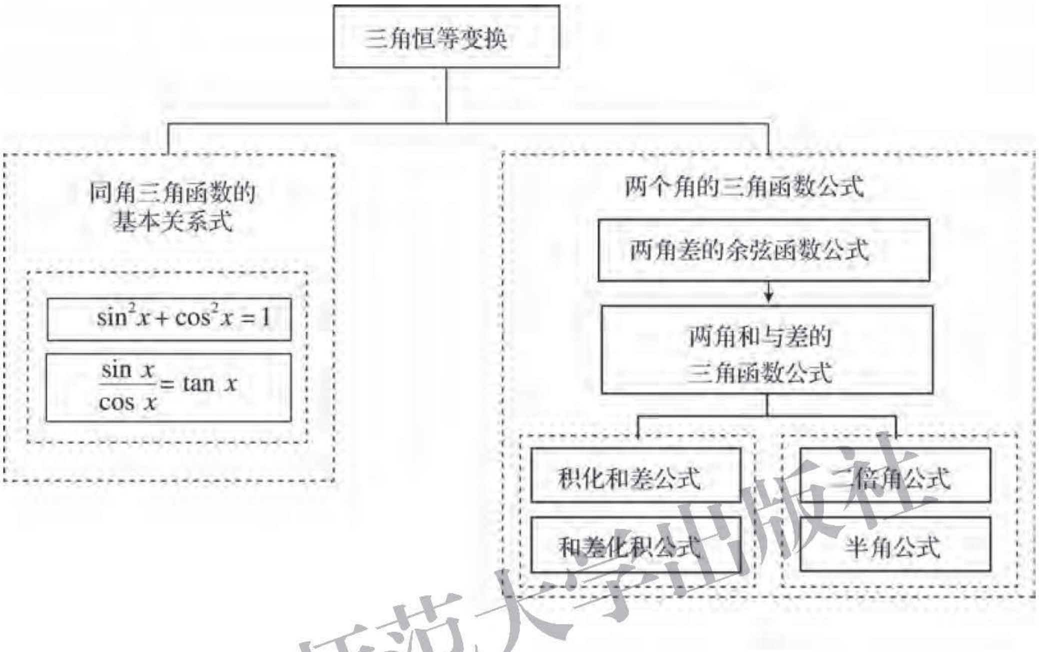
6. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{6}{5}$，你能求出 α，2α 的正切值吗？

7. 画出从公式 $C_{\alpha-\beta}$ 到半角的余弦公式的知识结构框图.

本章小结

一、知识结构

恒等变换是运算的基本功，依托三角恒等变换感悟运算体系的逻辑关系.



二、学习要求

1. 同角三角函数的基本关系式

理解同角三角函数的基本关系式：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.

2. 三角恒等变换

(1) 经历推导两角差余弦公式的过程，知道两角差余弦公式的意义.

(2) 能从两角差的余弦公式推导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系.

(3) 能运用上述公式进行简单的恒等变换（包括推导出积化和差、和差化积、半角公式，这三组公式不要求记忆）.

三、需要关注的问题

1. 以本章你做过的计算实例，阐述你是怎样“理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路”的？

2. 向量在三角恒等变换中有哪些应用？

3. 为什么说两角差的余弦函数公式是最基本的公式？

复习题四

A 组

1. 选择题，并说明选项正确的理由.

(1) 下列等式中，正确的是(　　).

A. $\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$　　B. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

C. $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$　　D. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(2) 若 $\tan 110^\circ=a$，则 $\tan 50^\circ$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{a+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}a}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}-a}{1+\sqrt{3}a}$　　C. $\dfrac{a-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}$　　D. $\dfrac{a-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}a}$

(3) 若 $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=m$，且角 β 为第三象限角，则 $\cos\beta$ 的值为(　　).

A. $\sqrt{1-m^2}$　　B. $-\sqrt{1-m^2}$　　C. $\sqrt{m^2-1}$　　D. $-\sqrt{m^2-1}$

(4) 化简 $\sqrt{1-\sin 20^\circ}$ 的结果是(　　).

A. $\cos 10^\circ$　　B. $\cos 10^\circ-\sin 10^\circ$

C. $\sin 10^\circ-\cos 10^\circ$　　D. $\pm(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)$

(5) $\dfrac{7}{16}-\dfrac{7}{8}\sin^2 15^\circ$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{7}{16}$　　B. $\dfrac{7}{32}$　　C. $\dfrac{7\sqrt{3}}{32}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{3}}{16}$

2. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，求 $\sin 2\alpha$.

3. 化简：

(1) $\sqrt{1-2\sin(3-\pi)\cos(3-\pi)}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{1-2\sin 190^\circ\cos 190^\circ}}{\cos 170^\circ+\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$.

4. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$，计算：

(1) $\dfrac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-4\cos\alpha}$；　　(2) $2\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$.

5. 已知 $\cos 2\alpha=a$，求 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值.

6. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，求 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值.

7. 求证：

(1) $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin 2\beta}{2\cos^2\beta}$；　　(2) $\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$；

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$；　　(4) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\tan 2\alpha$.

8. 求下列函数的周期及最大值、最小值：

(1) $y=\sin 3x\cos 3x$；　　(2) $y=\dfrac{1}{2}-\sin^2 x$；　　(3) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos x$.

B 组

1. 化简：$\cos\alpha\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

2. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，且$\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，计算：

(1) $\sin\alpha-\cos\alpha$；　　(2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

*3. 选择题，并说明选项正确的理由.

(1) 若 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，则 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值为(　　).

A. -1　　B. 1　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

(2) 在$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2a-3$ 中，实数 a 的取值范围是(　　).

A. $\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}$　　B. $a\leqslant\dfrac{1}{2}$　　C. $a>\dfrac{5}{2}$　　D. $-\dfrac{5}{2}\leqslant a\leqslant-\dfrac{1}{2}$

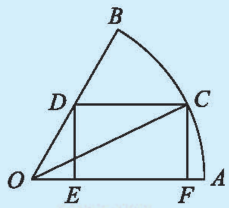
4. 化简：$\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=$________.

5. 若 2α 与 2β 互余，则$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=$________.

6. 计算：$\sin\dfrac{\pi}{12}-\sin\dfrac{5\pi}{12}+2\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{3\pi}{8}=$________.

7. 求 $\dfrac{\sin 8^\circ+\sin 7^\circ\cos 15^\circ}{\cos 8^\circ-\sin 7^\circ\sin 15^\circ}$ 的值.

8. 如图，圆心角为 60° 的扇形 AOB 的半径为 1，点 C 是$\overset{\frown}{AB}$ 上一点，作这个扇形的内接矩形 $CDEF$，当点 C 在什么位置时，这个矩形的面积最大？这时的 $\angle AOC$ 等于多少度？

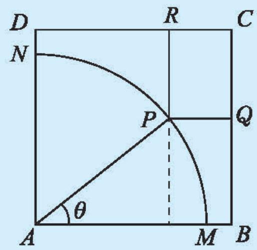


(第 8 题)

C 组

1. 已知 $a\neq 0$，函数 $f(x)=a\cos 2x+\sqrt{3}a\sin 2x-2a+b$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，若函数值域为$[-5,1]$，求常数 a，b 的值.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 是一块边长为 100 cm 的正方形铁皮，其中扇形 $AMPN$ 的半径为 90 cm，已经被腐蚀不能使用，其余部分完好可利用，P 是$\overset{\frown}{MN}$ 弧上一点，$\angle PAB=\theta$，工人师傅想在未被腐蚀部分截下一个边在 BC 与 CD 上的矩形铁皮，求矩形铁皮 $PQCR$ 面积的最大值和这时 θ 的值.



(第 2 题)

第五章

复　数

数是人类文明进程中的伟大创造．随着实际和运算的需要，经过长时间的发展，人们逐步把数从自然数扩充到有理数、实数．

复数是16世纪人们在讨论一元三次方程的求根公式时引入的，它在数学、力学、电学及其他学科中都有广泛的应用．

通过本章的学习，将了解引入复数的必要性，认识数系的扩充，掌握复数的表示、运算及其几何意义，感受人类理性思维对数学发展所起的重要作用，提高数学抽象和数学运算的核心素养．

复数系统在科学上的作用可大了，没有复数，便没有电磁学，便没有量子力学，便没有近代文明！

——陈省身(1911—2004)

§ 1 复数的概念及其几何意义

1.1 复数的概念

在数自身的发展中，求解方程是数系扩充的重要动力. 比如，要使像 $2x=1$ 这样的线性方程有解，就需要引进有理数；要使像 $x^2=2$ 这样的二次方程有解，就需要引进无理数，无理数与有理数构成实数.

然而，即使实数也无法完全满足求解二次方程的需要 . 像 $x^2=-1$ 这样一个简单的方程就没有实数解，因为任意实数的平方都不可能是负数.

为此，人们开始引进一个新数 i，叫作**虚数单位**，并规定：

(1)它的平方等于-1，即 $\mathrm{i}^2=-1$；

(2)实数与它进行四则运算时，原有的加法、乘法运算律仍然成立.

形如 $a+b\mathrm{i}$ (其中 $a,b\in\mathbf{R}$) 的数叫作**复数**，通常用字母 z 表示，即 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$，其中 a 称为复数 z 的**实部**，记作 $\mathrm{Re}\ z$，b 称为复数 z 的**虚部**，记作 $\mathrm{Im}\ z$.

对于复数 $a+b\mathrm{i}$，当且仅当 $b=0$ 时，它是实数；当且仅当 $a=b=0$ 时，它是实数 0；当 $b\neq 0$ 时，叫作**虚数**；当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，叫作**纯虚数**.

例如，$3+4\mathrm{i}$ 是复数，实部是 3，虚部是 4；虚数 $-0.5\mathrm{i}$ 的实部是 0，虚部是 -0.5；3 可以看作实部是 3，虚部是 0 的复数.

根据复数中 a,b 的取值不同，复数可以有以下的分类：

$$\text{复数 } a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}\text{实数}(b=0)；\\ \text{虚数}(b\neq 0).\quad(\text{当 } a=0 \text{ 时为纯虚数})\end{cases}$$

全体复数构成的集合称为**复数集**，记作 **C**. 显然 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

思考交流

写出自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R** 和复数集 **C** 的关系，并用 Venn 图表示.

例 1 说出下列三个复数的实部、虚部，并指出它们是实数还是虚数，如果是虚数，请指出是否为纯虚数：

(1) $1-\mathrm{i}$； (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$； (3) -7.

解 (1) $1-\mathrm{i}$ 的实部与虚部分别是 1 和 -1，它是虚数，但不是纯虚数；

(2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的实部与虚部分别是 0 和 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，它是虚数，而且是纯虚数；

(3) -7 的实部与虚部分别是 -7 和 0，它是实数.

两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ $(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 相等定义为：它们的实部相等且虚部相等，即

$$\boxed{a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i} \text{ 当且仅当 } a=c \text{ 且 } b=d.}$$

应当注意，两个实数可以比较大小，但是两个复数，如果不全是实数，它们之间就不能比较大小，只能说相等或不相等. 例如，$2+\mathrm{i}$ 和 $3+\mathrm{i}$ 之间无大小可言.

例 2 设 $x,y\in\mathbf{R}$，$(x+2)-2x\mathrm{i}=-3y+(y-1)\mathrm{i}$，求 x,y 的值.

解 由复数相等的定义，得 $\begin{cases}x+2=-3y,\\-2x=y-1.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$

1.2 复数的几何意义

问题提出

我们知道，实数与数轴上的点一一对应，可以用数轴上的点来表示实数. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$ 由实部 a 和虚部 b 两个实数确定，复数有什么几何意义呢?

分析理解

任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，都可以由一个有序实数对 (a,b) 唯一确定. 因为有序实数对 (a,b) 与平面直角坐标系中的点 (a,b) 一一对应，所以复数集与平面直角坐标系中的点集是一一对应的.

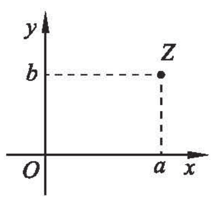


图 5-1

如图 5-1，点 Z 的横坐标是 a，纵坐标是 b，复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 可以用点 $Z(a,b)$ 表示. 这个通过建立平面直角坐标系来表示复数的平面称

为**复平面**，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**．显然，实轴的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数. 因此，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 是一一对应的，即

$$\text{复数 } z=a+b\mathrm{i} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复平面内的点 } Z(a,b)$$

这是复数的一种几何意义.

例如，复平面内的原点(0，0)表示复数 0，实轴上的点(3，0)表示复数 3，虚轴上的点(0，−1)表示复数 $-\mathrm{i}$，点(−3，2)表示复数 $-3+2\mathrm{i}$ 等.

在平面直角坐标系中，平面向量与有序实数对一一对应，而有序实数对与复数也是一一对应的．于是，还可以用平面向量来表示复数．如图 5－2，复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 与复平面内的向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 也是一一对应的，即

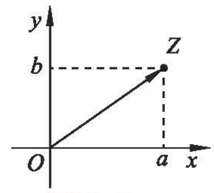


图 5－2

$$\text{复数 } z=a+b\mathrm{i} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{平面向量 } \overrightarrow{OZ}$$

这是复数的另一种几何意义.

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模称为复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的**模**，记作 $|z|$ 或 $|a+b\mathrm{i}|$．由向量模的定义可知，$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$．如果 $b=0$，那么 $z=a+b\mathrm{i}$ 是一个实数 a，它的模等于 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}=|a|$（$a$ 的绝对值).

虽然两个复数一般不能比较大小，但它们的模是非负实数，可以比较大小.

例 3　在复平面内，表示下列复数的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $|z|=2$；　　　　(2) $2\leqslant|z|\leqslant3$.

解　(1) 复数 z 的模等于 2 表明，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模等于 2，即点 Z 到原点 O 的距离等于 2，因此满足条件 $|z|=2$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心，以 2 为半径的圆(如图 5－3(1)).

(2) 不等式 $2\leqslant|z|\leqslant3$ 可以化为不等式组 $\begin{cases}|z|\leqslant3,\\|z|\geqslant2.\end{cases}$

满足 $|z|\leqslant3$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心、以 3 为半径的圆及其内部所有的点构成的集合；满足 $|z|\geqslant2$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心、以 2 为半径的圆及其外部所有的点构成的集合．因此，满足 $2\leqslant|z|\leqslant3$ 的点 Z 的集合是这两个集合的交集，即以原点 O 为圆心，以 2 和 3 为半径的两圆所夹的圆环，并包括圆环的边界(如图 5－3(2)).

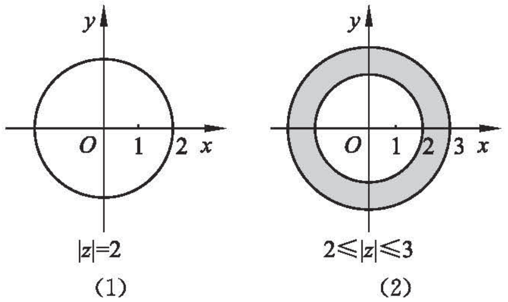


图 5－3

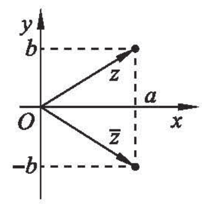


图 5－4

若两个复数的实部相等，而虚部互为相反数，则称这两个复数互为**共轭复数**．复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示．当 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$时，$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$. 显然，在复平面内，表示两个共轭复数的点关于实轴对称(如图 5－4)，并且它们的模相等．另外，当复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的虚部 $b=0$ 时，有 $z=\bar{z}$. 也就是说，任意一个实数的共轭复数仍是它本身，反之亦然.

例 4 在复平面内作出表示下列复数的点，并分别求出它们的模和共轭复数：

(1) $z_1=3-2\mathrm{i}$；(2) $z_2=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

解 在复平面作图如图 5－5.

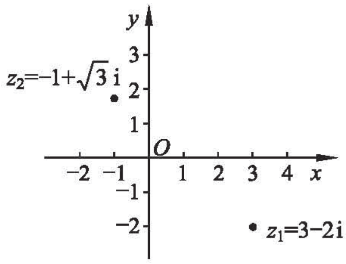


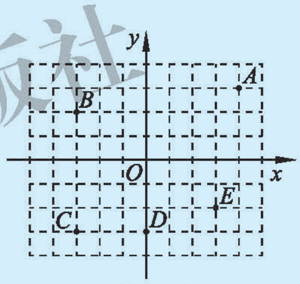
图 5－5

(1) $|z_1|=|3-2\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$，$\bar{z}_1=3+2\mathrm{i}$；

(2) $|z_2|=\left|-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$\bar{z}_2=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

练 习

1. 如图，设每个小方格的边长是 1，指出点 A,B,C,D,E 所表示的复数.



(第 1 题)

2. 设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$和复平面内的点 $Z(a,b)$对应，若点 Z 分别位于下列位置，求 a,b 满足的条件：

(1) 实轴上；(2) 虚轴上；

(3) 实轴上方(不包括实轴)；(4) 虚轴左侧(不包括虚轴)；

(5) 第二象限.

3. 在复平面内，作出表示下列各复数的点和所对应的向量：

(1) $2-4\mathrm{i}$；(2) $-3\mathrm{i}$；(3) -2；(4) $2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$；

(5) $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$.

4. 求下列复数的模和共轭复数：

(1) $z_1=12-5\mathrm{i}$；(2) $z_2=\sqrt{3}\mathrm{i}$；(3) $z_3=\sqrt{3}-\mathrm{i}$；(4) $z_4=6$.

习题 5－1

A 组

1. 求实数 m 的值，使复数$(m^2-2m-3)+(m^2-3m-4)\mathrm{i}$ 分别是：

(1) 实数；(2) 纯虚数；(3) 零.

2. 求适合下列各方程的实数 x,y 的值：

(1) $(x+y)-xy\mathrm{i}=6+7\mathrm{i}$；(2) $(x^2-4x-5)+(y^2+3y-4)\mathrm{i}=0$；

(3) $2x-1+(y+1)\mathrm{i}=x-y-(x+y)\mathrm{i}$.

3. 在复平面内作出表示下列复数的点：

(1) $-1+2\mathrm{i}$；　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$；　(3) $3\mathrm{i}$；　(4) 5.

4. 求下列复数的模和共轭复数：

(1) $3-4\mathrm{i}$；　(2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；　(3) -6；　(4) $-5\mathrm{i}$.

5. 设 $z\in\mathbf{C}$，则满足 $1\leqslant|z|\leqslant 3$ 的复数在复平面上的对应点构成图形的面积是(　　).

A. π　B. 4π　C. 8π　D. 9π

6. 当 $\frac{2}{3}<m<1$ 时，复数 $z=3m-2+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面内的对应点位于第____象限.

B　组

1. 设复数 $z=(m-1)+(m^2-4m-5)\mathrm{i}$ 和复平面内的点 Z 对应，若点 Z 的位置满足下列要求，分别求实数 m 的取值范围，并写出你的求解思路：

(1) 不在实轴上；　(2) 在虚轴上；

(3) 在实轴下方(不包括实轴)；　(4) 在虚轴右侧(不包括虚轴)；

(5) 第三象限.

2. 设 $x\in\mathbf{R}$，若复数 $z=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)+\mathrm{i}\cdot\log_2(x+3)$ 在复平面内的对应点在第三象限，求 x 的取值范围.

§2 复数的四则运算

2.1 复数的加法与减法

一、复数的加法与减法

对任意两个复数 $a+bi$ 和 $c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，我们希望它们的和仍然是一个复数，并且保持实数的运算律．因此规定：**两个复数的和仍是一个复数，两个复数的和的实部是它们的实部的和，两个复数的和的虚部是它们的虚部的和**．也就是：

$$\boxed{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.}$$

我们通过引入相反数来定义复数的减法.

给定复数 z_2，若存在复数 z，使得 $z_2+z=0$，则称 z 是 z_2 的相反数，记作 $z=-z_2$.

设 $z_2=c+di$ 的相反数是 $z=x+yi(x,y,c,d\in\mathbf{R})$，则 $(c+x)+(d+y)i=0$，解得 $x=-c,y=-d$，即 $z=-c-di=-(c+di)=-z_2$.

对任意的复数 $z_1=a+bi$ 和非零复数 $z_2=c+di$，规定复数的减法：$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$，即减去一个复数，等于加上这个复数的相反数. 也就是：

$$\boxed{(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.}$$

由此可见，**两个复数的差仍是一个复数，两个复数的差的实部是它们的实部的差，两个复数的差的虚部是它们的虚部的差**.

例 1 计算：$(-5+3i)+(2-4i)+(2\sqrt{3}-4i)$.

解
$$\begin{aligned}(-5+3i)+(2-4i)+(2\sqrt{3}-4i)&=[(-5+3i)+(2-4i)]+(2\sqrt{3}-4i)\\&=[(-5+2)+(3-4)i]+(2\sqrt{3}-4i)\\&=(-3-i)+(2\sqrt{3}-4i)\\&=(-3+2\sqrt{3})+(-1-4)i\\&=(-3+2\sqrt{3})-5i.\end{aligned}$$

例 2 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，求 $z+\bar{z}$ 与 $z-\bar{z}$.

解 因为 $z=a+bi$，所以 $\bar{z}=a-bi$，

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)i=2a,$$
$$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=(a-a)+[b-(-b)]i=2bi.$$

复数的加法运算满足如下运算律：

(1) 结合律：$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$；
(2) 交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$.

例 3 证明：复数的加法满足结合律.

证明 对任意三个复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$ 和 $z_3=e+f\mathrm{i}(a,b,c,d,e,f\in\mathbf{R})$，有

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)+z_3&=[(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})]+(e+f\mathrm{i})\\&=[(a+c)+(b+d)\mathrm{i}]+(e+f\mathrm{i})\\&=(a+c+e)+(b+d+f)\mathrm{i},\\z_1+(z_2+z_3)&=(a+b\mathrm{i})+[(c+d\mathrm{i})+(e+f\mathrm{i})]\\&=(a+b\mathrm{i})+[(c+e)+(d+f)\mathrm{i}]\\&=(a+c+e)+(b+d+f)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

所以 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$，即复数的加法满足结合律.

思考交流

证明复数的加法满足交换律，并与同学交流.

二、复数加法的几何意义

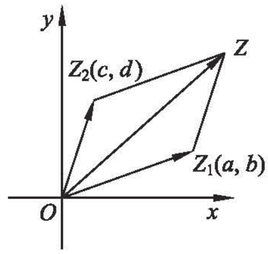


图 5-6

我们已经知道，可以用平面向量表示复数. 如图 5-6，$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 分别与向量 $\overrightarrow{OZ_1}=(a,b)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(c,d)$ 对应，根据平面向量的坐标运算，得

$$\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(a+c,b+d).$$

这说明两个向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 的和就是与复数 $(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$ 对应的向量. 因此，复数的加法可以按照向量的加法来进行，这是复数加法的几何意义.

例 4 已知向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数是 $z=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$，请计算 $z+(-2-\mathrm{i})$ 的结果，并给出几何解释.

解
$$\begin{aligned}z+(-2-\mathrm{i})&=(-2+2\sqrt{3}\mathrm{i})+(-2-\mathrm{i})\\&=(-2-2)+(2\sqrt{3}-1)\mathrm{i}\\&=-4+(2\sqrt{3}-1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

如图 5-7，这两个复数的和与相应的两个向量的和相对应.

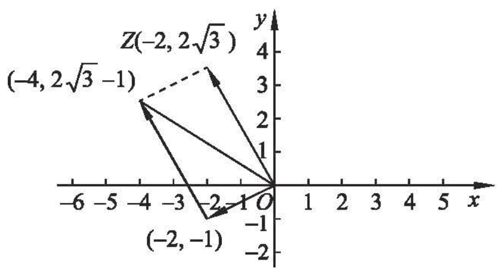


图 5-7

练 习

1. 计算：

(1) $-7+(-3-\mathrm{i})$；

(2) $(3-2\mathrm{i})+(-1+2\mathrm{i})$；

(3) $(-\sqrt{6}-2\mathrm{i})+(\sqrt{6}+2\mathrm{i})$；

(4) $(3\sqrt{2}-2\mathrm{i})-(-\sqrt{2}+3\mathrm{i})+(4\sqrt{2}+3\mathrm{i})$；

(5) $(3\sqrt{5}-4\mathrm{i})-(-\sqrt{5}+2\mathrm{i})$；

(6) $(8-2\mathrm{i})-(-7+5\mathrm{i})+(3\sqrt{3}+7\mathrm{i})$.

2. 类比复数加法的几何意义，请写出复数减法的几何意义.

2.2 复数的乘法与除法

一、复数的乘法

对任意两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，类比多项式乘法，并利用$\mathrm{i}^2=-1$，有

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}-bd=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

因此，定义复数的乘法如下：

$$\boxed{(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.}$$

在进行复数乘法运算时，实际上不直接使用乘法法则，而使用多项式乘法法则.

例 5 计算：$(-2-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$.

解
$$\begin{aligned}(-2-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})&=-2\times3-2\times\mathrm{i}-3\times\mathrm{i}-\mathrm{i}\times\mathrm{i}\\&=-6-2\mathrm{i}-3\mathrm{i}-\mathrm{i}^2\\&=-6-2\mathrm{i}-3\mathrm{i}+1\\&=-5-5\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 6 计算：$(-2-3\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})(\sqrt{6}+\mathrm{i})$.

解
$$\begin{aligned}(-2-3\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})(\sqrt{6}+\mathrm{i})&=[(-2-3\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})](\sqrt{6}+\mathrm{i})\\&=(2-6\mathrm{i}+3\mathrm{i}-9\mathrm{i}^2)(\sqrt{6}+\mathrm{i})\\&=(11-3\mathrm{i})(\sqrt{6}+\mathrm{i})\\&=11\sqrt{6}+11\mathrm{i}-3\sqrt{6}\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2\\&=(11\sqrt{6}+3)+(11-3\sqrt{6})\mathrm{i}.\end{aligned}$$

可以验证，复数的乘法满足交换律、结合律及乘法对加法的分配律，即对任意z_1，z_2，

$z_3\in\mathbf{C}$,有

(1)交换律:$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;

(2)结合律:$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$;

(3)乘法对加法的分配律:$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

对于复数 z,定义它的乘方 $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}$. 根据乘法的运算律,实数范围内正整数指数幂的运算性质在复数范围内仍然成立,即对复数 z,z_1,z_2 和正整数 m,n,有

$$z^m\cdot z^n=z^{m+n},(z^m)^n=z^{mn},(z_1\cdot z_2)^n=z_1^n\cdot z_2^n.$$

在复数的乘方运算中,经常要计算 i 的乘方,i 的乘方有如下规律:

$$\mathrm{i}^0=1,\quad \mathrm{i}^1=\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^2=-1,\quad \mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\cdots$$

一般地,对任意自然数 n,有

$$\mathrm{i}^{4n}=1,\quad \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

例 7 计算:

(1) $(1+\mathrm{i})^4$;　　(2) $(2-\mathrm{i})^2(2+\mathrm{i})^2$.

解 (1) $(1+\mathrm{i})^4=[(1+\mathrm{i})^2]^2=(1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)^2=(2\mathrm{i})^2=-4$;

(2) $(2-\mathrm{i})^2(2+\mathrm{i})^2=[(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})]^2=(4+1)^2=25$.

例 8 计算:$\mathrm{i}^{21},\mathrm{i}^{16},\mathrm{i}^{27},\mathrm{i}^{22}$.

解 $\mathrm{i}^{21}=\mathrm{i}^{4\times5+1}=\mathrm{i}$,　　$\mathrm{i}^{16}=\mathrm{i}^{4\times4}=1$,

$\mathrm{i}^{27}=\mathrm{i}^{4\times6+3}=-\mathrm{i}$,　　$\mathrm{i}^{22}=\mathrm{i}^{4\times5+2}=-1$.

例 9 求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $a\neq0)$在复数范围内的根 x_1,x_2,并验证 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

解 使用配方法容易得到 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.

(1)若 $b^2-4ac\geqslant0$,则 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

因此 $x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\dfrac{b}{a}$,

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

(2)若 $b^2-4ac<0$,则 $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\mathrm{i}$,即 $x_1=\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}$,$x_2=\frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}$.

因此 $x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}=-\frac{b}{a}$,

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}=\frac{b^2+(4ac-b^2)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

综上所述,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$在复数范围内的根 x_1,x_2 都满足

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

思考交流

计算下列各式,你发现其中有什么规律吗?请将你概括出的规律与同学交流,并证明.

(1) $(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$;　　(2) $(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$;

(3) $(-2\sqrt{2}-\mathrm{i})(-2\sqrt{2}+\mathrm{i})$;　　(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}\mathrm{i})(\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i})$.

我们可以得到:**互为共轭复数的两个复数的乘积是实数,等于这个复数(或其共轭复数)模的平方**.即若 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2=a^2+b^2$.

例 10 证明:对任意的两个复数 z_1,z_2,若 $z_1\cdot z_2=0$,则 z_1,z_2 至少有一个为 0.

证明 设 $z_1\neq0$,则 $|z_1|\neq0$,z_1 的共轭复数 $\bar{z}_1\neq0$.

将 $z_1\cdot z_2=0$ 的左右两边同时乘 $\bar{z}_1$,得

$$z_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_1=0\cdot\bar{z}_1,$$

$$|\bar{z}_1|^2\cdot z_2=0.$$

因为 $|z_1|^2\neq0$,所以 $z_2=0$.

二、复数的除法

我们通过引入倒数来定义复数的除法.

给定复数 z_2,若存在复数 z,使得 $z_2\cdot z=1$,则称 z 是 z_2 的倒数,记作 $z=\frac{1}{z_2}$.

设 $z_2=c+d\mathrm{i}\neq0$ 和 $z=x+y\mathrm{i}(c,d,x,y\in\mathbf{R})$,则

$$z_2\cdot z=(c+d\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=cx-dy+(cy+dx)\mathrm{i}=1,$$

所以$\begin{cases}cx-dy=1,\\cy+dx=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\dfrac{c}{c^2+d^2},\\y=-\dfrac{d}{c^2+d^2}.\end{cases}$

所以 $z_2=c+d\mathrm{i}$ 的倒数$\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{c}{c^2+d^2}-\dfrac{d}{c^2+d^2}\mathrm{i}$.

这里要求 c,d 不能同时为 0,即 $z_2\neq0$.

对任意的复数 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$和非零复数 $z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$,规定复数的除法:$\dfrac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}$,即除以一个复数,等于乘这个复数的倒数. 因此

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=(a+b\mathrm{i})\left(\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}\mathrm{i}\right)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

在实际计算$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$时,通常把分子和分母同乘分母 $c+d\mathrm{i}$ 的共轭复数 $c-d\mathrm{i}$,化简后就得到上面的结果:

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

由此可见,在进行复数除法运算时,实际上是将分母“实数化”.

例 11 计算:

(1) $\dfrac{-1}{2\mathrm{i}}$;　　(2) $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$;　　(3) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^6$.

解 (1) $\dfrac{-1}{2\mathrm{i}}=\dfrac{-1\times(-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$;

(2) $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}=\dfrac{-4+7\mathrm{i}}{13}=-\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}\mathrm{i}$;

(3) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^6=\left[\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right]^6=\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{2}\right)^6=\mathrm{i}^6=-1$.

练 习

1. 计算：

(1) $(1+3i)(3+2i)$；　　(2) $(-1-2i)(2i+4)$；

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$；　　(4) $(3+2i)(-3+2i)$.

2. 计算：

(1) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$；　　(2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$.

3. 计算：

(1) $(-2+3i)^2$；　　(2) $(1+2i)^4$.

4. 计算：

(1) $\dfrac{i}{2-3i}$；　　(2) $\dfrac{2+i}{1-i}+\dfrac{1+i}{3-i}$.

*2.3 复数乘法几何意义初探

在复平面内，设复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=z_1\cdot 2$，利用复数的乘法运算法则，则 $z_2=(a+bi)\cdot 2=2a+2bi$. 根据复数的几何意义，复数 z_1，z_2 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}=(a,b)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(2a,2b)$，则 $\overrightarrow{OZ_2}=2\overrightarrow{OZ_1}$. 由向量数乘的几何意义，可知 $\overrightarrow{OZ_2}$ 是将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 沿原方向伸长为原来的2倍得到的.

思考交流

在复平面内，设复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=z_1\cdot\dfrac{1}{2}$，它们分别对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，如何直观地理解 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 之间的位置关系呢？

问题提出

在复平面内，设复数 $z_1=1+i$，$z_2=z_1\cdot i$，它们分别对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，如何直观地理解 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 之间的位置关系呢？

分析理解

根据复数的乘法运算法则，有

$z_2=z_1\cdot i=(1+i)\cdot i=1\times i+i\times i=-1+i$.

在复平面内作出复数 z_1，z_2 分别对应的点 Z_1，Z_2；然后分别过点 Z_1，Z_2 作垂直于 x 轴的线段，交点分别为点 Z_1'，Z_2'，再分别过点 Z_1，Z_2 作垂直于 y 轴的线段，交点分别为点 Z_1''，$Z_2''(Z_1'')$，如图5-8. 易知，$z_1=1+i$ 中的 1 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1'}$，i 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1''}$，所以 $\overrightarrow{OZ_1}=\overrightarrow{OZ_1'}+\overrightarrow{OZ_1''}$.

前加“*”者为选学内容，不作考试要求.

$z_2=-1+\mathrm{i}=1\times\mathrm{i}+\mathrm{i}\times\mathrm{i}$ 中的 -1 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_2'}$，是由 i 对应的向量$\overrightarrow{OZ_1''}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的；i 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_2''}$，是由 1 对应的向量$\overrightarrow{OZ_1'}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的.

因此，$\overrightarrow{OZ_2}=\overrightarrow{OZ_2'}+\overrightarrow{OZ_2''}$是由$\overrightarrow{OZ_1'}+\overrightarrow{OZ_1''}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的，即$\overrightarrow{OZ_2}$是由$\overrightarrow{OZ_1}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的.

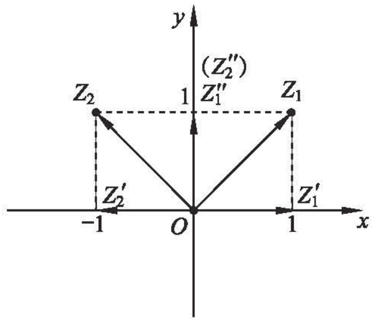


图 5－8

例 12 在复平面内，复数 $z_1=3-2\mathrm{i}$，$z_2=z_1\cdot\mathrm{i}$，它们分别对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，如何直观地理解$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$之间的位置关系呢？

解 根据复数的乘法运算法则，有

$z_2=z_1\cdot\mathrm{i}=(3-2\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}=3\times\mathrm{i}+(-2\mathrm{i})\times\mathrm{i}=2+3\mathrm{i}$.

在复平面内标出复数 z_1，z_2 分别对应的点 Z_1，Z_2；然后分别过点 Z_1，Z_2 作垂直于 x 轴的线段，交点分别为点 Z_1'，Z_2'，再分别过点 Z_1，Z_2 作垂直于 y 轴的线段，交点分别为点 Z_1''，Z_2''，如图 5－9. 易知，$z_1=3-2\mathrm{i}$ 中的 3 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1'}$，$-2\mathrm{i}$ 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1''}$，所以$\overrightarrow{OZ_1}=\overrightarrow{OZ_1'}+\overrightarrow{OZ_1''}$.

$z_2=2+3\mathrm{i}=3\times\mathrm{i}+(-2\mathrm{i})\times\mathrm{i}$ 中的 2 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_2'}$，是由 $-2\mathrm{i}$对应的向量$\overrightarrow{OZ_1''}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的；$3\mathrm{i}$ 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_2''}$，是由 3 对应的向量$\overrightarrow{OZ_1'}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的.

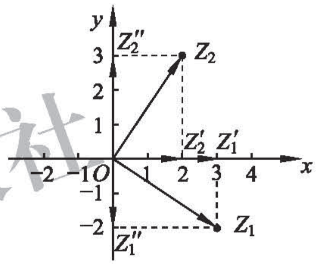


图 5－9

因此，$\overrightarrow{OZ_2}=\overrightarrow{OZ_2'}+\overrightarrow{OZ_2''}$是由$\overrightarrow{OZ_1'}+\overrightarrow{OZ_1''}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的，即$\overrightarrow{OZ_2}$是由$\overrightarrow{OZ_1}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的.

抽象概括

设复数 $z_1=a+b\,\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$所对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1}$.

若 $z_2=(a+b\,\mathrm{i})\cdot c(c>0)$所对应的向量为$\overrightarrow{OZ_2}$，则$\overrightarrow{OZ_2}$是$\overrightarrow{OZ_1}$与 c 的数乘，即$\overrightarrow{OZ_2}$是将$\overrightarrow{OZ_1}$沿原方向伸长$(c>1)$或压缩$(0<c<1)$$c$ 倍得到的.

$z_3=(a+b\,\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}$ 所对应的向量为$\overrightarrow{OZ_3}$，则$\overrightarrow{OZ_3}$是将$\overrightarrow{OZ_1}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的.

思考交流

在复平面内，复数 $z_1=a+b\,\mathrm{i}$，$z_2=z_1\cdot(-\mathrm{i})$，$z_3=z_1\cdot(-\mathrm{i})^2(a,b\in\mathbf{R})$，它们对应的向量分别为$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_3}$，如何直观地理解$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_3}$之间的位置关系呢？

练 习

1. 在复平面内，复数 $z_1=a+b\,\mathrm{i}$，$z_2=z_1\cdot(2\mathrm{i})$，$z_3=z_1\cdot(2\mathrm{i})^2$ $(a,b\in\mathbf{R})$，它们对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_3}$，如何直观地理解 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_3}$ 之间的位置关系呢？

2. 在复平面内，复数 $z_1=a+b\,\mathrm{i}$，$z_2=z_1\cdot\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$，$z_3=z_1\cdot\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^2$ $(a,b\in\mathbf{R})$，它们对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_3}$，如何直观地理解 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_3}$ 之间的位置关系呢？

习题 5－2

A 组

1. 计算：

(1) $\mathrm{i}+(3+4\mathrm{i})$；　(2) $(1-\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})$；

(3) $(2-\mathrm{i})-(3+\mathrm{i})$；　(4) $(1-4\mathrm{i})+(2-\mathrm{i})$.

2. 计算：

(1) $(1+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})$；　(2) $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$；

(3) $(3+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$；　(4) $[(5-4\mathrm{i})+(1+3\mathrm{i})](5+2\mathrm{i})$.

3. 计算(其中 $n\in\mathbf{N}$)：

(1) $\mathrm{i}^{4n}+\mathrm{i}^{4n+1}+\mathrm{i}^{4n+2}+\mathrm{i}^{4n+3}$；　(2) $\mathrm{i}^{4n}\cdot\mathrm{i}^{4n+1}\cdot\mathrm{i}^{4n+2}\cdot\mathrm{i}^{4n+3}$.

4. 计算：

(1) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$；　(2) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；　(3) $\dfrac{\mathrm{i}-2}{2+\mathrm{i}}$；　(4) $\dfrac{3-5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

5. 计算：

(1) $(1+2\mathrm{i})^2$；　(2) $(3-4\mathrm{i})^2$.

6. 计算：$\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$.

7. 已知 m 为实数，并且 $\dfrac{1+m\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+\dfrac{1}{2}$ 的实部与虚部相等，求 m 的值.

8. 证明：若 $z_1=z_2$，则 $z_1\cdot w=z_2\cdot w$（w 是任意的非零复数）.

B 组

1. 已知 $z=\dfrac{(4-3\mathrm{i})(-1+\sqrt{7}\mathrm{i})}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}$，求 $|z|$.

2. 求 $\dfrac{a+b\mathrm{i}}{b-a\mathrm{i}}+\dfrac{a-b\mathrm{i}}{b+a\mathrm{i}}$ $(a,b\in\mathbf{R})$ 的值.

3. 已知 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$,求证:

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; (2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$;

(3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; (4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

4. 设复数 $z=\dfrac{a-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}(a>0)$,若复数 $w=z(z+\mathrm{i})$的虚部减去其实部的差等于$\dfrac{3}{2}$,求复数 w.

5. 利用公式 $a^2+b^2=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})(a,b\in\mathbf{R})$,把下列各式分解成一次因式的积:

(1)x^2+4; (2) a^4-b^4.

*6. 在复平面内,菱形 $ABCD$ 对角线交点为原点 O,且两条对角线长度之比为 2∶1,顶点 A 对应的复数是 $z=6+8\mathrm{i}$,设 B,C,D 三点对应的复数分别为 $z\cdot z_1,z\cdot z_1\cdot z_2,z\cdot z_1\cdot z_2\cdot z_3$,求 z_1,z_2,z_3,并计算出 B,C,D 三点所对应的复数.

*§ 3 复数的三角表示

3.1 复数的三角表示式

如图 5－10，我们知道，与复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模 r 称为这个复数的模，且 $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

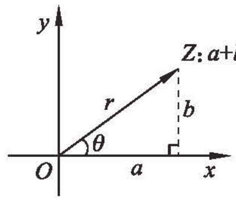


图 5－10

以原点 O 为顶点，x 轴的非负半轴为始边、向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线为终边的角 θ，称为复数 $z=a+bi$ 的**辐角**.

从图 5－10 可以知道：

$$\begin{cases} a=r\cos\theta, \\ b=r\sin\theta. \end{cases}$$

因此，

$$z=a+bi=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

于是，任何复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 都可以表示为

$$\boxed{\begin{gathered} z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \\ \text{其中 } r=\sqrt{a^2+b^2}, \cos\theta=\frac{a}{r}, \sin\theta=\frac{b}{r}. \end{gathered}}$$

这个式子称为复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的**三角表示式**，简称**三角形式**. 为了与三角形式区分，$a+bi$ 称为复数的**代数表示式**，简称**代数形式**.

当 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\neq0$ 时，z 的辐角有无穷多个值，这些值相差 2π 的整数倍. 例如，复数 i 的辐角是 $\frac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 k 可以取任何整数.

为确定起见，将满足条件 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角值，称为**辐角的主值**，记作 $\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$. 每一个非零复数有唯一的模与辐角的主值，并且可由它的模与辐角的主值唯一确定. 因此，**两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角的主值分别相等**.

显然，当 $a>0$ 时，

$$\arg a=0, \arg(-a)=\pi, \arg(a\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}, \arg(-a\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}.$$

如果 $z=0$，那么与它对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 缩成一个点（零向量），它的方向是任意的，所以复数 0 的辐角也是任意的.

复数的代数形式可以转化为三角形式，三角形式也可以转化为代数形式. 我们可以根据运算的需要，将复数的三角形式和代数形式进行互化.

前加“*”者为选学内容，不作考试要求.

例 1 请将以下复数表示为三角形式(辐角取主值)：

(1) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$； (2) $1-\mathrm{i}$； (3) -1.

解 (1) 因为 $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$，

于是 $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 因为 $r=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\theta=\frac{7\pi}{4}$，

于是 $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

(3) 因为 $r=\sqrt{(-1)^2+0}=1$，$\cos\theta=-1$，$\sin\theta=0$，所以 $\theta=\pi$，

于是 $-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$.

3.2 复数乘除运算的几何意义

一、乘法

将复数 z_1，z_2 分别用三角形式表示为

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

由复数乘法的定义与两角和的三角函数公式，有

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)], \end{aligned}$$

即

$$\boxed{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].}$$

这就是说，**两个复数相乘，积的模等于它们的模的积，积的辐角等于它们的辐角的和.**

据此，两个复数 z_1，z_2 相乘时，可以先画出它们分别对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，然后把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕原点 O 按逆时针方向旋转角 θ_2(若 $\theta_2<0$，就要把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕原点 O 按顺时针方向旋转角 $|\theta|$)，再把它的模变为原来的 r_2 倍，所得向量 $\overrightarrow{OZ}$ 就表示复数 z_1，z_2 的乘积(如图 5－11).

这是复数乘法的几何意义.

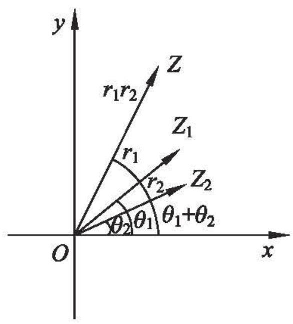


图 5－11

例 2 如图 5－12，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与复数 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ 对应，把 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 按逆时针方向旋转 120°得到 $\overrightarrow{OZ'}$，求 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数(用代数形式表示).

解 根据复数乘法的几何意义,所求的复数就是$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$乘一个复数$z_0$的积,$z_0$的模是1,辐角的主值是120°. 故所求的复数是

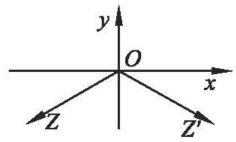


图 5-12

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\cdot(\cos 120°+i\sin 120°)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

例 3 试证明:$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$.

证明
$$\begin{aligned}[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^3&=r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=[r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)]\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta).\end{aligned}$$

二、除法

设$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,且$z_2\neq 0$,则

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)-i(\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2)]\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)],\end{aligned}$$

所以 $$\boxed{\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].}$$

这就是说,**两个复数相除,商的模等于被除数的模除以除数的模,商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差.**

例 4 计算:$\dfrac{4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$,并把结果化为代数形式.

解
$$\begin{aligned}\frac{4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}&=\frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\&=2(0+i)\\&=2i.\end{aligned}$$

思考交流

请计算复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的平方根和 3 次方根，并与同学交流.

练　习

1. 画出下列复数所对应的向量，并用三角形式表示(辐角取主值)：

(1) 4；　　(2) $-2\mathrm{i}$；

(3) $-2+2\mathrm{i}$；　　(4) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

2. 把下列复数表示成代数形式：

(1) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$；　　(2) $6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

3. 计算：

(1) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $\left[12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^4$；

(3) $\sqrt{2}(\cos 240^\circ+\mathrm{i}\sin 240^\circ)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ)$；　　(4) $\dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}}$.

4. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，$BC=\frac{1}{3}AC$，点 E 在 AC 上，且 $EC=2AE$. 利用复数证明：$\angle CBE+\angle CBA=\frac{3\pi}{4}$.

5. 把下列复数表示成代数形式：

(1) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$；

(3) $9(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$；　　(4) $6\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

*习题 5－3

A　组

1. 在复平面内作出下列复数对应的向量，并用三角形式表示(辐角取主值)：

(1) 6；　(2) $1+\mathrm{i}$；　(3) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；　(4) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

2. 判断下列复数是不是复数的三角形式，并说明理由：

(1) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

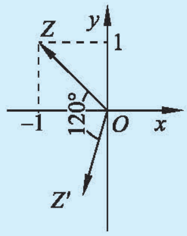
3. 计算:

(1) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$; (2) $\dfrac{10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{5\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}$;

(3) $\sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$; (4) $\dfrac{12\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{6\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}$;

(5) $[3(\cos 10°+\mathrm{i}\sin 10°)]^6$; (6) $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$.

4. 如图,向量$\overrightarrow{OZ}$与复数$-1+\mathrm{i}$对应,把$\overrightarrow{OZ}$绕原点O按逆时针方向旋转$120°$得到$\overrightarrow{OZ'}$,求$\overrightarrow{OZ'}$对应的复数(用代数形式表示),写出你的思考过程.



(第 4 题)

B 组

1. 在复平面内,将与复数$3-\sqrt{3}\mathrm{i}$对应的向量绕原点O按顺时针方向旋转$60°$,求与所得的向量对应的复数,写出你的思考过程.
2. 利用复数证明余弦定理.
3. 计算$-\mathrm{i}$的5次方根.

阅读材料

数系的扩充

为了创造一个既符合实际又满足理论需要的强有力的工具,经过长时间的发展,人们把数的概念一次又一次地扩充,逐步把数从自然数扩充到有理数、实数、复数.

一、有理数

在日常生活中,我们不仅要数单个的对象,而且也需要度量像长度、面积、质量和时间这样的量.假如我们度量一块铅的质量,选择1 g作为度量单位,然后称一称这块铅包含多少个1 g.这块铅可能恰好是54 g.但实际上,往往不一定是1 g的整数倍,如介于53 g和54 g之间.这样自然数就不够用了.遇到这种情形时,我们将进行下一步:通过把原单位进行n等分,引进一个更小的单位,用符号$\frac{1}{n}$来表示;而且如果一个给定的量恰好包含m个小单位,它的度量将用符号$\frac{m}{n}$来表示,称为分数或比(有时记作$m:n$).经过了若干世纪的摸索,人们才有意识地采取了以下一个决定性的步骤,即符号$\frac{m}{n}$脱离了它与测量过程及被测量的量的具体关系,而被看作一种纯粹的数,它本身作为一个实体

与自然数有同样的地位. 当 m 和 $n(n\neq 0)$ 是自然数时,符号$\frac{m}{n}$称为有理数.

这些新的符号叫作数(数这个词原来只是指自然数)是合理的,因为一旦定义有理数的加法和乘法:$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$,$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$,这些符号的加法和乘法与自然数的加法和乘法就有同样的运算律.

引进有理数,除了有其"实际"原因以外,还有一个更内在的,从某些方面来看甚至更为迫切的理由. 在自然数中,总能进行两个基本运算:加法和乘法. 但是"逆运算"减法和除法并不总是可行的. 两个整数 a,b 的差$(b-a)$是一个使得 $a+c=b$ 的整数 c,即方程 $a+x=b$ 的解. 但在自然数的范围内,$b-a$ 有意义仅限于 $b\geqslant a$,因为只有这时方程 $a+x=b$ 才有一个自然数的解 x. 通过引进-1,-2,-3,…,以及对 $b<a$ 的情况,定义 $b-a=-(a-b)$,保证了减法能在正整数和负整数范围内自如地进行. 类似地,分数的引进,消除了除法运算的障碍. 用方程 $ax=b(a\neq 0)$定义的两个整数 a 和 b 的比 $x=\frac{b}{a}$,仅当 a 是 b 的一个因子时才作为一个整数而存在;如果 a 不是 b 的因子,我们简单地引进一个新的符号$\frac{b}{a}$,称为分数,它服从于 $a\cdot\frac{b}{a}=b$ 这样的规则,使得$\frac{b}{a}$是 $ax=b$ 的解. 这样除法可以不受限制地自如进行. 全体有理数(整数和分数)的纯算术意义很明显,在有理数范围内,加、减、乘、除可以自如地进行.

从自然数到有理数的推广,既满足去掉减法和除法的限制这一理论上的需要,也满足用数来表示度量结果这一实际上的需要. 这就使得有理数有了它真正的重大意义.

二、无理数

设想所有具有有理坐标的点都已在某条直线上一一标出,并简称这些点为有理点. 于是,我们说坐标轴上这些有理点是"稠密的",意思是每一个区间不管多小都有无限多的有理点,似乎直线上所有的点都是有理点. 若真是这样,则任一线段将和单位长线段可公度(公度是一个几何学概念,对于线段 a 和 b,如果存在线段 d,使得 $a=md$,$b=nd$(m,n 为自然数),那么称线段 d 为线段 a 和 b 的一个公度). 但实际上却没这么简单.

例如,图 5-13 中的正五边形$A_1B_1B_2C_2C_1$的边长为 a,对角线B_1C_2和B_2C_1的交点为A_2,对角线长为 b. 问题:a 和 b 是否可以公度?

因为五边形的内角和等于 3π,所以正五边形$A_1B_1B_2C_2C_1$的每个内角都等于$\frac{3\pi}{5}$,所以等腰三角形 $B_1B_2C_2$ 和等腰三角形 $B_2C_2C_1$ 的两底角皆为$\frac{\pi}{5}$. 从而$\angle C_1A_2C_2=\angle C_1C_2A_2=\frac{2\pi}{5}$,$\angle A_2C_2B_2=\angle A_2B_2C_2=\frac{\pi}{5}$.

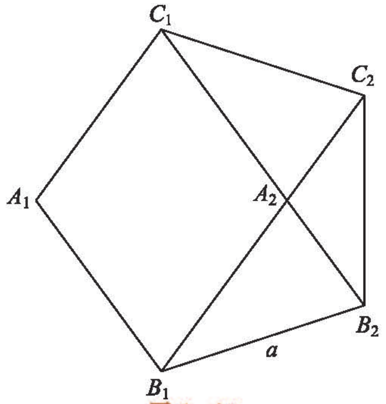


图 5-13

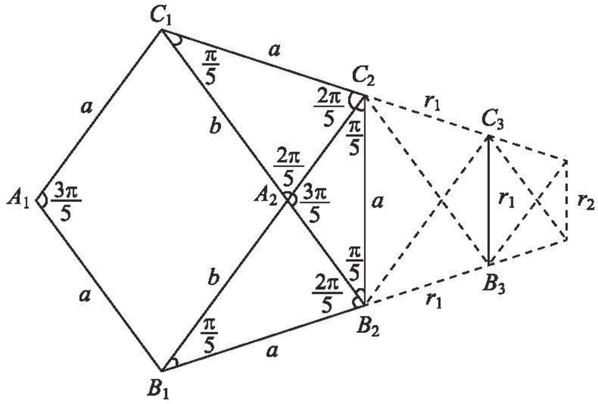


图 5-14

于是$\triangle C_1A_2C_2$ 和$\triangle A_2B_2C_2$ 都是等腰三角形. 从而有$C_1A_2=C_1C_2=a$，所以 $b=a+A_2B_2$.

如图 5-14，若将边长C_1C_2延长$r_1=A_2B_2$至点C_3，将边长B_1B_2延长$r_1=A_2B_2$至点B_3，并连接 B_3C_3，易证五边形$A_2B_2B_3C_3C_2$又是一个正五边形，它的边长是r_1，对角线长为 a.

因此，当我们再用r_1去量 a 时，本质上又是用一个正五边形的边长去量其对角线长. 如此继续量下去，每一次的测量本质上总是用一个正五边形的边长量其对角线长，只是那个正五边形在逐渐缩小. 这样将永无休止地量下去，因此 a 和 b 不可公度.

再如，边长为 1 的正方形的对角线不可公度.

如果在数轴上以 0 为起点把这些线段标出来，那么它们的终点称为无理数. 如果要求数和直线上的点一一对应，那么我们就必须引进无理数. 这样有理数和无理数合起来构成了实数.

三、复数

我们回忆一下线性方程 $ax=b(a\neq 0)$，其中 x 是未知量，方程的解是 $x=\frac{b}{a}$. 要使每一个带有整数系数 $a(a\neq 0)$和 b 的线性方程有解，必须引进有理数.

像$x^2=2$ 这样的方程，在有理数范围内不存在解. 这促使人们引进无理数，使得方程$x^2=2$ 在实数范围有解.

像 $x^2=-1$ 这样的方程在实数范围内没有解，因此人们通过定义 $i^2=-1$ 引进的符号 i，使得方程 $x^2=-1$ 可解. 符号 i 是“虚数单位”，纯粹是一个符号. 由此引出了一批新的数，与原来的全体实数一起组成新的数系.

虽然复数问题是由求一元二次方程的解所引发的，但迫使人们认真对待复数却是因为求一元三次方程的解. 求解一元三次方程的代数方法第达诺次由意大利数学家卡尔达诺(Girolamo Cardano，1501—1576)在 1545 年出版的著作《重要的艺术》一书中公开发表. 卡尔达诺区分十三种情况对一元三次方程进行讨论，给出十三种求解的公式.

在公式中出现了十分尴尬的情况：即便一元三次方程的三个根是实根，但在用公式求解的时候会出现虚数．例如，对方程 $16+x^2+x^3=24x$（这是当时人们表示方程的方法），容易验证 $x=4$ 是方程的一个根，于是这个方程就等价于 $(x-4)(x^2+5x-4)=0$，检验其中的一元二次方程可知，其余两个根也是实数，因此方程的三个根是实根．但是，直接用卡尔丹求解一元三次方程的公式计算方程解的过程中会出现虚数．那么，这样的方程是有解还是无解呢？

只有给出复数的几何表示，人们才真正感觉到了复数的存在．丹麦测量学家韦塞尔(Caspar Wessel，1745—1818)在一篇关于复数的论文中引入了虚轴并把复数表示为平面向量．但是，直到 100 年后论文被翻译为法文后，复数几何表示的工作才引起数学界的广泛重视．瑞士数学家阿尔冈(Jean Robert Argand，1768—1822)把复数对应的向量的长度称为模，写在 1806 年出版的著作《试论几何作图中虚量的表示法》一书中．阿尔冈还进一步利用三角函数表示复数．

现在，复数已经被广泛应用于流体力学、信号分析等学科，因此复数有着深厚的物理背景．在复数的基础上，英国数学家哈密顿(William Rowan Hamilton，1805—1865)构造了“四元数”，并导致了物理学中著名的麦克斯韦方程的产生．

至此，我们需要认识到，在数学发展史上，在数学思想的发展过程中，所有这种推广和新的发明绝不是个别人努力的结果．它们是具有继承性的逐步演化的产物，不能把主要功劳归于某个人．为了便于作形式计算，需要用到负数和有理数．它们不像自然数那样直观和具体，直到中世纪末，数学家们在用到这些概念时才开始没有不舒适的感觉．而一直到 19 世纪中叶，数学家们才完全认识到：这扩充的数域必须通过定义来创造，这些定义是随意的．但是，如果不能在更大的范围内保持原来范围内通行的规则和性质，它是毫无用处的．这些扩充有时可以和“实际”对象相联系，这是重要的，但是这只能提供一种动力而不是扩充的合理性的逻辑证明．

参考文献

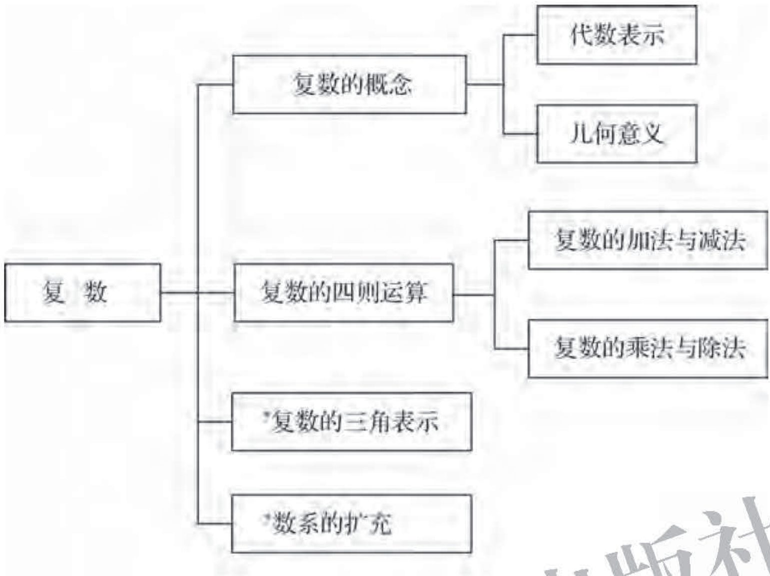
1. [美]柯朗 R，罗宾 H．什么是数学[M]．左平，张饴慈，译．上海：复旦大学出版社，2012．

2. 项武义．基础几何学[M]．北京：人民教育出版社，2004．

3. 中华人民共和国教育部制定．普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]．北京：人民教育出版社，2018．

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

复数是一类重要的运算对象，有广泛的应用. 学习本章要通过方程求解，理解引入复数的必要性，了解数系的扩充，掌握复数的表示、运算及其几何意义.

1. 复数的概念

(1) 通过方程的解，认识复数.

(2) 理解复数的代数表示及其几何意义，理解两个复数相等的条件.

2. 复数的运算

掌握复数代数表示式的四则运算，了解复数加、减运算的几何意义.

*3. 复数的三角表示

通过复数的几何意义，了解复数的三角表示，了解复数的代数表示与三角表示之间的关系，了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

三、需要关注的问题

1. 在数系的扩充过程中，实际需求和数学内部的需求起到了什么作用?

2. 复数四则运算中最主要的是什么? 为什么?

3. 如何理解复数的代数表示、三角表示及运算的几何意义?

复习题五

A 组

1. 求适合下列方程的实数 x,y 的值：

(1) $(-4x+1)+(y+2)\mathrm{i}=0$；

(2) $(x-2y)-(3x+y)\mathrm{i}=3-6\mathrm{i}$.

2. 化简：$\mathrm{i}^{11}, \mathrm{i}^{25}, \mathrm{i}^{26}, \mathrm{i}^{36}, \mathrm{i}^{70}, \mathrm{i}^{101}, \mathrm{i}^{355}, \mathrm{i}^{400}$.

3. 计算：

(1) $(3+4\mathrm{i})+(-5-3\mathrm{i})$；　　(2) $(1-5\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})$；

(3) $(-2+3\mathrm{i})+(6-5\mathrm{i})$；　　(4) $(7-\mathrm{i})-(-3+2\mathrm{i})$.

4. 计算：

(1) $(-8-7\mathrm{i})(-3\mathrm{i})$；　　(2) $(4-3\mathrm{i})(-5-4\mathrm{i})$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$；　　(4) $(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$.

5. 计算：

(1) $(1-2\mathrm{i})^3$；　　(2) $(2-3\mathrm{i})^3$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$；　　(4) $\frac{1}{\mathrm{i}}$；

(5) $\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；　　(6) $\frac{1+\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$.

*6. 计算：

(1) $(1+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$；

(2) $\frac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}$；

(3) $\frac{(\cos 7\theta+\mathrm{i}\sin 7\theta)(\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)}{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)}$.

*7. 计算：

(1) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^4$；　　(2) $(2-2\sqrt{3}\mathrm{i})^4$；

(3) $(1-\mathrm{i})$的立方根；　　(4) $-\mathrm{i}$ 的 6 次方根；

(5) $8(\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ)$的 6 次方根 .

B 组

1. 计算：

(1) $\frac{\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$；　　(2) $\frac{4+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+\frac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$；

(3) $\frac{1-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}-3}{1+\mathrm{i}}$；　　(4) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}$.

2. 当 $z=2+\mathrm{i}$ 时，计算 $\frac{z^2-4z+8}{z-1}$.

3. 求一个复数 z，使得 $z+\frac{4}{z}$ 为实数，且 $|z-2|=2$.

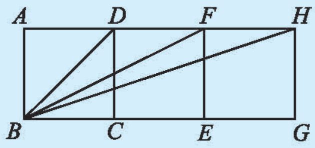
4. 已知复数 z 满足 $|z|=1+3\mathrm{i}-z$，求 $\frac{(1+3\mathrm{i})^3(3+4\mathrm{i})}{z}$.

5. 试比较复数运算与平面向量运算的异同，谈谈你的感受.

C 组

1. 求证：在复数范围内，方程 $|z|^2+(1-\mathrm{i})\bar{z}-(1+\mathrm{i})z=\frac{5-5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 无解.

2. 图中四边形 $ABCD$，$DCEF$，$FEGH$ 都是正方形. 用复数方法证明：$\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG=\frac{\pi}{2}$.



（第 2 题）

6 第六章 立体几何初步

初中已经学习了平面几何，研究了一些平面图形的形状、大小、位置关系，还有平面图形的画法、计算问题，以及它们的应用. 人类生存在现实的三维空间中，我们需要突破平面的范围，研究空间的各种几何图形的形状和大小，研究这些图形的位置关系和度量关系……

本章将学习立体几何的一些初步知识，以具体的立体图形，特别是以长方体为基础，通过直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算等方法，认识几何体的基本元素：空间点、线、面；讨论这些基本元素之间的位置关系：平行与垂直关系，讨论基本图形——柱、锥、台、球的简单度量关系：表面积和体积. 提升直观想象、逻辑推理等核心素养.

数学发明的动力不是理性，而是想象.

——德·摩根（Augustus De Morgan，1806—1871）

§1 基本立体图形

1.1 构成空间几何体的基本元素

空间几何体的基本几何元素是点、线(直线和曲线)、面(平面和曲面)等.

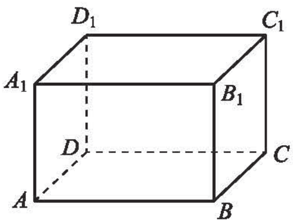


图 6-1

如图 6-1,长方体由六个面围成,每个面都是矩形(包括它的内部);相邻两个面的公共边,叫作长方体的**棱**;棱和棱的公共点,叫作长方体的**顶点**. 长方体有 6 个面,12 条棱,8 个顶点. 观察长方体和各种几何体的构成可以发现,任意一个几何体都是由点、线、面构成的,点、线、面是构成几何体的基本元素.

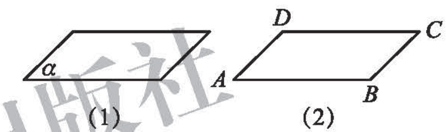


图 6-2

平面是空间最基本的图形. 平整的桌面、平静的湖面都给人平面的印象,平面是无限延展的. 一般地,用平行四边形表示平面(如图 6-2). 当平面水平放置时,通常把平行四边形的锐角画成 45°,横边长画成邻边长的两倍. 平面通常用希腊字母 α,β,γ 等来表示,如平面 α、平面 β、平面 γ 等(如图 6-2(1));也可以用表示平行四边形顶点的字母表示,如平面 $ABCD$,还可以用表示平行四边形顶点的两个相对顶点的字母表示,如平面 AC(如图 6-2(2)).

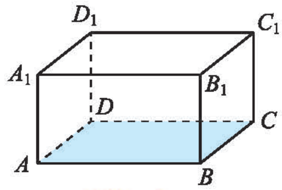


图 6-3

观察长方体的棱与面,可以直观发现直线与平面、平面与平面的各种位置关系. 如图 6-3,直线 AB 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 没有公共点,即直线 AB 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 平行;直线 AA_1 和平面 $ABCD$ 中的 AD,AB 均垂直,可以看作 AA_1 垂直于平面 $ABCD$;平面 $ABCD$ 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 没有公共点,我们说这两个平面是平行的;平面 $ABCD$ 和平面 A_1ABB_1 反映了两个平面相交.

当两个平面相交时,可以像图 6-4 那样,把被遮挡部分画成虚线或不画. 这样,看起来立体感强一些.

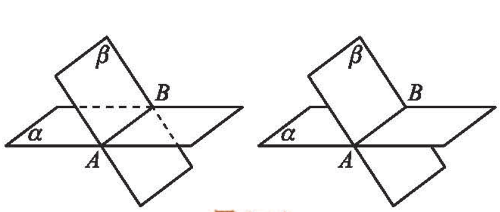


图 6-4

1.2 简单多面体——棱柱、棱锥和棱台

这两张图片都是我国著名的建筑.

左图是飞虹塔,矗立在山西省洪洞县的广胜寺,是国内最大最完整的一座琉璃塔.

右图是圣索菲亚教堂,位于黑龙江省哈尔滨市内. 1996 年 11 月,被列为全国重点文物保护单位.

这些美丽的建筑都是由各种各样的几何体组合而成. 在照片上的建筑中,你能找出哪些部分类似于下面这些我们熟悉的几何体?

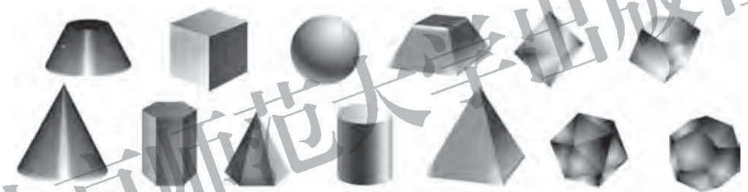


图 6-5

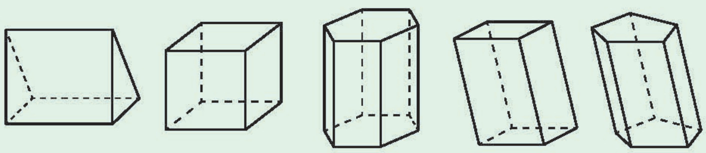
观察图 6-5 的几何体以及生活中类似的几何体,想一想,它们各有什么特点? 哪些几何体有共同点,可以归为一类?

我们发现,其中有些几何体是由平面多边形围成的,称为**多面体**. 这些多边形称为多面体的**面**,两个相邻的面的公共边称为多面体的**棱**,棱与棱的公共点称为多面体的**顶点**.

一、棱柱

思考交流

进一步观察和思考图 6-6 中的多面体:这些多面体各有什么特点? 根据这些多面体的不同点和共同点能否再进一步分类?



(1) (2) (3) (4) (5)

图 6-6

可以发现这些多面体的共同点是：每个多面体都有两个面是边数相同的多边形，且它们所在平面平行；其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都相互平行. 像这样的几何体称为**棱柱**.

棱柱中，两个互相平行的面称为棱柱的**底面**，简称**底**；其余各面称为棱柱的**侧面**；相邻侧面的公共边称为棱柱的**侧棱**；侧面与底面的公共顶点称为棱柱的**顶点**；既不在同一底面上也不在同一个侧面上的两个顶点的连线称为棱柱的**对角线**（如图 6－7）. 过上底面上一点 O_1 作下底面的垂线，这点和垂足 O 间的距离 OO_1 称为点 O_1 到下底面的距离，也是两底面间的距离，即棱柱的**高**.

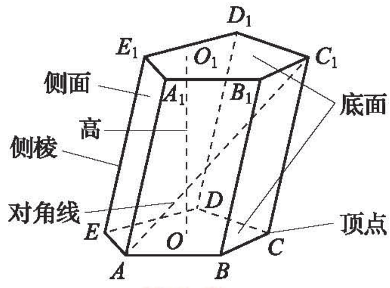


图 6－7

棱柱可以用它的两个底面各顶点的字母来表示，也可以用它的某一条对角线的两个端点的字母来表示，如图 6－7 中的棱柱既可表示为棱柱 $ABCDE-A_1B_1C_1D_1E_1$，也可表示为棱柱 AC_1.

通过观察（如图 6－8），可以得到棱柱的一些性质（继续学习后，可以证明）：

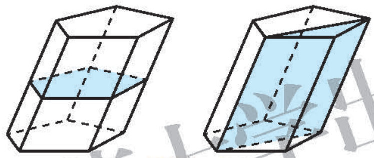


图 6－8

（1）侧棱都相等；

（2）两个底面与平行于底面的截面都是全等的多边形；

（3）过不相邻两条侧棱的截面都是平行四边形.

侧面平行四边形都是矩形的棱柱称为**直棱柱**，其他的棱柱称为斜棱柱. 底面是正多边形的直棱柱称为**正棱柱**.

棱柱的底面可以是三角形、四边形、五边形……这样的棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱……

下面研究一些特殊的四棱柱：

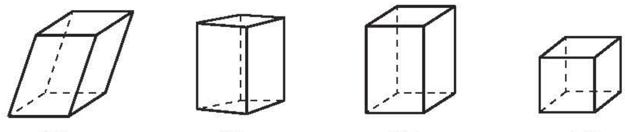


图 6－9

底面是平行四边形的棱柱称为**平行六面体**（如图 6－9(1) (2) (3) (4)）. 侧棱与底面垂直的平行六面体称为直平行六面体（如图 6－9(2) (3) (4)）；底面是矩形的直平行六面体是长方体（如图 6－9(3) (4)）；棱长都相等的长方体是正方体（如图 6－9(4)）.

二、棱锥和棱台

1. 棱锥

下面给出的是埃及金字塔、法国卢浮宫玻璃金字塔及锥形帐篷的图片，它们看上去都有一些共同点.



像上图中的多面体，均由平面图形围成，其中一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体称为**棱锥**. 如图 6－10(3)，多边形 $ABCDEF$ 称为棱锥的**底面**，简称**底**；其余各面称为棱锥的**侧面**；各个侧面的公共点称为棱锥的**顶点**；相邻两个侧面的公共边称为棱锥的**侧棱**. 顶点到底面的距离称为棱锥的**高**.

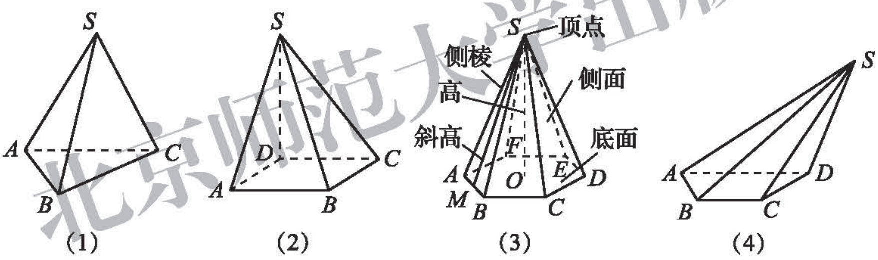


图 6－10

棱锥可以用表示它的顶点和底面各顶点的字母来表示，如棱锥S-$ABCDEF$(如图 6－10(3))，也可用顶点和底面一条对角线端点的字母来表示，如棱锥 S-AC(如图 6－10(2) (3) (4)).

棱锥的底面可以是三角形、四边形、五边形……这样的棱锥分别称为三棱锥、四棱锥、五棱锥……

如图 6－10(1)，三棱锥也叫作四面体.

如果棱锥的底面是正多边形，且它的顶点在过底面中心且与底面垂直的直线上，那么这个棱锥称为**正棱锥**(如图 6－10(3)). 正棱锥各侧面都是全等的等腰三角形，这些等腰三角形底边上的高都相等，称为正棱锥的**斜高**，如图 6－10(3) 的 SM.

棱锥有一个重要性质：如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么截面和底面相似(如图 6－11).

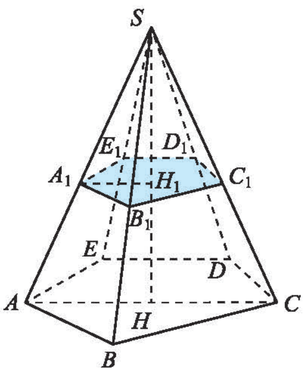


图 6－11

2. 棱台

如图 6 - 12，用一个平行于底面的平面去截棱锥，截面与底面之间的部分称为**棱台**. 原棱锥的底面和截面分别称为棱台的**下底面**和**上底面**，其余各面称为棱台的**侧面**. 相邻两个侧面的公共边称为棱台的**侧棱**，上底面、下底面之间的距离称为棱台的**高**.

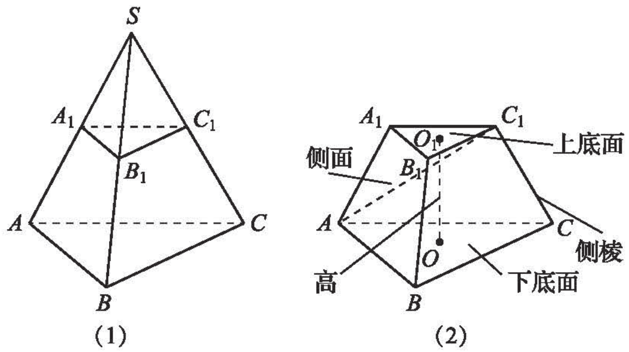


图 6 - 12

棱台用上底面、下底面多边形各顶点的字母来表示，如图 6 - 12 中的棱台表示为棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$，或者用它的对角线端点字母来表示，如棱台 AC_1.

由三棱锥、四棱锥、五棱锥……所截得的棱台，分别称为三棱台、四棱台、五棱台……

由正棱锥截得的棱台称为**正棱台**. 正棱台各侧面都是全等的等腰梯形，这些等腰梯形的高称为正棱台的**斜高**.

思考交流

怎样判断一个多面体是棱台？

1.3 简单旋转体——球、圆柱、圆锥和圆台

一、球

人类赖以生存的地球，天空中的月球、太阳，体育活动中用到的篮球、足球等，都是球的形象.

以半圆的直径所在的直线为旋转轴，将半圆旋转一周所形成的曲面称为**球面**. 球面所围成的几何体称为**球体**，简称**球**. 半圆的圆心称为**球心**（如图 6 - 13(1)）. 连接球心和球面上任

意一点的线段称为球的**半径**,连接球面上两点并且过球心的线段称为球的**直径**. 球用表示它球心的字母来表示,如球 O.

球具有下面的性质:

(1) 球面上所有的点到球心的距离都等于球的半径;

(2) 用任何一个平面去截球面,得到的截面都是圆,其中过球心的平面截球面得到的圆的半径最大,等于球的半径.

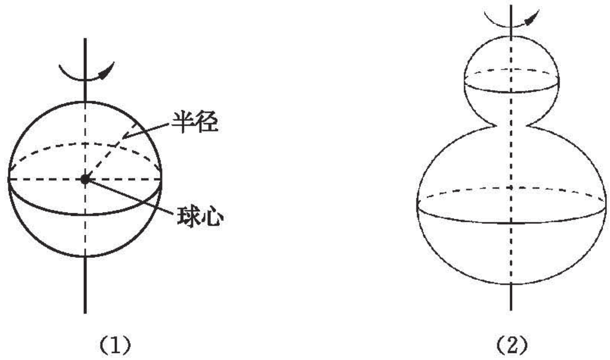


图 6-13

如图 6-13(2),一条平面曲线绕着它所在的平面内的一条定直线旋转一周所形成的曲面称为**旋转面**,封闭的旋转面围成的几何体称为**旋转体**. 显然,球面是旋转面,球体是旋转体.

二、圆柱、圆锥、圆台

如图 6-14,分别以矩形的一边 OO_1、直角三角形的一条直角边 SO、直角梯形垂直于底边的腰 OO_1 所在的直线为旋转轴,其余各边旋转一周而形成的面所围成的几何体分别称为**圆柱、圆锥、圆台**. 在旋转轴上的这条边的长度称为它们的**高**;垂直于旋转轴的边旋转而成的圆面称为它们的**底面**,不垂直于旋转轴的边旋转而成的曲面称为它们的**侧面**,无论转到什么位置,这条边都称为侧面的**母线**.

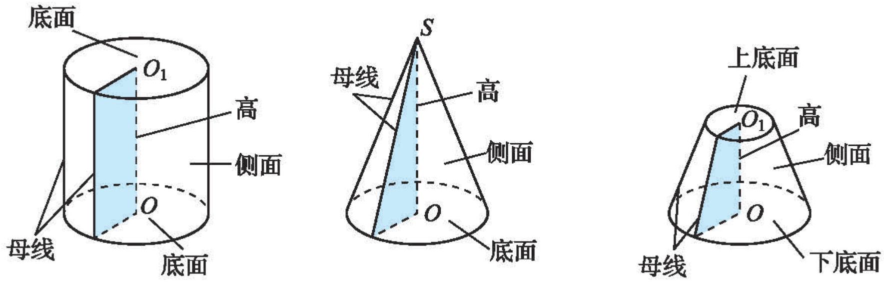


图 6-14

圆柱、圆锥、圆台都是**旋转体**.

圆台也可以看作是用平行于圆锥底面的平面截这个圆锥而得到的.

圆柱、圆锥、圆台用表示它的旋转轴的字母来表示,如圆柱 O_1O、圆锥 SO、圆台 O_1O(如图6-14).

圆柱、圆锥、圆台具有下面的性质:

(1) 平行于圆柱、圆锥、圆台的底面的截面都是圆；

(2) 过圆柱、圆锥、圆台旋转轴的截面分别是全等的矩形、等腰三角形、等腰梯形.

思考交流

可以通过对几何体切割、拼组、旋转、放缩等变换得到新的几何体，如棱(圆)台可以看作是用平行于棱(圆)锥底面的平面截这个棱(圆)锥而得到的，球、圆柱、圆锥、圆台可以看作是由相应的平面图形旋转而来. 你还能用这样的变换构造出一些新的图形吗？

练　习

1. 判断正误并给出理由.

 (1) 长方体是四棱柱；（　　）

 (2) 直四棱柱是长方体；（　　）

 (3) 底面是正多边形的棱锥一定是正棱锥；（　　）

 (4) 延长一个棱台的各条侧棱，它们相交于一点.（　　）

2. 正方体集合记为 A，长方体集合记为 B，直棱柱集合记为 C，棱柱集合记为 D，写出这四个集合之间的关系.

3. 根据下列描述，说出几何体的名称：

 (1) 一个等腰三角形绕着底边上的高所在的直线旋转 180°形成的封闭曲面所围成的图形；

 (2) 一个直角三角形绕着一条直角边所在的直线旋转 180°形成的封闭曲面所围成的图形.

4. 一个圆锥的母线长 20 cm，母线与旋转轴的夹角为 30°，求圆锥的高.

5. 一个圆台的高为 4 cm，上底面和下底面直径分别为 2 cm 和 8 cm，求圆台的母线长.

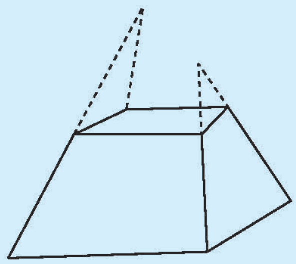
6. 用一个平面截半径为 13 cm 的球，截面面积是 25π cm²，求球心到截面的距离.

习题 6－1

A　组

1. 任意一个直棱柱去掉两个底面，沿任意一条侧棱剪开，然后放在一个平面上展平，它是什么样的平面图形？

2. 图中画的几何体是不是棱台？怎样判断画出的几何体是不是棱台？



（第 2 题）

3. 用厚纸制作六棱柱、四棱锥、三棱台、圆柱、圆锥和圆台的模型.

4. 下列命题正确的是(　　).

 A. 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体是棱柱

 B. 有一个面是多边形，其余各面是三角形的几何体是棱锥

 C. 有两个面平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的几何体是棱柱

 D. 用一个平面去截棱锥，底面与截面之间的部分组成的几何体是棱台

5. 你能用两个截面将三棱柱分成三个三棱锥吗？画图说明.

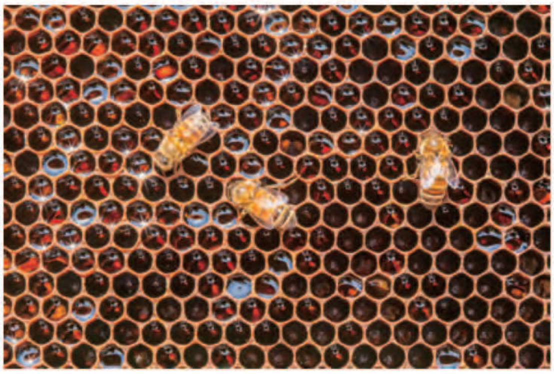
B 组

1. 在平面几何中，你学习了直线与圆的位置关系，那么如何刻画平面与球的位置关系？能得到哪些结果？
2. 利用互联网查找与“几何体的图形”相关的内容进行阅读，看一看有没有你认识的多面体或旋转体.若有，下载这些图形并与同学交流.
3. 通过查阅资料，了解什么是经度，什么是纬度，什么是球面距离. 我国上海与台北可以近似地认为具有相同的经度，从地图上分别查出上海与台北所在的纬度，再求出这两个城市的球面距离大约为多少千米.

阅读材料

蜂窝猜想

蜂窝猜想是指截面呈正六边形的蜂窝是蜜蜂采用最少量的蜂蜡建造成的. 该猜想可追溯到公元前 36 年古罗马学者和作家瓦罗(Marcus Terentius Varro，前 116—前 27)，但总被认为是古希腊数学家帕普斯(Pappus of Alexandria，约 290—约 350)在 4 世纪提出的. 帕普斯在《汇编(Synagoge)》一书中对蜂房的结构作过精彩的描写：“蜂房是由许许多多的正六棱柱组成，一个挨着一个，紧密地排列，没有一点空隙. 蜜蜂凭着自己本能的智慧选择了正六边形，因为使用同样多的原材料，正六边形具有最大的面积，从而可贮藏更多的蜂蜜.”



蜂窝猜想于 1999 年被美国数学家黑尔斯(Thomas Callister Hales，1958—)证明，他的论文“蜂窝猜想(The Honeycomb Conjecture)”正式发表在 2001 年的《离散和计算几何(Discrete and Computational Geometry)》一书中. 经过近 2 000 年的努力，数学家终于证明了蜜蜂是世界上工作效率最高的建筑者.

蜂窝是一座十分精密的建筑工程. 蜜蜂建巢时，青壮年工蜂负责分泌片状新鲜蜂蜡，每片只有针头大小，而另一些工蜂则负责将这些蜂蜡仔细摆放到一定的位置，以形成

竖直六面柱体.每一面蜂蜡隔墙厚度及误差都非常小.六面隔墙宽度完全相同,墙之间的角度正好 120°,形成一个完美的几何图形.人们一直疑问,蜜蜂为什么不让其巢室呈三角形、正方形或其他形状呢?隔墙为什么呈平面,而不是呈曲面呢?虽然蜂窝是一个三维体建筑,但每一个蜂巢都是六面柱体,而蜂蜡墙的总面积仅与蜂巢的截面有关.由此引出一个数学问题,即寻找面积最大、周长最小的平面图形.1943 年,匈牙利数学家陶斯(Laszlo Fejes Toth,1915—2005)证明了,在所有首尾相连的正多边形中,正六边形的周长是最小的.1999 年,黑尔斯证明了周边是曲线时,无论是曲线向外凸还是向内凹,由正六边形组成的图形周长都是最小的.

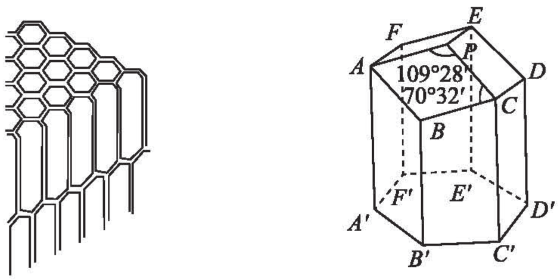


图 6-15

18 世纪初,法国天文学家和数学家马拉尔迪(Giacomo Filippo Maraldi,1665—1729)指出,每个正六角形的蜂房的底部,都是由三个全等的菱形拼成的,每个菱形的钝角是109°28′,锐角是 70°32′(如图 6-15).法国科学家雷奥米尔(René Antoine Ferchault de Réaumur,1683—1757)认为用这样的角度来建造蜂房,应该是在相同的容积下最节省材料的.后来他向一位瑞士数学家柯尼希(Johann Samuel König,1712—1757)请教.柯尼希的计算结果与实际的数值只有 2′之差.人们觉得蜜蜂的这一小点误差是完全可以原谅的,对于人类来说,这也是一个非同寻常的数学难题.然而,颇具戏剧性的是,在 1743 年,苏格兰数学家麦克劳林(Colin Maclaurin,1698—1746)用初等几何方法重新计算了蜂房结构,得到了菱形的钝角应为 109°28′16″,锐角应为 70°31′44″,与蜂房的实测结果只差 16″.后来一个偶然的原因发现,柯尼希计算错误的原因是他使用的对数表有误.至此,我们对于蜜蜂的数学才华发出由衷的赞叹.

人们把蜂房誉为自然界的奇异的建筑.英国博物学家、生物学家达尔文(Charles Robert Darwin,1809—1882)说:“蜂房的精巧构造十分符合需要,如果一个人看到蜂房而不倍加赞扬,那他一定是个糊涂虫.”中国著名数学家华罗庚(1910—1985)对蜂房作过十分形象的描绘:“如果把蜜蜂放大为人体的大小,蜂箱就成为一个二十公顷的密集市镇.当一道微弱的光线从这个市镇的一边射来时,人们可以看到一排排五十层高的建筑物.在每一排建筑物上,整整齐齐地排列着由薄墙围成的成千上万个正六角形的蜂房.”马克思(Karl Marx,1818—1883)也高度地评价:蜜蜂建筑蜂房的本领使人间的许多建筑师感到惭愧.

§ 2 直观图

人们为了在平面内表示立体图形，可以利用平行投影画直观图. 图 6－16 就是长方体的直观图. 怎样画这样的直观图呢？

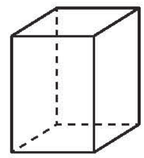


图 6－16

例 1 画水平放置的正六边形的直观图.

解 (1) 如图 6－17(1)，在正六边形 $ABCDEF$ 中，取 AD 所在直线为 x 轴，对称轴 HG 为 y 轴，两轴相交于点 O.

(2) 另选一平面画直观图，先画相应的 x'轴与 y'轴，两轴相交于点 O'，使$\angle x'O'y'=45°$.

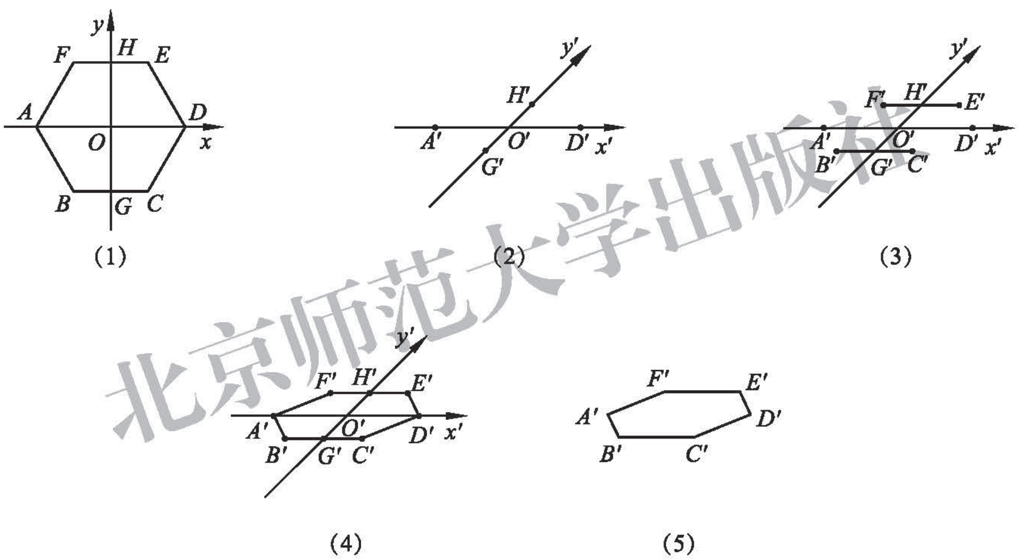


图 6－17

如图 6－17(2)，将已知图形中 x 轴上的线段 AD 在直观图中画成 x'轴上的线段 $A'D'$，且保持原长度不变，点 O'是 $A'D'$的中点；将已知图形中 y 轴上的线段 HG 画成 y'轴上的线段 $H'G'$，且长度为原来的$\frac{1}{2}$，点 O'是 $H'G'$的中点.

(3) 如图 6－17(3)，将已知图形中平行于 x 轴的线段 FE，BC 在直观图中分别画成平行于 x'轴的线段 $F'E'$，$B'C'$，且保持原长度不变，点 H'，G'分别是 $F'E'$，$B'C'$的中点.

(4) 如图 6－17(4)，连接 $A'B'$，$C'D'$，$D'E'$，$F'A'$.

(5) 擦去辅助线 x' 轴和 y' 轴，便获得正六边形 $ABCDEF$ 水平放置的直观图 $A'B'C'D'E'F'$，如图 6-17(5).

上述画直观图的方法称为**斜二测画法**.

例 2 用斜二测画法画正五棱锥的直观图.

解 (1) 根据平面图形的直观图画法画底面(如图 6－18);

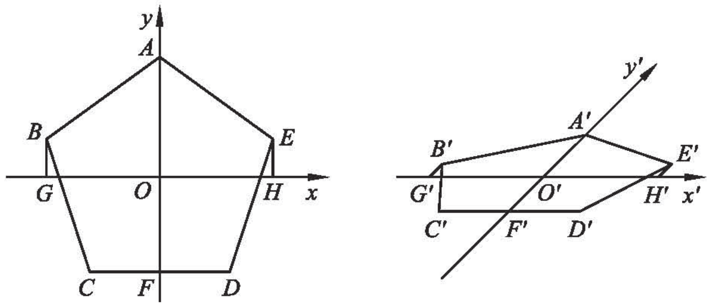


图 6－18

(2) 画 z'轴(z'轴与 x'轴的交角为 90°),并画高(与原长相等)(如图 6－19(1));

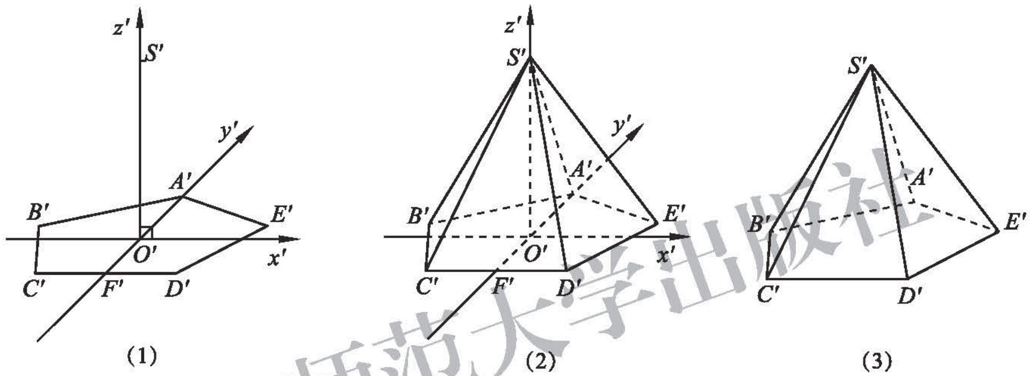


图 6－19

(3) 连线成图,擦去辅助线,且将被遮线画成虚线(如图 6－19(2)),就得到正五棱锥的直观图 $S'\text{-}A'B'C'D'E'$(如图 6－19(3)).

斜二测画法主要用于画多面体的直观图,它的具体步骤是:

(1) 在已知的空间图形中取水平平面和互相垂直的轴 Ox,Oy;再取 Oz 轴,使$\angle xOz=90°$,且$\angle yOz=90°$.

(2) 画直观图时,把 Ox,Oy,Oz 画成对应的 $O'x'$,$O'y'$,$O'z'$,使$\angle x'O'y'=45°$(或 135°),$\angle x'O'z'=90°$. $x'O'y'$所确定的平面表示水平平面.

(3) 已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x'轴、y'轴或 z'轴的线段.

(4) 已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段,在直观图中保持原长度不变;平行于 y 轴的线段长度为原来的一半.

(5) 擦去辅助线,并将被遮线画成虚线.

思考交流

下面的说法正确吗？为什么？

(1) 水平放置的正方形的直观图可能是梯形；

(2) 两条相交直线的直观图可能平行；

(3) 互相垂直的两条直线的直观图仍然互相垂直.

例 3 图 6－20 是底面边长为 3 cm、高为 6.5 cm 的正六棱锥的直观图，请指出底面 $ABCDEF$、对角面[①] SFC、侧面 SFE 的真实形状，并画出相应的图形.

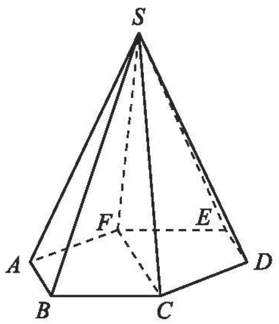


图 6－20

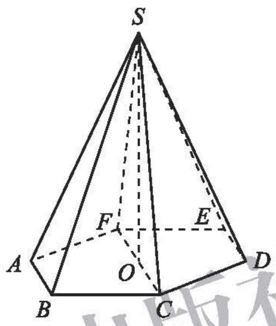


图 6－21

解 底面 $ABCDEF$ 是边长为 3 cm 的正六边形.

设点 O 是底面 $ABCDEF$ 的中心(如图 6－21)，在 Rt$\triangle SOC$ 中，可知 $OC=3$ cm，$SO=6.5$ cm，则 $SC=\sqrt{3^2+6.5^2}\approx 7.16$(cm)，于是对角面 SFC 是两腰长约为 7.16 cm、底边长为 6 cm 的等腰三角形.

侧面 SFE 是两腰长约为 7.16 cm、底边长为 3 cm 的等腰三角形.

它们的形状如图 6－22(比例尺 1∶2.7).

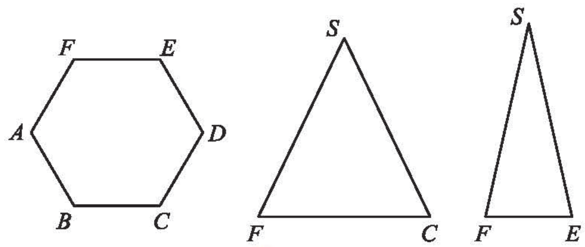


图 6－22

例 4 有一座纪念碑，底座是一个长方体，长为 2 m，宽为 1.5 m，高为 0.5 m；底座上面的碑体也是长方体，放在底座的正中，各面相应地与底座的各面平行，碑体的长为 1 m，宽为 0.75 m，高为 2.5 m. 请用 1 cm 表示 1 m，画出该纪念碑的直观图.

解 (1) 如图 6－23，使 $\angle xOy=45°$，$\angle xOz=90°$；

① 对角面是指过棱锥或棱柱不相邻的两条侧棱的截面.

(2)画底座(底坐中心在坐标原点,长在 x 轴方向,长度为 2 cm;高在z 轴 方向,长度为 0.5 cm;宽在 y 轴方向,长度为 0.75 cm);

(3) 在底座上方画碑体 (长在 x 轴方向,长度为 1 cm;高在 z 轴方向,长度为 2.5 cm;宽在 y 轴方向,长度为 0.375 cm);

连线成图(如图 6 - 23).

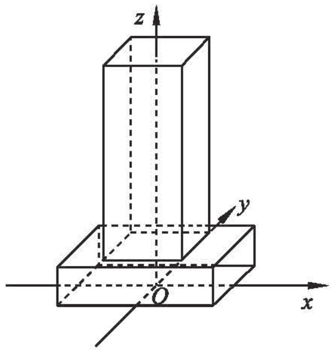


图 6 - 23

思考交流

简单组合体的直观图怎样画? 交流画直观图的步骤,可自选一个空间几何体,画出它的直观图.

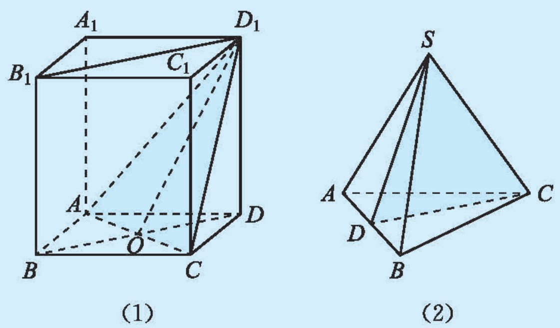
练习

1. 用斜二测画法画出下列图形:
   (1) 水平放置的边长为 5 cm 的正方形;
   (2) 水平放置的梯形和平行四边形;
   (3) 长、宽、高分别为 5 cm,2 cm,3 cm 的长方体.

习题 6 - 2

A 组

1. 画水平放置的正五边形和菱形的直观图.
2. 画底面边长为 3 cm、高为 3 cm 的正四棱锥的直观图.
3. 画底面边长为 3 cm、高为 3.5 cm 的正三棱柱的直观图.
4. 利用斜二测画法能得到的图形:
   ① 三角形的直观图是三角形; ② 平行四边形的直观图是平行四边形;
   ③ 正方形的直观图是正方形; ④ 菱形的直观图是菱形.
   以上结论,正确的是________________.
5. 图(1) 是长、宽、高分别为 3,4,5 的长方体;图(2) 是所有棱长均为 2 的正三棱锥,点 D 是 AB 的中点. 画出图中给出的所有侧面、底面与截面的真实平面图.



(第 5 题)

B　组

1. 自选一个你周围的建筑物，画出它的直观图．
2. 如果一个水平放置的图形的斜二测直观图是一个底角为45°、腰和上底均为1的等腰梯形，那么原平面图形的面积是________.
3. 画出上、下底面边长分别为2 cm和4cm、高为2 cm的正四棱台的直观图．

阅读材料

直观图的其他常用画法

直观图一般用作数学教学或设计，分为平行投影下画出的直观图和中心投影下画出的直观图.

一、平行投影画法

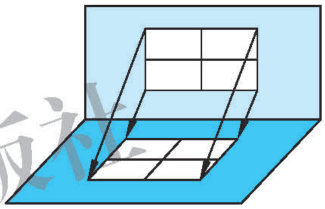


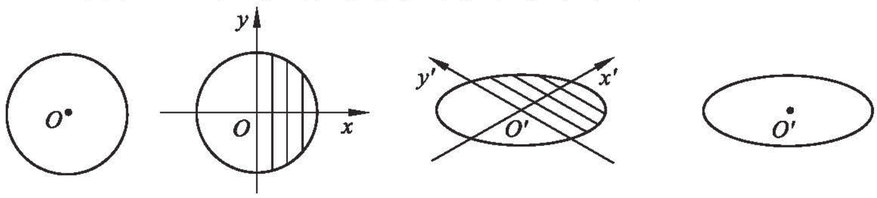
图 6－24

观察图6－24，太阳光线(太阳光线可以看成是平行的)把一个矩形的窗框投射到地板上，窗框的影子变成了平行四边形. 框边的长度、框边之间的夹角有所改变，但框边的平行性没有改变. 另外还可看到，平行直线段或同一条直线上的两条线段的比也没有改变. 图6－24中，一条线段的中点投射的影子，仍是这条线段的中点. 正是这些不变性质，使我们能够从一个空间图形在平面上的投影来获得原来图形的大致形象.

在立体几何中，一般都是根据平行投影的性质，用平面图形来表示空间图形. 我们已经学过的斜二测画法是一种平行投影画法. 下面再介绍另一种平行投影画法：正等测画法.

圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆. 圆的直观图，一般不用斜二测画法，而用正等测画法. 具体步骤是：

(1) 如图6－25(1)，取互相垂直的直线Ox，Oy作为已知图形$\odot O$所在平面直角坐标系的x轴、y轴；画直观图时，把它们画成对应的$O'x'$，$O'y'$，使$\angle x'O'y' = 120°$(或60°)(如图6－25(2)). $O'x'$，$O'y'$确定的平面表示水平平面.



(1)　　(2)　　(3)

图 6－25

(2) 已知图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中，分别画成平行于 x'轴或 y'轴的线段，且保持长度都不变.

(3) 光滑连接线段端点，并擦去辅助线，得到$\odot O$ 的直观图(如图 6－25(3)).

这样得到的圆的直观图是椭圆，这样画椭圆往往比较麻烦，我们在实际画圆的直观图时，通常使用不同尺寸的椭圆模板(如图 6－26).

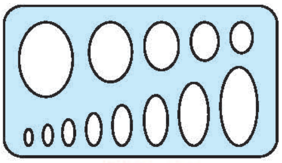


图 6－26

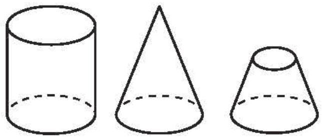


图 6－27

会画圆的直观图，就能画出圆柱、圆锥、圆台的直观图. 先画出底面，再用类似斜二测画法的方法画其余部分，如图 6－27.

二、中心投影画法

实际生活中，我们还会遇到许多不平行的光线. 比如，电灯泡发出的光线，可以近似地看成从一个点发出的光线. 图 6－28 表示一个点光源把一个图形照射到一个平面上，这个图形的影子就是它在这个平面上的中心投影.

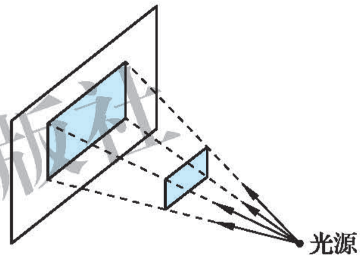


图 6－28

下面的两幅照片都是物体在平面上的中心投影.

从图 6－28 可以看到，空间图形经过中心投影后，直线变成直线，但平行线可能变成了相交线，如照片中由近到远，物体之间的距离越来越近，最后相交于一点. 中心投影后的图形与原图形相比虽然改变较多，但直观性强，看起来与人的视觉效果一致，最像原来的物体. 所以画家常用中心投影的方法绘画，使画出来的美术作品与人们的视觉效果一致，但在立体几何中很少用中心投影原理来画图.

§ 3 空间点、直线、平面之间的位置关系

3.1 空间图形基本位置关系的认识

空间图形由点、线、面构成．研究空间的点、线、面的关系是研究立体几何的基础．观察图 6－29 中的长方体，它有 8 个顶点、12 条棱、6 个面．12 条棱对应 12 条棱所在的直线，6 个面对应 6 个面所在的平面．这些直线、平面及顶点的位置关系有哪些呢？

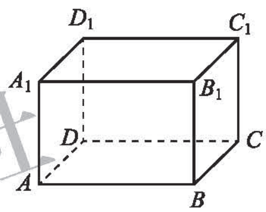


图 6－29

抽象概括

一、点与直线、点与平面的位置关系

1．点与直线的位置关系有两种：点在直线上和点在直线外．

如图 6－30（1），点 B 在直线 b 上，但在直线 a 外，记作：$B\in b$，$B\notin a$．

2．点与平面的位置关系有两种：点在平面内和点在平面外．

如图 6－30(1)，点 B 在平面 α 内，点 A_1 在平面 α 外，记作：$B\in\alpha$，$A_1\notin\alpha$．

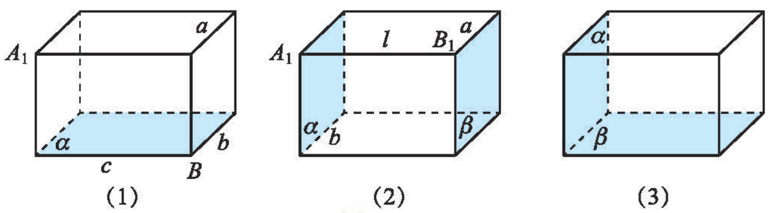


图 6－30

二、直线与直线、直线与平面的位置关系

1．直线与直线的位置关系有两种：直线与直线相交和直线与直线不相交．

如图 6－30(2)，直线 a 和直线 l 相交，记作：$a\cap l=B_1$；直线 b 和直线 l 不相交，记作：$b\cap l=\varnothing$．

2. 直线与平面的位置关系有三种：直线在平面内、直线与平面相交和直线与平面平行.

如图 6 - 30(2)，直线 a 在平面 β 内，即直线上的每个点都在平面内，记作：$a\subset\beta$；直线 l 与平面 α 相交，记作：$l\cap\alpha=A_1$；直线 a 与平面 α 无公共点，称直线 a 与平面 α 平行，记作：$a/\!/\alpha$.

$$a/\!/\alpha\Leftrightarrow a\cap\alpha=\varnothing.$$

在画直线和平面平行时，通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面，并且使它与平行四边形内的一条线段平行（如图 6 - 31(1)）或与平行四边形的一边平行（如图 6 - 31(2)）.

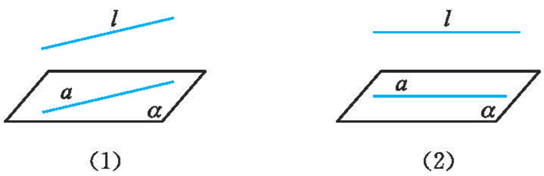


图 6 - 31

三、平面与平面的位置关系

平面与平面的位置关系有两种：平面与平面不相交和平面与平面相交.

如图 6 - 30(2)，平面 α 与平面 β 不相交；而在图 6 - 30(3) 中，平面 α 与平面 β 相交.

若两个平面 α 和 β 不相交，则称这两个平面平行，记作：$\alpha/\!/\beta$.

$$\alpha/\!/\beta\Leftrightarrow\alpha\cap\beta=\varnothing.$$

在画两个平行的平面时，通常把表示这两个平面的平行四边形的对应边画成互相平行的（如图 6 - 32(1)，图 6 - 32(2)）.

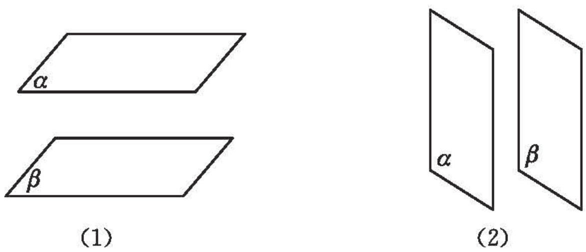


图 6 - 32

直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系将在后面详细讨论.

3.2 刻画空间点、线、面位置关系的公理

在初中平面几何学习中，曾经学过以下一些基本事实：

(1) 两点确定一条直线.

(2) 两点之间线段最短.

(3) 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

类似地,人们把经过长期观察与实践总结出的平面的一些最基本性质当作基本事实,作为进一步学习空间中位置关系的基础.

两点确定一条直线,那么怎样确定一个平面呢?

在日常生活中,照相机的三脚架,施工用的支脚架等,都是由不在同一条直线的三个脚(点)支撑,这样可以使这些物体平稳放置. 这些事实与类似的经验可以概括为下面的基本事实[①]:

基本事实 1　过不在一条直线上的三个点,有且只有一个平面.

例如,一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了.

基本事实 1 刻画了平面的基本性质,它给出了确定一个平面的依据. 不在同一条直线上的三个点 A,B,C 所确定的平面,可以记作平面 ABC(如图 6-33).

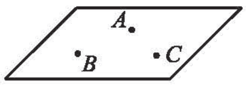


图 6-33

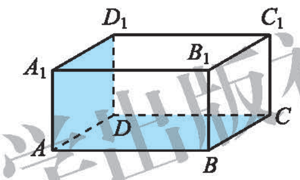


图 6-34

如何判断直线在平面内呢?

如图 6-34,在长方体中,A,B 两点在平面 $ABCD$ 内,那么整条直线 AB 都在平面 $ABCD$ 内;A,D_1 两点在平面 A_1ADD_1 内,那么直线 AD_1 上的所有点都在平面 A_1ADD_1 内. 由此可以概括出下面的基本事实:

基本事实 2　如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线在这个平面内.

如图 6-35,基本事实 2 可以用符号表示为:若 $A\in l,B\in l$,且 $A\in\alpha,B\in\alpha$,则 $l\subset\alpha$.

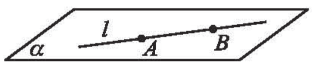


图 6-35

基本事实 2 表达了平面的特点以及直线和平面的位置关系.

由基本事实 1 和基本事实 2,再结合初中学的"两点确定一条直线"容易得到以下三个推论:

推论 1　一条直线和该直线外一点确定一个平面;

推论 2　两条相交直线确定一个平面;

推论 3　两条平行直线确定一个平面.

基本事实 1 及以上推论给出了确定平面的依据.

① 基本事实 1～4 也称公理.

例如，长方体中，不共线的三点 A,C,D_1 确定平面 ACD_1（如图 6－36(1)）；直线 BC_1 和直线外一点 A 确定平面 ABC_1D_1（如图 6－36(2)）.

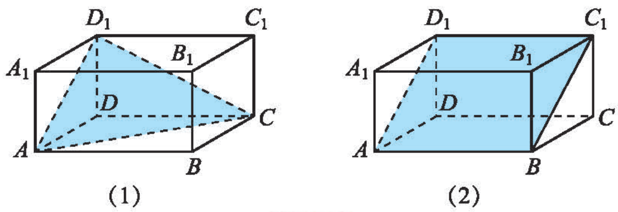


图 6－36

长方体的任意两个面，要么平行，要么交于一条直线. 由此可以抽象出下面的基本事实.

基本事实 3　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

如图 6－37，基本事实 3 可以用符号表示为：$P\in\alpha$，$P\in\beta\Leftrightarrow\alpha\cap\beta=l$，且 $P\in l$，其中 l 表示一条直线.

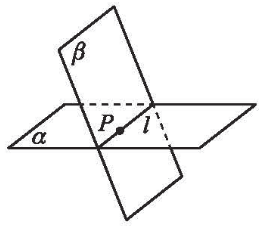


图 6－37

基本事实 3 表明，如果两个平面有一个公共点，那么它们必定还有另外一个公共点，只要找出这两个平面的两个公共点，就找出了它们的交线.

基本事实 3 表达了不重合的平面与平面有两种位置关系：两个平面相交于一条直线，两个平面平行.

练　习

1. 用符号和图形表示下列语句：

   (1) A,B 两点既在平面 α 内，又在平面 β 内，则直线 AB 是平面 α 与平面 β 的交线；

   (2) 两条相交直线 a 和 b 都在平面 α 内；

   (3) 直线 a 在平面 α 内，直线 b 在平面 α 外，a 与 b 相交于一点 M.

2. 设 A,B,C 是三个点，AB 是过点 A,B 的直线，α 是一个平面. 将下列命题改写成语言叙述，判断它们是否正确，并说明理由.

   (1) 当 $A\in\alpha$，$B\notin\alpha$ 时，直线 $AB\subset\alpha$；

   (2) $\left.\begin{array}{l}A\in\alpha,\\ B\in\alpha,\\ C\in AB\end{array}\right\}\Rightarrow C\in\alpha.$

3. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”，并说明判断正误的依据.

   (1) 平面 α 与平面 β 相交，它们只有有限个公共点.　（　　）

   (2) 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.　（　　）

   (3) 经过两条相交直线，有且只有一个平面.　（　　）

   (4) 如果两个平面有三个不共线的公共点，那么这两个平面重合.　（　　）

在初中平面几何中，我们曾学习过“平行于同一条直线的两条直线平行”. 这一事实可以推广到空间：

基本事实 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

这个基本事实表明，空间中平行于一条已知直线的所有直线都互相平行. 这一性质通常称为空间平行线的传递性.

根据基本事实 4，空间两条直线的位置关系可以是：

相交，如图 6－38(1)，$a\cap b=A$；

平行，如图 6－38(2)，$a/\!/b$.

由推论 2 和推论 3 可知，无论相交还是平行，这两条空间直线都在同一平面内(即共面).

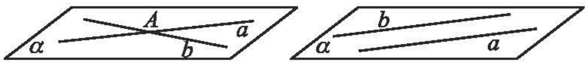


图 6－38

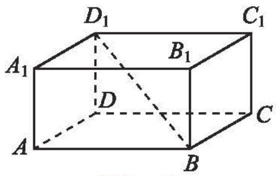


图 6－39

空间两条直线还有第三种位置关系，如图 6－39 的长方体中，直线 AD 与直线 BB_1，直线 AD 与直线 BD_1，它们不能处在同一个平面内.

不同在任何一个平面内(不共面)的两条直线称为**异面直线**.

为了表示异面直线 a，b 不共面的特点，画图时，通常用一个或两个平面衬托(如图 6－40).

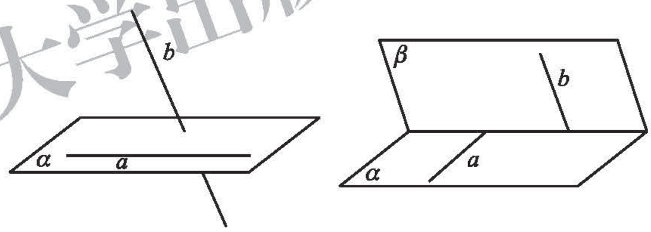


图 6－40

这样，空间两条直线的位置关系有且只有三种：

- 共面直线
  - 相交直线：在同一平面内，有且只有一个公共点.
  - 平行直线：在同一平面内，没有公共点.
- 异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点.

思考交流

1. 分析图 6－41 的长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中点、线、面的位置关系，并总结空间点、线、面间的基本关系.

2. 如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角的大小有什么关系？

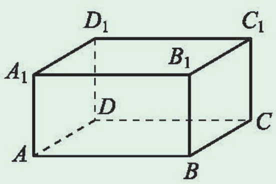


图 6－41

在平面上，角的边是射线，射线是有方向的．在平面内，两条射线平行时它们的方向有如下三种不同的情形(如图 6－42)：

情形 1　两个角的两条边分别平行，并且方向相同(如图 6－42(1))；

情形 2　两个角的两条边分别平行，并且方向相反(如图 6－42(2))；

情形 3　两个角的两条边分别平行，其中一组对应边方向相同，另一组对应边方向相反(如图 6－42(3))．

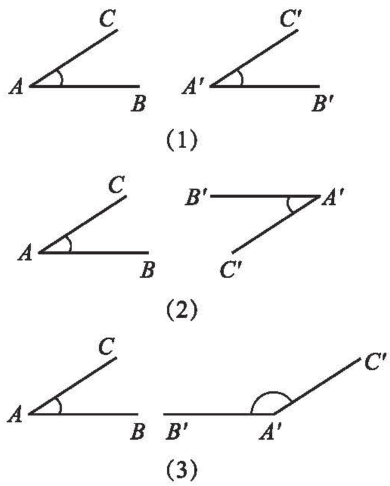


图 6－42

对于平面上的两个角，在前两种情形下两个角相等，在情形 3 下两个角互补．

这个结论(如图 6－43)在空间仍然成立吗？

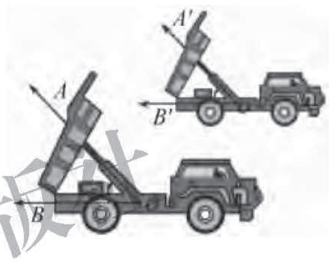


图 6－43

在空间中也有这样的结论：

定理　如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补．

平面内两条直线相交成 4 个角，其中不大于 90°的角称为它们的夹角．夹角刻画了一条直线相对于另一条直线的位置关系．两条异面直线之间也存在位置关系的问题，为此引入“异面直线所成的角”的概念，它是刻画两条异面直线位置关系的基本量之一．

> 研究异面直线所成的角，就是通过平移把异面直线转化为相交直线．这是研究空间图形的一种基本思路，即把空间图形问题转化为平面图形问题．

如图 6－44，已知两条异面直线 a，b，过空间任一点 O 作直线 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$，这时 a'，b' 共面，我们把 a' 与 b' 所成的不大于 90°的角称为**异面直线 a，b 所成的角**(或夹角)．

若两条异面直线 a，b 所成的角是直角，则称这两条直线互相垂直，记作：$a\perp b$．

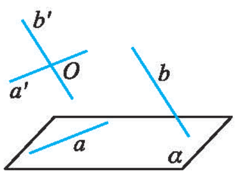


图 6－44

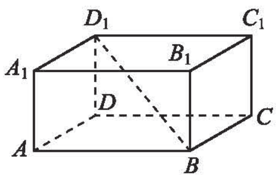


图 6－45

至此，我们了解了空间点、直线和平面的基本位置关系．这些位置关系，在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$(如图 6－45)中都可以看到，可以用数学符号来表示：

位置关系	符号表示
点 A 在直线 AA_1 上	$A\in AA_1$
点 A 不在直线 BC 上	$A\notin BC$

续表

位置关系	符号表示
点 A 在平面 $ABCD$ 内	$A\in$ 平面 $ABCD$
点 A 不在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内	$A\notin$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$
直线 AB 与直线 AA_1 相交于点 A	$AB\cap AA_1=A$
直线 AB 与直线 A_1B_1 平行	$AB/\!/A_1B_1$
直线 AB 与直线 CC_1 异面	
直线 AB 在平面 $ABCD$ 内	$AB\subset$ 平面 $ABCD$
直线 D_1B 和平面 $ABCD$ 相交于点 B	$D_1B\cap$ 平面 $ABCD=B$
直线 A_1B_1 和平面 $ABCD$ 平行	$A_1B_1/\!/$ 平面 $ABCD$
平面 $ABCD$ 与平面 BB_1C_1C 相交于直线 BC	平面 $ABCD\cap$ 平面 $BB_1C_1C=BC$
平面 $ABCD$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 平行	平面 $ABCD/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$

例 1 四个顶点不在同一平面内的四边形称为**空间四边形**．如图 6－46(1)，在空间四边形 $ABCD$ 中，点 E,F,G,H 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点．求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

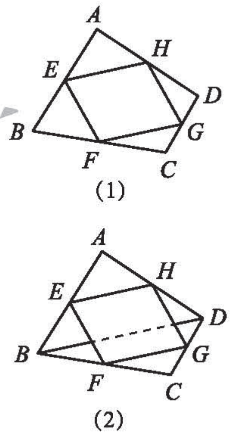


图 6－46

证明 如图 6－46(2)，连接 BD．

因为 FG 是 $\triangle CBD$ 的中位线，所以 $FG\underline{/\!/}\frac{1}{2}BD$．

又因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，所以 $EH\underline{/\!/}\frac{1}{2}BD$．

根据基本事实 4，$FG\underline{/\!/}EH$，所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

例 2 如图 6－47(1)，已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a．

(1) 正方体的哪些棱所在的直线与直线 BC_1 是异面直线？

(2) 求异面直线 AA_1 与 BC 所成的角；

(3) 求异面直线 BC_1 与 AC 所成的角．

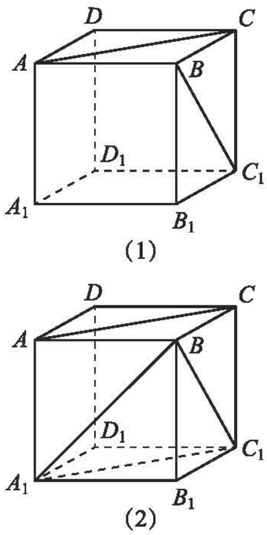


图 6－47

解 (1) 正方体共有 12 条棱，与 BC_1 相交的棱有 6 条，与 BC_1 平行的棱不存在．因此余下的 6 条棱所在的直线分别与直线 BC_1 是异面直线，它们是 $A_1A,A_1B_1,A_1D_1,DA,DC,DD_1$．

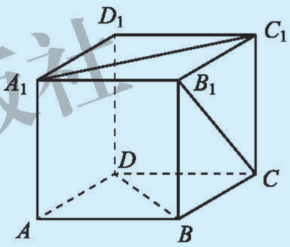
(2) 因为 $AD/\!/BC$，所以 $\angle A_1AD$ 即为异面直线 AA_1 与 BC 所成的角．显然 $\angle A_1AD=90°$，故异面直线 AA_1 与 BC 所成的角为 $90°$．

(3) 如图 6－47(2)，连接 A_1C_1,A_1B．因为 $AA_1\underline{/\!/}CC_1$，所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形，$AC/\!/A_1C_1$，故 $\angle BC_1A_1$ 就是异面直线 BC_1 与 AC 所成的角．

因为 A_1B，BC_1 与 A_1C_1 都是该正方体的面对角线，所以 $A_1B=BC_1=A_1C_1$，$\triangle A_1BC_1$ 是等边三角形．从而 $\angle BC_1A_1=60°$，即异面直线 BC_1 与 AC 所成的角为 $60°$.

练　习

1. 在空间中，下列命题是否正确？为什么？
   (1) 有两组对边相等的四边形是平行四边形；
   (2) 四边相等的四边形是菱形；
   (3) 平行于同一条直线的两条直线平行；
   (4) 有两边及其夹角对应相等的两个三角形全等.
2. “a，b 是异面直线”是指：
   (1) $a\subset$平面 α，$b\subset$平面 β，且 $a\cap b=\varnothing$；
   (2) $a\cap b=\varnothing$ 且 a，b 不平行；
   (3) $a\subset$平面 α，$b\subset$平面 β，且 $\alpha\cap\beta=\varnothing$；
   (4) $a\subset$平面 α，$b\not\subset$平面 α；
   (5) 不存在平面 α，使 $a\subset\alpha$ 且 $b\subset\alpha$.
   上述说法中，正确的序号是________________.
3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，至少找出三条与 B_1C 成异面直线的棱或对角线，并指出它们所成角的大小.



(第 3 题)

习题 6－3

A　组

1. 直线 l 和两条异面直线 a，b 都相交，画出每两条相交直线所确定的平面，并标上字母．
2. (1) 直线上有两点在一个平面内，则直线与平面的关系是什么？如何说明？
   (2) 两个不重合平面有两个公共点，则两个平面的关系是什么？如何说明？
   (3) “两直线有一个公共点”能否说明两直线在一个平面内？为什么？
3. 判断下列各命题的正误，画出正确命题的图形，并用符号表示：
   (1) 两个平面有三个公共点，它们一定重合；
   (2) 空间中，相交于同一点的三直线在同一平面内；
   (3) 两条直线 a，b 分别和异面直线 c，d 都相交，则直线 a，b 可能是异面直线，也可能是相交直线；
   (4) 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 O 是 B_1D_1 的中点，直线 A_1C 交平面 AB_1D_1 于点 M，则 A，M，O 三点共线，并且 A，O，C，M 四点共面.
4. 怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内？
5. 一条直线和两条平行直线相交，这三条直线是否在同一个平面内？说明理由.

6. 已知△ABC 在平面 α 外，它的三条边所在直线分别交平面 α 于 P,Q,R 三点．求证：P,Q,R 三点共线.

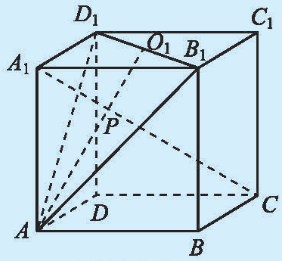
B 组

1. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，AB 的中点为 M，DD_1 的中点为 N，则异面直线 B_1M 与 CN 所成的角是(　　).

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

2. 画一个正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，再画出平面 ACD_1 与平面 BDC_1 的交线，并且说明理由．

3. 如图，点 O_1 是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的上底面的中心，过 D_1，B_1，A 三点作一个截面. 求证：此截面与对角线 A_1C 的交点 P 一定在 AO_1 上．



（第 3 题）

§ 4 平行关系

平行关系和垂直关系是线面间基本的位置关系.

本节研究平行关系的性质和判定.

4.1 直线与平面平行

一、直线与平面平行的性质

如图 6-48，直线 l 与平面 α 平行，根据直线与平面平行的定义，l 与 α 的交集为空集，因此，直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都没有公共点. 也就是说，直线 l 与平面 α 内的直线只能平行或异面. 特别地，如果直线 l 与平面 α 内的直线 a 在非平面 α 的同一平面内，那么 $l/\!/a$. 这样就得到直线与平面平行的性质定理.

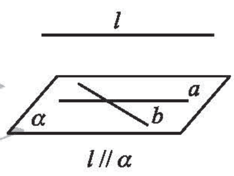


图 6-48

直线与平面平行的性质定理　一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线平行.

已知：如图 6-49，$l /\!/ \alpha$，$l \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = a$.

求证：$l /\!/ a$.

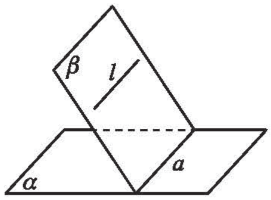


图 6-49

证明　因为 $l /\!/ \alpha$，所以 $l \cap \alpha = \varnothing$.

又因为 $a \subset \alpha$，所以 $l \cap a = \varnothing$.

因为 $\alpha \cap \beta = a$，所以 $a \subset \beta$.

又因为 $l \subset \beta$，所以 $l /\!/ a$.

这个定理由“线面平行”(直线与平面平行)得出了关于“线线平行”(直线与直线平行)的结论，即“线线平行”是“线面平行”的必要条件. 在空间中，经常应用这条定理由“线面平行”去判断“线线平行”.

例 1　有一块木料如图 6-50，已知棱 $BC /\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，要经过木料表面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线?

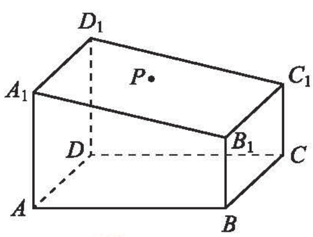


图 6-50

解　因为 $BC /\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$BC \subset$ 平面 B_1BCC_1，

平面 $B_1BCC_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = B_1C_1$，

所以由直线与平面平行的性质定理，得 $BC // B_1C_1$.

如图 6-51，过点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内画线段 $EF // B_1C_1$，根据基本事实 4，可知 $EF // BC$.

所以 $EF \subset$ 平面 $EBCF$，$BC \subset$ 平面 $EBCF$.

连接 BE 和 CF，则 BE，CF 和 EF 就是所要画的线.

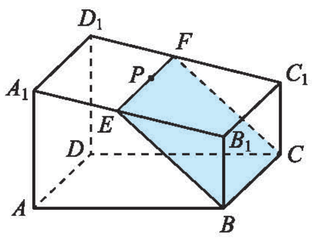


图 6-51

例 2 求证：如果一条直线与一个平面平行，那么夹在这条直线和这个平面间的平行线段相等.

已知：如图 6-52(1)，$AB // \alpha$，$AC // BD$，且 $AC \cap \alpha = C$，$BD \cap \alpha = D$. 求证：$AC = BD$.

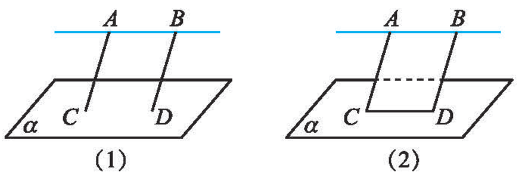


图 6-52

证明 因为 $AC // BD$，所以 A，B，D，C 四点在同一平面内.

连接 CD（如图 6-52(2)）.

因为 $AB // \alpha$，$AB \subset$ 平面 $ABDC$，平面 $ABDC \cap \alpha = CD$，

所以由直线与平面平行的性质定理，得 $AB // CD$.

又因为 $AC // BD$，所以四边形 $ABDC$ 是平行四边形，

所以 $AC = BD$.

练 习

1. 已知直线 a，b，平面 α，β. 判断下列命题是否正确，并说明理由：
   (1) 若 $a // \alpha$，$b // \alpha$，则 $a // b$.
   (2) 若 $a // \alpha$，$b \subset \alpha$，则 $a // b$.
2. 平行于同一平面的两条直线的位置关系是（　　），并说明理由.
   A. 平行　　B. 相交
   C. 异面　　D. 平行、相交或异面
3. $a // \alpha$，$P \in \alpha$，那么过点 P 且平行于 a 的直线（　　），并说明理由.
   A. 只有一条，不在平面 α 内　　B. 有无数条，不一定在 α 内
   C. 只有一条，且在平面 α 内　　D. 有无数条，一定在 α 内

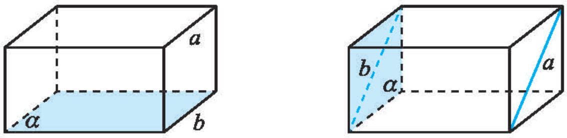
二、直线与平面平行的判定

怎样判定直线与平面平行呢？

根据定义判定直线与平面平行，只需判定直线与平面没有公共点. 但是，如何保证直线与平面没有公共点呢？

观察图 6-53，直线 a 不在平面 α 内，直线 b 在平面 α 内. 直观上看，如果 $a // b$，那么直线 a 与直线 b 没有公共点，从而直线 a 与平面 α 没有公共点，即直线 a 与平面 α 平行. 一般

地，有下面的判定定理.



(1)　　(2)

图 6－53

直线与平面平行的判定定理　如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行.

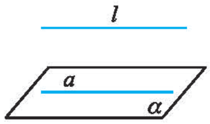


图 6－54

如图 6－54，直线与平面平行的判定定理可以用符号表示为：$l\not\subset\alpha$，$a\subset\alpha$，且 $l/\!/a\Rightarrow l/\!/\alpha$. 利用这个定理，可以由“线线平行”判定“线面平行”，即“线线平行”是“线面平行”的充分条件.

家庭中安装矩形画框时，为了使画框的上边框与天花板平行，只需要使画框的上边框与天花板和墙面的交线平行，这就是这个判定定理的一个应用. 请再举出一些生活中应用此判定定理的其他例子.

思考交流

判断下列命题是否正确，若正确，请简述理由；若不正确，请给出反例.

(1) 若直线 l 与平面 α 内一条直线平行，则 $l/\!/\alpha$；

(2) 若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线，则 $l/\!/\alpha$；

(3) 若直线 l 与平面 α 相交，则 α 内不存在直线与直线 l 平行；

(4) 若 $l/\!/a$，$a/\!/\alpha$，则 $l/\!/\alpha$；

(5) 若 $l/\!/\alpha$，$a/\!/\alpha$，则 $l/\!/a$；

(6) 若直线 l 与平面 α 平行，则它与平面 α 内的任何直线都平行.

例 3　如图 6－55，在空间四边形 $ABCD$ 中，点 E,F,G,H 分别为 AB,AD,BC,CD 的中点，试指出图中满足线面平行位置关系的所有情况，并说明理由.

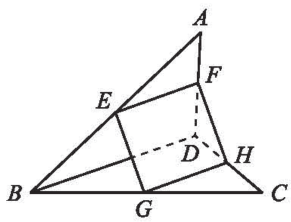


图 6－55

解　因为点 E,F 分别为 AB,AD 的中点，所以 $EF/\!/BD$.

又因为 $BD\subset$平面 BCD，$EF\not\subset$平面 BCD，

所以由直线与平面平行的判定定理，得 $EF/\!/$平面 BCD.

类似地，可得 $GH/\!/$平面 ABD，$EG/\!/$平面 ADC，$FH/\!/$平面 ABC，$BD/\!/$平面 $EGHF$.

例 4　如图 6－56，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为 DD_1 的中点，试判断 BD_1 与平面 AEC 的位置关系，并说明理由.

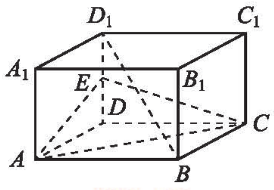


图 6-56

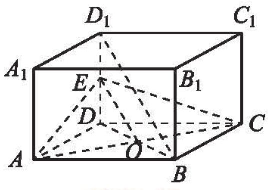


图 6-57

解 BD_1∥平面 AEC,理由如下:

如图 6-57,连接 BD,设 $BD\cap AC=O$,则点 O 为 BD 的中点,连接 EO.

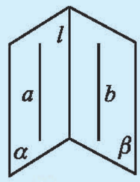
因为点 E 为 DD_1 的中点,所以 $EO\parallel BD_1$.

又因为 $EO\subset$平面 AEC,$BD_1\not\subset$平面 AEC,

所以由直线与平面平行的判定定理,得 BD_1∥平面 AEC.

练 习

1. 判断下列命题是否正确,画出图形,并说明理由:
   (1) 一条直线和另一条直线平行,它就和经过另一条直线的任何平面平行;
   (2) 一条直线和一个平面平行,它就和这个平面内的任何直线平行;
   (3) 平行于同一平面的两条直线互相平行;
   (4) 过平面外一点,可以作无数条直线与这个平面平行;
   (5) 若 $a\parallel b$,$b\subset\alpha$,则直线 a 平行于平面 α 内的无数条直线.
2. 已知:平面外的两条平行直线中的一条平行于这个平面.
   求证:另一条也平行于这个平面.
3. 已知:如图,$\alpha\cap\beta=l$,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,且 $a\parallel b$. 求证:$a\parallel l$,$b\parallel l$.



(第 3 题)

4.2 平面与平面平行

一、平面和平面平行的性质

由两个平面平行的定义可知,两个平行平面没有公共点,因此其中一个平面内的任一条直线与另一个平面也没有公共点,即平行. 于是,这个平面内的任意一条直线与另一个平面内的直线平行或异面. 那么,如何找到平行的直线呢?

观察图 6-58 中的长方体,上、下两底面 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 平行,上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 B_1D_1 仅和与它共面的下底面 $ABCD$ 的对角线 BD 平行,而和棱 AB,BC,CD,DA 都是异面直线. 由此得到:

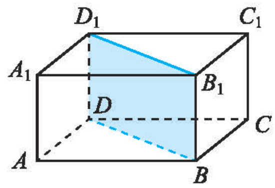


图 6-58

平面与平面平行的性质定理　两个平面平行，如果另一个平面与这两个平面相交，那么两条交线平行.

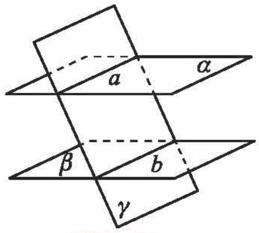


图 6-59

已知：如图 6-59，$\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$.

求证：$a /\!/ b$.

证明　因为 $\alpha /\!/ \beta$，所以 $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

又因为 $\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$，

所以 $a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$a \subset \gamma$，$b \subset \gamma$.

所以 $a \cap b = \varnothing$.

所以 $a /\!/ b$.

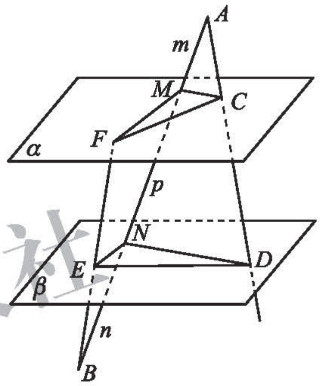


图 6-60

例 5　如图 6-60，已知 $\alpha /\!/ \beta$，点 M，C，F 和 N，D，E 分别是直线 AB，AD，BF 与 α 和 β 的交点. 设 $AM = m$，$BN = n$，$MN = p$，求 $\triangle END$ 与 $\triangle FMC$ 的面积之比.

解　因为 $\alpha /\!/ \beta$，平面 AND 分别交 α，β 于 MC，ND，

所以由平面与平面平行的性质定理，得 $MC /\!/ ND$，

$\dfrac{MC}{ND} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{m}{m+p}$.

同理可证 $MF /\!/ NE$，$\dfrac{NE}{MF} = \dfrac{BN}{BM} = \dfrac{n}{n+p}$.

因为 $\angle END$ 与 $\angle FMC$ 的两边分别平行且方向相同，所以 $\angle END = \angle FMC$.

$$S_{\triangle END} = \frac{1}{2} \cdot NE \cdot ND \cdot \sin \angle END,$$

$$S_{\triangle FMC} = \frac{1}{2} \cdot MF \cdot MC \cdot \sin \angle FMC.$$

于是 $\triangle END$ 与 $\triangle FMC$ 的面积之比为

$$\frac{S_{\triangle END}}{S_{\triangle FMC}} = \frac{NE \cdot ND \cdot \sin\angle END}{MF \cdot MC \cdot \sin\angle FMC} = \frac{NE}{MF} \cdot \frac{ND}{MC} = \frac{n(m+p)}{m(n+p)}.$$

思考交流

如果 $\alpha /\!/ \beta$，$\gamma \cap \alpha = a$，$\gamma \cap \beta = b$，$c \subset \beta$，那么 c 和 a，b 有什么样的位置关系？为什么？

练 习

1. 分别在两个平面内画两条平行直线.
2. 已知平面 α 和平面 β 平行,若两直线 m,n 分别在平面 α,β 内,则 m,n 的关系不可能是(　　),并说明理由.

   A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 平行或异面
3. 如果 3 个平面把空间分成 4 部分,那么这 3 个平面有怎样的位置关系?如果 3 个平面把空间分成 6 部分,那么这 3 个平面有怎样的位置关系?画图说明.
4. 求证:夹在两个平行平面间的两条平行线段相等.

二、平面与平面平行的判定

如果对于平面 α 和平面 β,在 α 内取一条直线 l,且 $l/\!/\beta$,能说 $\alpha/\!/\beta$ 吗?

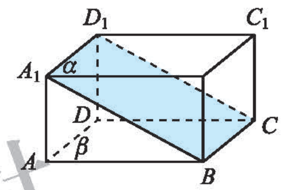


图 6-61

如图 6-61,平面 A_1BCD_1 中的 $A_1D_1/\!/$平面 $ABCD$,但平面 A_1BCD_1 与平面 $ABCD$ 不平行.

我们在生活中看到,工人师傅将水平尺(如图 6-62)在桌面上交叉放置两次,如果水平尺的气泡两次都在中央,就能判断桌面是水平的.这是为什么呢?

图 6-62

这种判断方法的理论依据是:

平面与平面平行的判定定理　如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行,那么这两个平面平行.

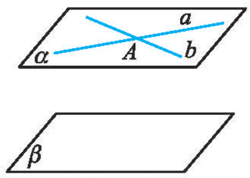


图 6-63

如图 6-63,平面与平面平行的判定定理可以用符号表示为:

$$a\subset\alpha,b\subset\alpha,a\cap b=A,a/\!/\beta,b/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta.$$

例 6　如图 6-64,已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$.求证:平面 $AB_1D_1/\!/$平面 C_1BD.

证明　在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,易证得 $BD/\!/B_1D_1$,又 $B_1D_1\subset$平面 AB_1D_1,$BD\not\subset$平面 AB_1D_1,所以 $BD/\!/$平面 AB_1D_1.

同理可证 $BC_1/\!/$平面 AB_1D_1.

又 $BD\cap BC_1=B$,且 $BD\subset$平面 C_1BD,$BC_1\subset$平面 C_1BD,

因此由平面与平面平行的判定定理,得平面 $AB_1D_1/\!/$平面 C_1BD.

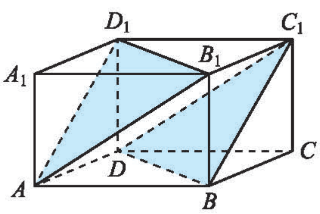


图 6-64

例 7 如图 6－65，点 P 在 SA 上，从点 P 处将三棱锥形木块 $S\text{-}ABC$ 锯开，使得截面与底面 ABC 平行，怎么在侧面上画线？

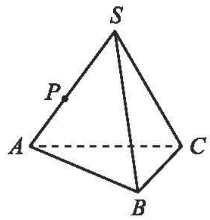


图 6－65

解 如图 6－66，过点 P 在侧面 SAB 上作 AB 的平行线，交 SB 于点 E；再过点 P 在侧面 SAC 上作 AC 的平行线，交 SC 于点 F，连接 EF. 截面 PEF 就是所求.

下面证明平面 PEF//平面 ABC.

由于 $PE // AB$，$AB \subset$ 平面 ABC，$PE \not\subset$ 平面 ABC，

故 PE //平面 ABC.

同理可证 PF//平面 ABC.

又 $PE \subset$ 平面 PEF，$PF \subset$ 平面 PEF，$PE \cap PF = P$，

所以平面 PEF//平面 ABC.

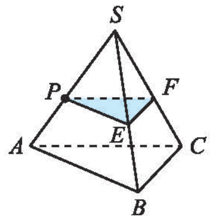
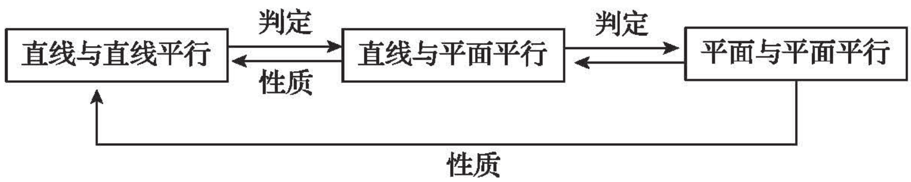


图 6－66

思考交流

“平面 α 内存在着不共线的三点到平面 β 的距离均相等”是“$\alpha // \beta$”的什么条件？

我们知道，可以通过直线与直线平行判定直线与平面平行；可以通过直线与平面平行的性质得到直线与直线平行；可以通过直线与平面平行判定平面与平面平行；可以通过平面与平面平行的定义及性质得到直线与平面平行、直线与直线平行. 这种直线、平面之间位置关系的相互转化是立体几何中的重要思想方法.



练 习

1. 点 P 是平面 α 外一点，过点 P 且平行于平面 α 的平面有（　　）个，并说明理由.

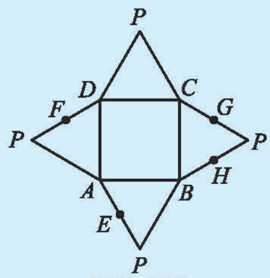
   A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 无数

2. 若平面 α 内任意一条直线均平行于平面 β，则平面 α 与平面 β 的位置关系是______.

3. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的平面展开图中，四边形 $ABCD$ 为正方形，点 E,F,G,H 分别为 PA，PD，PC，PB 的中点，画出此几何体. 下面四个结论中正确的是________.

   ① 平面 $EFGH$//平面 $ABCD$；

   ② 平面 PAD//BC；



（第 3 题）

③ 平面 $PCD // AB$；

④ 平面 $PAD //$ 平面 PAB.

习题 6－4

A 组

1. 选择题，想一想选项正确或错误的原因，并画图说明.

(1) 下列命题中，错误的是（　　）.

A. 平行于同一条直线的两个平面平行

B. 平行于同一个平面的两个平面平行

C. 一条直线与两个平行平面中的一个相交，则必与另一个相交

D. 一个平面与两个平行平面中的一个相交，则必与另一个相交

(2) 若直线 a 不平行于平面 α，则下列结论成立的是（　　）.

A. 平面 α 内的所有直线都与直线 a 异面　B. 平面 α 内不存在与直线 a 平行的直线

C. 平面 α 内的直线都与直线 a 相交　D. 平面 α 内只有一条直线与直线 a 相交

(3) 已知 $a // \alpha$，$P \in \alpha$，那么过点 P 且平行于直线 a 的直线（　　）.

A. 只有 1 条，不在平面 α 内　B. 有无数条，不一定在平面 α 内

C. 只有 1 条，且在平面 α 内　D. 有无数条，一定在平面 α 内

(4) 如果一条直线与两个平行平面中的一个平行，那么这条直线与另一个平面的位置关系是（　　）.

A. 平行　B. 相交　C. 在平面内　D. 平行或在平面内

(5) 经过平面 α 外两点，作与平面 α 平行的平面，则这样的平面可以作（　　）个.

A. 1 或 2　B. 0 或 1　C. 1　D. 0

2. 填空题：

(1) 已知平面 α，β 和直线 a，b，且 $a // b$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，则 α 与 β 的位置关系是________；

(2) 平面内一点与平面外一点的连线和这个平面内直线的位置关系是________；

(3) 过两平行平面 α，β 外的点 P 的两条直线 AB 与 CD，它们分别交 α 于 A，C 两点，交 β 于 B，D 两点，若 $PA=6$，$AC=9$，$PB=8$，则 BD 的长为________.

3. 判断题：

(1) 平行于同一条直线的两条直线平行；（　　）

(2) 平行于同一条直线的两个平面平行；（　　）

(3) 平行于同一个平面的两条直线平行；（　　）

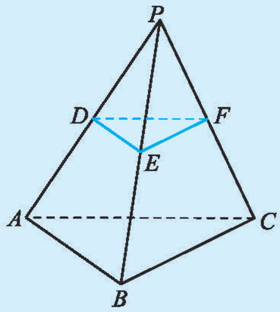
(4) 平行于同一个平面的两个平面平行；（　　）

(5) 平面 α 内有无数条直线与平面 β 平行，则 $\alpha // \beta$；（　　）

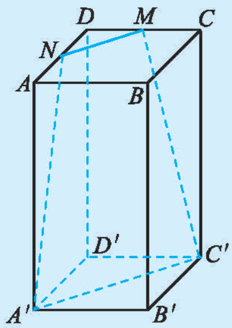
(6) 平面 α 内的所有直线与平面 β 都平行，则 $\alpha // \beta$.（　　）

4. 在长方体 $ABCD$ -$A'B'C'D'$中，点 P，R 分别为 BC，CC'上的动点，当点 P，R 满足什么条件时，PR∥平面$AB'D'$？

5. 如图，已知点 P 为△ABC 所在平面外任一点，点 D，E，F 分别在射线 PA，PB，PC 上，并且$\dfrac{PD}{PA}=\dfrac{PE}{PB}=\dfrac{PF}{PC}$. 求证：平面 DEF∥平面 ABC.



（第 5 题）



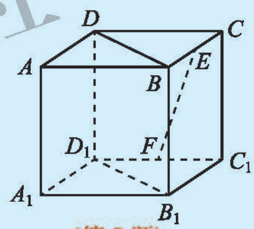
（第 6 题）

6. 如图，在长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中，底面是边长为 a 的正方形，高为 $2a$，点 M，N 分别是 CD 和 AD 的中点.

(1) 判断四边形 $MNA'C'$的形状；

(2) 求四边形 $MNA'C'$的面积.

7. 如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，点 E，F 分别为棱 BC，C_1D_1的中点．求证：EF∥平面 BB_1D_1D.



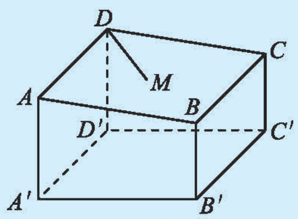
（第 7 题）

8. 现在我们已经学习了线线平行、线面平行和面面平行的所有内容，这三种位置关系之间有怎样的内在联系？请用一个图表表示这种联系．

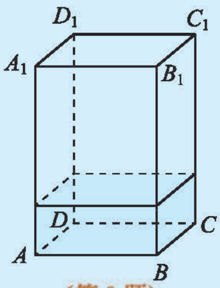
B 组

1. 设点 A 是△BCD 所在平面外一点，点 M，N 分别是△ABC 和△ACD 的重心. 求证：MN∥平面 BCD.

2. 木工小罗在处理如图所示的一块木料时，发现该木料表面 $ABCD$ 内有一裂纹 DM，已知$B'C'$平行于平面 AC. 他打算经过点 M 和棱$B'C'$将木料锯开，却不知如何画线，你能帮助他解决这个问题吗？



（第 2 题）



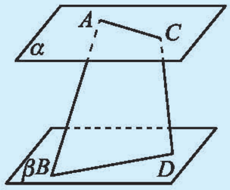
（第 3 题）

3. 如图，透明塑料制成的密闭长方体容器 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$内灌进一些水，固定容器底面一边 BC 于地面上，再将容器倾斜. 随着倾斜度的不同，

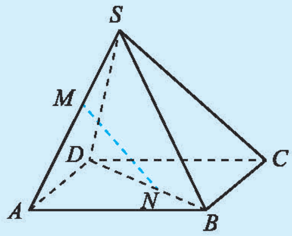
(1) BC 和水面的位置关系是什么?

(2) 有水的部分呈什么形状?

4. 如图,$\alpha // \beta$,$A,C \in \alpha$,$B,D \in \beta$,AC 与 BD 为异面直线,$AC=6$,$BD=8$,$AB=CD=10$,AB 与 CD 成 60° 的角,求异面直线 AC 与 BD 所成的角.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图,点 S 是▱$ABCD$ 所在平面外一点,M,N 分别是 SA,BD 上的点,且$\frac{AM}{SM}=\frac{ND}{BN}$.

求证:$MN //$ 平面 SBC.

§ 5 垂直关系

本节研究垂直关系的性质和判定.

5.1 直线与平面垂直

天安门广场上竖立的国旗杆与地面，直立在水平桌面上打开书的书脊与桌面(如图 6-67)等都展示了直线与平面垂直的形象. 那么，什么是直线与平面垂直呢?

观察立在水平桌面上打开的书，书脊可以抽象成一条直线，书脊与桌面上每一页的下底边所在直线都垂直，就说书脊与桌面垂直.

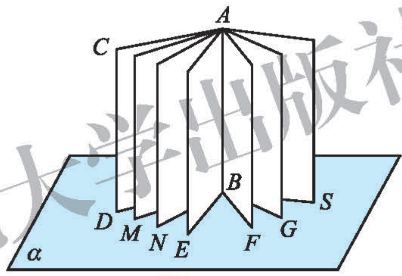


图 6-67

一般地，如图 6-68，如果直线 l 与平面 α 内的任何一条直线都垂直，那么称直线 l 与平面 α **垂直**，记作 $l \perp \alpha$. 直线 l 称为平面 α 的**垂线**，平面 α 称为直线 l 的**垂面**，它们唯一的公共点 P 称为**垂足**.

过一点有且只有一条直线与一个平面垂直，过一点有且只有一个平面与一条直线垂直.

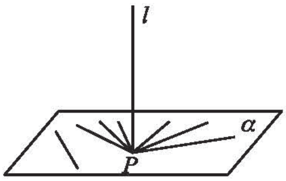


图 6-68

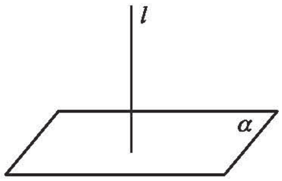


图 6-69

画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直，如图 6-69.

一、直线与平面垂直的性质

我们知道，在平面内，如果两条直线同垂直于另一条直线，那么这两条直线平行. 这个性质能推广到空间吗?

观察如图 6－70 的长方体，可以看到：直线 a 与直线 b 都垂直于平面 α，这时，$a/\!/b$.

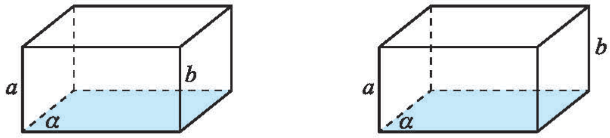


图 6－70

一般地，如果 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，这时，a 和 b 平行吗？

如图 6－71，设 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，垂足分别为 A，B.

假定 a 和 b 不平行，则过点 B 作 a 的平行线 b'，b' 与 b 不重合.

因 $b\cap b'=B$，故直线 b 与 b' 确定一个平面，记为 β，且记 $\alpha\cap\beta=l$.

因为 $b\perp\alpha$，$a\perp\alpha$，所以 $b\perp l$，$a\perp l$.

又因为 $b'/\!/a$，所以 $b'\perp l$.

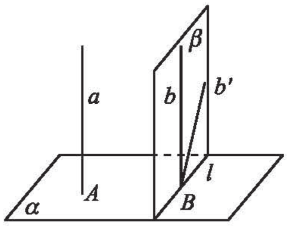


图 6－71

这样在平面 β 内，经过直线 l 上同一点 B 就有两条直线 b 与 b' 都与 l 垂直，这与“平面内，过直线上的一点只有一条直线与已知直线垂直”相矛盾.

因此 $a/\!/b$.

这样就得到了直线与平面垂直的性质定理.

直线与平面垂直的性质定理　垂直于同一个平面的两条直线平行.

这个定理揭示了“平行”与“垂直”之间的一种联系．利用这个定理可以判定两条直线平行.

思考交流

两条异面直线能垂直于同一平面吗？说明理由.

例 1　本章 1.2 节已提到从平面外一点作一个平面的垂线，这个点和垂足间的距离称为点到平面的距离．请证明：如果一条直线平行一个平面，那么这条直线上各点到这个平面的距离都相等.

证明　如图 6－72，直线与平面分别用 l 与 α 表示，且 $l/\!/\alpha$.

要证明直线 l 上各点到平面 α 的距离相等，只要证明直线 l 上任意两点到平面 α 的距离相等．而点到平面 α 的距离也就是点到平面 α 垂线段的长.

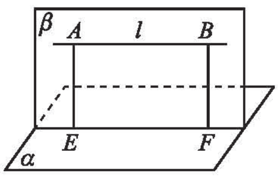


图 6－72

过直线 l 上任意两点 A，B 分别作平面 α 的垂线，垂足分别为 E，F.

因为 $AE\perp\alpha$，$BF\perp\alpha$，所以 $AE/\!/BF$.

设过直线 AE 和 BF 的平面为 β，则 $\beta\cap\alpha=EF$.

由 $l /\!/ \alpha$，得 $l /\!/ EF$.

所以四边形 $AEFB$ 是平行四边形.

所以 $AE=BF$，即直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

因此，如果一条直线与平面平行，那么这条直线上任意一点到平面的距离就是这条**直线到这个平面的距离**.

前面我们讨论了直线与平面垂直的情况，在处理问题中，很多时候直线与平面的位置关系不是垂直关系.

如图 6－73，一条直线与一个平面 α 相交，但不与这个平面垂直，这条直线称为这个平面的斜线，斜线与平面的交点 A 称为斜足. 过斜线上斜足以外的一点 P 向平面作垂线，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 称为斜线在这个平面上的投影. 平面的一条斜线与它在平面上的投影所成的锐角，叫作这条**直线与这个平面所成的角**.

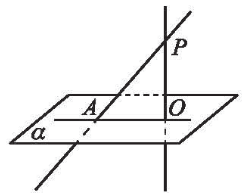


图 6－73

一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线与平面平行，或在平面内，就说它们所成的角是 $0°$ 的角.

例 2 如图 6－74，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$.

(1) 求 D_1A 与底面 $ABCD$ 所成的角；

(2) 设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，求 D_1B 与底面 $ABCD$ 所成的角的余弦值.

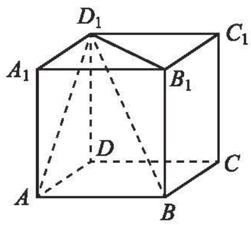


图 6－74

解 (1) 因为 $DD_1\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $\angle D_1AD$ 是 D_1A 与底面 $ABCD$ 所成的角.

因为侧面 A_1ADD_1 是正方形，所以 $\angle D_1AD=45°$.

即 D_1A 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$.

(2) 如图 6－75，连接 BD，则 $BD=\sqrt{2}a$.

因为 $DD_1\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $\angle D_1BD$ 是 D_1B 与底面 $ABCD$ 所成的角，同时 $DD_1\perp DB$.

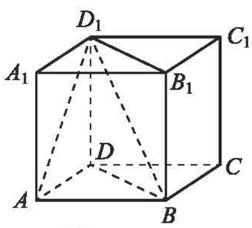


图 6－75

在 $\mathrm{Rt}\triangle D_1BD$ 中，$DD_1=a$，$BD=\sqrt{2}a$，$D_1B=\sqrt{3}a$，

所以 $\cos\angle D_1BD=\dfrac{BD}{D_1B}=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

即 D_1B 与底面 $ABCD$ 所成的角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

练 习

1. 判断下列命题是否正确，说明理由并画出正确命题的图形：

(1) 在平面中，垂直于同一直线的两条直线互相平行；

(2) 在空间中，垂直于同一直线的两条直线互相平行；

(3) 垂直于同一平面的两条直线互相平行；

(4) 垂直于同一直线的两个平面互相平行.

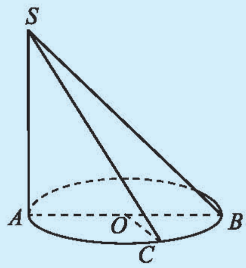
2. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

(1) 两条异面直线不能垂直于同一平面；

(2) 如果一条直线上有两点到一个已知平面的距离相等，那么这条直线必与这个平面平行；

(3) 同一平面的两条垂线一定共面.

3. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 为该圆上的一点，$\angle AOC=120°$，$SA\perp$⊙O 所在的平面，$SA=AB$，求 SC 与⊙O 所在的平面所成的角的正切值.



(第 3 题)

二、直线与平面垂直的判定

怎样判定一条直线和一个平面垂直呢？

先观察如图 6－76(1) 的长方体，可以知道：b，c 是平面 α 内的两条相交直线，$a\perp b$，$a\perp c$，这时，$a\perp\alpha$.

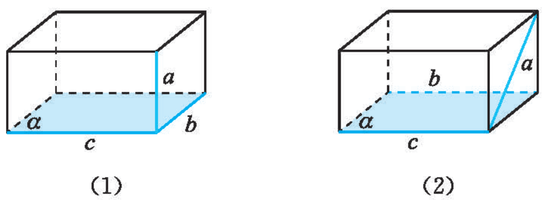


图 6－76

再观察如图 6－76(2) 的长方体，可以知道：平面 α 内的两条平行直线 b，c 虽然都与直线 a 垂直，但 a 与 α 不垂直.

一般地，有下面的判定定理.

直线与平面垂直的判定定理　如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么该直线与此平面垂直.

如图 6－77，直线与平面垂直的判定定理可以用符号表示为：

$$a\subset\alpha, b\subset\alpha, l\perp a, l\perp b,\ a\cap b=A\Rightarrow l\perp\alpha.$$

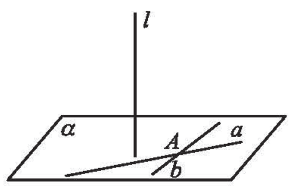


图 6－77

思考交流

1. 若三条共点的直线两两垂直，那么其中的任意一条直线与另外两条直线确定的平面是什么关系？

2. 过平面外一点可以作几条直线与已知平面垂直？

例 3 证明：如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

已知：如图 6－78(1)，$l_1 /\!/ l_2$，$l_1 \perp \alpha$. 求证：$l_2 \perp \alpha$.

证明 要证明 $l_2 \perp \alpha$，只需证明 l_2 与平面 α 内两条相交直线垂直.

如图 6－78(2)，在平面 α 内作两条相交直线 a，b.

因为 $l_1 \perp \alpha$，所以 $l_1 \perp a$，$l_1 \perp b$.

又因为 $l_1 /\!/ l_2$，所以 $l_2 \perp a$，$l_2 \perp b$.

又因为 $a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$，a，b 是两条相交直线，所以 $l_2 \perp \alpha$.

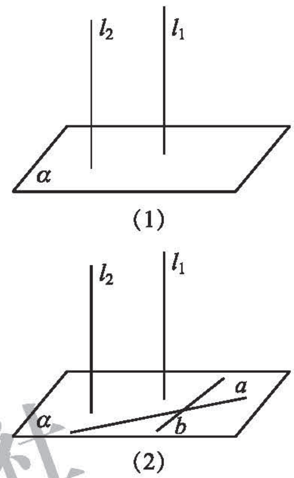


图 6－78

例 4 如图 6－79，长杆 l 与地面 α 相交于点 O，在杆子上距地面 2 m 的点 P 处挂一根长 2.5 m 的绳子，拉紧绳子并把它的下端放在地面上的点 A 或点 B(A，B，O 三点不在同一条直线上). 如果 A，B 两点和点 O 的距离都是 1.5 m，那么长杆 l 和地面是否垂直？为什么？

解 在 $\triangle POA$ 和 $\triangle POB$ 中，

因为 $PO=2$ m，$AO=BO=1.5$ m，$PA=PB=2.5$ m，

所以 $PO^2+AO^2=2^2+1.5^2=2.5^2=PA^2$，

$PO^2+BO^2=2^2+1.5^2=2.5^2=PB^2$.

根据勾股定理的逆定理得 $PO \perp AO$，$PO \perp BO$.

又 A，B，O 三点不共线，因此 $PO \perp$ 平面 α，即长杆与地面垂直.

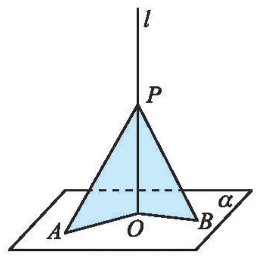


图 6－79

练 习

1. 观察教室内的线与面，找出直线与平面垂直的例子.
2. 下列各种说法正确吗？为什么？
   (1) 如果一条直线和一个平面内的无数条直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直；
   (2) 如果一条直线和一个平面内的任意两条直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直；
   (3) 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线和这个平面垂直.
3. 能否在长方体的侧面、对角面所在的平面内画出直线，与另一个平面内的一条直线垂直，却不与这个平面垂直？能否画出两条？无数条？你得到什么结论？
4. 怎样检查你家的门框是否与地面垂直？说出理由.

5.2 平面与平面垂直

两个平面除了平行还有相交的情况. 为了讨论两个平面相交的情况,需要引入有关的概念.

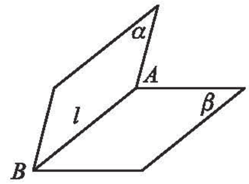


图 6-80

一个平面内的一条直线,把这个平面分成两部分,其中的每一部分都称为**半平面**.

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形称为**二面角**,这条直线称为**二面角的棱**,这两个半平面称为**二面角的面**. 如图 6-80,以直线 $AB(l)$ 为棱、半平面 α,β 为面的二面角,记作二面角 α-AB-β 或 α-l-β.

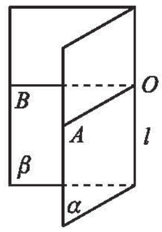


图 6-81

以二面角的棱上任一点为端点,在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线,这两条射线所成的角称为**二面角的平面角**,如图 6-81 中的$\angle AOB$ 就是二面角 α-l-β 的平面角. 平面角是直角的二面角称为**直二面角**.

两个平面相交,如果所成的二面角是直二面角,就说这两个平面互相垂直. 平面 α 与 β 垂直,记作:$\alpha\perp\beta$.

两个互相垂直的平面通常画成如图 6-82 的样子,此时,把直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直.

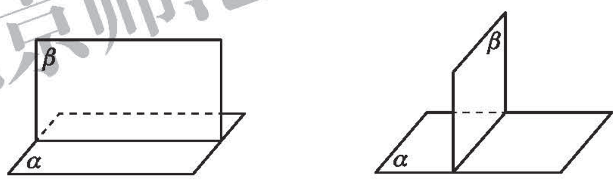
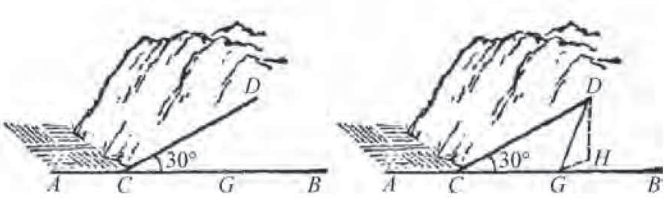


图 6-82

例 5 如图 6-83(1),山坡的倾斜度(坡面与水平面所成二面角的度数)是 60°,山坡上有一条直道 CD,它和坡脚的水平线 AB 的夹角是 30°,沿这条路上山,行走 100 m 后升高多少米?(精确到 0.1 m)



(1) (2)

图 6-83

解 如图 6-83(2),设 DH 垂直于过 BC 的水平面,点 H 为垂足,线段 DH 的长度就是所求的高度.

在平面 DBC 内，过点 D 作 BC 的垂线，垂足为点 G，连接 GH.

因为 $DH \perp$ 平面 BCH，$BC \subset$ 平面 BCH，所以 $DH \perp BC$.

又 $DG \cap DH = D$，$DG, DH \subset$ 平面 DGH，所以 $BC \perp$ 平面 DGH.

又因为 $GH \subset$ 平面 DGH，所以 $GH \perp BC$.

因此，$\angle DGH$ 就是坡面 DGC 与水平平面 BCH 所成的二面角的平面角，$\angle DGH = 60°$.

由此得 $DH = DG\sin 60° = CD\sin 30°\sin 60° = 100\sin 30°\sin 60° = 25\sqrt{3} \approx 43.3(\text{m})$.

即沿直道前进 100 m，升高约 43.3 m.

一、平面与平面垂直的性质

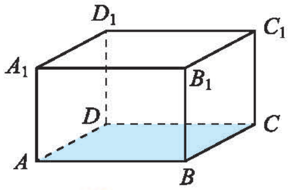


图 6-84

1. 在教室里，黑板所在平面与地面所在平面垂直，你能否在黑板上画一条直线与地面垂直？

2. 如图 6-84，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 A_1ADD_1 与平面 $ABCD$ 垂直，直线 A_1A 垂直于其交线 AD，那么直线 A_1A 与平面 $ABCD$ 垂直吗？平面 A_1ADD_1 内还有哪些直线与平面 $ABCD$ 垂直？

抽象概括

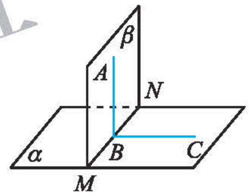


图 6-85

一般地，$\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = MN$，$AB \subset \beta$，$AB \perp MN$ 于点 B，这时，直线 AB 和平面 α 垂直吗？

事实上，如图 6-85，在平面 α 内作直线 $BC \perp MN$，则 $\angle ABC$ 是二面角 $\alpha\text{-}MN\text{-}\beta$ 的平面角. 因为 $\alpha \perp \beta$，所以 $\angle ABC = 90°$，即 $AB \perp BC$. 又 $AB \perp MN$，$BC \cap MN = B$，$BC \subset \alpha$，$MN \subset \alpha$，从而 $AB \perp \alpha$.

平面与平面垂直的性质定理　两个平面垂直，如果一个平面内有一条直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直.

平面与平面垂直的性质定理说明，由平面与平面垂直可以得到直线与平面垂直.

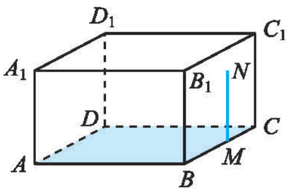


图 6-86

例 6　如图 6-86，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，MN 在平面 B_1BCC_1 内，$MN \perp BC$ 于点 M，判断 MN 与 AB 的位置关系，并说明理由.

解　由题意知平面 $B_1BCC_1 \perp$ 平面 $ABCD$，交线为 BC.

因为 $MN \subset$ 平面 B_1BCC_1，且 $MN \perp BC$，所以 $MN \perp$ 平面 $ABCD$. 又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，从而 $MN \perp AB$.

例 7 证明：如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线在第一个平面内.

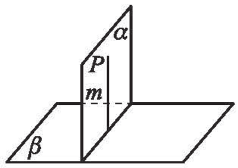


图 6－87

已知：如图 6－87，$\alpha\perp\beta$，$P\in\alpha$，$P\in m$，$m\perp\beta$.

求证：$m\subset\alpha$.

证明 直接证明 $m\subset\alpha$ 不易，可采用反证法.

假设 $m\not\subset\alpha$，如图 6－88，设 $\alpha\cap\beta=c$，过点 P 在平面 α 内作直线 $n\perp c$. 根据平面与平面垂直的性质定理，$n\perp\beta$.

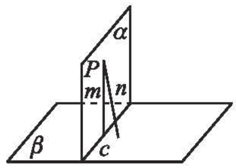


图 6－88

已知 $m\perp\beta$，$m\cap n=P$，这与“过一点只有一条直线与平面 β 垂直”矛盾，所以 $m\not\subset\alpha$ 不成立.

即 $m\subset\alpha$.

练　习

1. 下列命题中错误的是（　　），并说明正误的理由.
   A. 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β，那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β
   B. 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β，那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β
   C. 如果平面 α 不垂直于平面 β，那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β
   D. 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 γ，平面 $\beta\perp$ 平面 γ，$\alpha\cap\beta=l$，那么 $l\perp\gamma$
2. 垂直于同一个平面的两个平面平行吗？说明你的理由.
3. 找一找教室墙面与地面构成的二面角，分别指出构成这些二面角的面、棱、平面角及其度数.
4. 求证：如果平面 α 和不在这个平面内的直线 a 都垂直于平面 β，那么 $a/\!/\alpha$.

二、平面与平面垂直的判定

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线，来检查所砌的墙面是否与水平平面垂直（如图 6－89）. 系有铅锤的线是垂直于水平面的. 如果系有铅锤的线紧贴墙面，就说明墙面垂直于水平面.

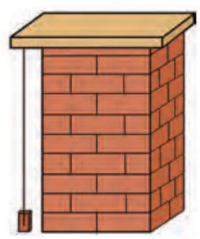


图 6－89

这种判断方法的理论依据是：

平面与平面垂直的判定定理　如果一个平面过另一个平面的垂线，那么这两个平面垂直.

平面与平面垂直的判定定理可以用符号表示为：

$$l\subset\alpha,\ l\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta.$$

例 8 如图 6－90，在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，四个侧面都是矩形.

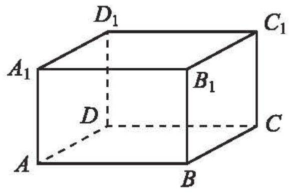


图 6－90

求证：平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 $ABCD$.

证明 由四边形 BB_1C_1C 是矩形，得 $CC_1\perp BC$.

同理可得 $CC_1\perp CD$.

又 $BC\cap CD=C$，BC，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，因此 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $CC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，于是平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 $ABCD$.

这说明侧面是矩形的棱柱是直棱柱，直棱柱的侧面都垂直于底面.

例 9 如图 6－91，在四面体 $A_1\text{-}ABC$ 中，$A_1A\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，且 $AA_1=AB$.

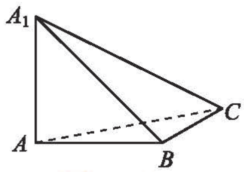


图 6－91

(1) 四面体 $A_1\text{-}ABC$ 中有几组互相垂直的平面？

(2) 求二面角 $A\text{-}A_1B\text{-}C$ 和 $A_1\text{-}BC\text{-}A$ 的大小.

解 (1) 由 $A_1A\perp$ 平面 ABC，$A_1A\subset$ 平面 A_1AB，得平面 $A_1AB\perp$ 平面 ABC；同理可得平面 $A_1AC\perp$ 平面 ABC.

因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1A\perp BC$.

又因为 $AB\perp BC$，$A_1A\subset$ 平面 A_1AB，$AB\subset$ 平面 A_1AB，$A_1A\cap AB=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 A_1AB.

由 $BC\subset$ 平面 A_1BC，得平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1AB.

于是四面体 $A_1\text{-}ABC$ 中互相垂直的平面为：

平面 $A_1AB\perp$ 平面 ABC，平面 $A_1AC\perp$ 平面 ABC，平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1AB.

(2) 由(1) 知，平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1AB，所以二面角 $A\text{-}A_1B\text{-}C$ 为 $90°$. 由 $BC\perp$ 平面 A_1AB，得 $A_1B\perp BC$；又 $AB\perp BC$，所以 $\angle A_1BA$ 是二面角 $A_1\text{-}BC\text{-}A$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1AB$ 中，$A_1A=AB$，则 $\angle A_1BA=45°$，即二面角 $A_1\text{-}BC\text{-}A$ 为 $45°$.

我们知道，可以通过直线与直线垂直判定直线与平面垂直；可以通过直线与平面垂直的定义得到直线与直线垂直；可以通过直线与平面垂直判定平面与平面垂直；同时平面与平面垂直的性质定理说明，由平面与平面垂直可以得到直线与平面垂直. 这种直线、平面之间的位置关系的相互转化，是解决空间图形问题的一种重要的思想方法.

$$\boxed{\text{直线与直线垂直}} \underset{}{\overset{\text{判定}}{\rightleftarrows}} \boxed{\text{直线与平面垂直}} \underset{\text{性质}}{\overset{\text{判定}}{\rightleftarrows}} \boxed{\text{平面与平面垂直}}$$

练 习

1. 观察教室内现有的物体，找出两个平面互相垂直的例子.
2. 画两两互相垂直的三个平面.
3. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，过 A，B，D 三个点作一个平面，请画出二面角 $A\text{-}BD\text{-}A_1$ 的平面角，并说明画图的根据.
4. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 BB_1D_1D 与平面 BA_1C_1 的位置关系怎样？并请画图说明.

习题 6－5

A 组

1. 回答问题(画图并说明理由)：

(1) 长方体与平行六面体的区别是什么？怎么判断一个四棱柱是长方体？

(2) 指出长方体中对角面与底面所成的二面角及其平面角；对角面与侧面所成的二面角及其平面角；两个对角面所成的二面角及其平面角.

(3) 长方体中哪些二面角构成直二面角？正四棱柱呢？正方体呢？

(4) 为什么说长方体中侧面与底面一定是垂直的？

(5) 长方体中侧棱与底面内的每一条直线是什么关系？两条侧棱有什么关系？为什么？

(6) 长方体中平行于侧棱的直线与底面内的每一条直线是什么关系？长方体的上下两底中心连线与底面内的每一条直线是什么关系？为什么？

(7) 利用长方体模型，把关于垂直关系的判定定理与性质定理所表示的图形找出来，并用文字及符号表达.

2. 过平面 α 的一条垂线，可作______个平面与平面 α 垂直. 你还能命制类似的命题吗？

3. 想一想，本章 5.2 节在表示二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角时，为何要求“$OA\perp l$，$OB\perp l$”？为什么 $\angle AOB$ 的大小与点 O 在 l 上的位置无关？

4. 下面有四个说法：

① 经过一个平面的垂线的平面与这个平面垂直；

② 如果平面 α 和不在这个平面内的直线 a 都垂直于平面 β，那么 $a/\!/\alpha$；

③ 垂直同一平面的两个平面互相平行；

④ 垂直同一平面的两个平面互相垂直.

其中正确的说法个数是(　　)，并说明理由.

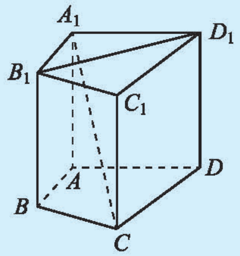
A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

5. 已知点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，且 $PA=PB=PC$，则点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面上的投影 D 是 $\triangle ABC$ 的(　　)，并说明理由.

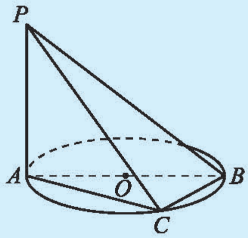
A. 外心　　　B. 内心　　　C. 垂心　　　D. 重心

6. 如图，在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1$-$ABCD$ 中，当底面四边形 $ABCD$ 满足条件__________时，有 $A_1C\perp B_1D_1$.（填上你认为正确的一种条件即可，不必考虑所有可能的情形.）

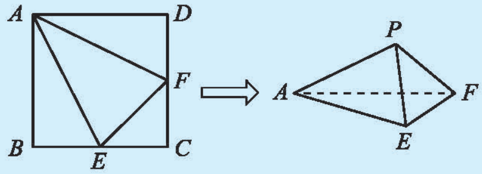
7. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 为该圆上异于 A，B 的点，$PA\perp$⊙O 所在的平面. 求证：平面 $PAC\perp$平面 PBC.



（第 6 题）



（第 7 题）



（第 8 题）

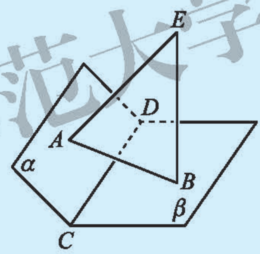
8. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，分别取边 BC，CD 的中点 E，F，连接 AE，EF，AF，以 AE，EF，FA 为折痕进行折叠，使点 B，C，D 重合于一点 P.

(1) 求证：$AP\perp EF$；

(2) 求证：平面 $APE\perp$平面 APF.

9. 请在长方体模型中找出三个角都是直角的空间四边形，并画出该图形. 三个角都是直角的四边形一定是矩形吗？

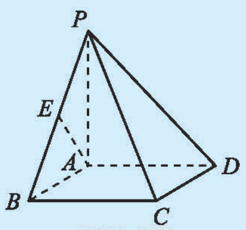
10. 如图，已知 $\alpha\cap\beta=CD$，$EA\perp\alpha$ 于 A，$EB\perp\beta$ 于 B. 求证：$CD\perp AB$.



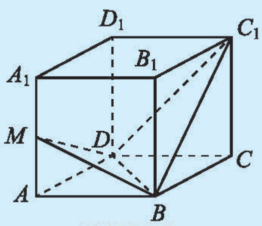
（第 10 题）

B 组

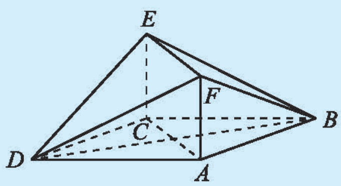
1. 如图，四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AB$，点 E 是棱 PB 的中点. 求证：$AE\perp PC$. 如果把这个四棱锥镶嵌到长方体内，你能引申出什么结论？画图并说明你的结论.



（第 1 题）



（第 2 题）

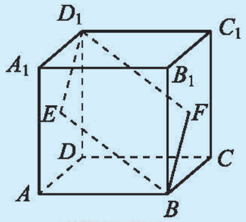


（第 3 题）

2. 如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是 AA_1 的中点. 求证：平面 $MBD\perp$平面 BC_1D.

3. 如图，菱形 $ABCD$ 所在平面与矩形 $ACEF$ 所在平面相互垂直，试探究当 $\dfrac{BD}{AF}$ 为何值时，平面 $DEF\perp$平面 BEF？并证明你的结论.

4. 求证：如果两个平面都垂直于第三个平面，则它们的交线垂直于第三个平面.
5. 如图，点 E，F 分别为正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，画出四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影的各种可能形状（要求：尽量把可能的图都画出）.



（第 5 题）

6. 总结空间线面的垂直关系，怎样判定这些关系？它们之间有什么联系？如何证明性质定理？

§ 6 简单几何体的再认识

在本章 §1 已经初步认识了柱(棱柱和圆柱)、锥(棱锥和圆锥)、台(棱台和圆台)、球这些简单几何体的基本特征．在本节，我们将继续研究这些简单几何体的某些特性.

6.1 柱、锥、台的侧面展开与面积

把柱、锥、台的侧面沿着它们的一条侧棱或母线剪开后展开在一个平面上，展开图的面积就是它们的侧面积.

一、圆柱、圆锥、圆台

圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图依次是矩形、扇形、扇环，如图 6－92.

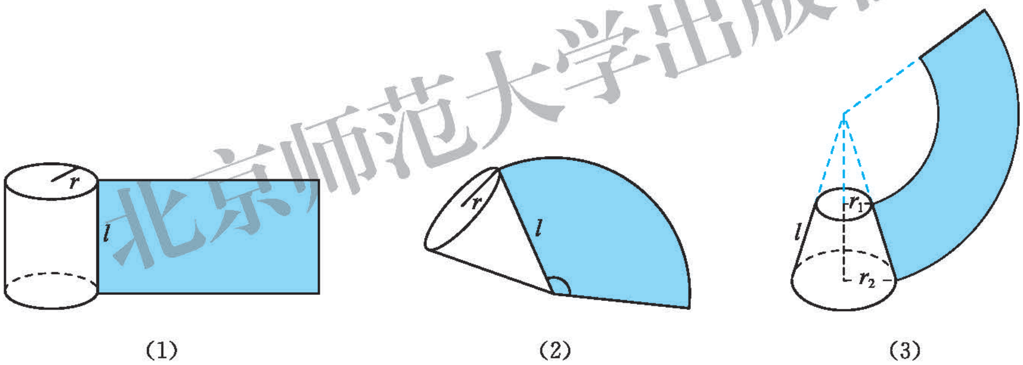


图 6－92

由矩形、扇形的面积公式，可以得到:

$$\boxed{S_{圆柱侧}=2\pi rl,\quad S_{圆锥侧}=\pi rl,\quad S_{圆台侧}=\pi(r_1+r_2)l.}$$

其中 r 为圆柱、圆锥底面半径，r_1，r_2 分别为圆台上、下底面半径，l 为母线的长.

例 1 一个圆柱形的锅炉，底面直径 $d=1$ m，高 $h=2.3$ m. 求锅炉的表面积(精确到 0.1 m²).

解 $S=S_{侧面积}+2S_{底面积}$

$$=\pi dh+2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\pi\times1\times2.3+2\pi\times\frac{1}{4}=2.8\pi\approx8.8(\text{m}^2).$$

因此，锅炉的表面积约为 8.8 m².

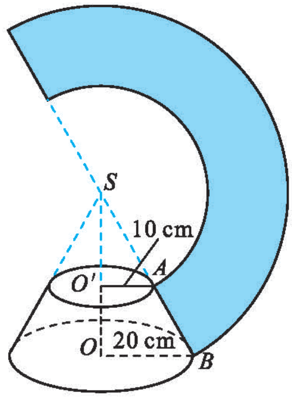


图 6-93

例 2 圆台的上、下底面半径分别是 10 cm 和 20 cm，它的侧面展开图的扇环的圆心角是 180°，那么圆台的侧面积是多少？（结果中保留 π）

解 如图 6-93，设圆台上底面周长为 c cm.

因为圆环的圆心角是 180°，所以 $c=\pi\cdot SA$.

又因为 $c=2\pi\times10=20\pi$(cm)，所以 $SA=20$ cm. 同理 $SB=40$ cm.

所以 $$AB=SB-SA=20\text{(cm)},$$

$$S_{圆台侧}=\pi(r_1+r_2)\cdot AB=\pi(10+20)\times20=600\pi(\text{cm}^2).$$

因此，圆台的侧面积为 600π cm^2.

二、直棱柱、正棱锥、正棱台

直棱柱、正棱锥、正棱台的侧面展开图分别如图 6-94 至图 6-96.

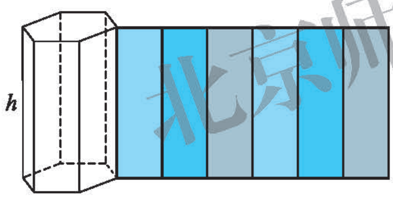


图 6-94

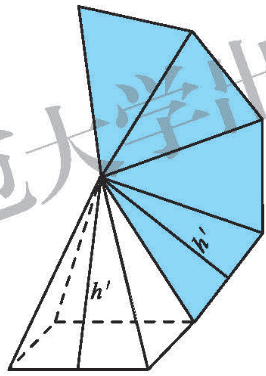


图 6-95

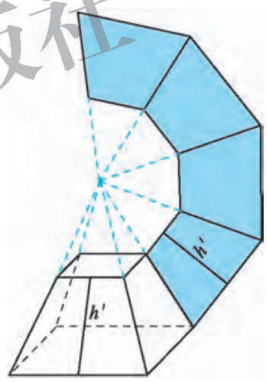


图 6-96

根据矩形、三角形以及梯形的面积公式，它们的侧面积分别为：

$$\boxed{S_{直棱柱侧}=ch,\quad S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch',\quad S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(c_1+c_2)h'.}$$

其中 c 为棱柱、棱锥的底面周长，c_1，c_2 分别为棱台的上、下底面周长，h 为棱柱的高，h' 为棱锥、棱台的斜高.

思考交流

将直棱柱、正棱锥、正棱台的侧面积公式进行类比，能发现它们的联系和区别吗？

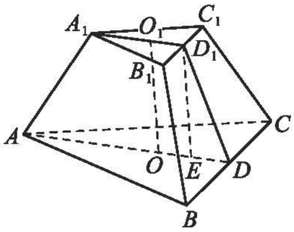


图 6－97

例 3 一个正三棱台的上、下底面边长分别为 3 cm 和 6 cm，高是$\frac{3}{2}$ cm. 求这个正三棱台的侧面积.

解 如图 6－97，点 O_1，O 分别是上、下底面的中心，则 $O_1O=\frac{3}{2}$ cm. 连接 A_1O_1 并延长交 B_1C_1 于点 D_1，连接 AO 并延长交 BC 于点 D；过 D_1 作 AD 的垂线，垂足为点 E；连接 D_1D. 在 $\mathrm{Rt}\triangle D_1ED$ 中，

$$D_1E=O_1O=\frac{3}{2}\text{ cm},$$

$$DE=DO-OE=DO-D_1O_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(6-3)=\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{cm}),$$

$$DD_1=\sqrt{D_1E^{\,2}+DE^{\,2}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}(\text{cm}).$$

所以 $S_{\text{正三棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')\cdot DD_1=\frac{1}{2}\times3\times(3+6)\times\sqrt{3}=\frac{27\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$.

因此，三棱台的侧面积为$\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

6.2 柱、锥、台的体积

一、棱柱和圆柱

我们知道，长方体的体积等于它的底面积乘高. 类似地，棱柱和圆柱的体积的计算公式如下：

$$\boxed{V_{\text{柱体}}=Sh.}$$

其中 S 为柱体的底面积，h 为柱体的高.

二、棱锥和圆锥

棱锥和圆锥的体积可用下面的公式来计算：

$$\boxed{V_{\text{锥体}}=\frac{1}{3}Sh.}$$

其中 S 为锥体的底面积，h 为锥体的高.

例 4 埃及胡夫金字塔大约建于公元前 2580 年，其形状为正四棱锥. 塔高约146.6 m，底面边长约 230.4 m. 求这座金字塔的侧面积和体积.（精确到 0.1）

解 如图 6－98，AC 为高，BC 为底面的边心距，则 $AC=146.6$ m，$BC=115.2$ m，底面周长 $c=4\times230.4$ m.

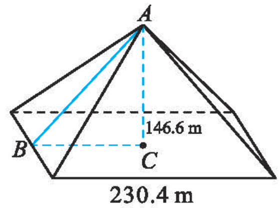


图 6-98

$$S_{侧面积}=\frac{1}{2}c\cdot AB$$

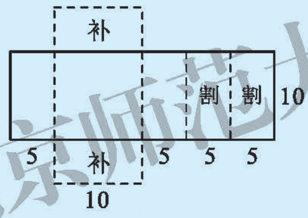
$$=\frac{1}{2}\times4\times230.4\times\sqrt{115.2^2+146.6^2}\approx85\ 914.9(\text{m}^2),$$

$$V=\frac{1}{3}S_{底}\cdot AC=\frac{1}{3}\times230.4^2\times146.6\approx2\ 594\ 046.0(\text{m}^3).$$

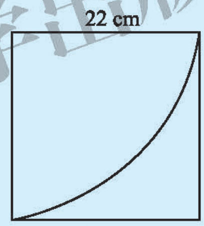
因此,金字塔的侧面积约为 85 914.9 m^2,体积约为 2 594 046.0 m^3.

练　习

1. 已知正六棱柱的高为 h,底面边长为 a,求它的表面积.
2. 从长方体一个顶点出发的三个面的面积分别为 6,8,12,求这个长方体的对角线的长.
3. 正四棱台的上、下两底面边长分别是 3,6,其侧面积等于两底面积之和,则其高和斜高分别是多少?
4. 要对一批圆锥形实心零部件的表面进行防腐处理,每平方厘米的加工处理费为 0.15 元. 已知圆锥底面直径与母线长都等于 5 cm,那么加工处理 1 000 个这样的零件,需加工处理费多少元?(精确到 0.01 元)
5. 某自来水厂要制作一个无盖长方体水箱,所用材料的形状是矩形板,制作方案如图(单位:dm),求水箱的容积.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图,一块正方形薄铁片的边长是 22 cm,以它的一个顶点为圆心,边长为半径画弧,沿弧剪下一个扇形. 用这块扇形薄铁片围成一个圆锥筒,求这个圆锥筒的容积.

三、棱台和圆台

棱台和圆台的体积都可用两个锥体的体积之差来计算(如图 6-99).

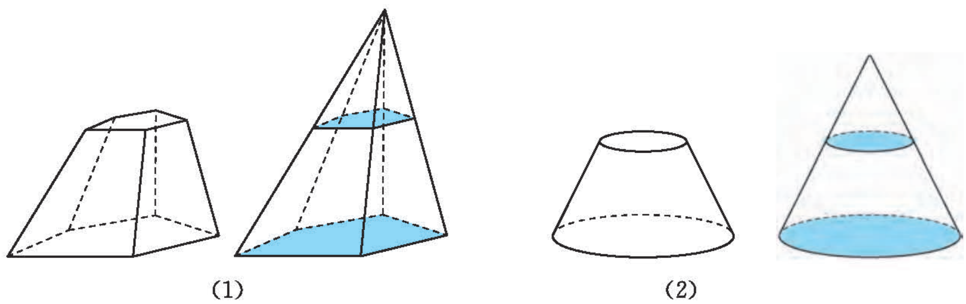


图 6-99

计算公式如下：

$$\boxed{V_{台体}=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}})h.}$$

其中 $S_{上}$，$S_{下}$ 分别为台体的上、下底面积，h 为台体的高.

例 5 已知一正四棱台的上底边长为 4 cm，下底边长为 8 cm，高为 3 cm. 求其体积.

解 $V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}})h$

$=\frac{1}{3}\times(4^2+8^2+\sqrt{4^2\times 8^2})\times 3$

$=112(\text{cm}^3)$.

所以正四棱台的体积为 112 cm^3.

6.3 球的表面积和体积

用一个平面 α 去截半径为 R 的球 O，若平面 α 经过球心 O，则平面与球面的公共点显然都是共面的且到球心 O 的距离都为 R，这说明过球心的平面截球面所得截线是以球心 O 为圆心的圆. 当平面 α 不经过球心 O 时(如图 6－100)，不妨设 $OO'\perp\alpha$ 于点 O'，记 $OO'=d$，对于平面与球面的任意一个公共点 P，都满足 $OO'\perp O'P$，所以 $O'P=\sqrt{R^2-d^2}$. 此时截线是以点 O' 为圆心、以 $r=\sqrt{R^2-d^2}$ 为半径的圆.

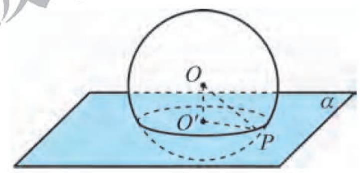


图 6－100

球面被经过球心的平面截得的圆称为**球的大圆**，被不经过球心的平面截得的圆称为**球的小圆**.

与圆和直线相切类似，当直线与球有唯一交点时，称**直线与球相切**，这一交点称为直线与球的**切点**.

思考交流

过球外一点作球的切线，这点和切点之间的线段长称为这点到球的切线长，过球外一点 P，可以作球的无数条切线. 那么所有切线的切线长相等吗？所有切点组成什么图形？

设过点 P 的直线与球 O 相切于点 A，则平面 POA 与球面的交线是球的大圆(如图 6－101)，由直线与圆相切的性质可得 $OA\perp AP$，所以 $AP=\sqrt{PO^2-R^2}$.

设点 A 在 OP 上的垂足为 O'，则 AO' 长度恒定不变.

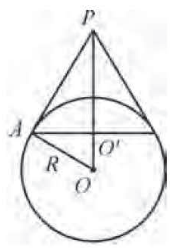


图 6-101

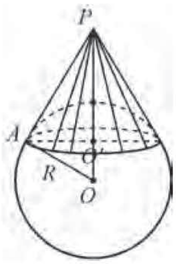


图 6-102

这说明，**过球外一点的所有切线的切线长都相等**，这些切点的集合是以点 O' 为圆心、$O'A$ 为半径的圆，圆面 O' 及所有切线围成了一个圆锥（如图 6-102）.

球的表面积和体积可用下面的公式来计算：

$$\boxed{S_{球面}=4\pi R^2,\quad V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.}$$

其中 R 为球的半径.

例 6　如图 6-103，一个圆锥形的空杯子上面放着一个半球形的冰激凌，如果冰激凌融化了，会溢出杯子吗？（假设冰激凌融化前后体积不变）

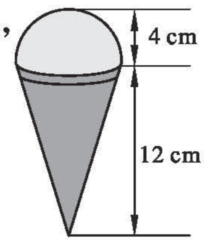


图 6-103

解　因为 $V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times4^3=\frac{128}{3}\pi$，

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times12=64\pi,$$

$$V_{半球}<V_{圆锥},$$

所以冰激凌融化了，不会溢出杯子.

例 7　一个圆柱形的玻璃瓶的内半径为3 cm，瓶里所装的水深为8 cm，将一个钢球完全浸入水中，瓶中水的高度上升到 8.5 cm. 求钢球的半径.

解　如图 6-104，设钢球半径为 R cm，根据题意，得

$$\pi\times3^2\times8+\frac{4}{3}\pi R^3=\pi\times3^2\times8.5.$$

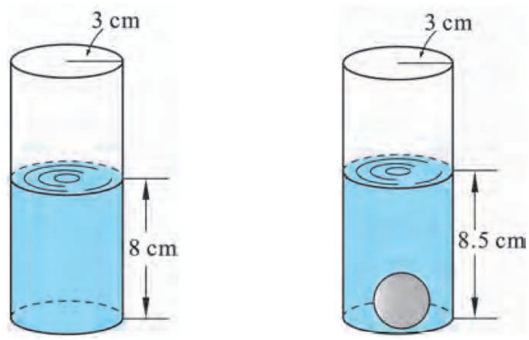


图 6-104

解得 $R=1.5.$

所以钢球的半径为 1.5 cm.

练 习

1. 有一个正四棱台形状的油槽，可以装油 190 L. 已知它的两底面边长分别等于60 cm和 40 cm，求它的深度.
2. 某小区修建一个圆台形的花台，它的两底面半径分别为 1 m 和 2 m，高为 1 m，那么需要多少立方米土才能把花台填满？
3. 地球和火星都可近似看作球体，地球半径约为 6 370 km，火星的直径约为地球直径的一半.

   (1) 求地球的表面积和体积；

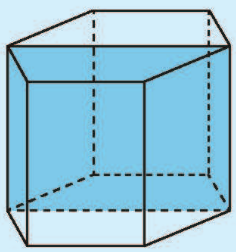
   (2) 火星的体积约为地球体积的几分之几？

习题 6－6

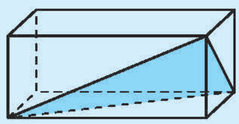
A 组

1. 设圆柱、圆锥的底面半径与球的半径都为 r，圆柱、圆锥的高都是 $2r$. 求它们的体积之比.
2. 球表面积膨胀为原来的 2 倍，体积变为原来的几倍？
3. 若一个长方体的长、宽、高的比为 1∶2∶3，对角线长是 $2\sqrt{14}$ cm. 求它的体积.
4. 已知一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长是 4 cm. 求这个球的体积.
5. 如图，已知正六棱柱的最大对角面的面积为 4 m^2，互相平行的两个侧面的距离为 2 m，则这个六棱柱的体积为(　　)，并说明理由.

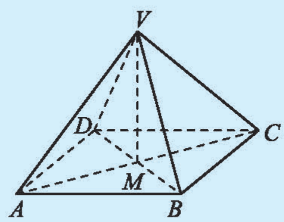
   A. 3 m^3　　B. 6 m^3　　C. 12 m^3　　D. 以上都不对



(第 5 题)



(第 6 题)



(第 8 题)

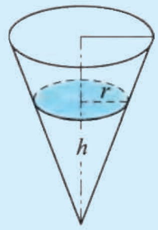
6. 如图，沿长方体相邻三个面的对角线截去一个三棱锥，则三棱锥的体积是该长方体体积的几分之几？
7. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，底面两边 $BC∶AB=7∶24$，对角面 ACC_1A_1 的面积是 50. 求该长方体的侧面积.
8. 如图，棱锥的底 $ABCD$ 是一个矩形，AC 与 BD 交于点 M，VM 是棱锥的高，已知 $VM=4$ cm，$AB=4$ cm，$VC=5$ cm，求该棱锥的体积.
9. 求证：斜棱柱的侧面积等于它的直截面（垂直于侧棱并与每条侧棱都相交的截面）的周长与侧棱长的乘积.
10. 仓库的房顶呈正四棱锥形，量得底面的边长为 2.6 m，侧棱长 2.1 m，现要在房顶上铺一层油毡纸，那么所需油毡纸的面积是多少？

B　组

1. 如图，一个倒立的圆锥形水杯，底面半径为 10 cm，高为 15 cm. 将一定量的水注入其中，水形成的圆锥高为 h cm.

(1) 求水的体积；

(2) 若水的体积恰为圆锥形水杯体积的一半，求 h 的值(精确到 0.01 cm).



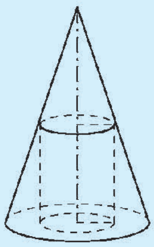
(第 1 题)

2. 如图，一个圆锥的底面半径为 2 cm，高为 6 cm，在其中有一个高为x cm的内接圆柱.

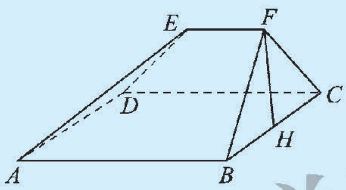
(1) 试用 x 表示圆柱的侧面积；

(2) 当 x 为何值时，圆柱的侧面积最大？

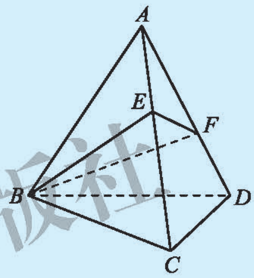
3. 如图，多面体 $ABCDEF$ 中，已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF/\!/AB$，平面 $FBC\perp$平面 $ABCD$，$\triangle FBC$ 中 BC 边上高 $FH=2$，$EF=\dfrac{3}{2}$. 求该多面体的体积.



(第 2 题)



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，在正三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，底面边长为 a，侧棱长为 $2a$，点 E，F 分别为 AC，AD 上的动点，求截面 $\triangle BEF$ 周长的最小值和这时点 E，F 的位置.

阅读材料一

祖暅原理

我国古代数学在解决球体积问题方面作出了杰出的贡献. 那时把球称为“立圆”，又叫作“丸”.

《九章算术》“少广”章中有已知“立圆”体积求径（直径）的算法：“开立圆术曰：置积（立方）尺数，以十六乘之，九而一，所得开立方除之，即立圆径.”设 d 表示球的直径，$V_{球}$ 表示球体积，则《九章算术》的算法为

$$d=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V_{球}}\text{，于是 }V_{球}=\frac{9}{16}d^3.$$

在《九章算术》时代，人们认为球与其外切等边圆柱体之比是 3∶4，从而球与其外切的正方体体积之比为 9∶16.

魏晋时期伟大数学家刘徽（约 225—295）发现上面的结论是不准确的. 他提出，取每边为 1 寸（旧制，约为 3.33 cm）的正方体棋子八枚，拼成一个边长为 2 寸的正方体，在正方体内画内切圆柱体（以正方体两个底面的内切圆面为底面的圆柱），再在横向画一个同样的内切圆柱体. 这样两个圆柱所包含的立体共同部分像两把上下对称的伞，刘徽将其取名为“牟合方盖”（古时人称伞为“盖”，“牟”同侔，意即相合）. 计算得出球体积是牟合方盖体的体积的四分之三，可是圆柱体又比牟合方盖大，而《九章算术》中得出球的体积是圆柱体体积的四分之三，显然《九章算术》中的球体积计算公式是错误的. 刘徽认为只要求出牟合方盖的体积，就可以求出球的体积. 可怎么也找不出求牟合方盖体积的途径.

南北朝时期的数学家祖暅（450—520）沿用了刘徽的思想，利用刘徽“牟合方盖”的理论去进行体积计算，得出“幂势既同，则体不容异”的结论.“势”即是高，“幂”是水平截面的面积. 后人称之为祖暅原理：

夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.

如图 6－105，夹在平行平面 α，β 之间的两个形状不同的几何体，被平行于平面 α，β 的任意一个平面所截，如果截面 P 和 Q 的面积总相等，那么这两个几何体的体积一定相等.

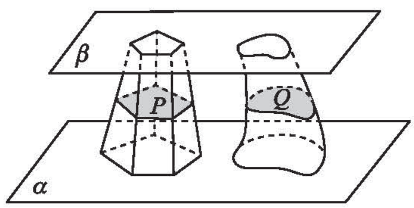


图 6－105

例如，取一摞书或一摞纸张堆放在桌面上，将它如图 6－106 那样改变一下形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞书或纸张的体积与变形前相等.

图 6－106

意大利数学家卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri，1598—1647)在 17 世纪出版的《用新方法促进的连续不可分量的几何学》中提出了等积原理，所以西方人把它称之为“卡瓦列里原理”. 其实，他的发现要比我国的祖暅晚 1 100 多年.

祖暅原理主要应用于计算一些复杂几何体的体积. 例如，可以应用祖暅原理推出球体的体积公式.

先研究半径为 R 的半球. 为了应用祖暅原理，需要找到一个能够求体积的几何体，使它和半球可夹在两个平行平面之间，当用平行于这两个平面的任意一个平面去截它们时，截得的截面面积总相等.

为此，取一个底面半径和高都等于 R 的圆柱，从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面、下底面圆心为顶点的圆锥，把所得的几何体和半球放在同一个平面 α 上，如图 6－107，因为圆柱的高等于 R，所以这个几何体和半球都夹在两个平行平面之间.

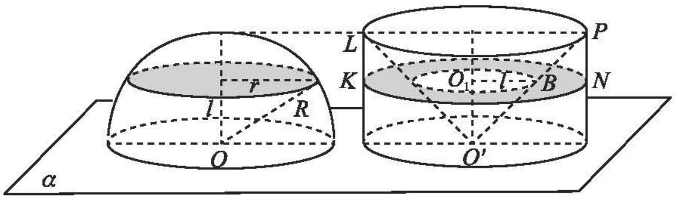


图 6－107

用平行于平面 α 的任意一个平面去截这两个几何体，截面分别是圆面和圆环面. 如果截平面与平面 α 的距离为 l，那么圆面的半径为 $r=\sqrt{R^2-l^2}$，圆环面的大圆半径为 R，小圆半径为 l(因为$\triangle O'O_1B$ 是等腰三角形). 因此

$$S_{圆}=\pi r^2=\pi(R^2-l^2),$$

$$S_{圆环}=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2),$$

所以 $S_{圆}=S_{圆环}$. 根据祖暅原理，这两个几何体的体积相等，即

$$V_{球}=2\times\frac{1}{2}V_{球}=2\times\left(\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

由此，我们得到下面的定理：

定理　如果球的半径为 R，那么它的体积 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

从《九章算术》以来的 600 多年中，有关球体积的计算经过许多人的不懈努力，最后获得彻底解决.

阅读材料二

几何学的发展

根据古希腊学者希罗多德(Herodotus，约前 484—前 425)的著作《历史(The Histories)》，古埃及几何学产生于尼罗河泛滥后土地的重新丈量. “几何学”一词的希腊文 γεωμετρία 意即“测地”；而英文 geometry 就是由 geo(土地)与 metry(测量)组成的. 公元前 7 世纪时几何从埃及传到希腊，朝着积累新的事实和阐明它们相互间关系的方向发展. 这些关系逐渐地转变为从一些几何原理得到另一些原理的逻辑推论，逐渐地转变成为数学理论，几何由经验几何发展到论证几何. 欧几里得(Euclid，前 300 年前后)是希腊论证几何学的集大成者，欧几里得的《原本(Elements)》是论证几何的典范，在随后的 1 000 多年的时间里始终占据了几何领域内的主导地位，而欧几里得也一直是几何的代名词，这在数学历史上是极为罕见的. 文艺复兴使几何学也得到了复兴，由于建筑、绘图、测量等的需要，由初等几何发展成射影几何，它的思想、理论和方法反过来作用于初等几何，就是利用变换的理论和方法解决初等几何问题.

法国数学家费马(Pierre de Fermat，1607—1665)和笛卡儿(René Descartes，1596—1650)创立了解析几何，开创了几何代数化的新纪元，借助于坐标系实现了几何结构的数量化，由此形与数、几何与代数得到了统一. 几何代数化把几何推进到了发展的新阶段，也为代数研究提供新的工具和模型.

对于欧几里得的第五公设“同一平面内一条直线和另外两条直线相交，若在直线同侧的两个内角之和小于 180°，则这两条直线经无限延长后在这一侧一定相交”. 能不能依靠前四个公设来证明第五公设？这就是几何发展史上最著名的，争论了长达两千多年的关于“平行线理论”的讨论. 到了 19 世纪 20 年代，俄国数学家罗巴切夫斯基(Nikolai Ivanovich Lobachevsky，1792—1856)在证明第五公设的过程中，走了另一条路子. 他提出了一个和欧氏平行公理相矛盾的命题，用它来代替第五公设，然后与欧氏几何的前四个公设结合成一个公理系统，展开一系列的推理. 罗巴切夫斯基得出两个重要的结论：第一，第五公设不能被证明；第二，在新的公理体系中展开的一连串推理，得到了一系列在逻辑上无矛盾的新的定理，并形成了一种不同于欧氏几何的新的几何学理论. 这种

几何学被称为罗巴切夫斯基几何，简称罗氏几何. 这是第一个被提出的非欧几何学.

几乎在罗巴切夫斯基创立非欧几何学的同时，匈牙利数学家 J. 波约（János Bolyai，1802—1860）也发现了第五公设不可证明和非欧几何学的存在. J. 波约在研究非欧几何学的过程中也遭到了家庭、社会的冷漠对待. 他的父亲——数学家 F. 波约（Farkas Bolyai，1775—1856）认为研究第五公设是耗费精力劳而无功的蠢事，劝他放弃这种研究. 但 J. 波约坚持为发展新的几何学而辛勤工作. 1832 年，终于在他的父亲的一本著作里，以附录的形式发表了研究结果. 那个时代被誉为“数学王子”的德国数学家高斯（Johann Carl Friedrich Gauss，1777—1855）也发现第五公设不能证明，但是高斯害怕这种理论会遭到当时教会力量的打击和迫害，不敢公开发表自己的研究成果，只是在书信中向朋友表示了自己的看法，也不敢站出来公开支持罗巴切夫斯基、波约他们的新理论. 德国数学家黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826—1866）是高斯的学生，发展出一套有别于欧氏几何的理论——黎曼几何学. 这些发展成为非欧几何学.

20 世纪初，黎曼几何为爱因斯坦（Albert Einstein，1879—1955）在解决狭义相对论与牛顿（Isaac Newton，1642—1727）万有引力定律的矛盾时，提出了一种新思想. 认为我们生活在其中的现实空间，由于物质具有质量而被弯曲. 非欧几何中的黎曼几何正是描述它的良好工具. 后来，这种思想发展成为一个完备的理论——广义相对论. 彻底改变了我们对时空、宇宙的观念.

我国古代的几何学是独立发展的，从甲骨文中发现，早在公元前 13～14 世纪，我国已有“规”“矩”等专门工具.《周髀算经》和《九章算术》书中，对图形面积的计算已有记载，《墨经》中已给一些几何概念明确了定义. 刘徽及祖冲之父子对几何学也都有重大贡献. 中文名词“几何”是 1607 年徐光启在意大利传教士利玛窦的协助下，翻译《原本》前 6 卷时首先提出的. 这里说的几何不是狭义地指“多少”，而是泛指度量以及包括与度量有关的内容.

几何学是一门最古老的数学学科. 千百年来，几何学作为世界文明史的一个科学体系，虽历经风雨，却依旧生机勃勃.

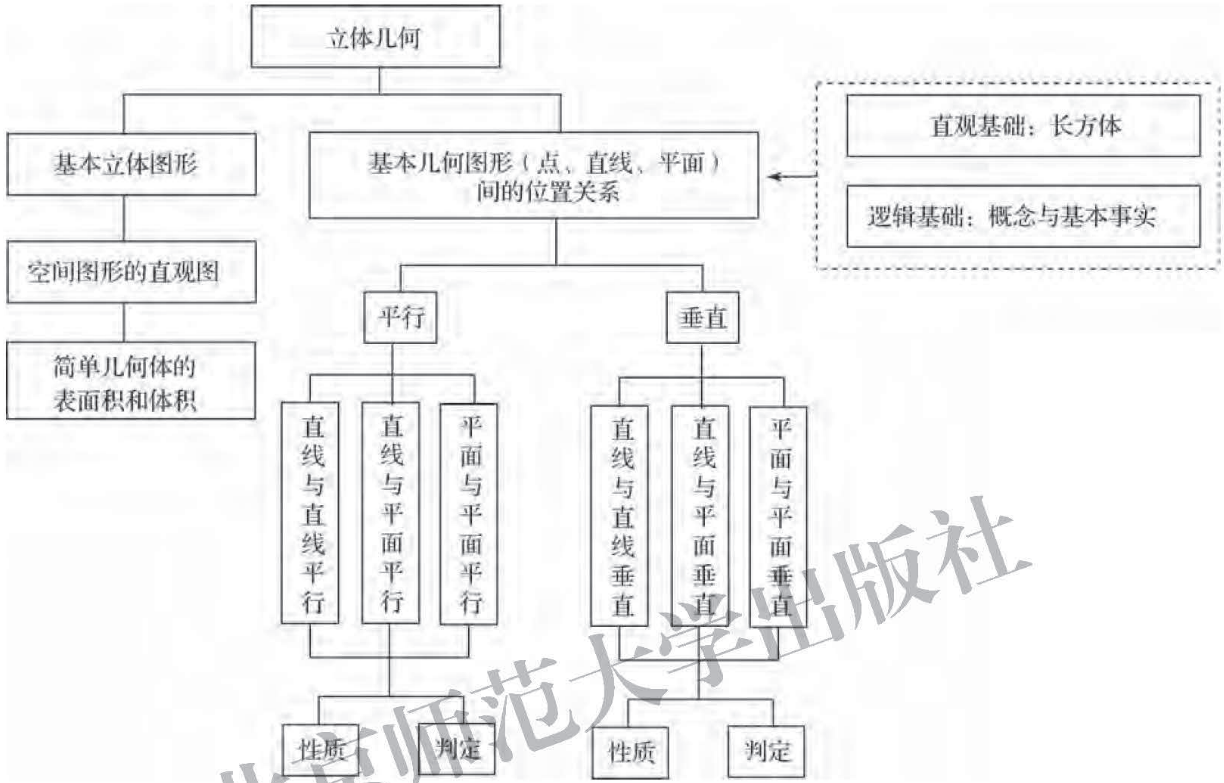
请你收集、阅读几何学发展的历史资料，撰写小论文，论述几何学发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

参考文献

[俄]亚历山大洛夫 A D，等. 数学——它的内容方法和意义（第一卷）[M]. 孙小礼，赵孟养，裘光明，等译. 北京：科学出版社，2012.

本章小结

一、知识结构



二、学习要求

本章以长方体为载体，认识和理解空间点、直线、平面的位置关系；用数学语言表述有关平行、垂直的性质与判定，并对某些结论进行论证；了解一些简单几何体的表面积与体积的计算方法；运用直观感知、操作确认、推理论证、度量计算等方法认识和探索空间图形的性质，建立空间观念.

1. 基本立体图形

(1) 利用实物、计算机软件等观察空间图形，认识柱、锥、台、球及简单组合体的结构特征，能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

(2) 知道球、棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积的计算公式，能用公式解决简单的实际问题.

(3) 能用斜二测法画出简单空间图形(长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱及其简单组合)的直观图.

2. 基本图形位置关系

(1) 借助长方体，在直观认识空间点、直线、平面的位置关系的基础上，抽象出空间点、直线、平面的位置关系的定义，了解以下基本事实和定理.

基本事实 1：过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面.

基本事实 2：如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内.

基本事实 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

基本事实 4：平行于同一条直线的两条直线平行.

定理：如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

(2) 从上述定义和基本事实出发，借助长方体，通过直观感知，了解空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直的关系，归纳出以下性质定理，并加以证明.

◆一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线平行.

◆两个平面平行，如果另一个平面与这两个平面相交，那么两条交线平行.

◆垂直于同一个平面的两条直线平行.

◆两个平面垂直，如果一个平面内有一条直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直.

(3) 从上述定义和基本事实出发，借助长方体，通过直观感知，了解空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直的关系，归纳出以下判定定理.

◆如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行.

◆如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，那么这两个平面平行.

◆如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么该直线与此平面垂直.

◆如果一个平面过另一个平面的垂线，那么这两个平面垂直.

(4) 能用已获得的结论证明空间基本图形位置关系的简单命题.

*3. 几何学的发展

收集、阅读几何学发展的历史资料，撰写小论文，论述几何学发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

三、需要关注的问题

1. 长方体在研究图形位置关系时发挥了怎样的作用？

2. 在研究平行或垂直的判定定理时，空间问题是如何转化为平面问题解决的？

3. 在几何元素平行、垂直的性质定理与判定定理之间有什么关系？

复习题六

A 组

1. 填空题：

(1) 过直线外一点，可以作______条直线与已知直线平行；

(2) 过直线外一点，可以作______条直线与已知直线垂直；

(3) 过平面外一点，可以作______个平面与已知平面平行；

(4) 过平面外一点，可以作______个平面与已知平面垂直；

(5) 过平面外一条直线，可以作______个平面与该平面平行；

(6) 过平面外一条直线，可以作______个平面与该平面垂直.

2. 已知直线 a，b 异面，下列判断正确的是(　　)，并画图说明.

A. 过 b 的平面不可能与 a 平行　　B. 过 b 的平面不可能与 a 垂直

C. 过 b 的平面有且仅有一个与 a 平行　　D. 过 b 的平面有且仅有一个与 a 垂直

3. 已知下列四个命题：

(1) 直线与平面没有公共点，则直线与平面平行；

(2) 直线上有两个点到平面的距离(不为 0)相等，则直线与平面平行；

(3) 直线与平面上任意一条直线不相交，则直线与平面平行；

(4) 直线与平面内的无数条直线不相交，则直线与平面平行.

指出其中正确的命题，并说明理由.

4. 下列命题正确的是(　　)，并说明理由：

A. 一直线与一个平面内的无数条直线垂直，则此直线与平面垂直

B. 两条异面直线不能同时垂直于一个平面

C. 不存在四个面都是直角三角形的四面体

D. 若两条斜线段在同一个平面上的投影数量相等，则这两条斜线段的长也相等

5. 设 a，b 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，判断下列命题的正误，并画图说明.

(1) 若 $a/\!/\alpha$，$b\perp\alpha$，则 $a\perp b$；

(2) 若 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则 $a/\!/b$；

(3) 若 $a\perp\alpha$，$b\subset\alpha$，则 $a\perp b$；

(4) 若 $a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$.

6. 设 α，β，γ 为两两不重合的平面，l，m，n 为两两不重合的直线，判断下列命题的正误，并画图说明理由：

(1) 若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\beta$；

(2) 若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m/\!/\beta$，$n/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$；

(3) 若 $\alpha/\!/\beta$，$l\subset\alpha$，则 $l/\!/\beta$；

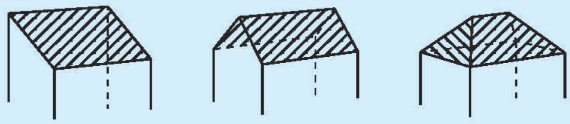
(4) 若 $\alpha\cap\beta=l$，$\beta\cap\gamma=m$，$\gamma\cap\alpha=n$，$l/\!/\gamma$，则 $m/\!/n$.

7. 我国古代数学名著《九章算术》中相当于给出了已知球的体积 V，求其直径 d 的一个近似公式 $d=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$. 规定："一个近似数与它准确数的差的绝对值叫这个近似数的绝对误差，相对误差指的是测量所造成的绝对误差与被测量〔约定〕真值之比."那么用这个公式所求的直径 d 结果的相对误差是________.

8. 设长方体的长、宽、高分别为 $2a,a,a$，其顶点都在一个球面上，则该球的表面积为(　　)，并说明理由.

A. $3\pi a^2$　　B. $6\pi a^2$　　C. $12\pi a^2$　　D. $24\pi a^2$

9. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法：①单向倾斜；②双向倾斜；③四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1,P_2,P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 θ，那么 P_1,P_2,P_3 的大小是一样的，为什么？

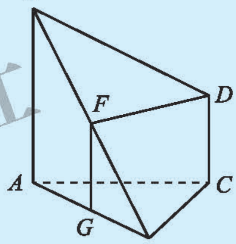


(第 9 题)

10.《九章算术》有如下问题：

今有刍童，下广二丈，袤三丈；上广三丈，袤四丈；高三丈. 问：积几何？答曰：二万六千五百尺.

其中，刍童，是一种棱台形状的物体，广是宽，袤是长，这其实就是在算一个棱台的体积. 你能用所学的简单几何体的面积与体积解释这个问题吗？



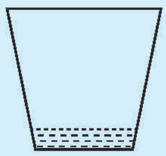
(第 11 题)

11. 如图，已知△ABC 是正三角形，EA 和 DC 都垂直于平面 ABC，且 $EA=AB=2a$，$DC=a$，F，G 分别是 EB 和 AB 的中点．求证：

(1) $FG\perp$平面 ABC；　　(2) $FD/\!/$平面 ABC.

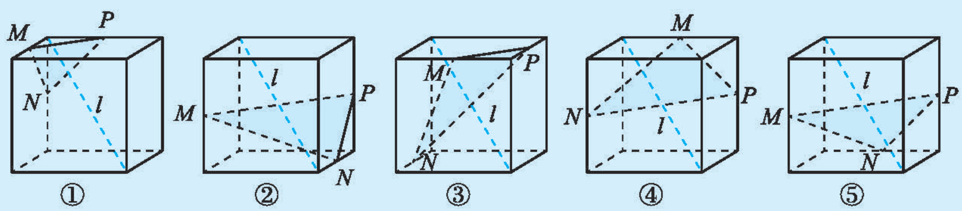
12. 在平面几何里，有勾股定理："设△ABC 的两边 AB，AC 互相垂直，则 $AB^2+AC^2=BC^2$."拓展到空间，类比平面几何的勾股定理，研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系，可以得出的正确结论是："设三棱锥 A-BCD 的三个侧面 ABC，ACD，ADB 两两相互垂直，则______________".

13. 降水量是指水平地面上单位面积的降水深度. 用上口径为 38 cm、底面直径为 24 cm、深度为 35 cm 的圆台形水桶(轴截面如图)来测量降水量，如果在一次降水过程中用此桶接得的雨水恰好是桶深的 $\frac{1}{7}$，则本次降雨的降水量是________ mm.(精确到 1 mm)


(第 13 题)

B　组

1. 下列五个正方体图形中，l 是正方体的一条对角线，点 M,N,P 分别为其所在棱的中点，能得出 $l\perp$平面 MNP 的图形的序号是______.(写出所有符合要求的图的序号)

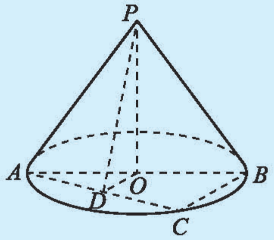


(第 1 题)

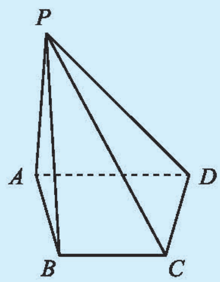
2. 如图，在圆锥 PO 中，已知 $PO=\sqrt{2}$，$\odot O$ 的直径 $AB=2$，点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，且 $\angle CAB=30°$，点 D 为 AC 的中点.

(1) 证明：$AC\perp$ 平面 POD；

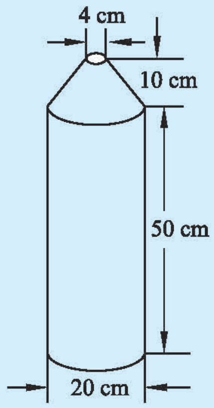
(2) 求二面角 P-AC-O 的正弦值.



(第 2 题)



(第 3 题)



(第 4 题)

3. 如图，已知四棱锥 P-$ABCD$ 的底面为直角梯形，$AD\parallel BC$，$\angle BCD=90°$，且 $PA\perp AB$，$PD\perp CD$.

(1) 判断 CD 是否与平面 PAD 垂直，证明你的结论；

(2) 证明：平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.

4. 水下考古，潜水员身背氧气瓶潜入湖底进行考察，氧气瓶形状如图，其结构为一个圆柱和一个圆台的组合（设氧气瓶中氧气已充满，所给尺寸是氧气瓶的内径尺寸）、潜水员在潜入水下 a m 的过程中，速度为 v m/min，每分需氧量与速度平方成正比（当速度为 1 m/min 时，每分需氧量 0.2 L）；在湖底工作时，每分需氧量为 0.4 L；返回水面时，速度也为 v m/min，每分需氧量为 0.2 L. 若下潜与上浮时速度不能超过 p m/min，潜水员在湖底最多能工作多少时间？（氧气瓶体积计算精确到 1 L，a，p 为常数）

5. 若四面体各棱的长是 1 或 2，且该四面体不是正四面体，则其体积的值是______（写出一个可能的值）.

6. 如果一个四面体的三个面是直角三角形，那么，第四个面可能是：

①直角三角形；②锐角三角形；③钝角三角形；④等腰三角形；⑤等腰直角三角形；⑥等边三角形．

请说出你认为正确的序号____.

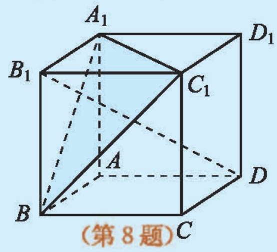
7. 类比是根据两类不同对象具有某些类似的特征，推出它们在其他方面的相似点的一种推理方法. 但是，利用类比推理得出的结论不一定正确，因此它不能作为严格的数学推理方法，但它是提出新问题和获得新发现的一种方法．

平面几何和立体几何在研究对象和方法、构成图形的基本元素等方面是相同或相似的，因此，在两者之间进行类比是研究它们性质的一种非常有效的方法. 请在平面几何与立体几何的概念、定理之间进行类比，看看哪些可以由平面几何推广到立体几何，哪些不能.

8. 如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：

(1) $B_1D\perp$ 平面 A_1C_1B；

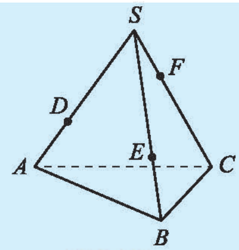
(2) B_1D 与平面 A_1C_1B 的交点 H 是 $\triangle A_1C_1B$ 的重心．



(第 8 题)

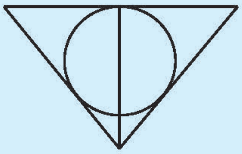
9. 如图，一个三棱锥容器的三条侧棱上各有一个小洞 D,E,F，经测量知 $SD:DA=SE:EB=CF:FS=2:1$，这个容器最多可盛原来水的(　　).

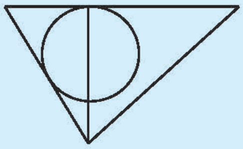
A. $\frac{29}{33}$　　B. $\frac{23}{27}$　　C. $\frac{19}{27}$　　D. $\frac{31}{35}$

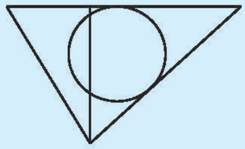


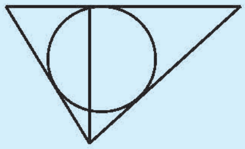
(第 9 题)

10. 在一个倒置的正三棱锥容器内，放入一个钢球，钢球恰好与棱锥的四个面都接触上，经过棱锥的一条侧棱和高作截面，正确的截面图形是(　　).


A.


B.


C.


D.

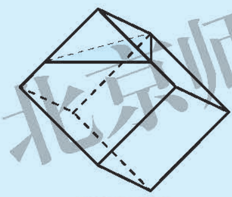
C　组

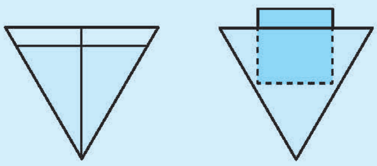
1. 用铁皮裁剪成两个圆和一个长方形，焊成一个体积固定的圆柱体容器.

(1) 为使用料最省，应如何设计这个圆柱体?

(2) 为使接缝线最短，应如何设计这个圆柱体?

2. 如图，一个正方体木块放在水中，木块的一部分露出水面，其中有两条棱各露出棱长的 $\frac{2}{3}$，另一条棱恰好全部露出水面，求这木块的密度与水的密度的比.


(第 2 题)

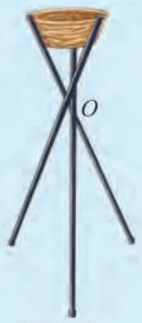

(第 3 题)

3. 如图，倒圆锥容器的轴截面是正三角形，内盛水的深度为6 cm，水面距容器口的距离为 1 cm，现放入一个棱长为4 cm的正方体形实心铁块，让正方体的一个面与水面平行，那么容器中的水是否会溢出?

4. 某厂根据市场需求开发三角花篮支架(如图). 上面为花篮，支架为三根细钢管. 考虑到钢管的受力和花篮质量等因素，设计支架应满足：①支架高度为 108 cm，②架面是边长为 30 cm 的正三角形，③三根细钢管相交处的节点 O 与架面三角形 ABC 重心的连线垂直于架面和地面.

(1) 三只支架与地面所成的角均为 60°，确定节点 O 分细钢管上、下两段的比值;(精确到 0.01)

(2) 节点 O 分细钢管上、下两段之比为 $1:2$，确定细钢管的长度.(精确到 0.1 cm)



(第 4 题)

5. 读一读，回答问题.

屏风是中国古代居室内重要的家具、装饰品，其形制、图案及文字均包含有大量的文化信息，既能表现文人雅士的高雅情趣，也包含了人们祈福迎祥的深刻内涵. 经过不断的演变，屏风有防风、隔断、遮

隐的用途，而且起到点缀环境和美化空间的功效，所以经久不衰、流传至今，并衍生出多种表现形式. 各式各样的屏风，凝聚着手工艺人富于创意的智慧和巧夺天工的技术.

其实，屏风除了它的使用价值和美学价值外，还藏有一些几何定理，需要用心去体会.

你能用几何模型来描绘屏风，并分析出它里面藏有的几何定理吗？

6. (1) 给出两块相同的正三角形纸片(如图 1、图 2)，要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型，另一块剪拼成一个正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等. 请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 1、图 2 中，并作简要说明.

(2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小.

(3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片(如图 3)，要求剪拼成一个直三棱柱模型，使它的全面积与给出的三角形的面积相等呢？

图 1　　图 2　　图 3

(第 6 题)

附录

部分数学专业词汇中英文对照表

中　文	英　文
三角函数	trigonometric function
周期函数	periodic function
周　期	period
角	angle
弧　度	radian
正弦函数	sine function
余弦函数	cosine function
正弦曲线	sine curve
余弦曲线	cosine curve
诱导公式	induction formula
正切函数	tangent function
正切曲线	tangent curve
向　量	vector
有向线段	directed segment
零向量	zero vector
单位向量	unit vector
相等向量	equal vectors
共线向量	collinear vectors
向量的夹角	angle between two vectors
垂直向量	perpendicular vector
向量的数乘	scalar multiplication (of vector by a factor)
正交分解	orthogonal decomposition
数量积/内积	scalar product/ inner product
投　影	projection

续表

中文	英文
坐标表示	coordinate representation
余弦定理	law of cosines
正弦定理	law of sines
复数	complex number
实部	real part
虚部	imaginary part
虚数	imaginary number
复数的模	modulus of a complex number
共轭复数	conjugate of a complex number
复数的辐角	argument of a complex number
辐角的主值	principal value of argument
长方体	rectangular cuboid
多面体	polyhedron
棱	edge
棱柱	prism
棱锥	pyramid
棱台	pyramidal frustum
球体/球	ball
圆柱	circular cylinder
圆锥	circular cone
圆台	conical frustum
旋转体	solid of revolution
公理	axiom
异面直线	skew lines
平行平面	parallel planes
定理	theorem
命题	proposition
二面角	dihedral angle
体积	volume

后　记

为了全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，发展素质教育，推进教育公平，培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人．根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》，北师大版普通高中教科书《数学》教材编写组编写的普通高中教科书，强调了数学课程的基础性和整体性，突出了思想性和应用性，帮助学生掌握现代生活进一步学习必需的数学知识、技能、思想和方法；提升学生的数学素养，引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界；促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展，探寻事物变化规律，增强社会责任感；在学生形成正确的人生观、价值观、世界观等方面发挥独特作用．

本套教材力求尊重学生的认知特点，关注学生的学习过程，创造多层次的学习活动，满足学生多样化的学习需求，促进学生全面而有个性的发展，为学生的终身发展奠定基础．

本套教材由众多学科专家、教育专家、心理学专家和特级教师参与编写，研究基础深厚，教育理念先进，一边编写一边实验，实验教师提出了很好的建议，在此特别表示感谢．教材的建设是长期、艰苦的任务，需要每一位教师在教学实践中自主开发资源，创造性地使用教材．我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有力的支持．

本套教材主编王尚志、保继光，副主编张饴慈、李延林、张思明，编写组成员还有：董武、李红、关健、吴鹏、隋丽丽、汪香志、于伟东、白雪峰、黄延林、胡凤娟、薛文叙、梁丽平、李大永、任志瑜、赵春、顿继安、李军洪、马萍、吕建生、王建波、焦继红、赵敏．

本册教材由王尚志、薛文叙担任主编，参与本册教材编写的人员还有：保继光、张饴慈、隋丽丽、汪香志、于伟东、白雪峰、黄延林、胡凤娟；最终由王尚志、保继光、张饴慈、李延林、张思明、薛文叙统稿，王尚志、薛文叙定稿．

本套教材是在原普通高中课程标准实验教科书的基础上进行的修订，在此向原实验教科书编写团队的各位专家、教师，特别是严士健教授，致以衷心的感谢．

很多地方教研员、一线教师为本次教材的修订提供了宝贵的意见，在此一并表示感谢．

在教材中可能会出现错误或不当之处，恳请广大使用者批评指正．欢迎来电来函与我们联系：北京师范大学出版社基础教育国标教材出版中心(100088)，(010)58802811，shuxue3@bnupg.com．

北京师范大学出版社