普 通 高 中 教 科 书

数学

必 修

第四册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社
·北京·

B版

主　　编：高存明
副 主 编：王殿军　朱志勇　龙正武
本册主编：刘　莉　邵光砚
其他编者：韩友发　赵文莲　周善富　吴　岐　郭永平　李　辉

普通高中教科书　数学（B 版）　必修　第四册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

出　　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
重　　印　×××出版社
发　　行　×××新华书店
印　　刷　×××印刷厂
版　　次　　年　月第　版
印　　次　　年　月第　次印刷
开　　本　890 毫米 ×1240 毫米　1/16
印　　张
插　　页
字　　数　　千字
印　　数　　　册
书　　号　ISBN 978-7-107-　　-
定　　价　　元
定价批号：××号　审图号：GS（××××）××××号

前　言

人们喜欢音乐，是因为它拥有优美和谐的旋律；人们喜欢美术，是因为它描绘了人和自然的美；人们喜欢数学，是因为它用空间形式和数量关系刻画了自然界和人类社会的内在规律，用简洁、优美的公式与定理揭示了世界的本质，用严谨的语言和逻辑梳理了人们的思维……

我国著名数学家华罗庚先生曾经指出：数学是一切科学的得力助手和工具；任何一门科学缺少了数学这一工具便不能确切地刻画出客观事物变化的状态，更不能从已知数据推出未知的数据来，因而就减少了科学预见的可能性，或者减弱了科学预见的准确度.

事实上，任何一项现代科学技术的出现与发展，背后都一定有数学知识的支撑. 互联网的普及、共享经济的繁荣、网络支付的便利、物联网的兴起、人工智能的发展、大数据的应用，离开了数学知识都是不可能的！并且，现代生活中，类似“逻辑”“函数”“命题”“线性增长”“指数增长”“概率”“相关性”等数学术语，在政府文件、新闻报道中比比皆是.

正如《普通高中数学课程标准（2017年版）》（以下简称“课程标准”）所指出的：数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用. 数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养. 高中生学习必需的数学知识，能为自身的可持续发展和终身学习奠定基础.

为了帮助广大高中生更好地学习相关数学知识，我们按照课程标准的要求编写了这套高中数学教材. 在编写过程中，我们着重做了以下几项工作.

1. 关注学生成长，体现时代特征

教材在选取内容的背景素材时，力图从学生熟悉的情境出发，着力体现时代特征，并为学生的成长提供支撑. 例如，以下内容在本套教材中都有所体现：利用数学知识破解魔术的“秘密”，用生活中的例子说明学习逻辑知识以及理性思考的重要性，如何从数学角度理解报刊上有关人工智能、新兴媒体等报道中出现的“线性增长”“爆炸式增长”等名词.

教材中还提到了“网络搜索”“人工智能”“自主招生”“环境保护”“大数据”“按揭贷款”“电子商务”“创业创新”等. 我们相信，这些能引起大家的共鸣.

此外，教材中多处出现了借助现代信息技术学习数学知识的内容，包括怎样借助数学软件解方程、不等式，怎样借助信息技术呈现统计结果、展示模拟过程，等等.

在体现时代特征的同时，我们也特别注重对中华优秀传统文化的展示. 例如，教材中精选了多道我国古代数学名题，启发大家从数学角度去理解“失败乃成功之母”“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”等语句的含义，呈现了与二十四节气、古典诗词等有关的调查数据，介绍了《九章算术》在代数上的成就以及我国古代的统计工作，等等.

2. 吸收先进理念，改变呈现方式

在教材编写过程中，编者认真学习和讨论了当前教育学、心理学等学科的先进理念，并通过改变教材呈现方式来加以体现，力图真正做到“以学习者为中心”.

例如，教材每一章都引用了一段名人名言，旨在为大家的数学学习提供参考和指引；通过“情境与问题”栏目，展示相关数学知识在现实生活等情境中的应用；利用“尝试与发现”栏目，鼓励大家大胆尝试，并在此基础上进行猜想、归纳与总结；通过填空的方式，培养大家学习数学的信心；

选择与内容紧密联系的专题，设置拓展阅读，以拓宽大家的知识面，了解数学应用的广泛性；等等.

3. 遵循认知规律，力求温故知新

数学学习必须循序渐进是一种共识. 基础不扎实是很多人学不好数学的重要原因，本套教材在编写时特别考虑了这一因素.

事实上，教材一方面按照课程标准的要求，讲解和复习了高中数学必备的集合、等式、不等式等内容；另一方面，在呈现新知识时，教材注重从已有知识出发，在回顾的基础上通过实际例子逐步引入，尽力展现新旧知识的联系，以达到温故知新的效果.

例如，教材在复习了变量以及初中函数概念的基础上介绍了函数中的对应关系，在回顾了整数指数幂、二次根式等后引入了分数指数幂，等等.

正因为如此，即使是初中数学基础比较薄弱的同学，使用本套教材也能顺利地进行学习，并最终达到理想的效果. 这在本套教材试教过程中已得到印证.

4. 揭示内容本质，重视直观理解

数学知识具有客观性，但数学知识的理解有多种方式与途径. 揭示内容本质，培养大家对数学内容的直观理解，是我们编写本套教材时特别注意的方面之一.

首先，教材内容的安排突出主线，强调“通性通法”. 例如，多次强调了配方法的使用，自始至终贯彻函数的研究应从特殊到一般、从性质到图像，等等.

其次，尽量自然地引入新内容或新方法. 例如，通过实例说明学习中位数、百分位数的必要性，通过对比说明用样本估计总体的合理性，等等.

最后，注重培养大家的数学学科核心素养. 课程标准提出的数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，在教材中都得到了落实. 仅以数学抽象为例，教材处处强调了自然语言与符号语言之间的相互转化等.

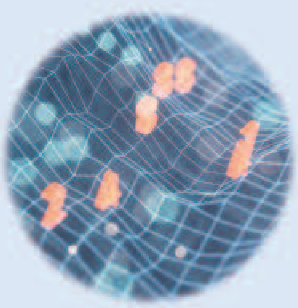
总的来说，“引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界”并不容易. 为此，我们在编写教材时做了很多新的尝试，力图给大家提供一套有时代特色、易教易学的数学教材，以帮助大家学习.

本书是这套教材必修部分的第四册，呈现了解三角形、复数、立体几何初步的内容. 通过本书的目录与每章的“本章导语”，可以大致了解本书的全貌，这里不再重复.

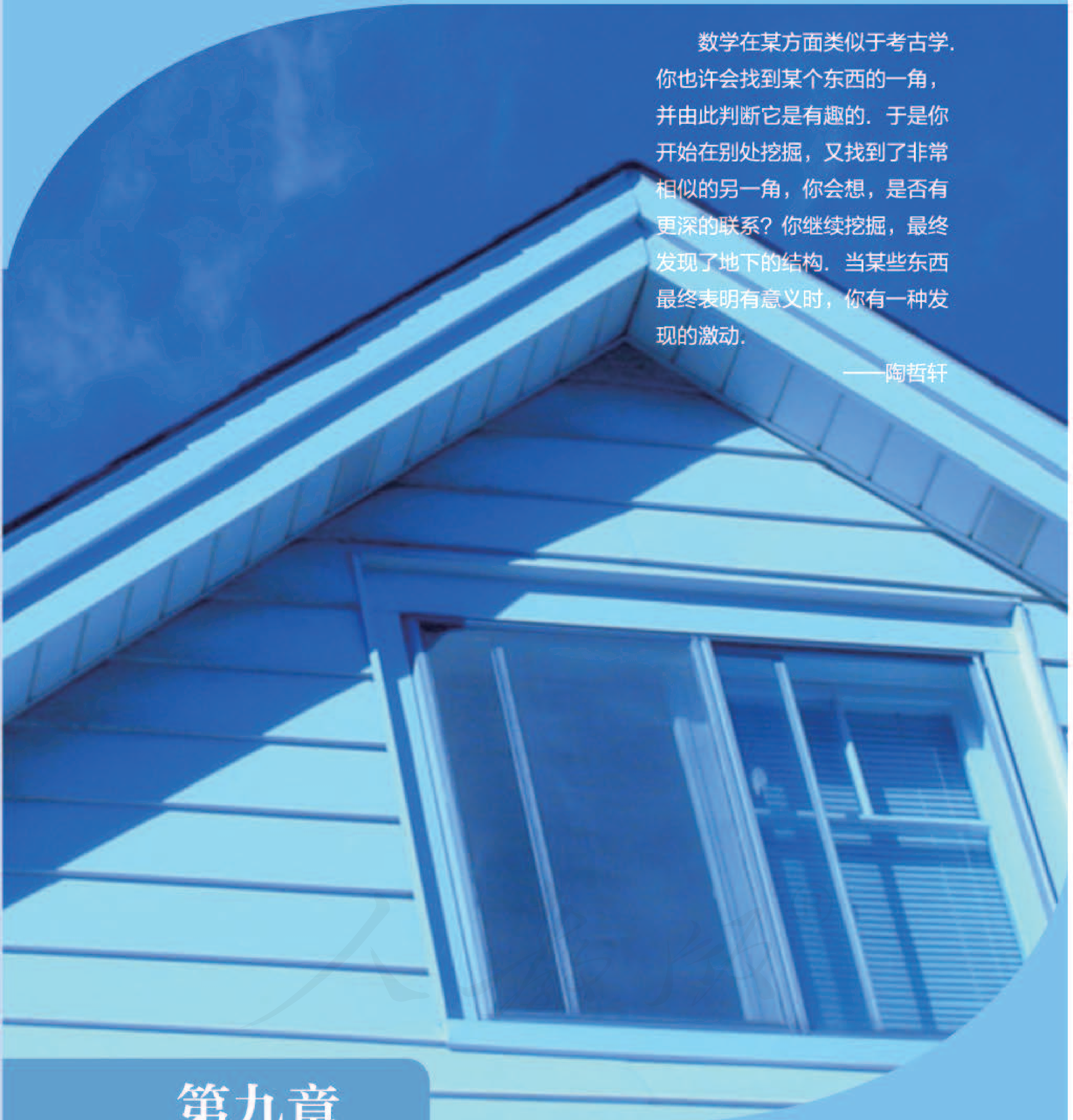
由于编写时间有限等原因，书中难免会有疏漏之处，敬请大家多提宝贵意见，以使教材日臻完善.

编者
2019 年 4 月

目录



本书拓展阅读目录



数学在某方面类似于考古学.你也许会找到某个东西的一角，并由此判断它是有趣的．于是你开始在别处挖掘，又找到了非常相似的另一角，你会想，是否有更深的联系？你继续挖掘，最终发现了地下的结构．当某些东西最终表明有意义时，你有一种发现的激动．

——陶哲轩

第九章

解三角形

本章导语

我们在初中学过解直角三角形的有关知识：在直角三角形中，除直角外共有5个元素，即3条边和2个锐角，由直角三角形中的已知元素，求出其余未知元素的过程，就是解直角三角形.

不过，因为不是所有的三角形都是直角三角形，所以如果仅仅会解直角三角形，那么解决一般三角形问题可能就会非常麻烦.

例如，如图1所示，台风的破坏力非常大. 实际生活中，了解与预测台风影响的时间具有重要的意义.

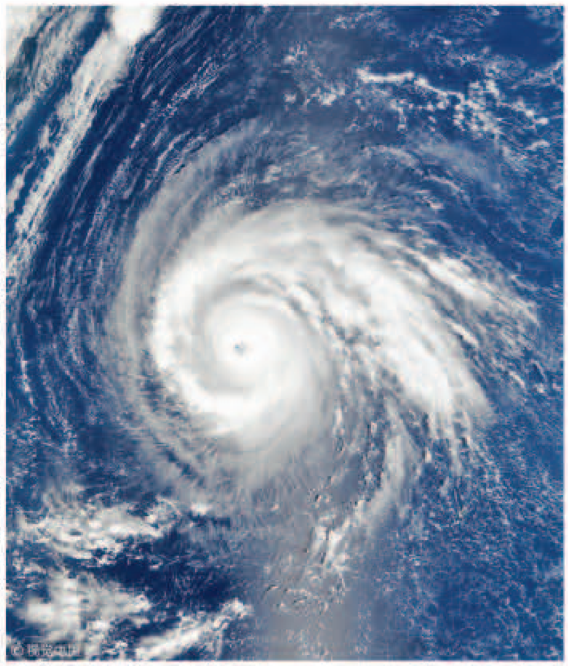


图 1

如图2所示，在某海滨城市 A 附近的海面出现台风活动，据监测，目前台风中心位于城市 A 的东偏南 60° 方向、距城市 A 300 km 的海面点 P 处，并以 20 km/h 的速度向西偏北 30° 方向移动. 已知该台风影响的范围是以台风中心为圆心的圆形区域，半径为 $100\sqrt{3}$ km. 如何求得城市 A 受到台风影响的时间？

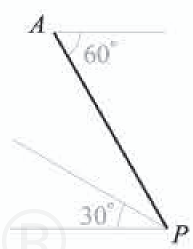


图 2

类似上述的问题，利用本章我们要学习的解一般三角形的知识就可以方便地解决.

在初中我们已经学过怎样得到不可达两点之间的距离，利用本章的内容可以解决更加复杂的问题.

9.1 正弦定理与余弦定理

9.1.1 正弦定理

情境与问题

在现代生活中，得益于科技的发展，距离的测量能借助红外测距仪、激光测距仪等工具直接完成. 不过，在这些工具没有出现以前，你知道人们是怎样间接获得两点间距离的吗?

如图 9-1-1 所示，若想知道河对岸的一点 A 与岸边一点 B 之间的距离，而且已经测量出了 BC 的长，也想办法得到了 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的大小，你能借助这 3 个量，求出 AB 的长吗?

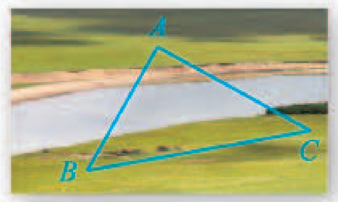


图 9-1-1

为了方便起见，本书中，将$\triangle ABC$ 3 个内角 A，B，C 所对的边分别记为 a，b，c. 在这样的约定下，情境中的问题可以转化为：已知 a，B，C，如何求 c? 类似的问题可以通过构造直角三角形来解决，更一般地，可利用本小节我们要介绍的正弦定理来求解.

尝试与发现

(1) 如图 9-1-2 所示，已知$\triangle ABC$ 中，$a=5$，$b=3$，$C=\frac{\pi}{3}$，你能求出这个三角形的面积吗?

(2) 一般地，在$\triangle ABC$ 中，如何根据 a，b 与 C 的值，求出这个三角形的面积?

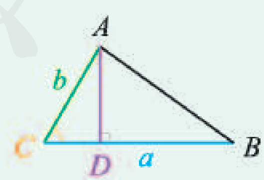


图 9-1-2

如图 9-1-2 所示，在$\triangle ABC$ 中，过点 A 作 BC 边上的高 AD，在 Rt$\triangle ADC$ 中，由正弦的定义可知

$$AD=b\sin C,$$

因此所求三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

可以看出，上述求三角形面积的方法在 C 为锐角时都成立；而当 C 为钝角时，如图 9-1-3 所示，仍设△ABC 的 BC 边上的高为 AD，则可知

$AD=b\sin\angle ACD=b\sin(\pi-C)=$ 1 ______，

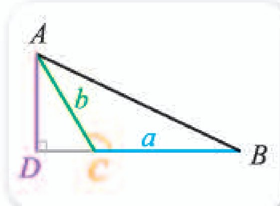


图 9-1-3

因此仍有 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$；当 C 为直角时，由 $\sin 90^\circ=1$ 可知上述面积公式仍成立.

一般地，若记△ABC 的面积为 S，则

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.}$$

由此可知 $\frac{2S}{abc}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$，又因为 $\sin A>0$，$\sin B>0$，$\sin C>0$，因此可得

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.}$$

这就是**正弦定理：在一个三角形中，各边的长和它所对角的正弦的比相等.**

例 1 已知△ABC 中，$B=75^\circ$，$C=60^\circ$，$a=10$，求 c.

解 由已知可得

$$A=180^\circ-B-C=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ.$$

由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\text{2 ______}.$$

利用例 1 的解法即可求解出前述情境中的问题. 而且，例 1 也可通过构造直角三角形求解，请读者自行尝试，并总结两种解法各自的优缺点.

另外，由例 1 可知，在一个三角形中，如果已知两个角与一条边，就可以求出这个三角形的另外一个角，然后由正弦定理可求出该三角形其他的两条边. 因此，确定了一个三角形的两个角与一条边之后，这个三角形就唯一确定了. 事实上，这与我们初中所学的三角形全等的判定定理 AAS（或 ASA）一致.

习惯上，我们把三角形的 3 个角与 3 条边都称为三角形的元素，已知三角形的若干元素求其他元素一般称为**解三角形**.

例 2 已知△ABC 中，$a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，求解这个三角形.①

① 即求三角形中未知的元素，下同.

解 因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由于 $0^\circ<B<180^\circ$，所以 $B=$ 3 ______ 或 $B=$ 4 ______.

当 $B=60^\circ$ 时，有

$$C=180^\circ-A-B=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ,$$

此时$\triangle ABC$是直角三角形，且 c 为斜边，从而有

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4;$$

当 $B=120^\circ$ 时，有

$$C=180^\circ-A-B=180^\circ-30^\circ-120^\circ=30^\circ,$$

此时$\triangle ABC$是等腰三角形，从而由等角对等边可知

$$c=a=2.$$

根据例 2 的解答可知，图 9-1-4 中的(1)(2)都满足例 2 的条件. 事实上，这与我们初中所学的 SSA 不能作为三角形全等的判定定理一致.

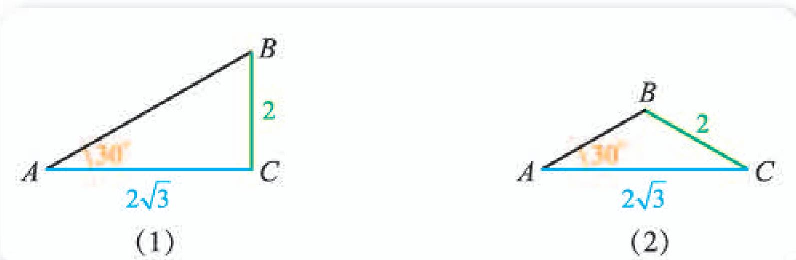


图 9-1-4

例 3 已知$\triangle ABC$中，$b=3\sqrt{6}$，$c=6$，$B=120^\circ$，求 A，C 及三角形的面积.

解 由 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由于 $0^\circ<C<180^\circ$，所以 $C=$ 5 ______ 或 $C=$ 6 ______.

当 $C=45^\circ$ 时，

$$A=180^\circ-B-C=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ,$$

而

$$\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

所以三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{6}\times 6\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{27-9\sqrt{3}}{2}.$$

当 $C=135^\circ$ 时，

$$A=180^\circ-B-C=180^\circ-120^\circ-135^\circ=-75^\circ,$$

不合题意，应舍去.

例 3 中的 $C=135^\circ$ 不可能成立，也可从 $b>c$，$B=120^\circ$ 以及“大边对大角”看出.

例 4 判断满足条件 $A=30^\circ$，$a=1$，$c=4$ 的$\triangle ABC$ 是否存在，并说明理由.

解 假设满足条件的三角形存在，则由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 可知

$$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{4\sin 30^\circ}{1}=2.$$

又因为 $\sin C\leqslant 1$，所以这是不可能的，因此不存在这样的三角形.

例 5 在$\triangle ABC$ 中，已知 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则 $k\neq 0$，且

$$\sin A=\frac{a}{k},\quad \sin B=\frac{b}{k},\quad \sin C=\frac{c}{k}.$$

又因为 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，所以

$$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}=\frac{c^2}{k^2},$$

即 $a^2+b^2=c^2$，因此由勾股定理的逆定理可知$\triangle ABC$ 是直角三角形.

例 6 如图 9-1-5 所示，在$\triangle ABC$ 中，已知$\angle BAC$ 的角平分线 AD 与边 BC 相交于点 D，求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

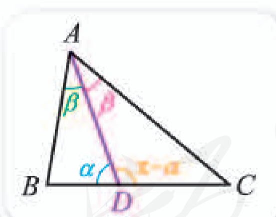


图 9-1-5

证明 如图，设$\angle ADB=\alpha$，$\angle BAD=\beta$，则由题意可知$\angle ADC=\pi-\alpha$，$\angle CAD=\beta$.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle ADC$ 中，分别应用正弦定理，可得

$$\frac{BD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha},$$

$$\frac{DC}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{AC}{\sin\alpha},$$

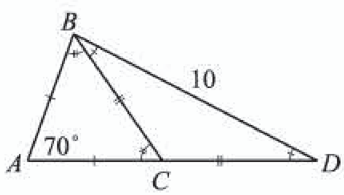
两式相除即可得 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

探索与研究

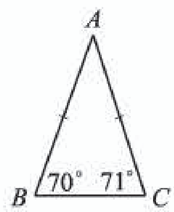
在正弦定理中，设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，研究常数 k 与 $\triangle ABC$ 外接圆的半径的关系.（提示：先考虑直角三角形.）

练习A

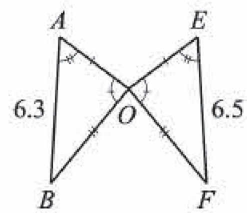
1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $c=10$，$C=45^\circ$，$B=60^\circ$，通过构造直角三角形求出 b 的值.
2. 已知 $\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ$，$B=30^\circ$，$a=3$，求 b.
3. 求证：在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\dfrac{a+b}{c}$.
4. 为了方便起见，有时可对三角形的边和角作一些标记，以表示其中的相等关系．如图(1)中，AB 与 AC 上的标记相同，这表示 $AB=AC$．类似地，有 $BC=CD$，$\angle ABC=\angle ACB$，$\angle CBD=\angle CDB$，而且 $A=70^\circ$，$BD=10$．图(2)(3)(4)中使用了类似的标记，判断这些图中是否存在矛盾．如果有，请指出矛盾所在.



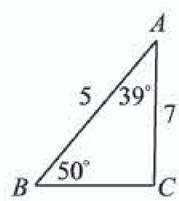
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

5. 已知 $\triangle ABC$ 中，$A=45^\circ$，$B=75^\circ$，$b=8$，求 a.

练习B

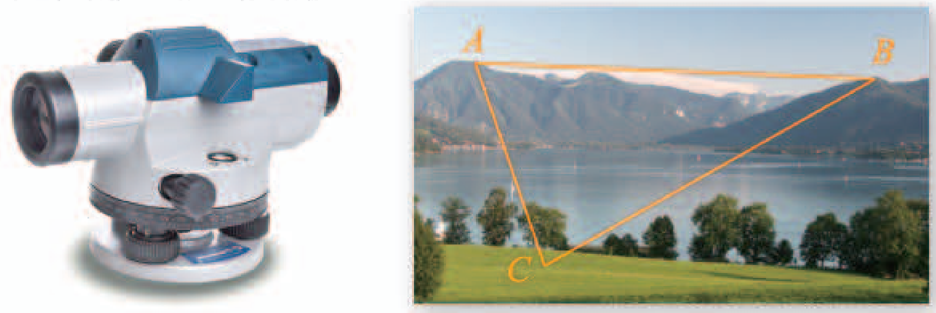
1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=3$，$b=4$，$A=30^\circ$，求 $\sin C$.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=2a$，$B=A+60^\circ$，求 A.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，$A+C=2B$，求 $\sin C$.
4. 如果在 $\triangle ABC$ 中，角 A 的外角平分线 AD 与 BC 的延长线相交于点 D，求证：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.
5. 已知 $\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$B=2A$，求 $\sin B$ 及 c 的大小.

1 $b\sin C$　2 $5\sqrt{6}$　3 60°　4 120°　5 45°　6 135°

9.1.2 余弦定理

情境与问题

利用如图 9-1-6(1)所示的现代测量工具，可以方便地测出 3 点之间的一些距离和角，从而可得到未知的距离与角.



(1)　　　　　　(2)

图 9-1-6

例如，如图 9-1-6(2)所示，A，B 分别是两个山峰的顶点，在山脚下任意选择一点 C，然后使用测量仪得出 AC，BC 以及 $\angle ACB$ 的大小. 你能根据这 3 个量求出 AB 吗?

情境中的问题可以转化为：已知 a，b 和角 C，如何求 c? 类似的问题可以通过构造直角三角形来解决，也可以借助向量来求解.

如图 9-1-7 所示，注意到

$$|\overrightarrow{CA}|=b,\ |\overrightarrow{CB}|=a,\ \langle\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\rangle=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_,$$

所以 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|\cos\langle\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\rangle=ab\cos C$，

而且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，因此

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{CB}|^2-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+|\overrightarrow{CA}|^2$$
$$=a^2-2ab\cos C+b^2,$$

又因为 $|\overrightarrow{AB}|=c$，因此

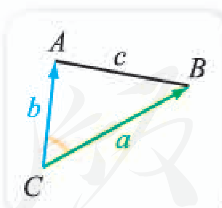


图 9-1-7

$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.}$$

类似地，可得

$$\boxed{\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B.\end{aligned}}$$

这就是**余弦定理：三角形任何一边的平方，等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角余弦的积的 2 倍.**

从余弦定理可以看出，已知三角形两边及其夹角，可以求出该三角形的第三边.

例 1 在$\triangle ABC$中，已知$a=3, b=6, C=60°$，求c.

解 由余弦定理可知

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \\ &= 3^2+6^2-2\times 3\times 6\times\cos 60° \\ &= 27, \end{aligned}$$

因此$c=$ 2 ______.

从例 1 可以看出，已知三角形的两边及其夹角时，三角形唯一确定，这与我们初中所学的三角形全等的判定定理 SAS 一致.

例 2 在$\triangle ABC$中，已知$a=6, b=4, c=2\sqrt{7}$，求C.

解 由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$可得

$$(2\sqrt{7})^2=6^2+4^2-2\times 6\times 4\cos C,$$

可解得$\cos C=\dfrac{1}{2}$.

又因为$0°<C<180°$，所以$C=$ 3 ______.

由例 2 可以看出，已知三角形的 3 条边时，可以求出该三角形的 3 个角，而且该三角形也唯一确定，这与我们初中所学的三角形全等的判定定理 SSS 一致.

事实上，余弦定理可以改写为如下形式.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \\ \cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{aligned}}$$

例 3 在$\triangle ABC$中，已知$a\cos A=b\cos B$，试判断这个三角形的形状.

解 利用余弦定理可知

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

因此

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2),$$

即$a^2c^2-b^2c^2-a^4+b^4=0$，从而$(a^2-b^2)c^2-(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0$，所以

$$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0,$$

因此$a^2-b^2=0$或$c^2-a^2-b^2=0$.

当$a^2-b^2=0$时，$a=b$，此时$\triangle ABC$是 4 ______ 三角形；

当 $c^2-a^2-b^2=0$ 时，$a^2+b^2=c^2$，此时△ABC 是5________三角形.

故△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

例 3 也可借助正弦定理得到结论，请读者自行尝试.

例 4 如图 9-1-8 所示平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $B+D=180°$，$AB=2$，$BC=4\sqrt{2}$，$CD=4$，$AD=2\sqrt{5}$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

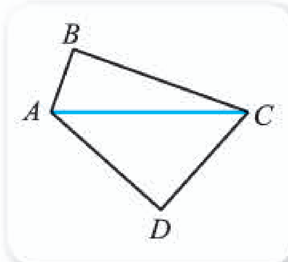


图 9-1-8

解 连接点 A，C，如图 9-1-8 所示.

在△ABC 与△ADC 中分别使用余弦定理可得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B,$$

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\times CD\cos D.$$

又因为 $B+D=180°$，所以 $\cos D=\cos(180°-B)=-\cos B$，因此

$$2^2+(4\sqrt{2})^2-2\times2\times4\sqrt{2}\cos B=(2\sqrt{5})^2+4^2+2\times2\sqrt{5}\times4\cos B.$$

解得 $\cos B=0$，因此 $\cos D=0$，则 $B=D=$6________.

从而可知四边形的面积为

$$\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}=4(\sqrt{2}+\sqrt{5}).$$

例 4 说明，与平面多边形有关的问题，有时可以转化为三角形的问题来求解.

例 5 在△ABC 中，求证：$a=b\cos C+c\cos B$.

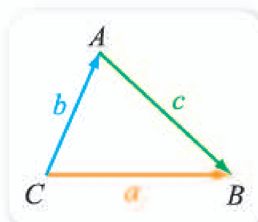


图 9-1-9

证明 如图 9-1-9 所示，

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB},$$

因此

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CB}$$

$$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}.$$

又由图可知

$$|\overrightarrow{CB}|=a,\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=ba\cos C,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=ca\cos B,$$

所以

$$a^2=ba\cos C+ca\cos B,$$

即 $a=b\cos C+c\cos B$.

例 5 的结果也可用向量数量积的几何意义来解释. 事实上，$b\cos C+c\cos B$ 是 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影的数量之和. 当然，由例 5 的方法同样可得

$$b=a\cos C+c\cos A,$$

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

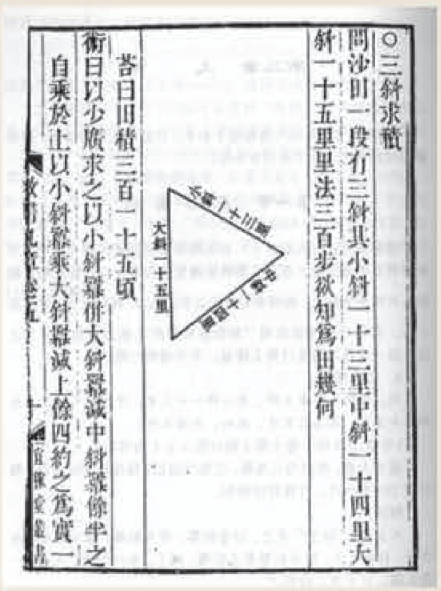
利用这些结果也可推导出余弦定理，请读者自行尝试.

拓展阅读

秦九韶的“三斜求积术”

你听说过“三斜求积术”吗？这是我国宋代的数学家秦九韶用实例的形式提出的（如图所示），其实质是根据三角形的三边长 a，b，c 求三角形面积 S，即

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$


○三斜求積
問沙田一段有三斜其小斜一十三里中斜一十四里大
斜一十五里里法三百步欲知爲田幾何
荅曰田積三百一十五頃
術曰以少廣求之以小斜冪并大斜冪減中斜冪餘半之
自乘於上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之爲實一

你能证明这个公式吗？

“三斜求积术”中的“三斜”指三角形的三条边，而且三条边从小到大分别称为“小斜”“中斜”“大斜”．秦九韶是用语言叙述的相关公式，即：以少广求之，以小斜冪并大斜冪减中斜冪，余半之，自乘于上；以小斜冪乘大斜冪减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积．

事实上，利用余弦定理等内容，也可推导出“三斜求积术”，过程如下．

$$S^2=\frac{1}{4}c^2a^2\sin^2B$$

$$=\frac{1}{4}(c^2a^2-c^2a^2\cos^2B),$$

又因为 $ca\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}$，所以

$$S^2=\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right],$$

从而可知

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

练习A

1. 已知$\triangle ABC$，求证：

   (1) 若 $a^2+b^2=c^2$，则 C 为直角；　(2) 若 $a^2+b^2>c^2$，则 C 为锐角；

   (3) 若 $a^2+b^2<c^2$，则 C 为钝角．

2. 已知$\triangle ABC$ 中，$a=10$，$b=5$，$C=120°$，求 c．

3. 已知$\triangle ABC$ 中，$a=6$，$b=4$，$c=2\sqrt{7}$，求角 C．

4. 已知$\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{19}$，求角 C 以及三角形的面积．

5. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $a:b:c=3:4:5$，试判断这个三角形的形状．

练习B

1. 求证：在$\triangle ABC$ 中，有

$$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C).$$

2. 已知 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$c=\sqrt{6}$，$A=45°$，求 b 及角 C．

3 在$\triangle ABC$中，已知$A:B=1:2$，$a:b=1:\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的3个内角.

4 在$\triangle ABC$中，分别根据下列条件求c.

(1) $a=4$，$b=2$，$A=60^\circ$；　　(2) $a=4$，$b=3$，$A=45^\circ$.

1 C　2 $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$　3 60°　4 等腰　5 直角　6 90°

习题9-1A

1 在$\triangle ABC$中，已知$a\cos A=b\cos B$，用正弦定理判断这个三角形的形状.

2 在$\triangle ABC$中，已知$a+c=2b$，$A-C=\frac{\pi}{3}$，求$\sin B$.

3 已知$(\sin A+\sin B):(\sin A+\sin C):(\sin B+\sin C)=4:5:6$，求$\triangle ABC$中最大的角.

4 已知$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$a=3$，求解这个三角形.

5 已知$\triangle ABC$的顶点为$A(1,1)$，$B(m+4,m-4)$，$C(0,0)$，且$\cos C=-\frac{3}{5}$，求常数m的值.

6 分别根据下列条件，判断$\triangle ABC$的形状.

(1) $a^2\tan B=b^2\tan A$；　　(2) $a-b=c(\cos B-\cos A)$.

习题9-1B

1 已知圆内接四边形$ABCD$的边长分别为$AB=2$，$BC=6$，$CD=AD=4$，求四边形$ABCD$的面积.

2 已知$\triangle ABC$中，$AB=4\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，AD为BC边上的中线，且$\angle BAD=30^\circ$，求BC的长.

3 已知三角形的两边和为4，其夹角为60°，求满足条件的三角形的最小周长.

4 在$\triangle ABC$中，已知$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，判断这个三角形的形状并给出证明.

5 在$\triangle ABC$中，已知$A=2B$，求证：$a=2b\cos B$.

6 已知$\triangle ABC$中，$a=b\cos C+c\sin B$.

(1) 求角B；

(2) 若$b=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

9.2 正弦定理与余弦定理的应用

情境与问题

在测量工作中，经常会遇到不方便直接测量的情形．例如，如图 9-2-1 所示故宫角楼的高度，因为顶端和底部都不便到达，所以不能直接测量．

假设给你米尺和测量角度的工具，你能在故宫角楼对面的岸边得出角楼的高度吗？如果能，写出你的方案，并给出有关的计算方法；如果不能，说明理由．

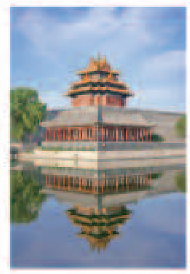


图 9-2-1

图 9-2-1 中角楼的高度问题可以转化为：用米尺与测量角度的仪器，怎样得到不便到达的两点之间的距离？

如图 9-2-2 所示，设线段 AB 表示不便到达的两点之间的距离，在能到达的地方选定位置 C 进行测量．用测量角度的仪器可以测量出 $\angle ACB$ 的大小 α ，但是因为点 A，B 都不便到达，所以$\triangle ABC$ 的 3 条边都无法用米尺测量．

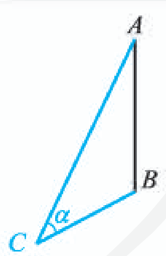


图 9-2-2

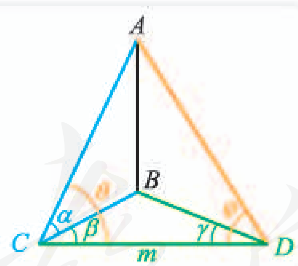


图 9-2-3

如图 9-2-3 所示，在可到达的地方再选定一点 D，并使得 CD 的长 m 能用米尺测量．用测量角度的仪器测出

$$\angle BCD=\beta，\angle BDC=\gamma，\angle ACD=\theta，\angle ADC=\varphi.$$

然后，利用 α，β，γ，θ，φ 以及 m 即可求出 AB 的长．首先，在 $\triangle BCD$ 中，因为 $\angle CBD=\pi-\beta-\gamma$，所以由正弦定理可得

$$\frac{m}{\sin(\pi-\beta-\gamma)}=\frac{BC}{\sin\gamma},$$

因此 $BC=\dfrac{m\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$；同理，从$\triangle ACD$ 可得 $AC=$ 1 ________；最后，在$\triangle ABC$ 中，根据 AC，BC，α，利用余弦定理就可以得出 AB 的长.

例 1 如图 9-2-4 所示，A，B 是某沼泽地上不便到达的两点，C，D 是可到达的两点. 已知 A，B，C，D 4 点都在水平面上，而且已经测得 $\angle ACB=45°$，$\angle BCD=30°$，$\angle CDA=45°$，$\angle BDA=15°$，$CD=100$ m，求 AB 的长.

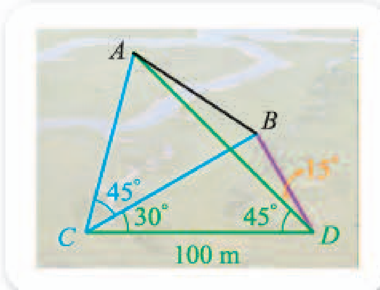


图 9-2-4

解 因为 A，B，C，D 4 点都在水平面上，所以

$$\angle BDC=\angle BDA+\angle CDA=15°+45°=60°,$$

因此 $\angle CBD=180°-30°-60°=90°$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，

$$BC=100\cos 30°=50\sqrt{3}\ (\mathrm{m}).$$

在$\triangle ACD$ 中，因为 $\angle CAD=180°-45°-30°-45°=60°$，所以由正弦定理可知

$$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{100}{\sin 60°},$$

因此 $AC=$ 2 ________ m.

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理可知

$$AB^2=\left(\frac{100\sqrt{6}}{3}\right)^2+(50\sqrt{3})^2-2\times\frac{100\sqrt{6}}{3}\times 50\sqrt{3}\cos 45°=\frac{12\ 500}{3},$$

从而有 $AB=$ 3 ________ m.

由例 1 可以看出，在用解三角形的知识解决实际问题时，常常需要综合利用正弦定理与余弦定理.

例 2 如图 9-2-5 所示，在某海滨城市 A 附近的海面出现台风活动. 据监测，目前台风中心位于城市 A 的东偏南 60° 方向、距城市 A 300 km 的海面点 P 处，并以 20 km/h 的速度向西偏北 30° 方向移动. 如果台风影响的范围是以台风中心为圆心的圆形区域，半径为 $100\sqrt{3}$ km，将问题涉及范围内的地球表面看成平面，判断城市 A 是否会受到上述台风的影响. 如果会，求出受影响的时间；如果不会，说明理由.

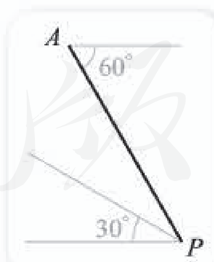


图 9-2-5

解 如图 9-2-6 所示，设台风的中心 x h 后到达位置 Q，且此时 $AQ=100\sqrt{3}$ km.

在$\triangle AQP$ 中，有 $P=60°-30°=30°$，且

$$AP=300\ \mathrm{km},\ PQ=20x\ \mathrm{km},$$

因此由正弦定理可得

$$\frac{100\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{300}{\sin Q}=\frac{20x}{\sin A}.$$

从而可解得 $\sin Q=\dfrac{300\sin 30^\circ}{100\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $Q=$ 4 ________ 或 $Q=$ 5 ________.

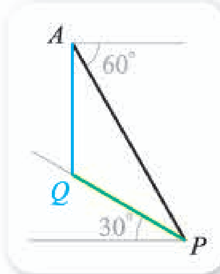


图 9-2-6

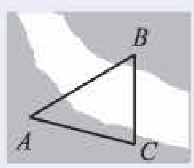
当 $Q=60^\circ$ 时，$A=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$，因此 $20x=\dfrac{100\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$，$x=10\sqrt{3}$；当 $Q=120^\circ$ 时，$A=180^\circ-30^\circ-120^\circ=30^\circ$，因此 $20x=100\sqrt{3}$，$x=5\sqrt{3}$.

这就说明，城市 A 在 $5\sqrt{3}$ h 后会受到影响，持续的时间为

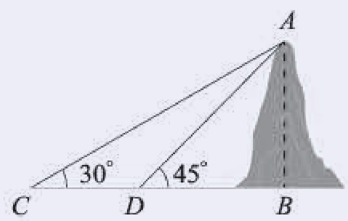
$$10\sqrt{3}-5\sqrt{3}=5\sqrt{3}\ (\text{h}).$$

习题9-2A

1. 如图，设 A，B 两点在河的两岸，测量者在与 A 同侧的河岸边选取点 C，测得 AC 的距离是 50 m，$\angle BAC=45^\circ$，$\angle ACB=75^\circ$，求 A，B 两点间的距离.



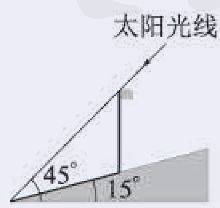
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，勘探人员朝一座山行进时，前后两次测得山顶的仰角分别为 30° 和 45°，两个观测点 C，D 之间的距离为 200 m，求此山的高度 AB(测量仪器的高度忽略不计，A，B，C，D 都在同一平面内，$\triangle ABC$ 是一个直角三角形).

3. 如图，在倾斜角等于 15°的山坡上有一根旗杆，当太阳的仰角是 $\alpha=45^\circ$ 时，旗杆在山坡上的影子的长是 30 m，求旗杆的高.



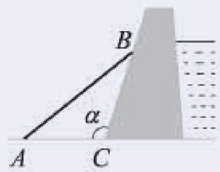
（第 3 题）

（第 4 题）

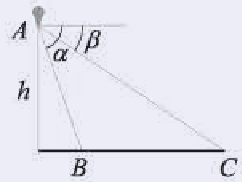
4. 如图，在曲柄 CB 绕 C 点旋转时，活塞 A 作直线往复运动，设连杆 AB 长为 340 mm，曲柄 CB 长 85 mm，求曲柄 CB 从初始位置 CB_0 按顺时针方向旋转 60° 时，活塞 A 移动的距离 AA_0.

习题9-2B

1. 为了测量河堤背水坡对地面的倾斜角，用一根长为 m 的长棒 AB 靠在堤旁，C 为堤脚，现测得 $AC=n$，$BC=t$. 如图所示，且图中所示各点都在同一铅垂平面内，你能用 m，n，t 表示出河堤背水坡的倾斜角 α 满足的条件吗？



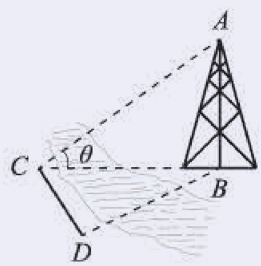
（第 1 题）



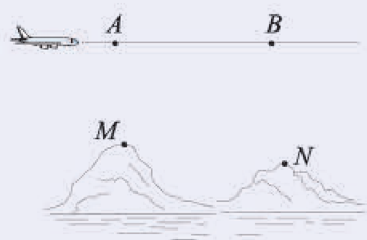
（第 2 题）

2. 如图，从高为 h 的热气球 A 上测量海平面上 B，C 两点之间的距离. 现测得 B 的俯角是 α，且 C 的俯角是 β，图中各点都在同一铅垂平面内. 用 α，β 和 h 表示出 BC.

3. 如图，测量河对岸的塔高 AB 时，可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 与 D. 现测得 $\angle BCD=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，$CD=s$，并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ，求塔高 AB.



（第 3 题）



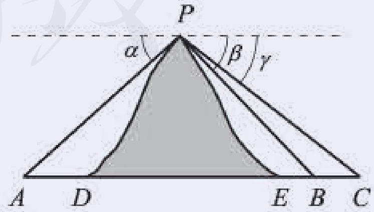
（第 4 题）

4. 为了测量两山顶 M，N 间的距离，飞机沿水平方向在 A，B 两点进行测量. 已知 A，B，M，N 在同一个铅垂平面内（如图所示）. 飞机能够测量的数据有俯角和 A，B 间的距离. 请设计一个方案，包括

(1) 指出需要测量的数据（用字母表示，并在图中标出）；

(2) 用文字和公式写出计算 M，N 间距离的步骤.

5. 如图所示，A，B，C 为山脚两侧共线的 3 点，在山顶 P 处测得 3 点的俯角分别为 α，β，γ. 计划沿直线 AC 开通穿山隧道. 为求出隧道 DE 的长度，你认为还需要直接测量出 AD，EB，BC 中哪些线段的长度？根据条件，并把你认为需要测量的线段长度作为已知量，写出计算隧道 DE 长度的运算步骤.



（第 5 题）

1 $\dfrac{m\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}$　　2 $\dfrac{100\sqrt{6}}{3}$　　3 $\dfrac{50\sqrt{15}}{3}$　　4 $60°$　　5 $120°$

9.3 数学探究活动：得到不可达两点之间的距离

1. 活动背景介绍与要求

从前面我们已经看到，借助米尺与测量角度的仪器，可以得出不可达两点之间的距离．例如，旗杆的高、两建筑物上给定两点之间的距离等，都可以借助解三角形的知识得出．

请与其他同学分工合作，确定合适的两点，利用身边的工具或制作简易工具，测量有关数据，然后利用正弦定理与余弦定理来得出选定两点之间的距离，并讨论如何减少误差等．条件允许的话，最后可借助其他手段获得给定两点的真实距离，然后进行比较．

要求活动以课题的形式完成，经历完整的选题、开题、做题、结题过程．选题是指根据活动要求选定合适对象的过程，开题是指讨论与确定活动步骤的过程，做题是指按照讨论的步骤进行实际活动并记录数据的过程，结题是指整理活动数据、总结与交流的过程．

活动过程中，要参照下表，制作类似的表格，并如实填写．

得到不可达两点之间的距离活动记录表

活动开始时间：____________

(1) 成员与分工	
姓　名	分　工
(2) 选定的不可达两点的状态描述（可附照片，下同）	
(3) 活动方案（包括测量原理、创新点描述等）	
(4) 活动工具描述（包括自制工具的制作步骤等）	

续表

(5) 活动过程中记录的数据
(6) 根据数据计算结果
(7) 活动总结(包括误差分析、活动感受等)

活动结束时间：______________

2. 活动提示

活动过程中，务必注意安全.

为了得到不可达两点之间的距离，可借助的方法很多.

例如，如图 9-3-1 所示，为了得到建筑物 AB 的高，可以在水平面的 C 点处先测量仰角 α(其中 CD 是测量仪器或测量人的高)，然后前进 x m 到达点 E 后再测量仰角 β 的大小，最后根据有关数据和直角三角形的知识就可得出 AB 的高.

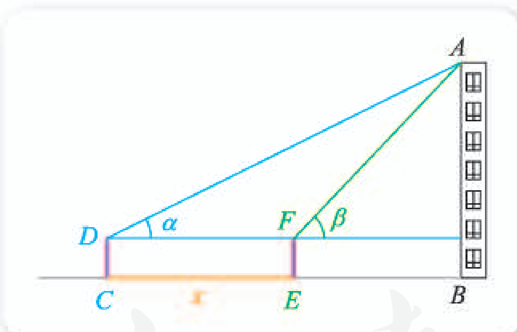


图 9-3-1

当然，在这种测量方法中，要保证 C，E，B 3 点在一条直线上，而且 AB 要与 BC 垂直，否则误差会比较大.

在实际生活中，有时并不能保证 AB 与 BC 垂直，可以进一步探讨此时怎样才能完成任务.

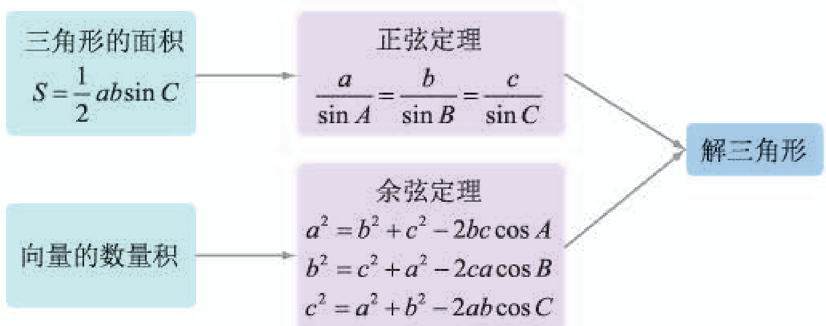
再例如，我们还可借助 9.2 中的方法来完成任务，请大家自行参考有关内容.

活动中的计算可借助计算器或计算机软件完成.

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们首先根据三角形的面积得到了正弦定理，然后由向量的数量积得到了余弦定理，最后讨论它们的应用，因此可以作出如下的知识结构图.



你能作出其他形式的知识结构图吗？试试吧！

02 课题作业

从本章内容中可以看出，在进行测量时，有关角度的测量是非常关键的. 为此，人们制作了很多种测量角度的仪器.

与同学分工合作，利用网络或书籍查找已有的测角仪，并将收集的资料整理成演讲材料，然后与其他同学交流. 如有可能，尝试自己制作合适的测角仪. 如果有了别人没有想到过的点子，还可以申请专利哦！

03 复习题

A 组

1. 在$\triangle ABC$中，若$\angle A=105°$，$\angle B=45°$，$b=2\sqrt{2}$，求c的大小.

2. 已知$\triangle ABC$的三边满足$a^2-(b-c)^2=bc$，求A.

3. 已知$\triangle ABC$是锐角三角形，且$a=2b\sin A$.

(1) 求$\angle B$的大小；

(2) 若$a=3\sqrt{3}$，$c=5$，求b.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin A=2\sin B\cos C$，试用两种方法证明这个三角形是等腰三角形.

5. 已知$\triangle ABC$的周长为$\sqrt{2}+1$，且$\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

(1) 求AB的长；

(2) 若$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{6}\sin C$，求C.

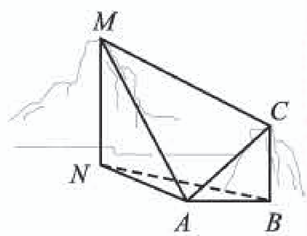
6. 在$\triangle ABC$中，已知$\tan C=3\sqrt{7}$.

(1) 求$\cos C$；

(2) 若$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{5}{2}$，求$\triangle ABC$的面积.

7. 已知AD是$\triangle ABC$的角平分线，且$AC=2$，$AB=3$，$A=60°$，求AD的长.

8. 如图，为测量山高MN，选择水平地面上一点A和另一座山的山顶C为测量观测点. 从A点测得M点的仰角$\angle MAN=60°$，C点的仰角$\angle CAB=45°$以及$\angle MAC=75°$；从C点测得$\angle MCA=60°$. 已知山高$BC=100$ m，求山高MN.



（第 8 题）

9. 已知平面直角坐标系中的 3 点$A(2，2)$，$B(6，0)$，$C(0，0)$，求$\triangle ABC$各内角的大小.

10. 已知$\triangle ABC$的顶点为$A(3，4)$，$B(8，6)$，$C(2，k)$，其中k为常数，如果$A=B$，求k的值.

B 组

1. 已知$\triangle ABC$，则下列命题中，是真命题的有哪些？

(1) 若$\sin 2A=\sin 2B$，则$\triangle ABC$是等腰三角形；

(2) 若$\sin A=\cos B$，则$\triangle ABC$是直角三角形；

(3) 若$\cos A\cos B\cos C<0$，则$\triangle ABC$是钝角三角形；

(4) 若$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1$，则$\triangle ABC$是等边三角形.

2. 已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$，且$|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=7$，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的余弦值.

3. 已知▱$ABCD$中，对角线$AC=57$，它与两条邻边AB和AD的夹角分别是$30°$和$45°$，求AB和AD的长.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$c=b(1+2\cos A)$，求证：$A=2B$.

5. 在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{1}{3}$.

(1) 求$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A$的值；

(2) 若$a=\sqrt{3}$，求bc的最大值.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，已知 $\angle BAD+\angle ACB=90^\circ$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

7. 在四边形 $ABCD$ 中，$B=D=90^\circ$，$A=60^\circ$，$AD=5$，$AB=4$，求 AC 的长以及 $\frac{BC}{CD}$ 的值.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a^2-a=2(b+c)$，$a+2b=2c-3$.

(1) 若 $\sin C : \sin A=4 : \sqrt{13}$，求 a，c；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的最大角.

9. 已知 D 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点，$AB=AD$，记 $\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$.

(1) 求证：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$；

(2) 若 $AC=\sqrt{3}DC$，求 β 的值.

10. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，$\sin(A+B)=\frac{3}{5}$，$\sin(A-B)=\frac{1}{5}$.

(1) 求证：$\tan A=2\tan B$；

(2) 若 $AB=3$，求 AB 边上的高.

11. 根据三角形的 3 边长 a，b，c 求三角形面积 S，既可以用我国宋代数学家秦九韶提出的“三斜求积术”，即

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]},$$

也可以用海伦公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$. 证明上述两个公式等价.

C 组

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，P 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle BPC=90^\circ$.

(1) 若 $PB=\frac{1}{2}$，求 PA；

(2) 若 $\angle APB=150^\circ$，求 $\tan\angle PBA$.

2. 已知 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$，且 $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

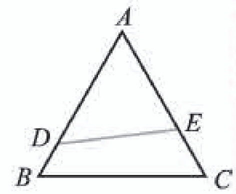
(1) 求 $\frac{\sin B}{\sin C}$；

(2) 若 $AD=1$，$DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.

3. 如图，公园里有一块边长为 2 的等边三角形草坪（记为 $\triangle ABC$），图中 DE 把草坪分成面积相等的两部分，D 在 AB 上，E 在 AC 上.

(1) 设 $AD=x$，$DE=y$，求 y 关于 x 的函数关系式；

(2) 如果要沿 DE 铺设灌溉水管，则水管最短时 DE 的位置应在哪里？说明理由.



（第 3 题）

我觉得自学能力是人生的第一重要素质，这点在离开学校之后表现得尤其突出．学校只教基础知识，到工作岗位之后，为适应专业或进一步的知识更新，全靠自学．缺乏这种能力的人，从学校毕业也就“彻底”毕业了．

——陈木法

第十章

复数

本章导语

我们所熟悉的实数及其运算，实质上是在描述和解决问题的过程中逐步扩充得来的：

首先，人们从物品计数等过程中抽象出了正整数 1，2，3，…，从物品增多等过程中抽象出了正整数的加法，从物品减少等过程中抽象出了正整数的减法，并在此基础上引入了正整数的乘法与除法（加、减、乘、除简称四则运算）；

其次，人们从均分物品与进行除法操作的基础上，引入了正分数，还从表示“亏欠”与进行减法操作的基础上，引入了负数（包括负整数与负分数）；

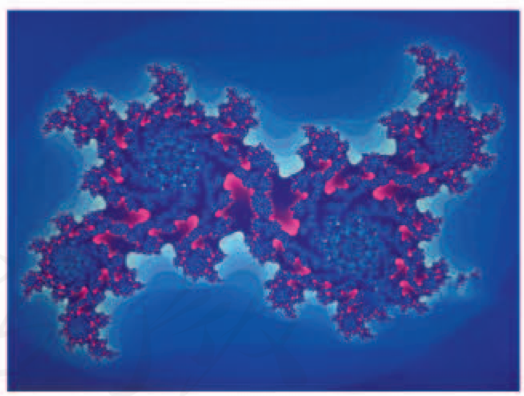
再次，人们从表示“无”出发引入了数 0，这样一来，按照数的符号就把数分成了正数、负数与 0 三类；

最后，人们从描述边长为 1 的正方形对角线长等过程中，引入了无理数，并给出了无理数参与四则运算的方法．

值得注意的是，在上述数的扩充过程中，有关运算的运算律是始终保持的．例如，正整数运算的分配律

$$(a+b)c=ac+bc,$$

在引入了分数、负数、0 以及无理数之后，也都成立．也就是说，这个分配律对所有实数都成立．



实数还可以进一步扩充．本章我们将引入一种新的数——虚数，从而将实数扩充成复数．

复数在数学、流体力学、电学等学科中都有广泛的应用．例如，利用复数可以得到如图所示的分形图．

10.1 复数及其几何意义

10.1.1 复数的概念

情境与问题

数的扩充过程，也可以从方程是否有解的角度来理解：

因为类似 $x+4=3$ 的方程在自然数范围内无解，所以人们引入了负数并将自然数扩充成整数，使得类似 $x+4=3$ 的方程在整数范围内有解；

因为类似 $2x=5$ 的方程在整数范围内无解，所以人们引入了分数并将整数扩充成有理数，使得类似 $2x=5$ 的方程在有理数范围内有解；

因为类似 $x^2=7$ 的方程在有理数范围内无解，所以人们引入了无理数并将有理数扩充成实数，使得类似 $x^2=7$ 的方程在实数范围内有解.

我们已经知道，类似 $x^2=-1$ 的方程在实数范围内无解. 那么，能否像前面一样，引入一种新的数，使得这个方程有解并将实数进行扩充呢？

人们早在 16 世纪就发现，可以通过公式

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

来求方程 $x^3=px+q$（p，q 均为正实数）的正根. 例如，方程 $x^3=9x+28$ 的正根为

$$x=\sqrt[3]{14+\sqrt{14^2-3^3}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{14^2-3^3}}=4.$$

如果方程是 $x^3=15x+4$，则由公式可得

$$x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}},$$

当时人们已经知道 $x=4$ 是 $x^3=15x+4$ 的唯一正根，因此

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=4$$

应该成立.

但是，$\sqrt{-1}$ 表示的应该是平方为 -1 的数，实数范围内这样的数是不存在的，这该如何解释呢？后来，人们发现，如果规定 $(\sqrt{-1})^2=-1$，并将

$\sqrt{-1}$ 按照类似实数的运算法则进行形式计算，则可以给上述结论一个圆满的解释：

因为

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})^3&=2^3+3\times2^2\times\sqrt{-1}+3\times2\times(\sqrt{-1})^2+(\sqrt{-1})^3\\&=8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1},\end{aligned}$$

所以可以认为 $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$.

类似地，可以认为 $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$.

从而形式上就有

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.$$

这里的 $\sqrt{-1}$ 历史上被认为是一个“虚幻”的数，它与下面我们要介绍的虚数有关.

一般地，为了使得方程 $x^2=-1$ 有解，人们规定 i 的平方等于 -1，即

$$\mathrm{i}^2=-1,$$

并称 i 为**虚数单位**. ①

值得注意的是，从本质上来说，虚数单位 i 与上述 $\sqrt{-1}$ 表示的意义是一样的，但是，为了避免混淆，如不特别声明，以后我们不再使用类似 $\sqrt{-1}$ 这样的表达式. 也就是说，在 $\sqrt{a}$ 中，还是要求 $a\geqslant0$，请大家务必注意这一点.

不难想到，引进虚数单位 i 后，需要定义虚数单位与实数之间的运算，而且这种运算还得保持以前的运算律（如加法交换律、乘法交换律等）均成立.

尝试与发现

(1) 你认为可以怎样表示 2 与 i 的和？又该怎样表示 3 减去 i？

(2) 你认为 5 与 i 的乘积可以怎样表示？这个数具有什么性质？

实数 a 与 i 的和记作 $a+\mathrm{i}$，且实数 0 与 i 的和为 i；实数 b 与 i 的积记作 $b\mathrm{i}$，且实数 0 与 i 的积为 0，实数 1 与 i 的积为 i.

一般地，当 a 与 b 都是实数时，称 $a+b\mathrm{i}$ 为**复数**. 复数一般用小写字母 z 表示，即

$$z=a+b\mathrm{i}\ (a,\ b\in\mathbf{R}),②$$

其中 a 称为 z 的**实部**，b 称为 z 的**虚部**，分别记作

$$\mathrm{Re}(z)=a,\ \mathrm{Im}(z)=b.$$

---

① 在印刷时，为了表示 i 为虚数单位，i 总是印成正体.

② 以下如不特别声明，谈到 $z=a+b\mathrm{i}$ 等类似表达式时，均默认为 a，$b\in\mathbf{R}$.

所有复数组成的集合称为**复数集**，复数集通常用大写字母 C 表示，因此

$$\mathbf{C}=\{z \mid z=a+b\mathrm{i},\ a,\ b\in\mathbf{R}\}.$$

例如，$2+(-3)\mathrm{i}\in\mathbf{C}$，这是一个实部为 2 且虚部为 -3 的复数，为了简单起见，$2+(-3)\mathrm{i}$ 通常简写为 $2-3\mathrm{i}$；再例如，$-1-2\mathrm{i}\in\mathbf{C}$，这是一个实部为 1 ________ 且虚部为 2 ________ 的复数.

不难看出，任意一个复数都由它的实部与虚部唯一确定，虚部为 0 的复数实际上是一个实数. 特别地，称虚部不为 0 的复数为**虚数**，称实部为 0 的虚数为**纯虚数**.

例如，复数 3 是一个实数，复数 $1-\mathrm{i}$ 是一个虚数，而复数 $-2\mathrm{i}$ 是一个纯虚数.

例 1 分别求实数 x 的取值，使得复数 $z=(x-2)+(x+3)\mathrm{i}$

(1) 是实数； (2) 是虚数； (3) 是纯虚数.

分析 因为 x 是实数，所以 z 的实部是 $x-2$，虚部是 $x+3$. 然后由复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 是实数、虚数与纯虚数的条件可以确定 x 的值.

解 (1) 当

$$x+3=0,$$

即 $x=-3$ 时，复数 z 是实数.

(2) 当

$$x+3\neq 0,$$

即 $x\neq -3$ 时，复数 z 是虚数.

(3) 当

$$x-2=0 \text{ 且 } x+3\neq 0,$$

即 $x=2$ 时，复数 z 是纯虚数.

两个复数 z_1 与 z_2，如果实部与虚部都对应相等，我们就说这**两个复数相等**，记作 $z_1=z_2$.

这就是说，如果 a，b，c，d 都是实数，那么

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$$

特别地，当 a，b 都是实数时，$a+b\mathrm{i}=0$ 的充要条件是

3 ________.

应当注意，两个不相等的实数，一定有大小之分（从而也就一定能用大于号或小于号连接），但是两个复数，如果不全是实数，一般不规定它们之间的大小，只能说它们相等或不相等. 例如，$2+\mathrm{i}$ 与 $3+\mathrm{i}$，2 与 $2\mathrm{i}$ 之间都不规定大小. 特别地，不能将虚数与 0 比较大小，因此也就不能说虚数是正数还是负数.

例 2 分别求满足下列关系的实数 x 与 y 的值.

(1) $(x+2y)-\mathrm{i}=6x+(x-y)\mathrm{i}$；

(2) $(x+y+1)-(x-y+2)\mathrm{i}=0$.

解 （1）根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases} x+2y=6x, \\ -1=x-y, \end{cases}$$

解这个方程组，得 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{5}{3}$.

（2）由复数等于 0 的充要条件，得

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ -(x-y+2)=0, \end{cases}$$

解这个方程组，得 $x=$ 4 ______，$y=$ 5 ______.

练习A

1. 下列各数中，哪些是实数？哪些是虚数？哪些是纯虚数？

$$\sqrt{3}\ ,\sqrt{2}\mathrm{i}\ ,0\ ,\mathrm{i}\ ,6+5\mathrm{i}\ ,2-\sqrt{2}\mathrm{i}\ ,\sqrt{7}-4\mathrm{i}\ ,-3-\mathrm{i}\ .$$

2. 写出实数集 **R** 与复数集 **C** 之间的关系，并用维恩图表示 **N**，**Z**，**Q**，**R**，**C** 之间的关系.
3. 分别写出下列各复数的实部与虚部.
   （1）$-3+2\mathrm{i}$；　（2）$3-5\mathrm{i}$；　（3）-7；　（4）$8\mathrm{i}$.
4. 已知 $(x-2)+y\mathrm{i}=0$，求实数 x 与 y 的值.
5. 已知 z_1 的实部是 1，z_2 的实部为 0，则 $z_1=z_2$ 可能成立吗？为什么？

练习B

1. 根据以下复数 z 的值，分别写出 $\mathrm{Re}(z)$ 与 $\mathrm{Im}(z)$.
   （1）$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；　（2）$z=-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$.
2. 分别求实数 m 的取值范围，使得复数 $z=(m+2)+(m-6)\mathrm{i}$
   （1）是实数；　（2）是虚数；　（3）是纯虚数.
3. 分别求满足下列关系的实数 x 与 y 的值.
   （1）$(x+y-3)+(x-y-1)\mathrm{i}=3+3\mathrm{i}$；
   （2）$(x+y+1)-(x-2y+1)\mathrm{i}=0$.
4. 写出复数是正实数的一个充要条件.
5. 记所有虚数组成的集合为 I，所有纯虚数组成的集合为 P，分别写出下列集合之间的关系，并作出对应的维恩图.
   （1）I 与 P；　（2）I 与 **C**；　（3）I，**R** 与 **C**.

1 -1　2 -2　3 $a=0$ 且 $b=0$　4 $-\frac{3}{2}$　5 $\frac{1}{2}$

10.1.2 复数的几何意义

情境与问题

我们知道，实数与数轴上的点一一对应，也就是说，数轴可以看成实数的一个几何模型．那么，能否为复数找一个几何模型呢？怎样建立起复数与几何模型中点的一一对应关系？

一方面，根据复数相等的定义，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a，b\in\mathbf{R})$被它的实部与虚部唯一确定，即复数 z 被有序实数对 $(a，b)$ 唯一确定；另一方面，有序实数对 $(a，b)$ 在平面直角坐标系中对应着唯一的点 $Z(a，b)$．因此不难发现，可以在复数集与平面直角坐标系的点集之间建立一一对应关系，即

$$复数\ z=a+b\mathrm{i} \leftrightarrow 点\ Z(a，b).$$

例如，复数 $1+2\mathrm{i}$ 对应的点为 $A(1，2)$，复数 3 对应的点为 $B(3，0)$，而点 $C(0，-1)$ 对应的复数为 1 ______，如图 10-1-1 所示．

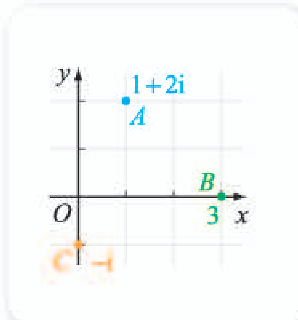


图 10-1-1

建立了直角坐标系来表示复数的平面也称为**复平面**．在复平面内，x 轴上的点对应的都是实数，因此 x 轴称为**实轴**；y 轴上的点除了原点外，对应的都是纯虚数，为了方便起见，称 y 轴为**虚轴**．

尝试与发现

设 $3+\mathrm{i}$ 与 $3-\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点分别为 A 与 B，则 A，B 两点位置关系是怎样的？一般地，当 $a，b\in\mathbf{R}$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点有什么位置关系？

一般地，如果两个复数的实部相等，而虚部互为相反数，则称这两个复数互为**共轭复数**．复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示，因此，当 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a，b\in\mathbf{R})$时，有

$$\bar{z}=a-b\mathrm{i}.$$

显然，在复平面内，表示两个共轭复数的点关于实轴对称；反之，如果表示两个复数的点在复平面内关于实轴对称，则这两个复数互为共轭复数．

复数还有另外一种几何意义：因为平面直角坐标系中的点 $Z(a，b)$ 能唯一确定一个以原点 O 为始点、Z 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$，所以复数也可用向

量 $\overrightarrow{OZ}$ 来表示，这样一来也就能在复数集与平面直角坐标系中以 O 为始点的向量组成的集合之间建立一一对应关系，即

$$\text{复数 } z=a+b\text{i} \leftrightarrow \text{ 向量 } \overrightarrow{OZ}=(a,\ b).$$

因此我们也就能借助向量来描述复数．一般地，向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$ 的长度称为复数 $z=a+b\text{i}$ 的**模**（或**绝对值**），复数 z 的模用 $|z|$ 表示，因此

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

可以看出，当 $b=0$ 时，

$$|z|=\sqrt{a^2}=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad},$$

这说明复数的模是实数绝对值概念的推广．

例如，复数 $z_1=3+\text{i}$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}=(3,\ 1)$，复数 $z_2=3-\text{i}$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_2}=(3,\ -1)$，而且此时有

$$|3+\text{i}|=|3-\text{i}|=\sqrt{10},$$

如图 10-1-2 所示．

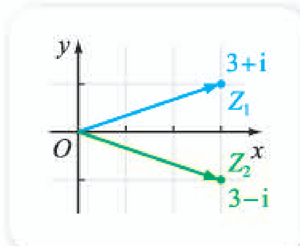


图 10-1-2

一般地，两个共轭复数的模相等，即

$$|z|=|\bar{z}|.$$

例 1 设复数 $z_1=3+4\text{i}$ 在复平面内对应的点为 Z_1，对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$；复数 z_2 在复平面内对应的点为 Z_2，对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_2}$．已知 Z_1 与 Z_2 关于虚轴对称，求 z_2，并判断 $|\overrightarrow{OZ_1}|$ 与 $|\overrightarrow{OZ_2}|$ 的大小关系．

解 由题意可知 $Z_1(3,4)$，又因为 Z_1 与 Z_2 关于虚轴对称，所以 $Z_2(-3,\ 4)$，从而有 $z_2=-3+4\text{i}$，因此

$$|z_2|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5.$$

又因为

$$|\overrightarrow{OZ_1}|=|z_1|=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad},\ |\overrightarrow{OZ_2}|=|z_2|=5,$$

所以 $\boxed{4}$__________.

例 2 设复数 z 在复平面内对应的点为 Z，说明当 z 分别满足下列条件时，点 Z 组成的集合是什么图形，并作图表示．

(1) $|z|=2$；　　　　(2) $1<|z|\leqslant 3$.

解 (1) 由 $|z|=2$ 可知向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度等于 2，即点 Z 到原点的距离始终等于 2，因此点 Z 组成的集合是圆心在原点、半径为 2 的圆．如图 10-1-3(1)所示．

(2) 不等式 $1<|z|\leqslant 3$ 等价于不等式组

$$\begin{cases}|z|\leqslant 3,\\|z|>1.\end{cases}$$

又因为满足 $|z|\leqslant 3$ 的点 Z 的集合，是圆心在原点、半径为 3 的圆及

其内部，而满足 $|z|>1$ 的点 Z 的集合，是圆心在原点、半径为 [5] 的圆的外部，所以满足条件的点 Z 组成的集合是一个圆环（包括外边界但不包括内边界）．如图 10-1-3(2)所示.

图 10-1-3

练习A

1. 分别写出下列复数在复平面内对应的点的坐标.

   (1) $2+5\mathrm{i}$；　(2) $-3+2\mathrm{i}$；　(3) $3-2\mathrm{i}$；　(4) $-2\mathrm{i}-4$；

   (5) 3；　(6) $-3\mathrm{i}$；　(7) $4\mathrm{i}$；　(8) -2.

2. 判断下列命题的真假.

   (1) 在复平面内，实轴上的点都表示实数；

   (2) 在复平面内，实轴与虚轴的交点对应复数 0.

3. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$，求 $\overline{z}$ 与 $|z|$.

4. 写出“复数 z 的共轭复数是它本身”的一个充要条件.

练习B

1. 设复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应的点为 $Z(a,\ b)$，分别写出 a，b 必须满足的条件，使得点 Z 位于

   (1) 实轴上；　(2) 虚轴上；

   (3) 上半平面（不包括实轴）；　(4) 右半平面（不包括虚轴）.

2. 求下列各式的值.

   (1) $|3+4\mathrm{i}|$；　(2) $|2+2\mathrm{i}|$；　(3) $\left|-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|$.

3. 如果两个复数的模相等，那么这两个复数一定互为共轭复数吗？为什么？

4. 用“$>$”、“$<$”或“$=$”填空.

   (1) 复数 $z_1=4-3\mathrm{i}$，$z_2=4+3\mathrm{i}$，则 $|z_1|$ ________ $|z_2|$；

   (2) 复数 $z_1=5-12\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{6}+3\mathrm{i}$，则 $|z_1|$ ________ $|z_2|$.

5. 设复数 z 在复平面内对应的点为 Z，说明当 z 分别满足下列条件时，点 Z 组成的集合是什么图形，并作图表示.

   (1) $|z|=1$；　(2) $|z|<1$；　(3) $|z|\geqslant 1$；　(4) $1<|z|<2$.

1 $-\mathrm{i}$　2 $|a|$　3 $\sqrt{3^2+4^2}=5$　4 $|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|$　5 1

习题10-1A

1. 已知复数 $(2m-1)-(m+3)\mathrm{i}$ 的虚部为 2，求实数 m 的值.
2. 求满足下列条件的实数 x 与 y 的值.
   (1) $(3x-4)+(2y+3)\mathrm{i}=0$；
   (2) $(3x+2y)+(5x-y)\mathrm{i}=17-2\mathrm{i}$.
3. 已知 $(m+2)+(m^2+m-6)\mathrm{i}$ 是纯虚数，求实数 m 的值.
4. 若复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$ 与复数 $z_2=c+d\mathrm{i}$ 在复平面内所对应的点分别满足下列条件，试探究实数 a，b，c，d 之间应该满足的关系.
   (1) 关于实轴对称；　(2) 关于虚轴对称；　(3) 关于直线 $y=x$ 对称.
5. 已知在复平面内，O 是坐标原点，复数 $z=2+\mathrm{i}$ 对应的点是 Z，如果点 Z_1 与点 Z 关于虚轴对称，点 Z_2 与点 Z 关于原点对称，分别求 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数.
6. 若复数 $z=3+4\mathrm{i}$ 与其共轭复数所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，求 $\triangle OAB$ 的面积.
7. 分别写出"复数 z 对应的点在实轴上"与"复数 z 对应的点在虚轴上"的一个充要条件.

习题10-1B

1. 已知 $2x^2-5x+2+(x^2-x-2)\mathrm{i}=0$，求实数 x 的值.
2. 分别求实数 m 的取值范围，使得复数 $(m-1)+(m+1)\mathrm{i}$ 对应的点
   (1) 在第三象限；　(2) 在第二象限或第四象限.
3. 已知实数 x 与 y 满足 $(x+y)-xy\mathrm{i}=-5+24\mathrm{i}$，求 x 与 y 的值.
4. 已知 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，若 z_1 的实部与 $\overline{z_2}$ 的实部互为相反数，则实数 a，b，c，d 应满足什么关系？
5. 若复数 $z_1=4-3\mathrm{i}$，$z_2=4+3\mathrm{i}$ 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，求 $\triangle OZ_1Z_2$ 的周长.
6. 已知复数 z 的实部与虚部互为相反数，且 $|z|=3\sqrt{2}$，求 z.
7. 已知复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a，b\in\mathbf{R})$的共轭复数的模为 5，且 $3a=4b$，求 $\overline{z}$.

10.2 复数的运算

10.2.1 复数的加法与减法

1. 复数的加法

我们知道，任意两个实数都可以相加，而且实数中的加法运算还满足交换律与结合律，即 a，b，$c \in \mathbf{R}$ 时，必定有

$$a+b=b+a,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

那么，复数中的加法应该如何规定，才能使得类似的交换律与结合律都成立呢？

尝试与发现

设 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=2-2\mathrm{i}$，$z_3=-2+3\mathrm{i}$，你认为 z_1+z_2 与 $(z_1+z_2)+z_3$ 的值应该等于多少？由此尝试给出任意两个复数相加的运算规则.

一般地，设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），称 z_1+z_2 为 z_1 与 z_2 的**和**，并规定

$$\begin{aligned} z_1+z_2&=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})\\ &=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

显然，两个复数的和仍然是复数．而且容易证明，复数的加法运算满足交换律与结合律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

例如，对于上述尝试与发现中的三个复数来说，有

$$z_1+z_2=(1+\mathrm{i})+(2-2\mathrm{i})=(1+2)+(1-2)\mathrm{i}=3-\mathrm{i},$$

类似地，可以算出

$$(z_1+z_2)+z_3=(3-\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})=\boxed{1}\underline{\qquad}.$$

由复数和的定义可知，两个共轭复数的和一定是实数，证明留作练习.

尝试与发现

设 $z_1=2+2\mathrm{i}$，$z_2=-1-4\mathrm{i}$，求出 z_1+z_2，并在复平面内分别作出 z_1，z_2，z_1+z_2 所对应的向量，猜想并归纳复数加法的几何意义.

由复数与向量之间的对应关系可以得出复数加法的几何意义：如果复数 z_1，z_2 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，则当 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线时，以 OZ_1 和 OZ_2 为两条邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2，则 z_1+z_2 所对应的向量就是 $\overrightarrow{OZ}$，如图 10-2-1 所示.

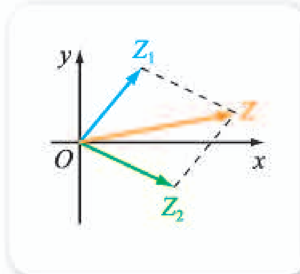


图 10-2-1

由复数加法的几何意义可以得出

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

2. 复数的减法

在实数中，减去一个数可以看成加上这个数的相反数. 例如，因为 3 的相反数为 -3，因此 $8-3=8+(-3)=5$.

在复数中是否可以用类似方法来定义两个复数的减法呢?

尝试与发现

设 $z_1=5+8\mathrm{i}$，$z_2=5-3\mathrm{i}$，猜测 z_2 的相反数以及 z_1-z_2 的值.

一般地，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$的**相反数**记作 $-z$，并规定

$$-z=-(a+b\mathrm{i})=-a-b\mathrm{i}.$$

复数 z_1 减去 z_2 的**差**记作 z_1-z_2，并规定

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2).$$

例如上述尝试与发现中 z_2 的相反数为

$$-z_2=-(5-3\mathrm{i})=-5+3\mathrm{i},$$

因此

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(5+8\mathrm{i})+(-5+3\mathrm{i})=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_.$$

一般地，如果 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R})$，则

$$z_1-z_2=(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

显然，两个复数的差仍然是复数. 而且，同实数中的情况类似，两个复数的差一般也不满足交换律，即一般来说，$z_1-z_2\neq z_2-z_1$.

由复数与向量之间的对应关系同样可以得出复数减法的几何意义：如果

复数 z_1，z_2 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，设点 Z 满足

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{Z_2Z_1},$$

则 z_1-z_2 所对应的向量就是 $\overrightarrow{OZ}$，如图 10-2-2 所示.

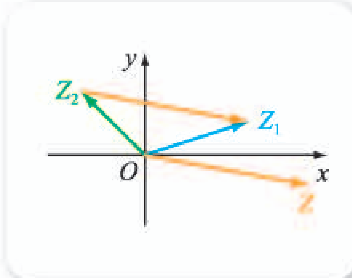


图 10-2-2

由复数减法的几何意义可以得出

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

因为复数相加、相减之后的结果都还是复数，所以当然可以进行有限个复数的加减运算，也可以进行加、减法的混合运算，下面以实例进行说明.

例 1 计算 $(2-5\mathrm{i})+(3+7\mathrm{i})-(5+4\mathrm{i})$.

解 根据定义有

$$\begin{aligned}&(2-5\mathrm{i})+(3+7\mathrm{i})-(5+4\mathrm{i})\\=&(2+3-5)+(-5+7-4)\mathrm{i}\\=&-2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 2 判断命题“两个共轭复数的差一定是纯虚数”的真假，并说明理由.

解 这是假命题，理由如下.

设 $z=a+b\mathrm{i}\,(a,\ b\in\mathbf{R})$，则

$$\overline{z}=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_,$$

从而有

$$z-\overline{z}=(a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})=2b\mathrm{i},$$

当 $b=0$ 时，$z-\overline{z}=0$，这不是纯虚数.

探索与研究

根据 z_1-z_2 的几何意义讨论下列各式的几何意义.

(1) $|z-(1+\mathrm{i})|=2$； (2) $|z+1|+|z-1|=2$.

练习A

1. 已知 z 是复数，判断下列等式是否成立.

(1) $0+z=z$； (2) $z-0=z$.

2. 已知 $z_1=3+2\mathrm{i}$，$z_2=1-4\mathrm{i}$，计算 z_1+z_2，z_1-z_2.

3. 计算下列各式的值.

(1) $(5-4\mathrm{i})+0$； (2) $3+(4+2\mathrm{i})$； (3) $5\mathrm{i}+(3+7\mathrm{i})$.

4. 计算下列各式的值.

(1) $5-(3+2\mathrm{i})$；　(2) $(4+5\mathrm{i})-3$；　(3) $0-(4-5\mathrm{i})$.

5. 求证：两个共轭复数的和是实数.

练习B

1. 计算下列各式的值.

(1) $(-3+2\mathrm{i})-(5-\mathrm{i})+(4+7\mathrm{i})$；

(2) $(1+\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})-(5-4\mathrm{i})+(-3+7\mathrm{i})$.

2. 如果复数 z_1，z_2 的和 z_1+z_2 是实数，那么 z_1 与 z_2 一定互为共轭复数吗？为什么？

3. 求证：

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$；　(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

4. 已知复数 $6+5\mathrm{i}$ 与 $-3+4\mathrm{i}$ 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，求 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 所对应的复数.

5. 如果不相等的两个复数 z_1，z_2 在复平面内所对应的点分别为 Z_1 与 Z_2，且 Z 为线段 Z_1Z_2 的中点，用 z_1，z_2 表示点 Z 对应的复数.

1 $1+2\mathrm{i}$　2 $11\mathrm{i}$　3 $a-b\mathrm{i}$

10.2.2 复数的乘法与除法

1. 复数的乘法

我们知道，两个实数的乘法对加法来说满足分配律，即 a，b，$c\in\mathbf{R}$ 时，有

$$(a+b)c=ac+bc,$$

而且，实数的正整数次幂满足

$$a^ma^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{mn},\ (ab)^n=a^nb^n,$$

其中 m，n 均为正整数．那么，复数的乘法应该如何规定，才能使得类似的运算法则仍成立呢？

尝试与发现

设 $z_1=3$，$z_2=1-2\mathrm{i}$，$z_3=-5\mathrm{i}$，你认为 z_1z_2 的值与 z_2z_3 的值分别等于多少？由此尝试给出任意两个复数相乘的运算规则.

一般地，设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），称 z_1z_2（或 $z_1\times z_2$）为 z_1 与 z_2 的**积**，并规定

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})\\&=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2\\&=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

这就是说，为了算出两个复数的积，只需要按照多项式乘法的方式进行，并利用 $\mathrm{i}^2=-1$ 即可.

例如，对于上述尝试与发现中的三个复数来说，有

$$z_1z_2=3(1-2\mathrm{i})=3-6\mathrm{i},$$

$$z_2z_3=(1-2\mathrm{i})(-5\mathrm{i})=-5\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2=\boxed{1}\underline{\qquad\quad}.$$

显然，两个复数的积仍然是复数. 可以证明，复数的乘法运算满足交换律与结合律，且对加法满足分配律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

$$z_1z_2=z_2z_1,\quad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),\quad z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

例 1 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证：

$$(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2.$$

证明 根据复数乘法的定义有

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})&=a^2-ab\mathrm{i}+ba\mathrm{i}-b^2\mathrm{i}^2\\&=a^2+b^2.\end{aligned}$$

例 1 的结论可以总结为

$$\forall z\in\mathbf{C},\ z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2.$$

n 个相同的复数 z 相乘时，仍称为 z 的 n 次**方**（或 n 次**幂**），并记作 z^n，即

$$z^n=\underbrace{z\times z\times\cdots\times z}_{n\text{个}}.$$

可以验证，当 m，n 均为正整数时，

$$z^mz^n=z^{m+n},\quad (z^m)^n=z^{mn},\quad (z_1z_2)^n=z_1^nz_2^n.$$

由此可知

$$(5\mathrm{i})^2=5^2\times\mathrm{i}^2=-25,$$

$$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}=\boxed{2}\underline{\qquad\quad},$$

$$\mathrm{i}^4=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}^2=(-1)\times(-1)=1.$$

需要说明的是，以前我们所学过的和平方公式、平方差公式等，对于复数来说也是成立的，即

$$(z_1+z_2)^2=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2,$$
$$z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2).$$

例如，例 1 也可按如下方式计算.

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$$

例 2 计算 $(1+i)^2$ 与 $(1-i)^2$ 的值.

解 $(1+i)^2=1^2+2i+i^2=2i$.

$(1-i)^2=$ 3 ______.

可以验证，以前所学的等式性质仍然成立. 例如，等式两边同时乘上一个复数，等式仍成立，即当 $z_1=z_2$ 时，必定有 $z_1z=z_2z$.

2. 复数的除法

我们知道，在实数中，如果 $a\neq0$ 且 $ax=b$，那么

$$x=\frac{b}{a}.$$

下面我们用类似的方法给出两个复数相除的定义.

如果复数 $z_2\neq0$，则满足 $zz_2=z_1$ 的复数 z 称为 z_1 除以 z_2 的**商**，并记作

$$z=\frac{z_1}{z_2}\ (\text{或 } z=z_1\div z_2),$$

而且同以前一样，z_1 称为被除数，z_2 称为除数①.

利用复数除法的定义可以证明，当 w 为非零复数时，有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1w}{z_2w},\quad \frac{z_1+z_2}{w}=\frac{z_1}{w}+\frac{z_2}{w}.$$

尝试与发现

设实数 a，b 满足

$$(a+bi)(1+2i)=1,$$

利用方程组求 a，b 的值，并思考是否有其他方法可以求出 $\dfrac{1}{1+2i}$.

上述尝试与发现的式子可以改写为

$$a+bi=\frac{1}{1+2i},$$

为了求出 a，b 的值，我们将上述等式右边看成一个分式. 这样一来，就只要想办法把 $1+2i$ 变成一个实数即可，注意到

① 如不特别声明，以后总是默认为除数不能为 0.

$$(1+2i)(1-2i)=1^2-(2i)^2=5,$$

因此

$$a+bi=\frac{1}{1+2i}=\frac{1\times(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i.$$

上面这种方法通常称为“分母实数化”.

一般地，给定复数 $z\neq 0$，称 $\frac{1}{z}$ 为 z 的**倒数**. z_1 除以 z_2 的商 $\frac{z_1}{z_2}$ 也可以看成 z_1 与 z_2 的倒数之积. 显然，利用“分母实数化”可以求出任意一个非零复数的倒数，以及任意两个复数的商（除数不能为 0）.

例 3 求 $(1+2i)\div(3-4i)$ 的值.

解 $(1+2i)\div(3-4i)=\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$$=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$$

同实数类似，可以定义非零复数的 0 次幂与负整数次幂，即当 z 为非零复数且 n 是正整数时，规定

$$z^0=1,\ z^{-n}=\frac{1}{z^n}.$$

例如，$(1+i)^{-2}=\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{1}{2i}=\frac{i}{2i^2}=-\frac{i}{2}.$

3. 实系数一元二次方程在复数范围内的解集

尝试与发现

我们已经知道，虚数单位 i 是方程 $x^2=-1$ 的一个解，还有其他复数是这个方程的解吗？如果实数 $a>0$，那么方程 $x^2=-a$ 在复数范围内的解集是什么？

因为

$$i^2=(-i)^2=-1,$$

所以方程 $x^2=-1$ 在复数范围内的解集为 4 ______.

类似地，可以看出，当实数 $a>0$ 时，方程 $x^2=-a$ 在复数范围内的解集为 $\{\sqrt{a}\,i,\ -\sqrt{a}\,i\}$.

例 4 在复数范围内求方程 $x^2+2x+3=0$ 的解集.

解 因为

$$x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2,$$

所以原方程可以化为 $(x+1)^2=-2$，从而可知

$$x+1=\sqrt{2}\mathrm{i} \text{ 或 } x+1=-\sqrt{2}\mathrm{i},$$

因此 $x=-1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 或 $x=-1-\sqrt{2}\mathrm{i}$，所求解集为

$$\{-1+\sqrt{2}\mathrm{i},\ -1-\sqrt{2}\mathrm{i}\}.$$

在例 4 中，如果我们记 $x^2+2x+3=0$ 在复数范围内的两个解分别为 x_1，x_2，则 $\overline{x_1}=x_2$ 且 $\overline{x_2}=x_1$，还可算得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2, \\ x_1x_2=3. \end{cases}$$

当 a，b，c 都是实数且 $a\neq 0$ 时，关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 称为**实系数一元二次方程**，这个方程在复数范围内总是有解的，而且

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程有两个互为共轭的虚数根.

探索与研究

证明上述关于实系数一元二次方程解的结论，并证明：如果 x_1，x_2 为实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，那么

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

拓展阅读

利用复数产生分形图

以前我们学过的函数，定义域都是实数集的子集. 但函数概念还可以推广：定义域是复数集的子集的函数称为复变函数. 类似地，我们还可以得到多项式复变函数的概念. 例如，$f(z)=z^2$ 就是一个多项式复变函数，此时

$$f(\mathrm{i})=\mathrm{i}^2=-1,\ f(1+\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}.$$

给定多项式复变函数 $f(z)$ 之后，对任意一个复数 z_0，通过计算公式 $z_{n+1}=f(z_n)$，$n\in\mathbf{N}$ 可以得到一列值

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots.$$

如果存在一个正数 M，使得 $|z_n|<M$ 对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立，则称 z_0 为 $f(z)$ 的收敛点；否则，称 z_0 为 $f(z)$ 的发散点. $f(z)$ 的所有收敛点组成的集合称为 $f(z)$ 的充满茹利亚集.

例如，当 $f(z)=z^2$ 时，如果 $z_0=\mathrm{i}$，则得到的一列值是

$$\mathrm{i},\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots;$$

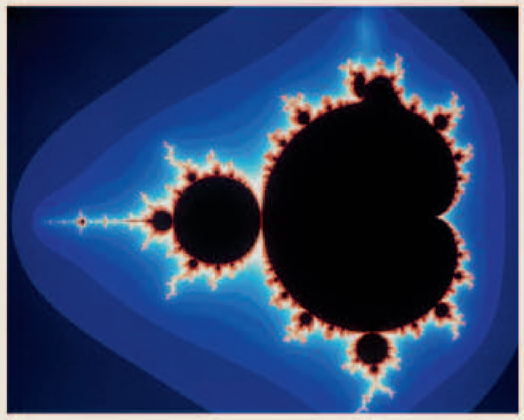
如果 $z_0=1+\mathrm{i}$，则算出的一列值是

$$1+\mathrm{i},\ 2\mathrm{i},\ -4,\ \cdots,\ 2^{2^{n-1}},\ \cdots.$$

显然，对于 $f(z)=z^2$ 来说，i 为收敛点，

1+i 为发散点．事实上，利用 $|z^2|=|z|^2$ 可以证明，$f(z)=z^2$ 的充满茹利亚集是一个单位圆盘（即由满足 $|z|\leqslant 1$ 的所有 z 组成的集合）．

让人惊讶的是，当 $f(z)=z^2+c$ 时，对于某些复数 c 来说，$f(z)$ 的充满茹利亚集是非常复杂的．如果利用计算机对不同形态的收敛点和发散点进行不同的着色，就可以得到与本章导语所示类似的分形图．而且，如果按照一定的规则对 c 进行分类，并进行着色，可以得到如图所示的芒德布罗分形图．



练习A

1 计算下列各式的值．

(1) $(4-8\mathrm{i})\mathrm{i}$；　(2) $-\mathrm{i}(11-2\mathrm{i})$；　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}$；

(4) $(3-2\mathrm{i})^2$；　(5) $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$；　(6) $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$．

2 计算 i^{28}，i^{37}，i^{42}，i^{90} 的值，并总结出 i^n（$n\in\mathbf{N}$）的取值规律．

3 举例说明一般情况下，$\dfrac{w}{z_1+z_2}\neq\dfrac{w}{z_1}+\dfrac{w}{z_2}$．

4 已知 $1+\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+2=0$ 的根，求实数 a 的值．

练习B

1 计算下列各式的值．

(1) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；　(2) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$．

2 在复数范围内求方程 $x^2+10x+40=0$ 的解集．

3 已知 $z_1=5+10\mathrm{i}$，$z_2=3-4\mathrm{i}$，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$，求 z．

4 已知 $\dfrac{1+a\mathrm{i}}{\mathrm{i}}+(4-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+b\mathrm{i}$，求实数 a，b 的值．

5 求证：

(1) $\overline{z^2}=(\overline{z})^2$；　(2) $z=\dfrac{|z|^2}{\overline{z}}$；　(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$；　(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$．

1 $-10-5\mathrm{i}$　2 $-\mathrm{i}$　3 $1^2-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-2\mathrm{i}$　4 $\{\mathrm{i},\ -\mathrm{i}\}$

习题10-2A

1. 计算下列各式的值.

(1) $(4+3\mathrm{i})+(5+7\mathrm{i})$；　　(2) $(-5+\mathrm{i})-(3-2\mathrm{i})$；

(3) $(3+2\mathrm{i})+(-3-2\mathrm{i})$；　　(4) $(6-3\mathrm{i})-(-3\mathrm{i}-2)$.

2. 求证：若复数 $z\neq 0$，则 z 为纯虚数的充要条件是 $z+\overline{z}=0$.

3. 计算下列各式的值.

(1) $\left(\frac{2}{3}+\mathrm{i}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)$；

(2) $[(a+b)+(a-b)\mathrm{i}]-[(a-b)-(a+b)\mathrm{i}]$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$.

4. 计算下列各式的值.

(1) $(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$；

(2) $(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})(-a+b\mathrm{i})(-a-b\mathrm{i})$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$.

5. 计算下列各式的值.

(1) $\dfrac{2-\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}$；　　(2) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{7+4\mathrm{i}}$.

6. 已知 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$z_1z_2=0$，求证：z_1，z_2 中至少有一个是 0.

7. 已知 $|z_1|=3$，$|z_2|=5$，分别求 $|z_1+z_2|$ 与 $|z_1-z_2|$ 的最大值与最小值.

习题10-2B

1. 计算下列各式的值.

(1) $\dfrac{1}{(1-\mathrm{i})^2}$；　　(2) $(1+\mathrm{i})^{2\,000}$；　　(3) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$；　　(4) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^8$.

2. 已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=-2+\mathrm{i}$，$z_3=-1-2\mathrm{i}$ 在复平面上对应的点是一个正方形的 3 个顶点，求这个正方形的第 4 个顶点对应的复数.

3. 证明 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ 对任意复数 z_1，z_2 都成立，并算出 $z=(3+2\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$ 的模.

4. 计算下列各式的值.

(1) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}$；　　(2) $\dfrac{\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}+\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}}$.

5. 已知 x_1，x_2 是方程 $x^2-x+7=0$ 的两个根，求 $|x_1-x_2|^2$ 的值.

6. 证明等式 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ 对任意复数 z_1，z_2 都成立，并给出这个等式的一个几何意义.

7. 已知 $z^2=5-12\mathrm{i}$，求 z.

*10.3　复数的三角形式及其运算

1. 复数的三角形式

尝试与发现

设复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点为 Z，

(1) 写出点 Z 的坐标，并在图 10-3-1 中描出点 Z 的位置，作出向量 $\overrightarrow{OZ}$；

(2) 记 r 为向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，θ 是以 x 轴正半轴为始边、射线 OZ 为终边的一个角，求 r 的值，并写出 θ 的任意一个值，探讨 r，θ 与 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的实部、虚部之间的关系.

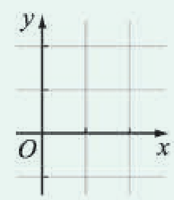


图 10-3-1

一般地，如果非零复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应点 $Z(a,\ b)$，且 r 为向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，θ 是以 x 轴正半轴为始边、射线 OZ 为终边的一个角，则

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

根据任意角余弦、正弦的定义可知

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r}.$$

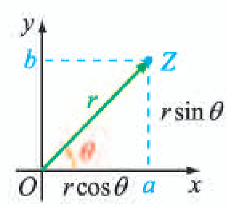


图 10-3-2

因此 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，如图 10-3-2 所示，从而

$$z=a+b\mathrm{i}=(r\cos\theta)+(r\sin\theta)\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

上式的右边称为非零复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的**三角形式**（对应地，$a+b\mathrm{i}$ 称为复数的**代数形式**），其中的 θ 称为 z 的**辐角**.

显然，任何一个非零复数 z 的辐角都有无穷多个，而且任意两个辐角之间都相差 2π 的整数倍. 特别地，在 $[0,2\pi)$ 内的辐角称为 z 的**辐角主值**，记作 $\arg z$.

为了求出一个非零复数的三角形式，只要求出这个复数的模，然后再找

出复数的一个辐角（比如辐角主值）即可. 例如，对于复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 来说，因为

$$|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\ \cos\theta=\frac{1}{2},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以可取 $\theta=\arg z=\frac{\pi}{3}$，从而 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的三角形式为

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

这也可以通过如下方式得到.

$$\begin{aligned}z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}&=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\mathrm{i}\right]\\&=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

因为

$$0=0(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 θ 可以为任意值，所以我们也称上式为复数 0 的三角形式. 这样一来，任意复数都可以写成三角形式了.

例 1 把下列复数的代数形式改写成三角形式.

(1) $1-\mathrm{i}$；　　(2) $2\mathrm{i}$；　　(3) -1.

解 (1) 由题意可知

$$\begin{aligned}1-\mathrm{i}&=\sqrt{1^2+(-1)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\mathrm{i}\right]\\&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

(2) 因为 2i 在复平面内所对应的点在 y 轴正半轴上，所以易知

$$|2\mathrm{i}|=2,\ \arg(2\mathrm{i})=\frac{\pi}{2},$$

从而可知

$$2\mathrm{i}=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.$$

(3) 因为 -1 在复平面内所对应的点在 x 轴负半轴上，所以易知

$$|-1|=1,\ \arg(-1)=\pi,$$

从而可知

$$-1=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}.$$

2. 复数三角形式的乘除法

尝试与发现

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，试求出 z_1z_2.

对于上述尝试与发现中的两个复数来说，显然有

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

即

$$\boxed{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].}$$

这就是说，由两个复数 z_1，z_2 的三角形式可以便捷地得到 z_1z_2 的三角形式：z_1 的模乘以 z_2 的模等于 z_1z_2 的模，z_1 的辐角与 z_2 的辐角之和是 z_1z_2 的辐角. 由此还能得到两个复数相乘的几何意义：设 z_1，z_2 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕原点旋转 θ_2，再将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的模变为原来的 r_2 倍，如果所得向量为 $\overrightarrow{OZ}$，则 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数即为 z_1z_2，如图 10-3-3 所示.

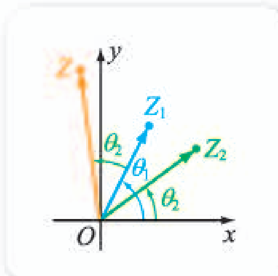


图 10-3-3

例如，

$$\begin{aligned}&2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\\&=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad}.\end{aligned}$$

又因为 $\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}$，所以一个复数与 i 相乘，从向量的角度来说，就相当于把这个复数对应的向量绕原点沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，如图 10-3-4 所示.

图 10-3-4

不难看出，上述两个复数三角形式的乘法及其几何意义，可以推广到有限个复数的三角形式相乘．特别地，如果 $n\in\mathbf{N}$，则

$$\boxed{[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)].}$$

尝试与发现

如果非零复数 z 的三角形式为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

利用两个共轭复数在复平面内对应的点关于 x 轴对称，写出 $\overline{z}$ 的三角形式，并求出 $z\overline{z}$ 的值．

一般地，如果非零复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，那么 $-\theta$ 是 $\overline{z}$ 的一个辐角，因此 $\overline{z}=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$，而且

$$\begin{aligned}z\overline{z}&=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\times r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]\\&=r^2[\cos(\theta-\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta-\theta)]=r^2,\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{r^2}$，即

$$\frac{1}{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)].$$

这样一来，如果 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$（$z_2\neq 0$），则

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=z_1\times\frac{1}{z_2}=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\times\frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)]\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].}$$

由此可知，由两个复数 z_1，z_2（$z_2\neq 0$）的三角形式可以迅速地得到 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的三角形式：z_1 的模除以 z_2 的模等于 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的模，z_1 的辐角减去 z_2 的辐角是 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的辐角．类似地，由此还能得到两个复数相除的几何意义．例如，任意一个复数除以 i，从向量的角度来说，就相当于把这个复数对应的向量绕原点沿顺时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$．

例 2 求 $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 的值．

解 因为

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{(\sqrt{2})^3\times 2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 3-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 3-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]\\&=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=2+2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 2 说明，利用复数的三角形式进行乘除运算，有时可简化计算过程.

例 3 如图 10-3-5 所示，已知平面内并列的三个相等的正方形，利用复数证明 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

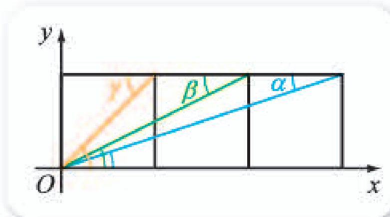


图 10-3-5

证明 假设每个正方形的边长为 1，建立如图 10-3-5 所示平面直角坐标系，确定复平面. 由平行线的内错角相等可知，α，β，γ 分别等于复数 $3+\mathrm{i}$，$2+\mathrm{i}$，$1+\mathrm{i}$ 的辐角主值，因此 $\alpha+\beta+\gamma$ 应该是 $(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ 的一个辐角. 又因为

$$(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=(5+5\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=10\mathrm{i},$$

而 $\arg(10\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$，所以存在整数 k，使得 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. 注意到 α，β，γ 都是锐角，于是 $k=0$，从而

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

拓展阅读

四元数简介

数学中的数，除了实数、复数之外，还有四元数. 一般地，形如 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 的数为四元数，其中 a，b，c，d 都是实数，i，j，k 都是虚数单位，这些虚数单位满足

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1.$$

给定两个四元数，可以进行同复数类似的加法和减法运算，例如

$$(2+3\mathrm{i}+4\mathrm{j}+5\mathrm{k})+(6+7\mathrm{i}+8\mathrm{j}+9\mathrm{k})$$
$$=8+10\mathrm{i}+12\mathrm{j}+14\mathrm{k}.$$

不过，对于两个四元数相乘来说，情况就比复数相乘复杂得多. 因为此时，除了会出现 i^2，j^2，k^2 之外，还会出现 ij，ik，jk，ji，ki，kj 等. 一般地，两个四元数相乘时，规定

$$ij=-ji=k,$$
$$jk=-kj=i,$$
$$ki=-ik=j.$$

例如，

$$\begin{aligned}&(2+3i+4j+5k)(6+7i+8j+9k)\\=&(12-21-32-45)+\\&(14+18+36-40)i+\\&(16+24+35-27)j+\\&(18+30+24-28)k\\=&-86+28i+48j+44k.\end{aligned}$$

由此也可以看出，四元数的乘法是不满足交换律的.

不过，有意思的是，与复数的乘法能够表示平面直角坐标系中的旋转类似，四元数的乘法能够表示空间中的旋转. 因此，四元数在描述三维旋转、姿态方面有一些独特的优点，人们经常使用四元数去描述飞行器、机器人等的姿态. 感兴趣的同学请自行查阅有关资料.

顺带提及的是，有同学可能会想：既然能有四元数，那有没有三元数呢？能不能规定形如 $a+bi+cj$ 的数为三元数呢？其中 a，b，c 都是实数，i，j 都是虚数单位. 对这个问题感兴趣的同学，可以考虑一下此时 i 与 j 的积 ij 的结果是什么，由此是否出现矛盾，等等.

习题10-3A

1. 把下列复数化为代数形式.

(1) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；　(2) $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$；

(3) $9(\cos\pi+i\sin\pi)$；　(4) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. 已知实数 $a>0$，写出下列复数的辐角主值.

(1) a；　(2) ai；　(3) $-a$；　(4) $-ai$.

3. 把下列复数化为三角形式.

(1) 5；　(2) $-2i$；　(3) -3；　(4) $6i$.

4. 把下列复数化为三角形式.

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$；　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$；　(3) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

5. 计算下列各式的值（结果写成三角形式）.

(1) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(2) $12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

6. 已知 θ 是 $3+4i$ 的一个辐角，求 $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ 的值.

7. 设 $-1+i$ 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ}$，把 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点按逆时针方向旋转 $120°$，得到向量 $\overrightarrow{OZ'}$，求 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数（用代数形式表示）.

习题10-3B

1. 等式 $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$ 成立吗？为什么？
2. 把下列复数化为三角形式.

   (1) $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$；　　(2) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；

   (3) $-3-3\mathrm{i}$；　　(4) $-5+5\mathrm{i}$.
3. 证明：$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)]$ 对任意 $n\in\mathbf{Z}$ 都成立.
4. 求证：$(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)=\cos 5\theta-\mathrm{i}\sin 5\theta$.
5. 计算 $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2}$.

习题10-3C

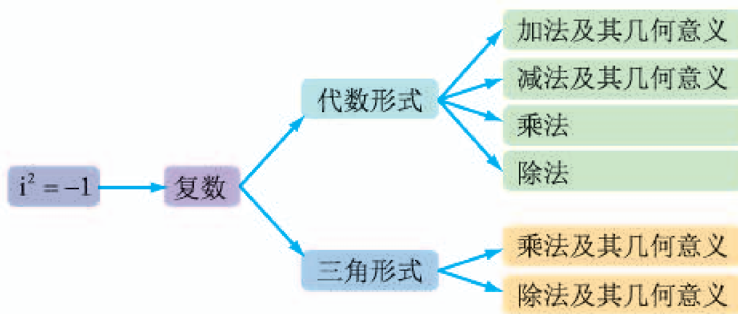
1. 在复平面内，已知等边三角形的两个顶点所表示的复数分别为 2 和 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求第 3 个顶点所表示的复数.
2. 给定复数 z 以及正整数 n，如果复数 w 满足 $w^n=z$，则称 w 为 z 的一个 n 次方根. 证明非零复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根有 n 个，且分别是
$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1,$$
并求出 1 的所有 3 次方根.

1 $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　　2 $\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$　　3 $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们首先将实数扩充成了复数，并学习了复数的几何意义；然后利用复数的代数形式进行了加、减、乘、除运算，还探讨了复数加、减运算的几何意义；最后还了解了复数的三角形式，并利用复数的三角形式研究了复数乘法与除法的几何意义．由此可作出知识结构图如下．



充分发挥自己的想象力和创造力，为本章知识设计不同于上述图表的独特知识结构图，并与其他同学分享．

02 课题作业

（1）复数与向量之间有很多相似的地方，但是也有很多不同之处，总结复数与向量各自的优点，整理成演讲材料后与其他同学交流．

（2）从保持不等式性质的角度去探讨能不能规定复数的相对大小，选定一个角度整理成小论文，并与其他同学交流．

03 复习题

A 组

1. 判断下列命题的真假．

（1）实数不是复数；

（2）有理数都是复数；

（3）$\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ 是无理数；

（4）$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 不是纯虚数；

（5）$3+\mathrm{i}$ 的共轭复数是 $3-\mathrm{i}$；

（6）$\mathrm{i}^4+5\mathrm{i}^2+4=0$；

(7) $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$，$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$.

2. 求下列各式的值.

(1) $(7+5\mathrm{i})+(4+3\mathrm{i})$；　　(2) $(8-5\mathrm{i})-(4-3\mathrm{i})$；

(3) $(2-5\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})$；　　(4) $2\mathrm{i}\div(1-\mathrm{i})$.

3. 已知复数 $z=\dfrac{m+2}{m}-(m-m^2)\mathrm{i}$，则

(1) 当实数 m 取什么值时，z 是实数?

(2) 当实数 m 在什么范围时，z 在复平面内对应的点在第二象限?

4. 已知实数 x，y 满足 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$，求 $|x+y\mathrm{i}|$.

5. 分别写出下列各复数的实部与虚部.

(1) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{3}$；　(2) $2+\mathrm{i}^2$；　(3) $(1+\mathrm{i})^2$；　(4) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$.

6. 计算 $4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$.

7. 化简 $\dfrac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2}{[\cos(\theta+\varphi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\varphi)][\cos(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\sin(\theta-\varphi)]}$.

8. 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量绕原点沿顺时针方向旋转 $60°$，求所得向量对应的复数.

9. 设复数 z 满足 $\left|\dfrac{z-1}{z}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\arg\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{\pi}{3}$，求 z.

10. 当 $a>0$ 时，用 $\sqrt{-a}$ 表示平方为 $-a$ 且虚部为正的复数. 在这样的约定下，数学家欧拉曾经认为

$$\sqrt{-1}\times\sqrt{-4}=2.$$

这个结果对吗? 为什么?

B 组

1. 设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$，求 $|z|$.

2. 已知 z 是虚数，分别根据下列条件求 z.

(1) $z+|\bar{z}|=2+\mathrm{i}$；　　(2) $z^2=\bar{z}$.

3. 已知复数 z 满足 $3z+\bar{z}=1+\mathrm{i}$，其中 i 为虚数单位，求 $|z|$.

4. 设 z_1，z_2 是两个复数，已知 $|z_1|=5$，$z_2=3+4\mathrm{i}$，且 z_1z_2 是纯虚数，求 z_1.

5. 已知 $z_1=2$，$z_2=2\mathrm{i}$，$|z|=2\sqrt{2}$ 且 $|z-z_1|=|z-z_2|$，求 z.

6. 把下列复数化为三角形式.

(1) $\cos\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$；　(2) $-\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$；　(3) $\sin\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\dfrac{3\pi}{4}$.

7. 已知 $z+\frac{4}{z}$ 为实数，且 $|z-2|=2$，求 z 的值.

8. 计算下列各式的值.

(1) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$；　(2) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$；　(3) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6$.

9. 化简下列各式.

(1) $\frac{\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}$；　(2) $\frac{(\cos 4\theta+\mathrm{i}\sin 4\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)}{(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}$.

10. 将复数 $1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 化为三角形式.

11. 若 $1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个根，求 b，c 的值.

12. 已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，$BC=\frac{1}{3}AC$，点 E 在 AC 上，且 $EC=2AE$. 用复数证明：$\angle CBE+\angle CBA=\frac{3\pi}{4}$.

13. 设 z 是模为 1 的复数，求 $z^2+\frac{1}{z^2}$ 的最小值.

C 组

1. 下列关于方程 $4x^2+mx+1=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 的结论中，正确的有________.

① 方程的两根互为共轭复数；② 如果方程的两根互为共轭复数，则 $m=0$；③ 若 x 为方程的一个虚根，则 $\overline{x}$ 也为方程的根；④ 若 $m<0$，则方程的两根一定都为正数.

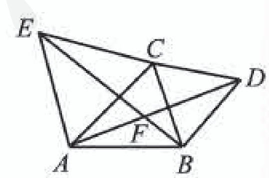
2. 已知复数 z_1，z_2，z_1+z_2 在复平面上对应的点分别为 A，B，C，且 O 为复平面的坐标原点.

(1) 若 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点逆时针旋转 90° 且模变为原来的 2 倍后与向量 $\overrightarrow{OC}$ 重合，求 z_2 的值.

(2) 若 $z_1-z_2=2\mathrm{i}(z_1+z_2)$，试判断四边形 $OACB$ 的形状.

3. 如图，分别以 $\triangle ABC$ 的两边 AC，BC 为边向外作正三角形 $\triangle ACE$ 及 $\triangle BCD$，设 AD，BE 交于 F. 用复数证明：

$$AD=BE \text{ 且 } \angle AFE=60^\circ.$$



（第 3 题）

作为科学语言的数学，具有一般语言文字与艺术所共有的美的特点，即数学在其内容结构上和方法上也都具有自身的某种美，即所谓数学美．数学美的含义是丰富的，如数学概念的简单性、统一性，结构关系的协调性、对称性，数学命题与数学模型的概括性、典型性和普遍性，还有数学中的奇异性，等等，都是数学美的具体内容．

——徐利治

第十一章

立体几何初步

本章导语

我们周围有很多借助立体几何知识形成的物体，如柱形、球形的建筑物，长方体形的包装盒，等等，由此可看出立体几何知识的重要性.

小学时我们就接触过一些立体几何知识．例如，直观认识了长方体、正方体、圆柱，并且学习了它们的体积与表面积的求法；了解了圆锥，知道了求圆锥体积的公式；通过球形的物体直观认识了球；知道观察立体图形时，角度不同，看到的形状可能不同.

初中时我们学习了更多立体几何知识．比如了解了立体图形与平面图形的区别，直观认识了棱柱、棱锥，了解了点、线、面、体以及它们之间的关系，在求扇形面积时还学会了求圆锥侧面积及全面积的方法，学习了立体图形的三视图等.

本章我们将在上述基础上进一步学习立体几何的有关知识．如用集合的观点来理解点、线、面之间的关系，探究常见几何体的结构，了解更多几何体体积的求法，从逻辑的角度论证点、线、面的位置关系等.

11.1 空间几何体

11.1.1 空间几何体与斜二测画法

1. 空间几何体

生活中的物体都占据着空间的一部分. 如果只考虑一个物体占有的空间形状和大小，而不考虑其他因素，则这个空间部分通常可抽象为一个几何体.

情境与问题

图 11-1-1 中的国家游泳中心（又称“水立方”）可以抽象成一个几何体——长方体，你能画出一个长方体吗?

图 11-1-1

除了长方体外，我们以前接触过的几何体还有棱柱、棱锥、圆柱、圆锥、球等.

尝试与发现

观察图 11-1-2 所示的建筑物，将每个建筑物可抽象出的几何体画出来.

（1） （2） （3） （4）

图 11-1-2

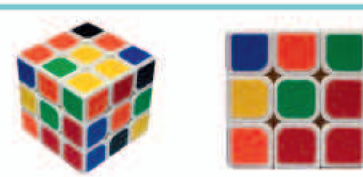
2. 斜二测画法

我们已经知道，三角形、长方形、梯形、圆等几何图形，它们的各部分都在同一平面内，是平面图形；而长方体、正方体、圆柱、圆锥、球等几何图形，它们的各部分不都在同一平面内，是立体图形.

平面图形与立体图形是互相联系的. 一方面，立体图形中有些部分可能是平面图形，如长方体的任何一个面都是长方形，圆柱与圆锥的底面都是圆，等等；另一方面，将立体图形用合适的平面图形表示出来，是人们在日常生活和生产中经常要做的事，例如拍摄照片、画出工件的三视图等.

情境与问题

图 11-1-3(1)(2)是从不同角度拍摄同一个魔方的照片，哪个图更能给人立体感？



（1） （2）

图 11-1-3

从小学和初中的几何课上，我们就已经知道，从不同的方向观察同一个空间图形时，所看到的形状可能不一样.

立体几何中，用来表示空间图形的平面图形，习惯上称为空间图形的直观图. 为了使直观图具有立体感，人们经常使用斜二测画法来作直观图，下面我们结合具体实例来说明其作图过程.

尝试与发现

一个水平放置的长方形，直观图作成怎样才具有立体感？

如图 11-1-4 所示是梯形 $ABCD$，下面我们用斜二测画法来作出这个梯形水平放置时的直观图.

(1) 在梯形 $ABCD$ 上，以 AB 为 x 轴，A 为原点，建立平面直角坐标系，如图 11-1-5 所示.

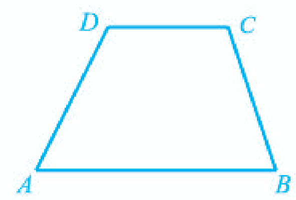


图 11-1-4

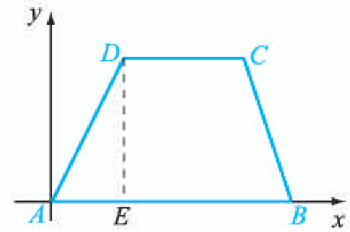


图 11-1-5

画 x'轴和 y'轴，使它们相交于 A'点，而且

$$\angle x'A'y'=45°,$$

如图 11-1-6 所示.

(2) 在图 11-1-6 中的 x'轴上找出点 B'，使得 $A'B'=AB$.

在图 11-1-5 中过 D 点作 AB 的垂线，设垂足为 E，连接 DE. 在图 11-1-6 中的 $A'B'$上找出点 E'，使得 $A'E'=AE$.

在图 11-1-6 中作 $E'D'$平行于 y'轴，而且使 $E'D'=\frac{1}{2}ED$.

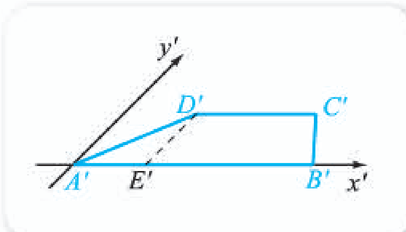


图 11-1-6

在图 11-1-6 中过 D'作 x'轴的平行线 $D'C'$，使得 $D'C'=DC$.

(3) 在图 11-1-6 中连接 $A'D'$，$B'C'$. 擦去作图过程中的辅助线等，最后得到的四边形 $A'B'C'D'$就是梯形 $ABCD$ 的直观图，如图 11-1-7 所示.

一般地，用斜二测画法作水平放置的平面图形的直观图时，步骤如下.

(1) 在平面图形上取互相垂直的 x 轴和 y 轴，作出与之对应的 x'轴和 y'轴，使得它们正方向的夹角为 45°（或 135°）.

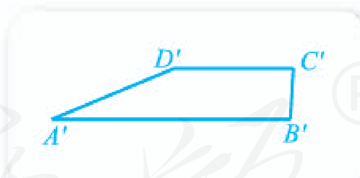


图 11-1-7

(2) 平面图形中与 x 轴平行（或重合）的线段画成与 x'轴平行（或重合）的线段，且长度不变.

平面图形中与 y 轴平行（或重合）的线段画成与 y'轴平行（或重合）的线段，且长度为原来长度的一半.

(3) 连接有关线段，擦去作图过程中的辅助线.

由此可知，用斜二测画法作水平放置的平面图形的直观图时，关键是分别作出其中与 x 轴和 y 轴平行（或重合）的线段.

下面我们来画一个水平放置的长为 4，宽为 3，高为 2 的长方体的直观图.

(1) 首先，用上面的方法作出水平放置的长为 4，宽为 3 的长方形的直观图 $ABCD$（保留坐标轴），如图 11-1-8 所示.

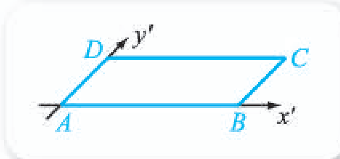


图 11-1-8

(2) 如图 11-1-9 所示，过 A 作 z'轴，使之垂直于 x'轴. 在 z'轴上截取 $AA'=2$.

过 B，C，D 分别作 z' 的平行线 BB'，CC'，DD'，并使

$$BB'=CC'=DD'=2,$$

然后连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$.

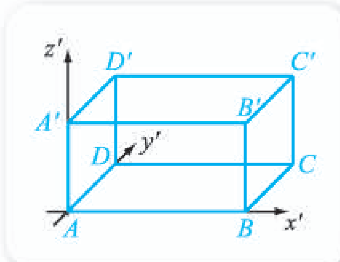


图 11-1-9

(3) 擦去作图过程中的辅助线，并把被面遮挡住的线段 AD，DC，DD'改成虚线（或擦除）. 由此得到的就是所求长方体的直观图，如图 11-1-10 所示.

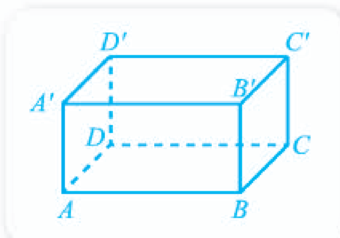


图 11-1-10

一般地，用斜二测画法作立体图形直观图的步骤如下.

(1) 在立体图形中取水平平面，在其中取互相垂直的 x 轴与 y 轴，作出水平平面上图形的直观图（保留 x'轴与 y'轴）.

(2) 在立体图形中，过 x 轴与 y 轴的交点取 z 轴，并使 z 轴垂直于 x 轴与 y 轴. 过 x'轴与 y'轴的交点作 z 轴对应的 z'轴，且 z'轴垂直于 x'轴.

图形中与 z 轴平行（或重合）的线段画成与 z'轴平行（或重合）的线段，且长度不变.

连接有关线段.

(3) 擦去有关辅助线，并把被面遮挡住的线段改成虚线（或擦除）.

需要注意的是，立体几何中的直观图，不都是用斜二测画法作出的. 例如，水平放置的圆，其直观图一般用“正等测画法”① 画成椭圆. 因此，圆柱与球的直观图分别如图 11-1-11 的(1)与(2)所示.

想一想

有人将斜二测画法总结为：“平行依旧垂改斜，横等纵半竖不变；眼见为实遮为虚，空间观感好体现.”你能说出其中的确切含义吗?

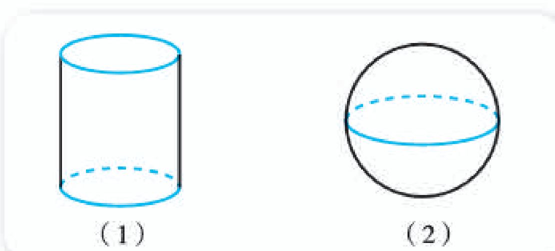


图 11-1-11

① 该画法的具体规定超出了我们这里的要求，感兴趣的读者可自行查找文献了解.

3. 用信息技术观察几何体

利用 GeoGebra 软件的"3D 绘图"可以方便地作出立体图形，而且可以旋转视图（旋转过程中，被遮挡的线将自动变为虚线），从而有利于我们从不同的角度观察同一个几何体，认识几何体的结构特征.

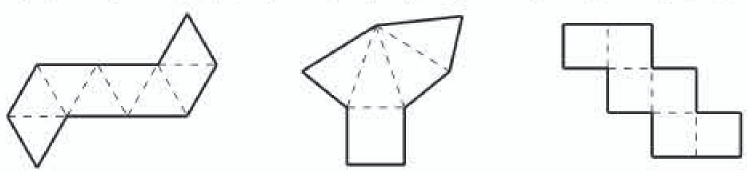
例如，图 11-1-12(1)(2)所示即为从不同的角度观察长方体的屏幕截图，大家可结合课件"长方体.ggb"操作、观察.

（1）　　　　（2）

图 11-1-12

练习A

❶ 如图所示分别为三个几何体的表面展开图，根据所给平面图形制作几何体.



（1）　　　　（2）　　　　（3）

（第 1 题）

❷ 用斜二测画法分别作出水平放置的正方形与等边三角形的直观图.

❸ 用斜二测画法作出正方体的直观图.

❹ 用斜二测画法作水平放置的平面图形的直观图时，判断下列命题的真假.

(1) 三角形的直观图还是三角形；

(2) 平行四边形的直观图还是平行四边形；

(3) 正方形的直观图还是正方形；

(4) 菱形的直观图还是菱形.

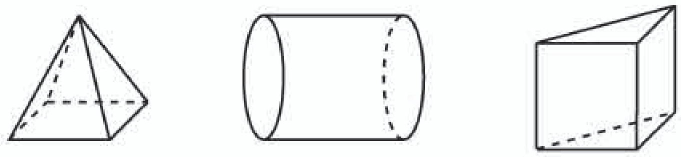
❺ 参考图 11-1-11，作出圆锥的直观图.

❻ 用如图所示的 GeoGebra 菜单，作出常见的空间几何体，并旋转视图，从不同的视角观察.

（第 6 题）

练习B

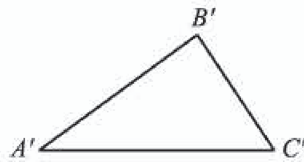
1. 分别写出下列直观图所对应的几何体名称.



(1)　　(2)　　(3)

(第 1 题)

2. 用斜二测画法作出水平放置的正五边形的直观图.
3. 如图所示$\triangle A'B'C'$是用斜二测画法作出的水平放置的$\triangle ABC$的直观图，已知M为AB的中点，设M在$A'B'$上对应的点为M'，在图上标出点M'的位置，并求$A'M'：M'B'$的值.



(第 3 题)

4. 用斜二测画法作出水平放置的圆的直观图.

11.1.2 构成空间几何体的基本元素

1. 空间中的点、线、面

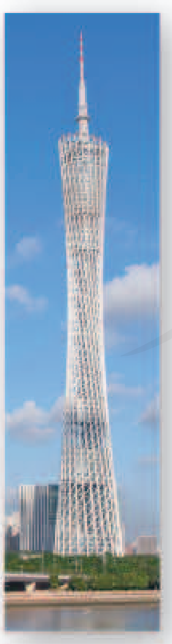


图 11-1-13

我们已经知道，长方体、圆柱、圆锥、球等都是几何体（几何体也简称为“体”），包围着几何体的是“面”，面与面相交给人“线”的形象，线与线相交给人“点”的形象. 这就是说，可以将点、线、面看作构成空间几何体的基本元素.

另外，点运动的轨迹可以是线，线运动的轨迹可以是面，面运动的轨迹可以是体. 例如，用笔作画时，笔尖运动能描出线的形象；图 11-1-13 所示塔的侧面，可以看成一条线段运动的结果；水平放置的长方体，可以看成一个底面沿垂直方向运动的结果，如图 11-1-14 所示.

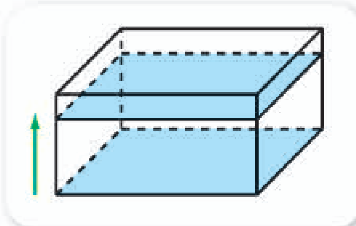


图 11-1-14

尝试与发现

用身边的物体演示图 11-1-13 中塔的侧面的形成过程，以及图 11-1-14 所示的长方体的形成过程，并思考：几何体中点、线、面之间的关系，能否用数学符号来表示？

立体几何中，我们仍用大写英文字母来表示点. 此时，构成空间几何体的基本元素可以借助点来表示.

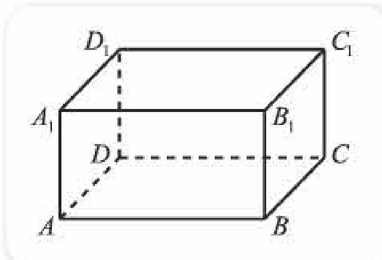


图 11-1-15

例如，如图 11-1-15 所示的长方体中，8 个顶点可表示为

A，B，C，D，A_1，B_1，C_1，D_1；

12 条棱可以表示为

$$AB，BC，CD，DA，AA_1，BB_1，$$

1 ______________________；

6 个面可以表示为

$$ABCD，ABB_1A_1，BCC_1B_1，$$

2 ______________________；

而长方体可以表示为 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$.

2. 空间中点与直线、直线与直线的位置关系

空间中的一条直线可看成这条直线上所有点组成的集合，从而也就能用集合符号来表示空间中的点与直线、直线与直线的关系.

需注意的是，同平面中一样，空间中的直线是无限延伸的，而且也可用该直线上的两个点来表示.

例如，图 11-1-16 所示的长方体中，顶点 A 与 B 确定的直线可记作直线 AB. 为了简单起见，一般用小写英文字母表示直线. 因此，直线 AB 可简记为 l. 此时，A，B 都是 l 上的点，且 A_1，B_1 都不是 l 上的点，这可用符号简写为

$A\in l$，B 3 ______ l，

$A_1\notin l$，B_1 4 ______ l.

另外，如果记图 11-1-16 中顶点 B，B_1 确定的直线为 m，顶点 C，C_1 确定的直线为 k，则有 m 与 l 相交（即有公共点），k 与 l 不相交（即没有公共点），这可分别表示为

$$m\cap l\neq\varnothing，k\cap l=\varnothing.$$

因为 m 与 l 相交于点 B，所以 $m\cap l=\{B\}$，一般简写为

$$m\cap l=B.$$

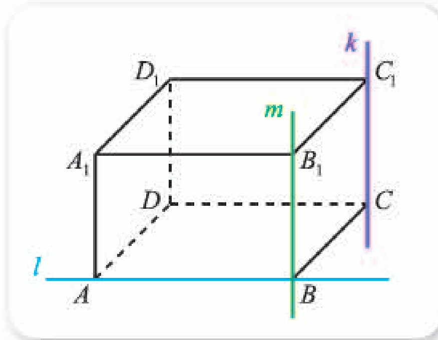


图 11-1-16

尝试与发现

同一平面内的两条直线，如果不相交，就一定平行. 这一结论可以推广到空间中的两条直线吗？

结合图 11-1-16，总结空间中两条直线①的位置关系.

一般地，空间中的两条直线，可以既不平行，也不相交，此时称这两条直线**异面**. 图 11-1-16 中，直线 l 与 k 异面.

这就是说，如果 a，b 是空间中的两条直线，则

$$a\cap b\neq\varnothing 与 a\cap b=\varnothing$$

有且只有一种情况成立. 而且，当 $a\cap b=\varnothing$ 时，a 与 b 要么平行（记作 $a/\!/b$），要么异面.

3. 空间中直线与平面、平面与平面的位置关系

与直线类似，空间中的一个平面也可看成这个平面上所有点组成的集合，从而也就能用集合符号来表示空间中的点、线、面之间的关系.

同空间中的直线类似，空间中的平面也是可无限延伸的，而且能用该平面内不共线的 3 个或 3 个以上的点来表示.

例如，图 11-1-17 所示的长方体中，长方形 $ABCD$ 所在的平面可记作面 ABC，也可以记作面 ABD 或面 $ABCD$. 习惯上，用小写希腊字母 α，β，γ，…表示平面. 因此，面 $ABCD$ 可以记为 α. 此时，A 是平面 α 内的点，A_1 不是平面 α 内的点，这可用符号简写为

$$A\in\alpha，A_1\notin\alpha.$$

① 立体几何中，谈到两个点、两条直线、两个平面时，如不特别声明，均默认为是不重合的.

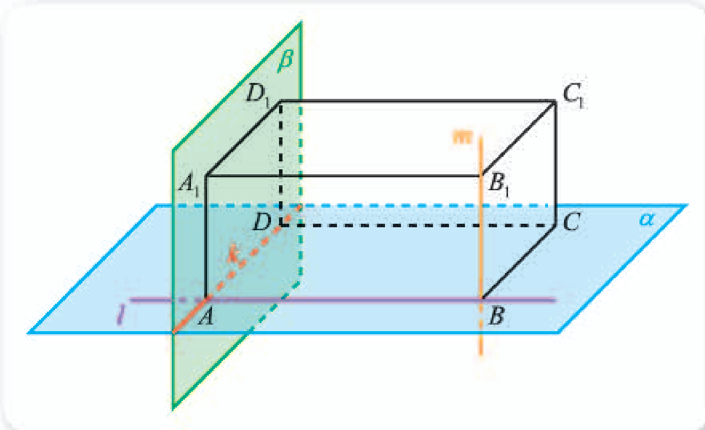


图 11-1-17

不难看出，图 11-1-17 中，点 A，B 确定的直线 l 上的所有点都在平面 α 内，这称为**直线 l 在平面 α 内**（或**平面 α 过直线 l**），记作

$$l \subset \alpha;$$

点 B，B_1 确定的直线 m 上至少有一个点不在平面 α 内，这称为**直线 m 在平面 α 外**，记作

$$m \not\subset \alpha.$$

但要注意的是，图 11-1-17 中的 m 与 α 有且只有一个公共点（称为**直线 m 与平面 α 相交**），即 $m \cap \alpha = \{B\}$，一般简写为

$$m \cap \alpha = B.$$

另外，如果记图 11-1-17 中长方形 ADD_1A_1 所在的平面为 β，点 A，D 确定的直线为 k，则 α 与 β 有公共点，这称为**平面 α 与平面 β 相交**，记作

$$\alpha \cap \beta \neq \varnothing.$$

更进一步可以看出，一个点是 α 与 β 的公共点，当且仅当这个点在直线 k 上，这可记作

$$\alpha \cap \beta = k.$$

尝试与发现

结合图 11-1-17，总结空间中直线与平面的位置关系，以及平面与平面的位置关系.

一般地，如果 l 是空间中的一条直线，α 是空间中的一个平面，则

$$l \cap \alpha \neq \varnothing \text{与} l \cap \alpha = \varnothing$$

有且只有一种情况成立. 而且，当 $l \cap \alpha \neq \varnothing$ 时，要么 $l \subset \alpha$，要么 l 与 α 只有一个公共点；当 $l \cap \alpha = \varnothing$ 时，称**直线 l 与平面 α 平行**，记作

$$l /\!/ \alpha.$$

如果 α 与 β 是空间中的两个平面，则

$$\alpha\cap\beta\neq\varnothing与\alpha\cap\beta=\varnothing$$

有且只有一种情况成立．而且，当 $\alpha\cap\beta\neq\varnothing$ 时，α 与 β 的公共点组成一条直线；当 $\alpha\cap\beta=\varnothing$ 时，称**平面 α 与平面 β 平行**，记作

$$\alpha /\!/ \beta.$$

4. 直线与平面垂直

尝试与发现

观察图 11-1-18 中的长方体.

(1) 判断 A_1A 与 AB 是否垂直，A_1A 与 AD 是否垂直，并说明理由；

(2) 判断 A_1A 与 AC 是否垂直；

(3) 若直线 l 在平面 $ABCD$ 内，且 l 过点 A，判断 A_1A 与 l 是否垂直.

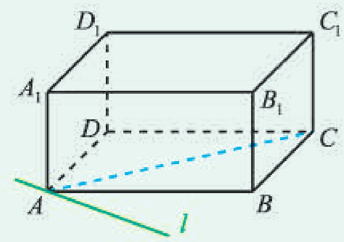


图 11-1-18

由观察可知，图 11-1-18 中，不管直线 l 的具体位置如何，只要 $A\in l$，$l\subset$ 面 $ABCD$，则一定有 $A_1A\perp l$.

一般地，如果直线 l 与平面 α 相交于一点 A，且对平面 α 内任意一条过点 A 的直线 m，都有 $l\perp m$，则称**直线 l 与平面 α 垂直**（或 **l 是平面 α 的一条垂线**，**α 是直线 l 的一个垂面**），记作

$$l\perp\alpha,$$

其中点 A 称为**垂足**.

因此，图 11-1-18 所示的长方体中，有

$$A_1A\perp面\ ABCD.$$

类似地，有 $A_1A\perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1B_1\perp$ 面 BCC_1B_1，等等.

另外，由长方体可以看出，给定空间中一个平面 α 及一个点 A，过 A 可以作而且只可以作平面 α 的一条垂线．如果记垂足为 B，则称 B 为 A 在平面 α 内的**射影**（也称为**投影**），线段 AB 为平面 α 的**垂线段**，AB 的长为**点 A 到平面 α 的距离**.

特别地，当直线与平面平行时，直线上任意一点到平面的距离称为这条**直线到这个平面的距离**；当平面与平面平行时，一个平面上任意一点到另一个平面的距离称为这**两平行平面之间的距离**.

因此，图 11-1-18 所示的长方体中，点 A_1 到面 $ABCD$ 的距离等于线段 A_1A 的长，直线 A_1B_1 到面 $ABCD$ 的距离等于线段 A_1A 的长，面 $A_1B_1C_1D_1$ 与面 $ABCD$ 之间的距离等于 A_1A 的长.

5. 用信息技术作直线与平面

利用 GeoGebra 软件可以方便地作出直线与平面，而且同样可以旋转视图，从而方便观察直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系.

例如，图 11-1-19 所示是两个平行平面，请结合课件“平行平面 . ggb”观察；图 11-1-20 所示是直线与平面垂直，请结合课件“直线与平面垂直 . ggb”观察.

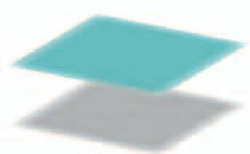


图 11-1-19

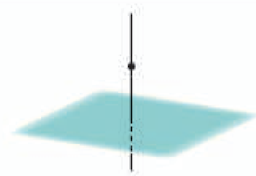


图 11-1-20

练习A

1. 举出点运动的轨迹是线、线运动的轨迹是面、面运动的轨迹是体的实例.
2. 从生活中找出一个由直线运动形成曲面的例子，并动手演示.
3. 利用教室及教室内的物体，举出 3 对异面直线的例子.
4. 如果 a，b 是空间中的两条直线，判断下列命题的真假.
   (1) a 与 b 要么相交，要么不相交；
   (2) a 与 b 要么相交，要么平行；
   (3) 当 a 与 b 不相交时，a 与 b 要么平行，要么异面.
5. 如果 l 是空间中的一条直线，α 是空间中的一个平面，判断下列命题的真假.
   (1) l 与 α 要么相交，要么不相交；　(2) 要么 l 在 α 内，要么 l 在 α 外；
   (3) 要么 l 与 α 平行，要么 l 在 α 内.
6. 如果 α 与 β 是空间中的两个平面，判断下列命题的真假.
   (1) α 与 β 要么相交，要么不相交；　(2) α 与 β 要么平行，要么相交.

练习B

1. 用符号表示下列点、线、面的关系.
   (1) 点 A 在直线 a 上，但不在直线 b 上；
   (2) 点 P 在平面 α 内，但不在平面 β 内；
   (3) 点 M 在直线 l 上，l 在平面 α 内.
2. 用符号表示下列点、线、面的关系.
   (1) 直线 a 与直线 b 平行；　(2) 直线 l 与平面 α 平行；
   (3) 平面 α 与平面 β 平行；　(4) 直线 l 与平面 β 垂直.

3 用符号表示下列点、线、面的关系.

(1) 直线 a 与直线 b 相交于点 M；

(2) 直线 a 与平面 α 相交于点 N；

(3) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l.

4 在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，写出所有

(1) 与直线 AB 平行的直线，并用“//”表示；

(2) 与直线 AA_1 异面的直线；

(3) 与直线 AB 平行的平面，并用合适的符号表示；

(4) 与平面 ADD_1A_1 平行的平面，并用合适的符号表示；

(5) 与直线 AD 垂直的平面，并用合适的符号表示.

5 已知 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，且 $AB=4$，$AD=3$，$AA_1=2$.

(1) 写出点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离；

(2) 写出直线 AB 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离；

(3) 写出平面 ADD_1A_1 与平面 BCC_1B_1 之间的距离.

6 如果 $A\in l$，$l\subset\alpha$，则是否一定有 $A\in\alpha$?

1 CC_1，DD_1，A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1

2 CDD_1C_1，DAA_1D_1，$A_1B_1C_1D_1$ 3 $\in$ 4 $\notin$

11.1.3 多面体与棱柱

1. 多面体

尝试与发现

生活中的很多物体都可以抽象成多面体，如图 11-1-21 所示. 观察多面体的结构，总结出一个几何体是多面体的充要条件.

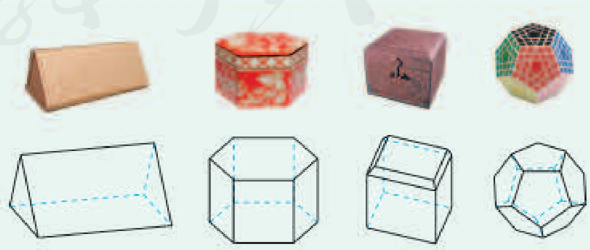


图 11-1-21

由图 11-1-21 可以看出，多面体的每个面都是平面多边形. 一般地，由若干个平面多边形所围成的封闭几何体称为**多面体**. 例如，我们初中学习过

的长方体、棱锥等都是多面体.

同长方体类似，围成多面体的各个多边形称为多面体的**面**，相邻两个面的公共边称为多面体的**棱**，棱与棱的公共点称为多面体的**顶点**.

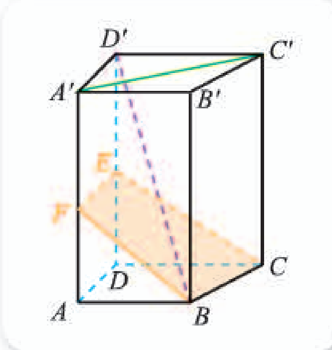


图 11-1-22

把多面体的任意一个面延展为平面，如果其余的各面都在这个平面的同一侧，则称这样的多面体为凸多面体．本书中说到的多面体，如不特别声明，均指凸多面体.

多面体至少有 4 个面．多面体可以按照围成它的面的个数来命名．例如，图 11-1-21 中的 4 个多面体可分别称为五面体、八面体、十面体、十二面体.

图 11-1-22 所示的一个六面体中，有 8 个顶点，12 条棱.

一个多面体中，连接同一面上两个顶点的线段，如果不是多面体的棱，就称其为多面体的**面对角线**；连接不在同一面上两个顶点的线段称为多面体的**体对角线**．图 11-1-22 所示的多面体中，$A'C'$是一条面对角线，而 BD'是一条体对角线.

一个几何体和一个平面相交所得到的平面图形（包含它的内部），称为这个几何体的一个**截面**．图 11-1-22 中画出了多面体的一个截面 $BCEF$.

多面体所有面的面积之和称为多面体的表面积（或全面积）.

例 1 如图 11-1-23 所示的多面体，其各个面都是边长为 2 的等边三角形.

(1) 写出 AB 所在直线与$\triangle EBC$ 所在平面的位置关系，并用符号表示；

(2) 求这个多面体的表面积.

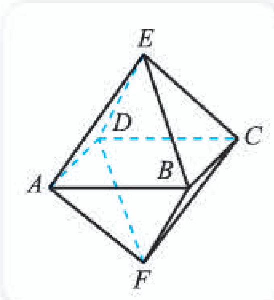


图 11-1-23

解 (1) 不难看出，AB 所在直线与$\triangle EBC$ 所在平面有且只有一个公共点，即

$$AB\cap 面\ EBC=B.$$

(2) 一个边长为 2 的等边三角形，其高为 1 ________，面积为 2 ________，又因为给定多面体是一个八面体，因此表面积为 3 ________.

如不特意声明，以后将不再区分一个多面体的棱和这条棱所在的直线，也不再区分多面体的一个面和这个面所在的平面．在此前提下，例 1 的(1)可简单地说成“AB 与面 EBC 的关系”.

探索与研究

各个面都是全等的正多边形且过各顶点的棱数都相等的多面体一般称为正多面体．已知正多面体顶点数 V、面数 F、棱数 E 之间满足关系

$$V+F-E=2,$$

根据这一结论探究共有多少种不同的正多面体.

2. 棱柱

尝试与发现

如图 11-1-24 是一些棱柱. 观察棱柱的结构，总结出一个几何体是棱柱的充要条件.

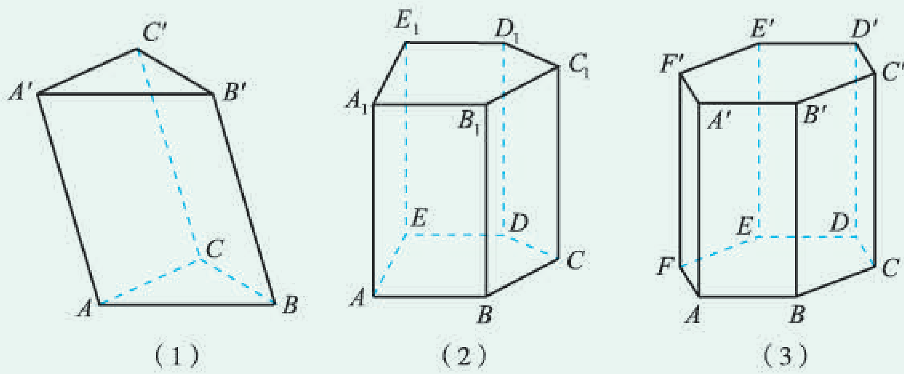


图 11-1-24

图 11-1-24 所示的多面体，都有两个面互相平行，且该多面体的顶点都在这两个面上，其余各面都是平行四边形，这样的多面体称为**棱柱**.

棱柱的两个互相平行的面称为棱柱的**底面**（底面水平放置时，分别称为上底面、下底面），其他各面称为棱柱的**侧面**，两个侧面的公共边称为棱柱的**侧棱**.

棱柱可以用底面上的顶点来表示. 例如，图 11-1-24(1)所示的棱柱可表示为棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$，图 11-1-24(2)所示的棱柱可表示为棱柱 AC_1.

过棱柱一个底面上的任意一个顶点，作另一个底面的垂线所得到的线段（或它的长度）称为棱柱的**高**. 棱柱所有侧面的面积之和称为棱柱的侧面积.

如果棱柱的侧棱垂直于底面，则可知棱柱所有的侧面都是长方形，这样的棱柱称为**直棱柱**（不是直棱柱的棱柱称为**斜棱柱**）. 特别地，底面是正多边形的直棱柱称为**正棱柱**. 图 11-1-24 中，(1)是斜棱柱，(2)(3)都是直棱柱，且(3)是正棱柱.

尝试与发现

一个棱柱是否可以看成一个底面的所有点沿同一个方向移动相同的距离所形成的几何体？由此给出棱柱的一种分类方法.

棱柱可以按底面的形状分类，例如底面是三角形、四边形、五边形的棱柱，可分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱.

底面是平行四边形的棱柱也称为**平行六面体**. 侧棱与底面垂直的平行六面体称为**直平行六面体**. 不难看出，底面是矩形的直平行六面体就是以前我

们学过的长方体，而棱长都相等的长方体就是正方体．例如，图 11-1-25 中，除(1)外，其他的都是平行六面体，且(3)(4)(5)都是直平行六面体，(4)为长方体，(5)为正方体.

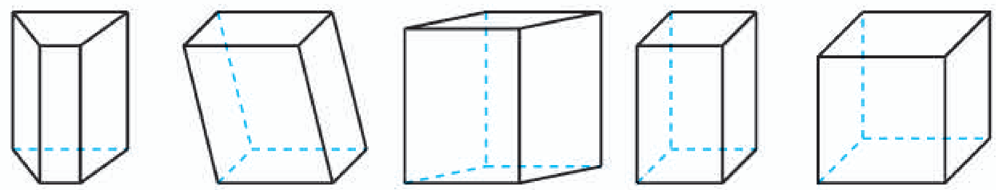


图 11-1-25

不难看出，在平行六面体中，相对的面都是互相平行的.

例 2 如图 11-1-26 所示长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，已知 $AB=a$，$AD=b$，$AA'=c$，求长方体的体对角线 AC' 的长.

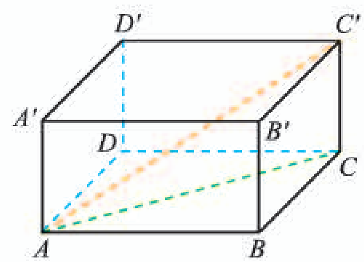


图 11-1-26

解 连接 AC，AC'．因为是长方体，所以

$$AB\perp BC,\ AC\perp CC'.$$

在 Rt△ABC 中，可知

$$AC^2=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}.$$

在 Rt△ACC' 中，可知

$$AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad}.$$

例 3 如图 11-1-27 是棱长都为 1 的直平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，且 $\angle DAB=60°$.

(1) 写出直线 AB 与直线 CC_1，直线 AC_1 与面 $ABCD$，面 $ABCD$ 与面 $A_1B_1C_1D_1$ 之间的位置关系；

(2) 求这个直平行六面体的表面积；

(3) 求线段 AC_1 的长.

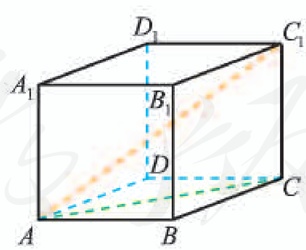


图 11-1-27

解 (1) 直线 AB 与直线 CC_1 异面，直线 $AC_1\cap$ 面 $ABCD=A$，面 $ABCD$//面 $A_1B_1C_1D_1$.

(2) 底面 $ABCD$ 是如图 11-1-28 所示的菱形，由已知可得

$$BD=1,\ AC=\sqrt{3},$$

因此该底面的面积为$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为每个侧面的面积为 1，所以表面积为$\sqrt{3}+4$.

(3) 因为是直平行六面体，所以 $CC_1\perp$ 面 $ABCD$，从而 $CC_1\perp AC$.

在 $Rt\triangle ACC_1$ 中，由 $AC=\sqrt{3}$，$CC_1=1$ 可知 $AC_1=2$.

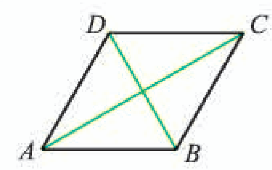


图 11-1-28

3. 用信息技术观察棱柱的表面积展开图与截面

用 GeoGebra 软件中的“展开图”命令可以作出棱柱的展开图，如图 11-1-29 所示．请结合课件“棱柱的表面积展开．ggb”观察．

在 GeoGebra 中，还可以作出平面截棱柱得到的截面，如图 11-1-30 所示．请结合课件“棱柱截面．ggb”观察．

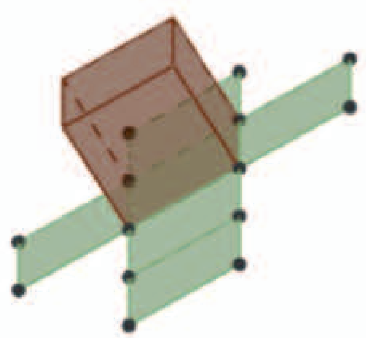


图 11-1-29

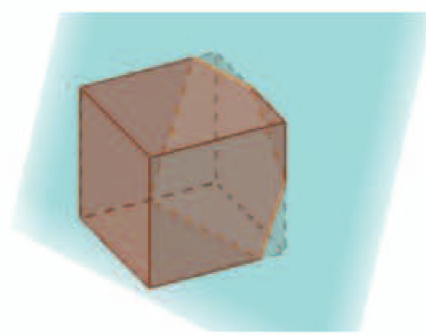
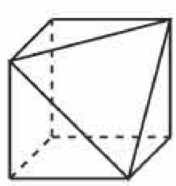
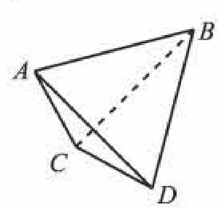


图 11-1-30

练习A

1. 圆柱是不是多面体？为什么？
2. 指出图中所示多面体的顶点数、棱数、面数．


（第 2 题）



（第 3 题）

3. 用符号表示出图中所示多面体的所有顶点、棱、面．

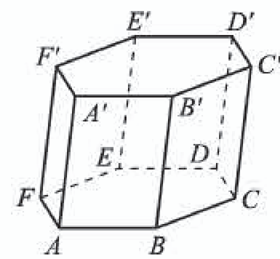
④ 记 A 为所有多面体组成的集合，B 为所有棱柱组成的集合，C 为所有斜棱柱组成的集合，D 为所有正棱柱组成的集合，写出集合 A，B，C，D 之间的关系.

练习B

① 把直棱柱沿任意一条侧棱剪开，然后在一个平面上将所有侧面展开，得到的是一个什么平面图形？

② 已知一个四面体的各个面都是边长为 2 的等边三角形，求这个四面体的表面积.

③ 如图所示的多面体中，哪些棱所在的直线与 AB 所在的直线异面？哪些面所在的平面过 AB 所在的直线？哪些面所在的平面与 AB 所在的直线相交？



（第 3 题）

④ 判断下列命题的真假.

(1) 侧棱垂直于底面的棱柱一定是直棱柱；

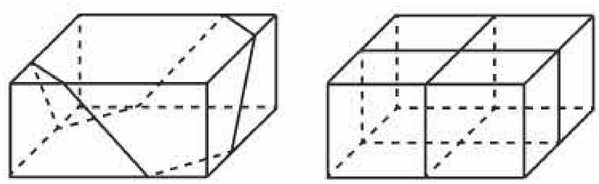
(2) 底面是正多边形的棱柱一定是正棱柱；

(3) 棱柱的侧面都是平行四边形；

(4) 斜棱柱的侧面都不可能是矩形.

⑤ 是否存在既没有面对角线也没有体对角线的多面体？如果存在，请举出实例；如果不存在，请说明理由.

⑥ 春节期间，佳怡准备去探望奶奶，她到商店买了一盒点心. 为了美观起见，售货员对点心盒做了一个捆扎（如图(1)所示），并在角上配了一个花结. 售货员说，这样的捆扎不仅漂亮，而且比一般的十字捆扎（如图(2)所示）包装更节省彩绳. 你同意这种说法吗？请给出你的理由.（注：长方体点心盒的高小于长、宽.）

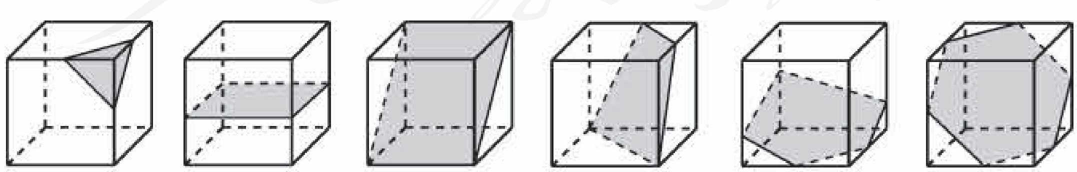


(1)　　(2)

（第 6 题）

计算机上的练习

参考下图，用 GeoGebra 作出正方体，然后作出空间中的平面，探索正方体截面的形状.



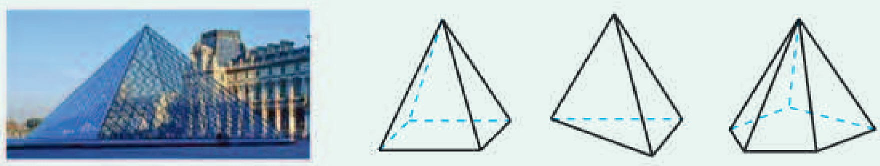
1 $\sqrt{3}$　　2 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$　　3 $8\sqrt{3}$　　4 a^2+b^2　　5 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

11.1.4 棱锥与棱台

1. 棱锥

尝试与发现

从生活中的一些物体可以抽象出棱锥，如图 11-1-31(2)(3)(4)都是棱锥. 观察棱锥的结构，总结出一个几何体是棱锥的充要条件.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 11-1-31

如果一个多面体有一个面是多边形，且其余各面都是有一个公共顶点的三角形，则称这个多面体为**棱锥**.

棱锥中，是多边形的那个面称为棱锥的**底面**，有公共顶点的各三角形称为棱锥的**侧面**，各侧面的公共顶点称为棱锥的**顶点**，相邻两侧面的公共边称为棱锥的**侧棱**.

棱锥可以按底面的形状分类，例如底面是三角形、四边形、五边形的棱锥，可分别称为三棱锥、四棱锥、五棱锥. 因此，图 11-1-31 中，(2)是一个四棱锥，(3)是一个 1 ______ 棱锥，(4)是一个 2 ______ 棱锥.

棱锥可以用顶点与底面各顶点的字母来表示. 例如，如图 11-1-32 所示的是一个四棱锥，这个四棱锥可以记作棱锥 P-$ABCD$ 或棱锥 P-AC.

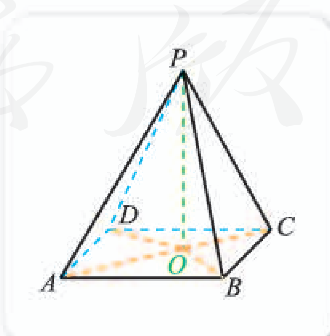


图 11-1-32

过棱锥的顶点作棱锥底面的垂线，所得到的线段（或它的长度）称为棱锥的**高**. 棱锥所有侧面的面积之和称为棱锥的侧面积.

图 11-1-32 中，PO 为棱锥 P-$ABCD$ 的高，因此

$$PO\perp \text{面 } ABCD,$$

从而可知

$$\angle POA=\angle POB=\angle POC=\angle POD=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_.$$

如果棱锥的底面是正多边形，且棱锥的顶点与底面中心的连线垂直

于底面，则称这个棱锥为**正棱锥**. 可以看出，正棱锥的侧面都全等，而且都是等腰三角形，这些等腰三角形底边上的高也都相等，称为棱锥的**斜高**.

例 1 如图 11-1-33 是底面边长为 1 且侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正六棱锥 $P\text{-}ABCDEF$.

(1) 写出直线 PA 与直线 CD，直线 PA 与面 $ABCDEF$ 之间的关系；

(2) 求棱锥的高与斜高；

(3) 求棱锥的侧面积.

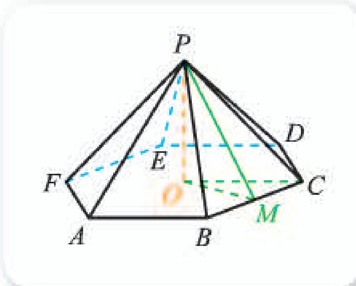


图 11-1-33

解 (1) 直线 PA 与直线 CD 异面，直线 $PA\cap$面 $ABCDEF=A$.

(2) 作出棱锥的高 PO，因为是正六棱锥，所以 O 是底面的中心，连接 OC，可知 $OC=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle POC$ 中，可知

$$PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\boxed{4}\_\_\_\_\_.$$

设 BC 的中点为 M，由 $\triangle PBC$ 是等腰三角形可知，$PM\perp MC$，因此 PM 是斜高，从而

$$PM=\sqrt{PC^2-MC^2}=\boxed{5}\_\_\_\_\_.$$

(3) 因为 $\triangle PBC$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\times BC\times PM=\boxed{6}\_\_\_\_\_,$$

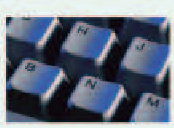
所以棱锥的侧面积为 $\boxed{7}$________.

例 1 的(2)还有其他解法，请大家在考察 $\triangle POM$ 形状的基础上自行尝试.

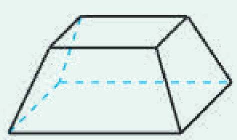
2. 棱台

尝试与发现

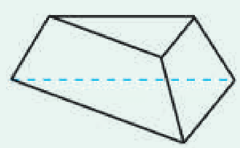
从生活中的一些物体可以抽象出棱台，如图 11-1-34(2)(3)所示都是棱台，观察棱台的结构，总结出一个几何体是棱台的充要条件.



(1)



(2)



(3)

图 11-1-34

一般地，用平行于棱锥底面的平面去截棱锥，所得截面与底面间的多面体称为**棱台**．原棱锥的底面与截面分别称为棱台的**下底面**与**上底面**，其余各面称为棱台的**侧面**，相邻两侧面的公共边称为棱台的**侧棱**．棱台可用上底面与下底面的顶点表示．

例如，如图 11-1-35 所示的棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，可以看成是从棱锥 $P\text{-}ABCD$ 上截去棱锥 $P\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 得到的．

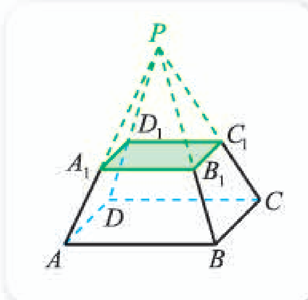


图 11-1-35

同棱柱一样，过棱台一个底面上的任意一个顶点，作另一个底面的垂线所得到的线段（或它的长度）称为棱台的**高**．棱台所有侧面的面积之和称为棱台的侧面积．

棱台可以按底面的形状分类．例如，图 11-1-34(2)是一个四棱台，(3)是一个三棱台．

由正棱锥截得的棱台称为**正棱台**．不难看出，正棱台上、下底面都是正多边形，两者中心的连线是棱台的**高**；而且，正棱台的侧面都全等，且都是等腰梯形，这些等腰梯形的高也都相等，称为棱台的**斜高**．

例 2 如图 11-1-36 所示是一个正三棱台，而且下底面边长为 2，上底面边长和侧棱长都为 1．O 与 O' 分别是下底面与上底面的中心．

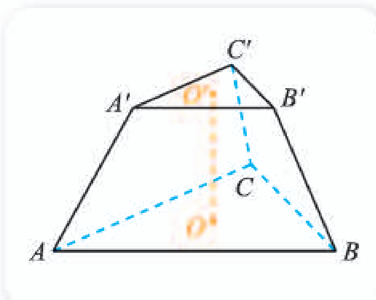


图 11-1-36

（1）求棱台的斜高；

（2）求棱台的高．

解 （1）因为是正三棱台，所以侧面都是全等的等腰梯形．

如图 11-1-37 所示，在梯形 $ACC'A'$ 中，分别过 A'，C' 作 AC 的垂线 $A'E$ 与 $C'F$，则由 $AC=2$，$AA'=A'C'=C'C=1$ 可知 $AE=FC=\dfrac{1}{2}$，从而

$$A'E=C'F=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即斜高为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

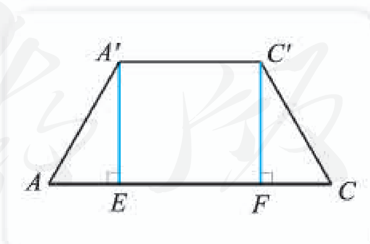


图 11-1-37

（2）根据 O 与 O' 分别是下底面与上底面的中心，以及下底面边长和上底面边长分别为 2 和 1，可以算出

$$BO=2B'O'=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

假设正三棱台 $A'B'C'\text{-}ABC$ 是由正棱锥 $V\text{-}ABC$ 截去正棱锥 $V\text{-}A'B'C'$ 得到的，则由已知可得 VO 是棱锥 $V\text{-}ABC$ 的高，VO' 是棱锥 $V\text{-}A'B'C'$ 的

高，$O'O$ 是所求棱台的高.

因此$\triangle VBO$ 是一个直角三角形，画出这个三角形，如图 11-1-38 所示，则 $B'O'$是$\triangle VBO$ 的中位线.

因为棱台的棱长为 1，所以 $BB'=1$，$VB=2$，从而

$$VO=\sqrt{VB^2-BO^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

因此

$$O'O=\frac{1}{2}VO=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

因此棱台的高为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

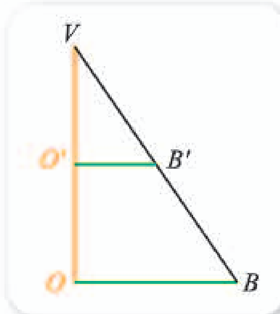


图 11-1-38

3. 用信息技术观察棱锥、棱台的结构与截面

用 GeoGebra 软件同样可以观察棱锥、棱台的结构与截面情况. 如图 11-1-39 所示是棱台的一个截面，请结合课件“棱台的截面 . ggb”观察.

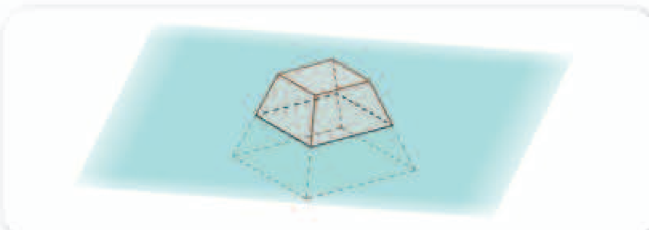


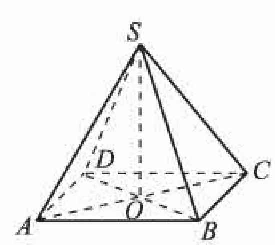
图 11-1-39

练习A

1. 设计一个平面图形，使它能够围成一个所有面都是等边三角形的正三棱锥.
2. 写出棱锥中任意两个侧面的位置关系.
3. 写出棱锥中任意一条侧棱与底面的位置关系.
4. 写出棱台中上底面与下底面的位置关系.
5. 写出棱台中任意两条侧棱的位置关系.

练习B

1. 四棱锥中，与一条侧棱异面的棱有几条?
2. 如图，已知四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，SO 是四棱锥的高，以点 S，O 以及 A，B，C，D 中任意一点为顶点的三角形是否都是直角三角形?



（第 2 题）

3. 已知正四棱锥 $V\text{-}ABCD$ 的底面面积为 16，侧棱长为 $2\sqrt{11}$，求这个棱锥的斜高与高.

4. 一个三棱台的上、下底面面积之比为 $4:9$，若棱台的高是 4 cm，求截得这个棱台的棱锥的高.

5. 设正三棱台的上底面边长为 2 cm，下底面边长以及侧棱长均为 5 cm，求这个棱台的高.

1 三　2 五　3 90°　4 1　5 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　6 $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　7 $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

11.1.5 旋转体

1. 圆柱、圆锥、圆台

尝试与发现

从生活中的一些物体可以抽象出圆柱、圆锥、圆台，如图 11-1-40 所示. 观察它们的结构，总结出形成圆柱、圆锥、圆台的方式.

图 11-1-40

圆柱可看成以矩形的一边所在直线为旋转轴，将矩形旋转一周而形成的曲面所围成的几何体，如图 11-1-41(1)所示；圆锥可看成以直角三角形一直角边所在直线为旋转轴，将直角三角形旋转一周而形成的曲面所围成的几何体，如图 11-1-41(2)所示；圆台可看成以直角梯形垂直于底边的腰所在直线

为旋转轴，将直角梯形旋转一周而形成的曲面所围成的几何体，如图11-1-41(3)所示.

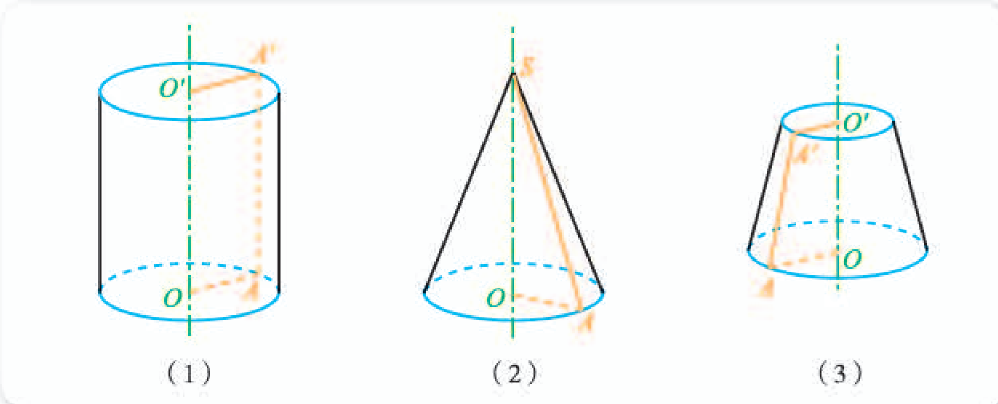


图 11-1-41

用类似上述圆柱、圆锥、圆台的形成方式构成的几何体都是**旋转体**，其中，旋转轴称为旋转体的**轴**，在轴上的边（或它的长度）称为旋转体的**高**，垂直于轴的边旋转而成的圆面称为旋转体的**底面**，不垂直于轴的边旋转而成的曲面称为旋转体的**侧面**. 而且，无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都称为**母线**. 图 11-1-41 中，直线 OO' 与 SO 是轴，线段 OO' 与 SO 是高，线段 $A'A$ 与 SA 是母线.

在旋转体中，通过轴的平面所得到的截面通常简称为**轴截面**. 由圆柱、圆锥、圆台的形成方式可以看出，三者的轴截面分别是矩形、等腰三角形、等腰梯形.

尝试与发现

圆台是否可以看成用平面截圆锥得到的几何体?

显然，圆台可以看成平行于圆锥底面的平面截圆锥所得到的几何体.

例 1 写出圆台中任意两条母线的位置关系，任意一条母线与底面的位置关系，以及两个底面的位置关系.

解 圆台中任意两条母线都相交，任意一条母线与底面都相交，两个底面相互平行.

旋转体侧面的面积称为旋转体的侧面积，侧面积与底面积之和称为旋转体的表面积（或全面积）.

尝试与发现

为了求圆柱、圆锥、圆台的表面积，分别需要知道哪些条件? 怎样求它们的表面积?

因为圆柱的侧面展开图是一个矩形，圆锥的侧面展开图是一个扇形，所以，如果知道它们的底面半径以及母线长，就可以算出它们的侧面积与表面积.

对于圆台来说，侧面展开图如图 11-1-42 所示，其面积可看成两个扇形的面积之差. 因此如果知道圆台上、下底面半径以及母线长，也可以算出其侧面积与表面积.

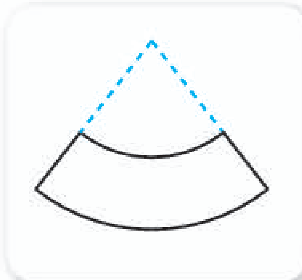


图 11-1-42

2. 球

尝试与发现

日常生活中的很多物体都可以抽象成球面，如图 11-1-43 所示.

(1) 从数学的角度应该怎样来刻画球面呢？圆可以看成平面上到定点的距离等于定长的点的集合，球面上的点是否有类似的性质？

(2) 球面可以通过什么图形旋转得到？

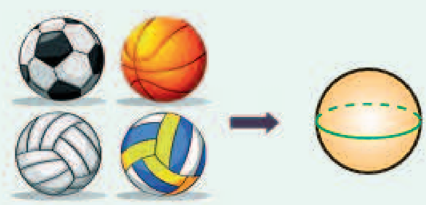


图 11-1-43

通过观察可以发现，**球面**可以看成一个半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所形成的曲面；球面围成的几何体，称为**球**. 球也是一个旋转体.

形成球面的半圆的圆心称为球的**球心**，连接球面上一点和球心的线段称为球的**半径**，连接球面上两点且通过球心的线段称为球的**直径**.

如图 11-1-44 所示的球中，点 O 为球心，OA，OB，OC 都是球的半径，AB 为球的直径. 如果 $OC=R$，则

$OA=$ 1 ______，$OB=$ 2 ______，$AB=$ 3 ______.

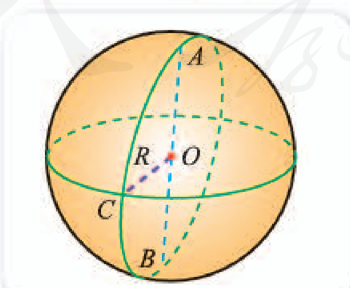


图 11-1-44

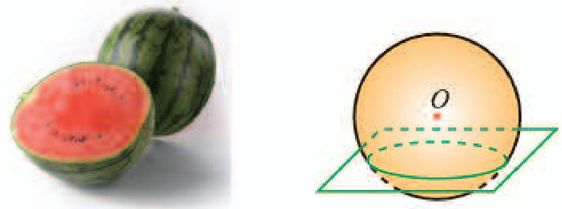
一个球可以用表示它的球心的字母来表示，例如图 11-1-44 中的球可表示为球 O.

由球面的形成过程可看出，球面可以看成**空间中到一个定点的距离等于**

定长的点的集合.

情境与问题

当用刀去切一个球形的西瓜时（如图 11-1-45(1)所示），所得到的截面是什么形状？一般地，如果一个平面与一个球面相截（如图 11-1-45(2)所示），所得交线的形状是怎样的？



（1）　　（2）

图 11-1-45

用一个平面 α 去截半径为 R 的球 O，如图 11-1-46 所示，不妨设平面 α 水平放置且不过球心，OO' 为平面 α 的垂线，并与平面 α 交于点 O'，$OO'=d$，则对平面 α 与球面的交线上任意一点 P，都有 $O'P=\sqrt{R^2-d^2}$，这是一个定值. 这说明截面与球面的交线是在平面 α 内到定点 O' 的距离等于定长的点的集合，因此平面 α 截球面所得到的交线是以 O' 为圆心，以 4 ________ 为半径的一个圆.

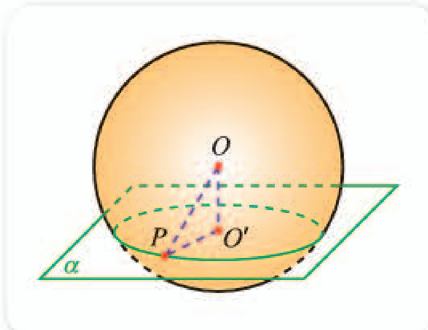


图 11-1-46

如果平面 α 过球心，则 $d=0$，$\sqrt{R^2-d^2}=R$，此时截面是半径等于球的半径的一个圆面.

也就是说，球的截面是一个圆面（圆及其内部）.

球面被经过球心的平面截得的圆称为球的**大圆**，被不经过球心的平面截得的圆称为球的**小圆**.

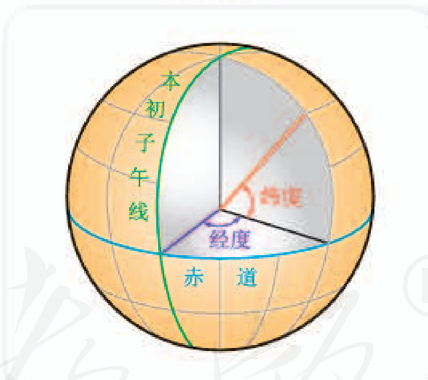


图 11-1-47

当我们把地球看成一个球时，经线就是球面上从北极到南极的半个大圆；赤道是一个大圆，其余的纬线都是小圆. 经度（取值区间为$[0°, 180°]$）与纬度（取值区间为$[0°, 90°]$）如图 11-1-47 所示.

例 2 把地球看成一个半径为 6 370 km 的球，已知我国首都北京靠近北纬 40°，求北纬 40°纬线的长度（$\pi\approx 3.1416$，$\cos 40°\approx 0.7660$，结果精确到 1 km）.

解 作出截面图，如图 11-1-48 所示. 设 A 是北纬 40°圈上的一点，AK 是北纬 40°圈的半径，O 为球心，所以 $OK\perp AK$. 设北纬 40°的纬线长为 c km，因为 $\angle AOB=\angle OAK=40°$，所以

$$
\begin{aligned}
c &= 2\pi \cdot AK \\
&= 2\pi \cdot OA \cdot \cos\angle OAK \\
&= 2\pi \cdot OA \cdot \cos\ 40^\circ \\
&\approx 2\times 3.141\ 6\times 6\ 370\times 0.766\ 0 \\
&\approx 30\ 658.
\end{aligned}
$$

即北纬 40°的纬线长约为 30 658 km.

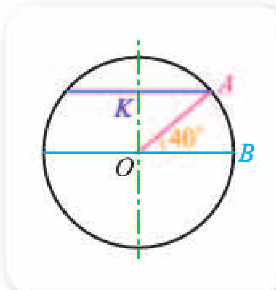


图 11-1-48

尝试与发现

我们知道，如果一个圆的半径为 r，那么它的周长为 $2\pi r$，它的面积为 πr^2. 如果球的半径为 R，你能猜出球的表面积与 R，R^2，R^3 中的哪一个成正比吗?

可以证明，如果球的半径为 R，那么球的表面积为

$$\boxed{S=4\pi R^2.}$$

例 3 已知一个长方体的 8 个顶点都在一个球面上，且长方体的棱长为 3，4，5，求球的表面积.

尝试与发现

(1) 你能画出合适的图形来表示上述题目中的关系吗?

(2) 如图 11-1-49 所示是一个长方体，你能在空间中找出一点，使它到长方体的 8 个顶点的距离都相等吗?

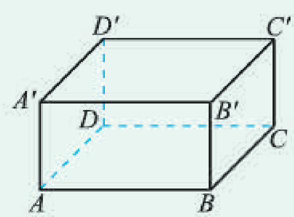


图 11-1-49

解 由题设可知，长方体的体对角线的中点就是球心，又因为

$$AC'=\sqrt{AB^2+BC^2+CC'^2}=\boxed{5}\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

所以所求球的表面积为

$$S=\boxed{6}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

探索与研究

(1) 类比直线与圆的位置关系，探索直线与球的位置关系，以及平面与球的位置关系.

(2) 给定球面上两点，球面上连接这两点的所有曲线中，什么样的曲线最短? 找一个地球仪，选定一条经线所在的圆和一条纬线相交的两点，利用细绳量出这两点间纬线和经线的劣弧长，比较它们的大小. 由此能猜想出什么结论? 你能用所得到的结论指出飞机、轮船在长距离航行时，最短的航线是什么曲线吗?

3. 用信息技术观察旋转体的结构与截面

用 GeoGebra 软件同样可以观察旋转体的结构与截面情况．如图 11-1-50 所示是球的一个截面，请结合课件“球的截面 . ggb”观察．

图 11-1-50

练习A

1. 写出圆柱中任意两条母线的位置关系，任意一条母线与底面的位置关系，以及两个底面的位置关系．
2. 写出圆锥中任意两条母线的位置关系，以及任意一条母线与底面的位置关系．
3. 已知一个球的半径为 3，求这个球的表面积．
4. 一个圆柱的母线长为 5，底面半径为 2，求圆柱轴截面的面积．
5. 分别求出底面半径为 1 cm、高为 3 cm 的圆柱和圆锥的表面积．

练习B

1. 一个圆锥的母线长为 20，母线与轴的夹角为 30°，求圆锥的高．
2. 已知 A，B 都是球 O 对应的球面上的点，过 A，B 两点可以作几个大圆？
3. 一条直线被一个半径为 5 的球截得的线段长为 8，求球心到直线的距离．
4. 判断下列命题的真假．

   (1) 球面上任意一点与球心的连线都是球的半径；

   (2) 球面上任意两点连成的线段都是球的直径；

   (3) 用一个平面截一个球，得到的截面是一个圆面．
5. 一个圆台的母线长为 5，两底面直径分别为 2 和 8，求圆台的高．

1 R　2 R　3 $2R$　4 $\sqrt{R^2-d^2}$　5 $\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$

6 $4\pi\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=50\pi$

11.1.6 祖暅原理与几何体的体积

在小学时我们就已经学过，一个几何体所占空间的大小称为这个几何体的体积，长方体的体积、圆柱的体积都等于底面积乘以高．下面我们探讨其他几何体体积的求法．

1. 祖暅原理

尝试与发现

同一摞书，当改变摆放书的形式时（如图 11-1-51 所示），这摞书的总体积是否会改变？由此能得到有关体积的什么结论？

图 11-1-51

早在南北朝时期，祖冲之与他的儿子祖暅就研究了几何体的体积，并在总结前人成果的基础上提出了如下的祖暅原理．

祖暅原理　幂势既同，则积不容异．

这就是说，夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行于这两个平面的任意平面所截，两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积一定相等，如图 11-1-52 所示．

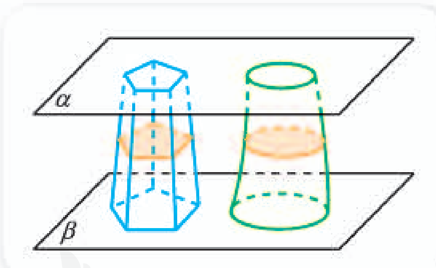


图 11-1-52

2. 柱体的体积

棱柱与圆柱统称为柱体．

注意到柱体被平行于底面的平面所截时，得到的截面与底面全等，因此截面面积一定等于底面面积，从而由祖暅原理可知，**等底面积、等高的两个柱体，体积相等**．

又因为长方体的体积等于底面积乘以高，所以如果柱体的底面积为 S，高为 h，则柱体的体积计算公式为

$$\boxed{V_{柱体}=Sh.}$$

3. 锥体的体积

棱锥与圆锥统称为锥体.

如图 11-1-53 所示，当锥体被平行于底面的平面所截时，得到的截面与底面相似，即$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，而且相似比等于顶点到截面的距离与顶点到底面的距离之比，因此截面与底面的面积之比

$$\frac{S_{截面}}{S_{底面}}=\left(\frac{SO'}{SO}\right)^2,$$

从而由祖暅原理可知，**等底面积、等高的两个锥体，体积相等**.

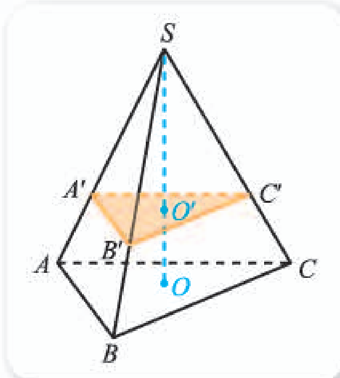


图 11-1-53

尝试与发现

如图 11-1-54 所示的直三棱柱可以分成 3 个三棱锥，所得到的 3 个三棱锥的体积之间有什么关系？由此能得到三棱锥的体积计算公式吗？

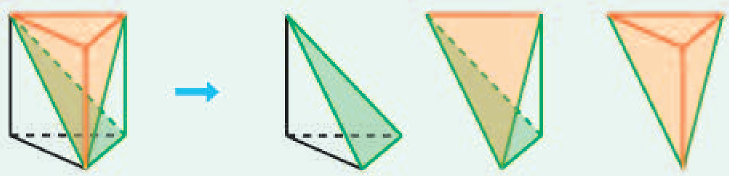


图 11-1-54

一般地，如果锥体的底面积为 S，高为 h，则锥体的体积计算公式为

$$\boxed{V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.}$$

例 1 如图 11-1-55 所示，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求棱锥 $D'\text{-}A'CD$ 的体积与长方体的体积之比.

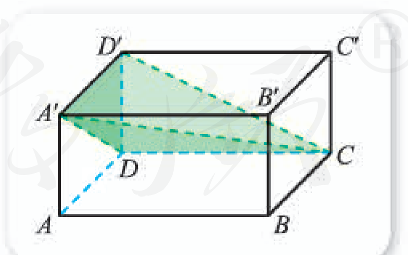


图 11-1-55

解 已知的长方体可以看成直四棱柱 $ADD'A'\text{-}BCC'B'$，设它的底面 $ADD'A'$ 面积为 S，高为 h，则长方体的体积为

$$V_{ADD'A'\text{-}BCC'B'}=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_.$$

因为棱锥 $D'\text{-}A'CD$ 可以看成棱锥 $C\text{-}A'DD'$，且$\triangle A'DD'$的面积为$\frac{1}{2}S$，棱锥 $C\text{-}A'DD'$的高是 h，所以

$$V_{D'\text{-}A'CD}=V_{C\text{-}A'DD'}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Sh=\frac{1}{6}Sh.$$

因此所求体积之比为$\boxed{2}$______.

4. 台体的体积

棱台与圆台统称为台体.

因为台体可看成锥体截去一个小锥体得到，所以台体的体积可以通过计算锥体的体积之差来得到.

例 2 已知四棱台上、下底面面积分别为 S_1，S_2，而且高为 h，求这个棱台的体积.

解 如图 11-1-56 所示，将四棱台看成从棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中截去棱锥 $P\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所得到的，且设两个棱锥的高分别为 PO 与 PO_1.

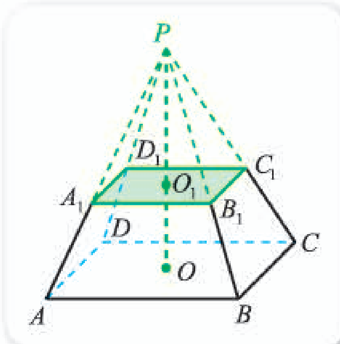


图 11-1-56

由已知有

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{PO_1^2}{PO^2},$$

再由 $PO-PO_1=OO_1=h$，因此可得

$$PO_1=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}h,\quad PO=\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}h.$$

从而可知棱台的体积为

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\times S_2\times PO-\frac{1}{3}\times S_1\times PO_1\\&=\frac{h}{3(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1})}(S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1})=\frac{h}{3(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1})}(S_2^{\frac{3}{2}}-S_1^{\frac{3}{2}})\\&=\frac{h}{3(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1})}(S_2^{\frac{1}{2}}-S_1^{\frac{1}{2}})(S_2+S_2^{\frac{1}{2}}S_1^{\frac{1}{2}}+S_1)\\&=\frac{h}{3}(S_2+\sqrt{S_2S_1}+S_1).\end{aligned}$$

一般地，如果台体的上、下底面面积分别为 S_1，S_2，高为 h，则台体的体积计算公式为

$$\boxed{V_{台体}=\frac{1}{3}(S_2+\sqrt{S_2S_1}+S_1)h.}$$

5. 球的体积

尝试与发现

(1) 你能想办法测出一个乒乓球的体积吗?

(2) 如图 11-1-57 所示是底面积和高都相等的两个几何体，左边是半球，右边

是圆柱被挖去一个倒立的圆锥剩余的部分．用平行于半球与圆柱底面的平面去截这两个几何体，分别指出截面的形状，并讨论两个截面面积的大小关系．由此你能得到球的体积公式吗？

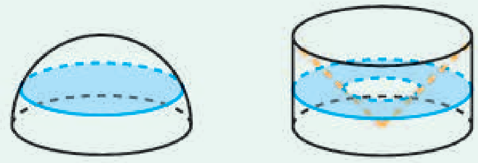


图 11-1-57

一般地，如果球的半径为 R，那么球的体积计算公式为

$$\boxed{V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.}$$

例 3 如图 11-1-58 所示，某铁制零件由一个正四棱柱和一个球组成，已知正四棱柱底面边长与球的直径均为 1 cm，正四棱柱的高为 2 cm．现有这种零件一盒共 50 kg，取铁的密度为 7.8 g/cm^3，$\pi\approx 3.14$．

(1) 估计有多少个这样的零件；

(2) 如果要给这盒零件的每个零件表面涂上一种特殊的材料，则需要能涂多少平方厘米的材料（球与棱柱接口处的面积不计，结果精确到 1 cm^2）？

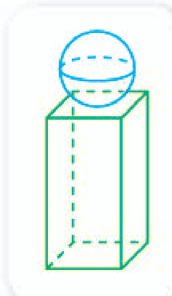


图 11-1-58

解 (1) 每个零件的体积为

$$1\times1\times2+\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=2+\frac{\pi}{6}\ (\text{cm}^3),$$

因此每个零件的质量为

$$\left(2+\frac{\pi}{6}\right)\times7.8=1.3(12+\pi)\ (\text{g}).$$

因此可估计出零件的个数为

$$\frac{50\ 000}{1.3(12+\pi)}\approx2\ 541.$$

(2) 每个零件的表面积为

$$1\times1\times2+1\times2\times4+4\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad}\ (\text{cm}^2),$$

因此零件的表面积之和约为

$$2\ 541\times(10+\pi)\approx33\ 389\ (\text{cm}^2).$$

即需要能涂 33 389 cm^2 的材料．

例 3 中的几何体，是由球和棱柱组合而成的，类似的几何体一般称为组合体．求组合体的体积（或表面积）时，只需要算出其中每个几何体的体积（或表面积），然后再处理即可．

拓展阅读

我国古代数学中球的体积公式

我国古代数学名著《九章算术》中的“开立圆术”相当于给出了已知球的体积 V，求其直径 d 的一个近似公式 $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$. 实际上，“开立圆术”认为，球的体积 $V\approx\frac{9}{16}d^3$.

不过，我国魏晋时期的数学家刘徽在给《九章算术》作注时就发现，上述公式的近似效果并不好，于是想到了推算球体积的方法，他创造了一个称为“牟合方盖”的立体图形. 如图 1 所示，在一个立方体内作

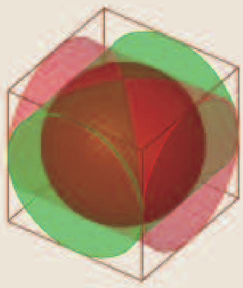


图 1

两个互相垂直的内切圆柱，其相交的部分，就是牟合方盖，如图 2 所示.

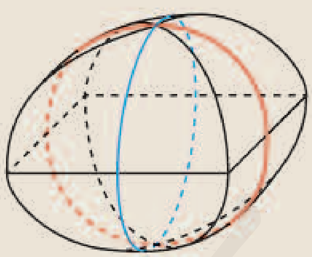


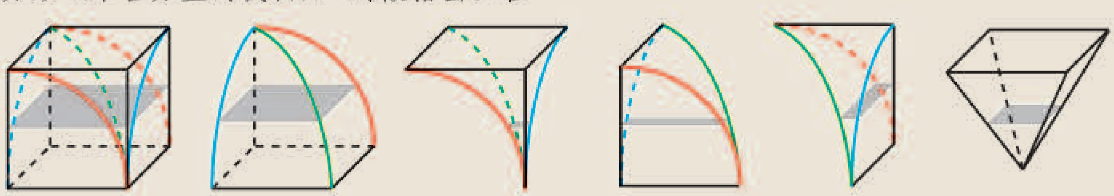
图 2

牟合方盖恰好把立方体的内切球包含在内并且同球相切. 如果用同一水平面去截它们，就得到一个圆（球的截面）和它的外切正方形（牟合方盖的截面）. 刘徽指出，在每一高度的水平截面圆与其外切正方形的面积之比等于 $\frac{\pi}{4}$，因此球体积与牟合方盖体积之比也应该等于 $\frac{\pi}{4}$. 因此，只要知道了牟合方盖的体积，就能得出球的体积. 遗憾的是，刘徽当时并没有得出牟合方盖的体积，他说“敢不阙疑，以俟能言者”.

刘徽所盼的“能言者”过了两百多年才出现，那就是祖冲之和他的儿子祖暅. 祖氏父子继承了刘徽的思路，即从计算牟合方盖体积来突破. 他们考虑了立方体切除牟合方盖之后的那部分的体积. 取牟合方盖的八分之一，考虑它与其外切正方体所围成的立体，如图 3(1)所示. 将它分成四个小立体，如图 3(2)、3(3)、3(4)、3(5)所示，其中图 3(2)就是牟合方盖的八分之一. 祖氏父子通过考察截面的面积发现，图 3(3)、3(4)、3(5)的立体体积之和等于如图 3(6)所示的四棱锥体积，这个四棱锥的底面边长和高都等于如图 3(1)所示的正方体的边长.

因此，如果设球的半径为 r，则图 3(1)中的正方体边长也为 r，从而可知八分之一牟合方盖的体积为 $r^3-\frac{1}{3}r^3=\frac{2}{3}r^3$，因此牟合方盖的体积为 $\frac{16}{3}r^3$. 再结合刘徽所得到的结论，就可以知道球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$.

上面的介绍中，多次使用了“祖暅原理”，所涉及的计算也都没有超出高中数学的范围，感兴趣的同学再仔细推敲一遍吧！

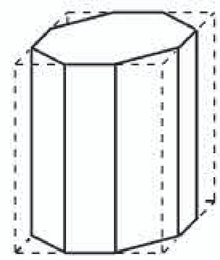


(1) (2) (3) (4) (5) (6)

图 3

练习A

1. 已知一个长方体的长、宽、高的比为 4∶2∶1，它的体积为 1 000 cm^3，求这个长方体的长、宽、高.
2. 如果圆柱的底面半径不变，要使它的体积扩大到原来的 5 倍，那么需要把它的高扩大到原来的多少倍？如果圆柱的高不变，半径扩大到原来的多少倍才能使它的体积扩大到原来的 5 倍？
3. 如图，将正四棱柱底面的边 3 等分，过 3 等分点用平行于侧棱的平面截去 4 个三棱柱，得到一个八棱柱．求这个八棱柱与原四棱柱体积之比.

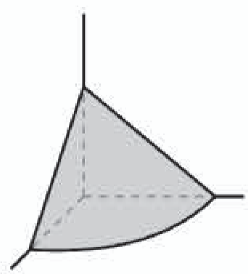


（第 3 题）

4. 在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，三棱锥 $A'\text{-}BC'D$ 的体积是正方体体积的几分之几？
5. 如果一个球的大圆的面积增加到原来的 100 倍，那么这个球的体积会怎样变化？

练习B

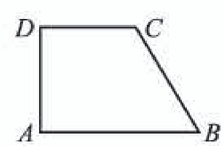
1. 已知长方体形的铜块长、宽、高分别是 2，4，8，将它熔化后铸成一个正方体形的铜块（不计损耗），求铸成后的铜块的棱长.
2. 已知正四棱锥底面边长为 4 cm，高与斜高的夹角为 30°，求正四棱锥的表面积与体积.
3. 《九章算术》中有如下问题："今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺．问积及为米几何．"其意思为："在屋内墙角处堆放米（如图，米堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少．"已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有（　　）.



（第 3 题）

(A) 14 斛　　(B) 22 斛
(C) 36 斛　　(D) 66 斛

4. 已知直三棱柱底面的一边长为 2 cm，另两边长都为 3 cm，侧棱长为 4 cm，求它的侧面积和体积.
5. 已知一个正三棱锥的四个顶点都在一个球的球面上，而且这个正三棱锥的所有棱长都为 2，求这个球的体积.
6. 如图所示，直角梯形 $ABCD$ 分别以 AB，BC，CD，DA 所在直线为轴旋转，试说明所得几何体的形状.

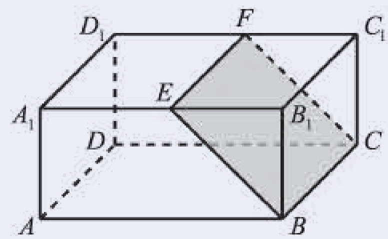


（第 6 题）

1 Sh　　2 1∶6　　3 $10+\pi$

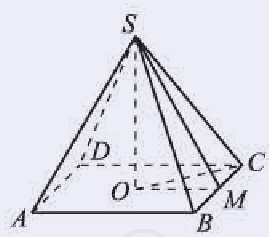
习题11-1A

1. 记 A 为所有平行六面体组成的集合，B 为所有直平行六面体组成的集合，C 为所有长方体组成的集合，D 为所有正四棱柱组成的集合，E 为所有正方体组成的集合，写出 A，B，C，D，E 之间的关系.
2. 设计 3 个不同的平面图形，使它们都能围成同一个正方体.
3. 如图，已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，用平面 $BCFE$ 把这个长方体分成两部分后，这两部分都还是棱柱吗？说明理由.



（第 3 题）

4. 正方体的棱长扩大到原来的 2 倍，其表面积扩大到原来的几倍？
5. 已知一个长方体的长、宽、高分别为 12，4，3，求它的体对角线的长.
6. 已知一个正三棱锥的侧面都是等边三角形，侧棱长为 4，求它的侧面积和全面积.
7. (1) 设直棱柱的高为 h，底面多边形的周长为 c，写出直棱柱的侧面积计算公式；
   (2) 设正棱锥的底面周长为 c，斜高为 h'，写出正棱锥的侧面积计算公式；
   (3) 设正棱台的下底面周长为 c，上底面周长为 c'，斜高为 h'，写出正棱台的侧面积计算公式；
   (4) 写出上述 3 个侧面积计算公式之间的关系.
8. 如图，在正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，SO 是这个四棱锥的高，SM 是斜高，且 $SO=8$，$SM=11$.
   (1) 求这个四棱锥的侧棱长；
   (2) 求这个四棱锥的全面积.



（第 8 题）

9. 已知正六棱柱的高为 h，底面边长为 a，求它的全面积与体积.
10. 四棱台中，与一条侧棱异面的棱有几条？
11. 已知一个圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形，求这个圆柱的侧面积.
12. 已知一个圆锥的轴截面是边长为 2 的等边三角形，求圆锥的高.
13. (1) 已知一个圆台的轴截面是下底为 2 且其余边长为 1 的等腰梯形，求圆台的高.
    (2) 用一个平行于圆锥底面的平面截这个圆锥，截得圆台上、下底面半径的比是 1∶4，截去的圆锥的母线长是 3，求圆台的母线长.
14. 如果把地球看成一个球体，求地球上的北纬 60°纬线长与赤道长的比.

15 用一个平面截半径为 25 cm 的球，截面面积是 $49\pi\ cm^2$，求球心到截面的距离.

16 已知一个正方体所有的顶点都在一个球面上，且这个球的体积是 V，求正方体的棱长.

17 要用铁板制作一个正四棱锥形的冷水塔塔顶（不包括棱锥的底面），已知塔顶高为 0.85 m，底面边长为 1.5 m，制造这个塔顶需要多少平方米铁板（结果精确到 $0.01\ m^2$）？

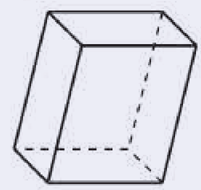
习题11-1B

1 用斜二测画法画底面边长为 1.5 cm，高为 3 cm 的正三棱柱的直观图.

2 写出四面体中任何两个面所在平面的位置关系.

3 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，下列说法正确的是________.

① $AD_1 \parallel$ 平面 BC_1；② AC 与 BC_1 相交；③ 点 A_1，D_1 到平面 BCC_1B_1 的距离相等；④ 与 AB 平行的面只有一个，与 AB 垂直的面有两个.



（第 4 题）

4 图中所示多面体有多少条面对角线？有多少条体对角线？

5 判断下列命题的真假.

（1）有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体是棱锥；

（2）底面是正多边形的棱锥一定是正棱锥；

（3）有两个面是平行的相似多边形，其余各面都是梯形的几何体是棱台.

6 如果平行于一个正棱锥底面的截面面积是底面面积的$\dfrac{1}{2}$，那么截面截一条侧棱所得两条线段的比是多少？

7 已知正四棱台上底面边长为 4 cm，侧棱和下底面边长都是 8 cm，求它的全面积.

8 如果正三棱台的下底面边长为 3，上底面边长和侧棱长都为 2，求棱台的斜高与高.

9 （1）设圆柱的底面半径为 r，母线长为 l，写出圆柱的表面积计算公式；

（2）设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，写出圆锥的表面积计算公式；

（3）设圆台的上、下底面半径分别为 r'，r，母线长为 l，写出圆台的表面积计算公式；

（4）写出上述 3 个表面积计算公式之间的关系.

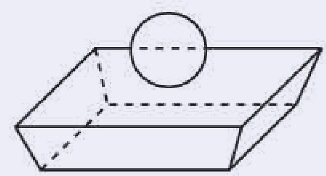
10 将地球视为球体，记地球半径为 R，地球球心为 O，设 A，B 为赤道上两点，且半径 OA 与 OB 的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，求线段 AB 的长以及赤道在 A，B 两点间的劣弧长.

11. 已知一个正方体的 8 个顶点都在同一个球面上，计算球的表面积和这个正方体的全面积之比.
12. 已知一个圆柱的底面直径与高都等于一个球的直径，求证：这个球的表面积等于这个圆柱的侧面积.
13. 已知一个正方体和一个圆柱等高，并且侧面积相等，求这个正方体和圆柱的体积之比.
14. 已知正四棱锥的侧面都是等边三角形，它的斜高为$\sqrt{3}$，求这个正四棱锥的体积.
15. 正六棱锥被过棱锥高的中点且平行于底的平面所截，得到正六棱台和较小的棱锥.

(1) 求大棱锥、小棱锥、棱台的侧面积之比；

(2) 若大棱锥的侧棱长为 12 cm，小棱锥的底面边长为 4 cm，求截得的棱台的侧面积与全面积.

16. 如图所示是某专用容器的盖子，它是用一个正四棱台和一个球焊接而成的. 球的半径为 R. 正四棱台的两底面边长分别为 $6R$ 和 $5R$，斜高为 $1.2R$.



（第 16 题）

(1) 求这个容器盖子的表面积（用 R 表示，焊接处对面积的影响忽略不计）；

(2) 若 $R=2$ cm，为盖子涂色时所用的涂料每 0.4 kg 可以涂 1 m^2，计算为 100 个这样的盖子涂色约需多少涂料（精确到 0.1 kg）.

习题11-1C

1. 在正方体上任意选择 4 个顶点，然后将它们两两相连，则可能组成的几何图形为________（写出所有正确结论的编号）.

① 矩形；② 不是矩形的平行四边形；③ 有三个面为等腰直角三角形，有一个面为等边三角形的四面体；④ 每个面都是等边三角形的四面体；⑤ 每个面都是直角三角形的四面体.

2. 表面积和高都相等的正 n 棱柱与圆柱，哪一个的体积更大？说明理由.

11.2　平面的基本事实与推论

前面我们通过几何体的学习，已经直观地认识了点、线、面之间的位置关系，从本节开始，我们将在直观认识的基础上来论证它们之间的关系，以期进一步培养大家的空间想象能力与逻辑推理能力.

在初中几何中，大家通过实验、观察得到了如下的点与直线的基本事实：

（1）连接两点的线中，线段最短；

（2）过两点有一条直线，并且只有一条直线.

结论(2)也可简单地说成“两点确定一条直线”. 事实上，通过指定的一个点可以作无数条直线；通过指定的三个点，不一定能作一条直线.

下面我们来总结出空间中关于平面的基本事实（也称为公理）.

尝试与发现

观察如图 11-2-1 的凳子，把凳面看成一个平面，思考

（1）如果要把一个平面固定在空间中，至少需要固定几个点？

（2）有多少个平面能通过空间中指定的一点？有多少个平面能通过空间中指定的两点？

图 11-2-1

基本事实 1　经过不在一条直线上的 3 个点，有且只有一个平面.

这也可以简单地说成“不共线的 3 点确定一个平面”，过不共线的 3 点 A，B，C 的平面，通常记作平面 ABC. 在用图形直观地表示平面时，为了增加立体感，习惯上将平面用平行四边形表示. 如图 11-2-2 中的平面 α 可以看成由不共线的 3 点 A，B，C 确定的，此时显然有

图 11-2-2

$$A\in\alpha，B\boxed{1}\underline{\quad\quad}\alpha，C\boxed{2}\underline{\quad\quad}\alpha.$$

值得注意的是，如果给定的 3 个点在同一直线上，那么有无数个平面通过这 3 个点，也就是说，此时这 3 个点不能“确定”一个平面. 例如，如果给定的 3 个点都在长方体的一条棱上，那么过这 3 个点就会有无数个平面.

尝试与发现

结合图 11-2-3 思考：直线上至少已知几个点在某平面内时，就能确保直线在该平面内？

图 11-2-3

基本事实 2　如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内.

这就是说，如果 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，那么直线 $AB\subset\alpha$，如图 11-2-4 所示.

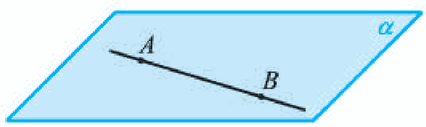


图 11-2-4

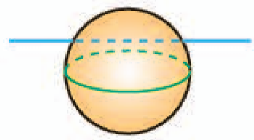


图 11-2-5

基本事实 2 还可以作为判断一个面是否是平面的依据：如果一个面内的任意两点所确定的直线都在这个面内，那么这个面就是平面. 例如，球面不是一个平面，因为球面上任意两点所确定的直线中，只有这两个点在球面上，如图 11-2-5 所示.

情境与问题

如图 11-2-6 所示，当用裁纸刀裁纸时，可以认为刀锋是在一个平面内运动的.

(1) 裁纸刀裁出的是什么样的痕迹？

(2) 两个平面相交时，公共点具有什么特点？

图 11-2-6

基本事实 3　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

基本事实 3 说明，两个不重合的平面，只要有一个公共点，就一定有无数个公共点，而且这无数个公共点能组成一条直线，这条直线通常也称为两个平面的交线. 如图 11-2-7 所示，有

$$A\in a,\ \alpha\cap\beta=a.$$

同前面一样，在画两个平面相交时，其中一个平面被另一个平面遮住的部分应该画成虚线或不画，如图 11-2-7(1)(2)所示.

根据基本事实 3 可知，棱柱中，有公共棱的两个面所在的平面一定是相

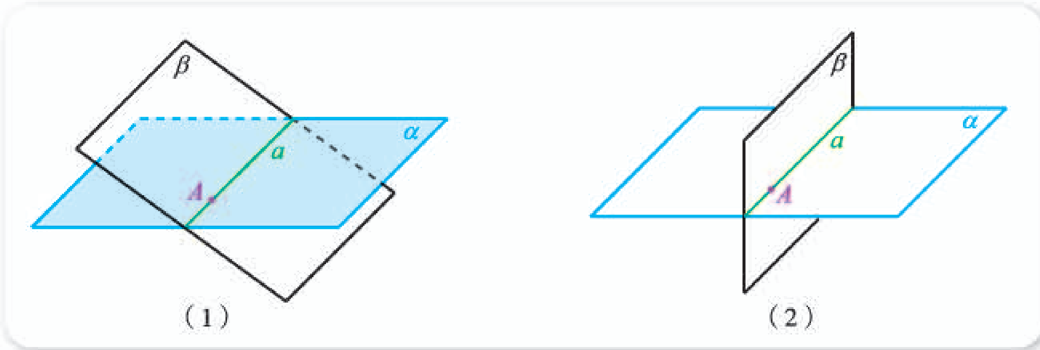


图 11-2-7

交的，而且公共棱是交线的一部分.

由以上平面的基本事实可以得到如下推论.

推论 1　经过一条直线与直线外一点，有且只有一个平面.

这实际上是由基本事实 1 与基本事实 2 得到的. 如图 11-2-8 所示，在直线 l 上取两点 A，B，因为 $C\notin l$，所以 A，B，C 3 点不共线.

由基本事实 1 可知，A，B，C 确定一个平面，记为 α.

由基本事实 2 以及 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$ 可知 $l\subset\alpha$.

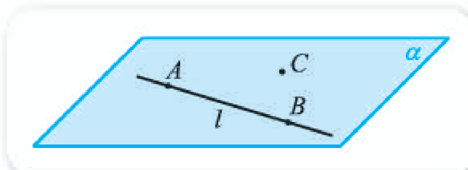


图 11-2-8

推论 1 可以简单地说成“直线与直线外一点确定一个平面”.

类似地，还可以得到如下两个推论.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

推论 2 与推论 3 可以分别简单地说成“两条相交直线确定一个平面”“两条平行直线确定一个平面”.

另外，利用推论 2 可以说明，三角形是平面图形. 因此，初中有关三角形全等、相似，以及前面我们学习的解三角形等结论，在空间中也是成立的.

类似地，利用推论 3 可以说明平行四边形、梯形也是平面图形，初中有关平行四边形、梯形的判定与性质等结论，在空间中仍然成立.

例 1　证明：两两相交且不过同一个点的 3 条直线必在同一个平面内.

证明　设直线 AB，BC，AC 两两相交，交点分别为 A，B，C.

显然，A，B，C 3 点不共线，因此它们能确定一个平面 α.

因为 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，那么直线 $AB\subset\alpha$.

同理 AC 3 ______ α，BC 4 ______ α.

即直线 AB，BC，AC 都在平面 α 内.

例 2 如图 11-2-9 所示正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 CC_1 上一点．试说明 D_1，A，E 3 点确定的平面与平面 $ABCD$ 相交，并画出这两个平面的交线．

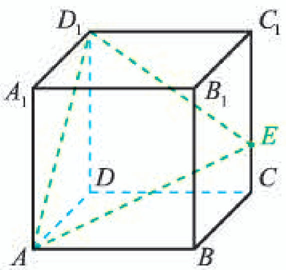


图 11-2-9

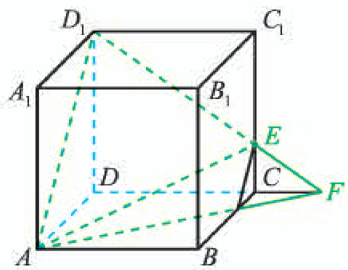


图 11-2-10

解 因为

$$A \in \text{面 } D_1AE,\ A \in \text{面 } ABCD,$$

所以面 $D_1AE \cap$ 面 $ABCD \neq \varnothing$，即面 D_1AE 与面 $ABCD$ 相交．

延长 D_1E 与 DC，设它们相交于 F，如图 11-2-10 所示，则

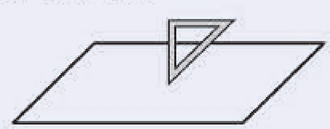
$$F \in \text{直线 } D_1E,\ \text{直线 } D_1E \subset \text{面 } D_1AE,$$

$$F \in \text{直线 } DC,\ \text{直线 } DC \subset \text{面 } ABCD,$$

则 $F \in$ 面 $D_1AE \cap$ 面 $ABCD$，从而 AF 为面 D_1AE 与面 $ABCD$ 的交线，如图 11-2-10 所示．

习题11-2A

1. 如果要把一个三角形固定在空间中，只需要固定它的 3 个顶点就可以了，为什么？
2. 判断下列命题的真假．
   (1) 过一条直线的平面有无数多个；
   (2) 如果两个平面有两个公共点 A，B，那么它们就有无数多个公共点，并且这些公共点都在直线 AB 上；
   (3) 两个平面的公共点组成的集合，可能是一条线段；
   (4) 两个相交平面可能存在不在一条直线上的 3 个公共点．
3. 线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 是否一定在平面 α 内？为什么？
4. 如图，把三角板的一个角立在桌面上，三角板所在的平面与桌面所在的平面能否只有一个交点？



（第 4 题）

5. (1) 为什么说梯形是平面图形？
   (2) 一个角一定是平面图形吗？为什么？
6. 4 条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？不共面的 4 个点可以确定几个平面？

习题11-2B

1. 下列命题中，正确的是（　　）.

　(A) 3 点确定一个平面

　(B) 一条直线和一个点确定一个平面

　(C) 两个平面相交，可以只有一个公共点

　(D) 三角形是平面图形

2. 如果两个平面有 3 个公共点，则这两个平面一定重合吗？为什么？

3. 如图所示的门，一边有固定在门框上的两个合页，另一边有锁. 当不上锁时，门可以自由转动；当上锁时，门就被固定住了. 将门看成平面的一部分，则上述不上锁与上锁的情形，可以用平面的哪个基本事实来说明？

（第 3 题）

4. 用符号语言改写下列语句.

　(1) 点 A 在平面 α 内，点 B 不在直线 l 上；

　(2) 直线 l 在平面 α 内，直线 m 与平面 α 有且只有一个公共点 M；

　(3) 直线 a 和 b 相交于一点 M；

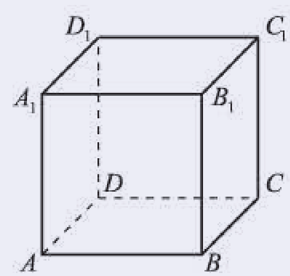
　(4) 平面 α 与平面 β 相交于过点 A 的直线 l.

5. 如图所示是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，分别指出空间中是否存在平面通过以下各组对象. 如果存在，指出有多少个；如果不存在，说明理由.

　(1) A，B，C；　　(2) A，B，C_1；

　(3) AB，BC_1；　　(4) AC_1，CC_1；

　(5) A，B，C，C_1；　　(6) AB，C，C_1.



（第 5 题）

6. 已知平面 ABD 与平面 CBD 相交于直线 BD，直线 EF 与直线 GH 分别在这两个平面内且相交于点 M，点 M 是否在直线 BD 上？为什么？

7. 过已知直线外一点与这条直线上的 3 点，分别画 3 条直线. 证明：这 3 条直线在同一个平面内.

1 ∈　　2 ∈　　3 ⊂　　4 ⊂

11.3 空间中的平行关系

前面我们已经从长方体中总结出了空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行关系，并借助其他几何体进行了理解，这里我们将继续学习这些内容，并了解判断空间中平行关系的方法，熟悉空间中平行关系的性质.

11.3.1 平行直线与异面直线

1. 平行直线

同初中几何一样，我们仍然把在同一平面内不相交的两条直线称为平行直线.

尝试与发现

利用生活中的实物进行演示或观察几何体，思考下列问题.

(1) 初中所学的结论"过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行"，在空间中是否仍成立?

(2) 初中所学的结论"在同一平面内，如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行"，如果去掉条件"在同一平面内"，结论是否仍成立?

不难看出，尝试与发现中的两个结论在空间中仍成立，即

(1) 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行；

(2) 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

这也就意味着，初中所学习的平行线的判定与性质等，在空间中还成立. 例如，在空间中同样有"同位角相等，两直线平行"，当然，这里的同位角还是要在同一平面内才行.

上述结论(2)通常称为空间平行线的传递性，可以用符号表示为：如果 $a/\!/b$，$a/\!/c$，则 $b/\!/c$. 如图 11-3-1 所示.

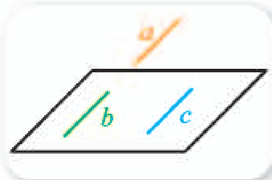


图 11-3-1

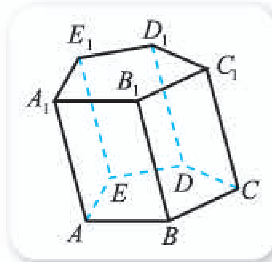


图 11-3-2

由空间平行线的传递性可以得到几何体中的一些线线平行关系．例如，如图 11-3-2 所示的棱柱中，因为侧面都是平行四边形，所以有

$$AA_1/\!/BB_1/\!/CC_1/\!/DD_1/\!/EE_1.$$

由空间平行线的传递性可以得到空间中的等角定理：

如果一个角的两边与另一个角的两边分别对应平行，并且方向相同，那么这两个角相等．

尝试与发现

如图 11-3-3 所示，等角定理是说，在空间中，如果 $AC/\!/A'C'$，$AB/\!/A'B'$，则有

$$\angle BAC=\angle B'A'C'.$$

如果$\angle BAC$ 与$\angle B'A'C'$都在同一个平面内，你能证明这个结论吗？如果这两个角不在同一个平面内呢？

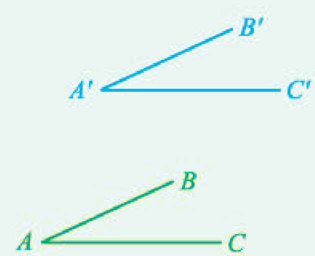


图 11-3-3

下面我们结合图 11-3-3，来给出一般情况下等角定理的证明．

如图 11-3-4 所示，在 AB 上取一点 E，在 $A'B'$上取一点 E'，使得 $AE=A'E'$；在 AC 上取一点 F，在 $A'C'$上取一点 F'，使得 $AF=A'F'$．

因为 $AE \perp\!\!\!\!= A'E'$，所以 $AEE'A'$是一个平行四边形，从而 $AA' \perp\!\!\!\!= EE'$．同理，$AA' \perp\!\!\!\!= FF'$．

由空间平行线的传递性可知 $EE' \perp\!\!\!\!= FF'$，因此 $EFF'E'$是一个平行四边形，所以 $EF=E'F'$．

于是有$\triangle EAF\cong\triangle E'A'F'$，从而$\angle EAF=\angle E'A'F'$．

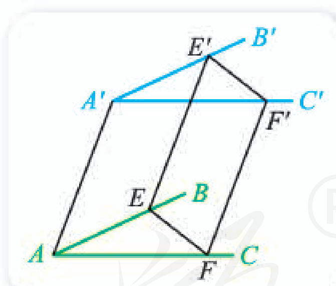


图 11-3-4

2. 异面直线

我们已经知道，异面直线指的是空间中既不平行也不相交的直线，而且前面也从几何体中直观认识了异面直线．事实上，异面直线在实际生活中也是广泛存在的，如图 11-3-5 所示．

图 11-3-5

尝试与发现

结合图 11-3-5 思考：在立体几何中怎样作异面直线的直观图？

两条直线异面，实际上也就是这两条直线不能同时在任何一个平面内. 因此，为了表示异面直线 a，b 不共面的特点，作图时，通常用一个或两个平面衬托，如图 11-3-6 所示.

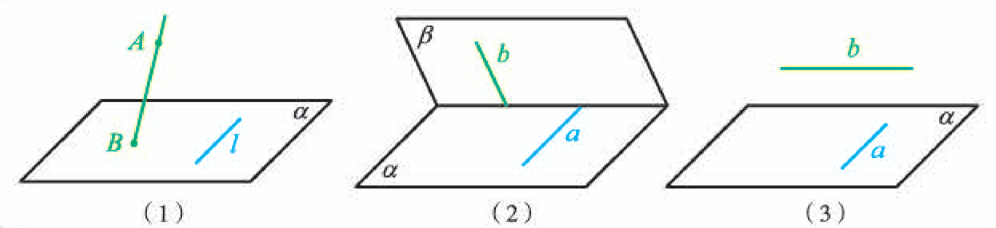


图 11-3-6

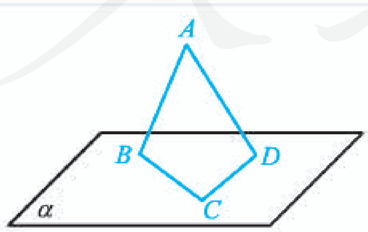
在图 11-3-6(1)中，$AB\cap\alpha=B$，$A\notin\alpha$，$l\subset\alpha$，$B\notin l$，此时，直线 l 与直线 AB 是异面的. 这是因为同时通过直线 l 与点 B 的平面只能是 α，如果 l 与 AB 共面，则 $A\in\alpha$，这与 $A\notin\alpha$ 矛盾. 由此可总结出异面直线的一种判定方法：与一个平面相交于一点的直线与这个平面内不经过交点的直线异面.

3. 空间四边形

顺次连接不共面的 4 点所构成的图形称为**空间四边形**，其中 4 个点都是空间四边形的顶点，连接相邻顶点间的线段称为空间四边形的边，连接不相邻顶点间的线段称为空间四边形的对角线.

空间四边形用表示顶点的 4 个字母表示. 如图 11-3-7 所示为空间四边形 $ABCD$，这个空间四边形的边为 AB，BC，CD，DA，对角线为

1 ________________.



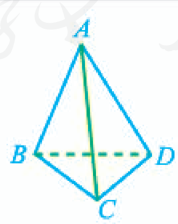


图 11-3-7　　图 11-3-8

空间四边形可以看成由一个四面体的 4 条棱构成的图形，如图 11-3-8 所示.

例 如图 11-3-9 所示空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边 AB，AD，CB，CD 的中点. 求证：四边形 $EFHG$ 是平行四边形.

证明 在$\triangle ABD$ 中，因为 E，F 分别是 AB，AD 的中点，所以由三角形的中位线定理可知

$EF /\!/ BD$ 且 $EF=\frac{1}{2}BD$.

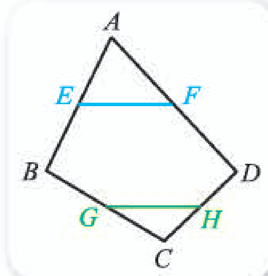


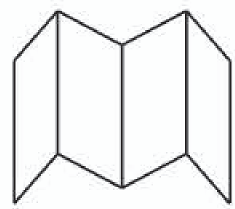
图 11-3-9

同理，$GH /\!/ BD$ 且 $GH=\frac{1}{2}BD$.

因此 2 ______，所以四边形 $EFHG$ 是平行四边形.

练习A

1. 把一张长方形的纸对折两次，打开以后如图所示，说明为什么这些折痕互相平行.

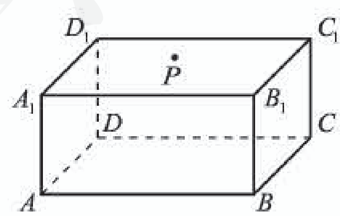


（第 1 题）

2. 空间中，如果一个角的两边与另一个角的两边分别对应平行，那么这两个角一定相等吗？
3. 判断下列命题的真假.
   (1) 4 条边相等的空间四边形是菱形；
   (2) 空间中，与同一条直线异面的两条直线一定异面；
   (3) 空间中，如果$\angle BAC=\angle B'A'C'$且 $AB /\!/ A'B'$，则 $AC /\!/ A'C'$.
4. 画出三棱锥 S-ABC，写出其棱所在直线中互为异面直线的直线.
5. 画两个相交平面，在这两个平面内各画一条直线，使这两条直线分别成为
   (1) 相交直线；　(2) 平行直线；　(3) 异面直线.

练习B

1. 已知直线 a，b 和平面 α，且 $b\subset\alpha$，$a\cap b=A$，$a\cap\alpha=A$. 试作图表示出它们之间的位置关系.
2. 直线 AB 与直线 CD 是异面直线，那么直线 AC 与直线 BD 一定异面吗？为什么？
3. 在四面体 $ABCD$ 中，已知 $AC=BD$，且 E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，AD 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是菱形.
4. 如图，在长方体的面 $A_1B_1C_1D_1$ 上有一点 P，怎样才能作出过点 P 且与 CD 平行的直线？



（第 4 题）

1 AC，BD　　2 $EF \underline{/\!/} GH$

11.3.2 直线与平面平行

前面我们已经通过几何体，直观地认识了直线在平面内、直线与平面平行、直线与平面相交，其中后两种位置关系又统称为直线在平面外．一般地，直线与平面的位置关系可以用图 11-3-10 表示．

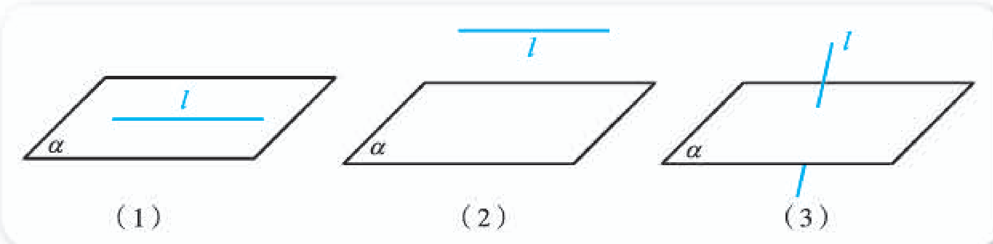


图 11-3-10

而且，我们还知道，直线 l 与平面 α 平行，指的是直线 l 与平面 α 没有公共点，即

$$l /\!/ \alpha \Leftrightarrow l \cap \alpha = \varnothing.$$

情境与问题

如图 11-3-11 所示，如果将乒乓球台的台面抽象成平面 α，将乒乓球网的上边缘抽象成直线 l，则直线 l 与平面 α 具有怎样的位置关系？如果将乒乓球网的下边缘抽象成直线 m，并把 m 看成平面 α 内的直线，则直线 l 与直线 m 具有怎样的位置关系？由此思考怎样才能证明直线与平面平行．

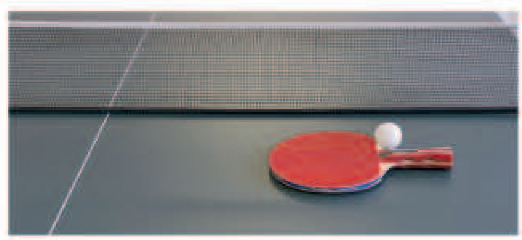


图 11-3-11

因为直线与平面都可以无限延伸，所以要直接判定一条直线与一个平面有没有公共点，并不是一件容易的事，因此我们有必要寻求其他的判定直线与平面平行的方法．

尝试与发现

如图 11-3-12 所示，假设直线 m 在平面 α 内，即 $m \subset \alpha$，将直线 m 平移出平面 α（记平移后的直线为 l），因为是平移，所以 $l /\!/ m$．利用合适的实物演示平移的过程，判断直线 l 与平面 α 的位置关系，并说明理由．

图 11-3-12

直观上可以猜出，l 与 α 没有公共点，即 $l//\alpha$. 但这个结论是否正确呢？从正面思考有一定难度，不妨从反面想一想.

如图 11-3-13 所示，假设 $l\cap\alpha=P$. 因为直线 l 与直线 m 平行，所以它们可以确定一个平面（记为 β）. 由于 $m\subset\alpha$，$m\subset\beta$，所以 $\alpha\cap\beta=m$. 又因为 $P\in l\subset\beta$，$P\in\alpha$，因此根据平面的基本事实 3，点 P 一定在 α 与 β 的交线 m 上，于是直线 l 与 m 相交，这与 $l//m$ 矛盾. 所以 $l\cap\alpha=\varnothing$，即 $l//\alpha$.

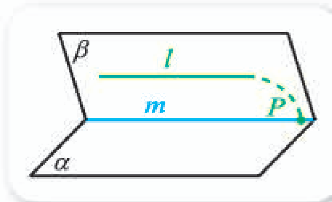


图 11-3-13

一般地，我们可以得出如下**直线与平面平行的判定定理**（简称为线面平行的判定定理）.

如果平面外的一条直线与平面内的一条直线平行，那么这条直线与这个平面平行.

这可以用符号表示为

$$\text{如果 } l\not\subset\alpha,\ m\subset\alpha,\ l//m,\ \text{则 } l//\alpha.$$

这给出了线面平行的一个充分条件.

根据上述定理，画一条直线与已知平面平行时，通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面，并且使它与平行四边形的一边平行或与平行四边形内的一条线段平行，如图 11-3-10(2)和图 11-3-14 所示.

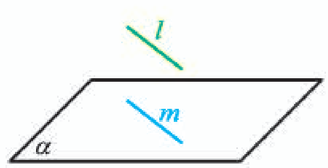


图 11-3-14

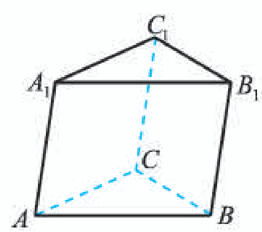


图 11-3-15

利用线面平行的判定定理，以及棱柱的侧面都是平行四边形，可以证明棱柱一个底面上的边所在直线一定平行于另一个底面. 例如，如图 11-3-15 所示的三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，因为 ABB_1A_1 是平行四边形，所以 A_1B_1 1 ______ AB，又因为 $AB\subset$面 ABC，A_1B_1 2 ______ 面 ABC，所以 $A_1B_1//$面 ABC.

例 1 已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是边 AB，AD 的中点. 求证：$EF//$面 BCD.

分析 要证明 $EF//$面 BCD，只需在面 BCD 内找一条直线与 EF 平行即可.

证明 如图 11-3-16 所示，连接 BD.

在$\triangle ABD$ 中，因为 E，F 分别是 AB，AD 的中点，所以由三角形的中位线定理可知 $EF//BD$.

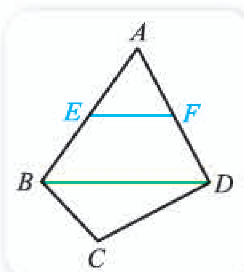


图 11-3-16

又因为

$$EF\not\subset\text{面 } BCD,\ BD\subset\text{面 } BCD,$$

所以由线面平行的判定定理可知 $EF//$面 BCD.

下面我们来探讨，如果直线 l 与平面 α 平行，能得出一些什么性质.

尝试与发现

当 $l//\alpha$ 时，l 与 α 没有公共点. 此时，若 $m\subset\alpha$，则 $l\cap m=$ 3 ______. 这就是说，l 与 m 的位置关系是 4 ______. 那么，什么情况下，l 与 m 平行呢？

一般地，我们可以证明如下**直线与平面平行的性质定理**（简称为线面平行的性质定理）.

如果一条直线与一个平面平行，且经过这条直线的平面与这个平面相交，那么这条直线就与两平面的交线平行.

这可以用符号表示为

$$\text{如果 } l//\alpha,\ l\subset\beta,\ \alpha\cap\beta=m,\ \text{则 } 5\ \_\_\_\_\_\_.$$

这给出了线面平行的一个必要条件.

证明 因为 $l//\alpha$，所以 l 与 α 没有公共点. 又因为 $m\subset\alpha$，所以 $l\cap m=\varnothing$.

注意到 $l\subset\beta$ 且 $m\subset\beta$，所以 l 与 m 共面且没有公共点，即 $l//m$.

线面平行的性质定理说明，可以利用空间中的"线面平行"去证明空间中的"线线平行".

例 2 如图 11-3-17 所示，已知三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，E，F 分别是边 AB，AD 的中点，过 EF 的平面截三棱锥得到的截面为 $EFHG$. 求证：$EF//GH$.

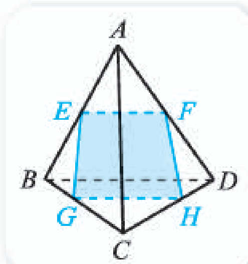


图 11-3-17

证明 在$\triangle ABD$ 中，因为 E，F 分别是 AB，AD 的中点，所以由三角形的中位线定理可知 $EF//BD$.

又因为 $EF\not\subset$面 BCD，$BD\subset$面 BCD，所以由线面平行的判定定理可知 $EF//$面 BCD.

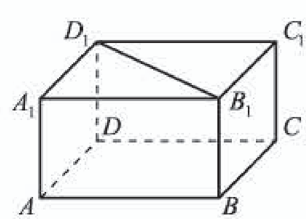
又因为

$$EF\subset\text{面 } EFHG,\ \text{面 } EFHG\cap\text{面 } BCD=GH,$$

所以由线面平行的性质定理可知 $EF//GH$.

练习A

1. 过平面外一点能作出多少条直线与这个平面平行？
2. 将教室内的日光灯管抽象成一条直线，教室的地面抽象成一个平面，而且假设这里的直线与地面平行，那么这条直线是否与地面上的所有直线都平行？地面上的哪些直线与灯管所在的直线平行？
3. 求证：如图所示的长方体中，$B_1D_1//$平面 $ABCD$.



（第 3 题）

4 判断下列命题的真假.

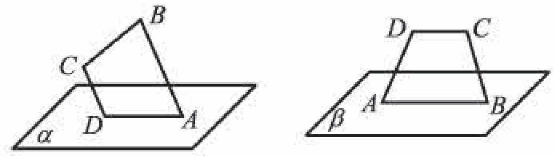
(1) 如果直线 a 平行于直线 b，则 a 平行于经过 b 的任何一个平面；

(2) 如果一条直线不在平面内，则这条直线就与这个平面平行；

(3) 过直线外一点，可以作无数个平面与这条直线平行；

(4) 如果一条直线与一个平面平行，则它与该平面内的任何直线都平行.

5 如图(1)，将梯形的腰 AD 放在平面 α 内，BC 不在平面 α 内，写出 BC 所在直线与平面 α 的位置关系；如图(2)，将梯形的底边 AB 放在平面 β 内，CD 不在平面 β 内，写出 CD 所在直线与平面 β 的位置关系.



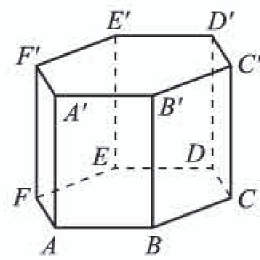
(1)　　(2)

(第 5 题)

练习B

1 使一块矩形木板 $ABCD$ 的一边 AB 紧靠桌面并绕 AB 转动，并且使 AB 的对边 CD 始终在桌面所在的平面外，那么直线 CD 是不是总是与桌面所在的平面平行？为什么？

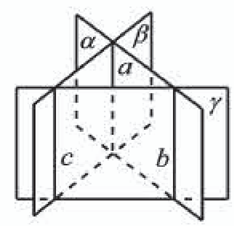
2 如图所示正六棱柱的上、下底面与侧面中，哪些面所在的平面与 AB 所在的直线平行？说明理由.



(第 2 题)

3 已知 $AB/\!/$平面 α，$AC/\!/BD$，且 AC，BD 与 α 分别相交于点 C，D. 求证：$AC=BD$.

4 如图，平面 α，β，γ 两两相交，a，b，c 为 3 条交线，且 $a/\!/b$. 求证：$a/\!/c$，$b/\!/c$.



(第 4 题)

5 已知平面 $\alpha\cap$平面 $\beta=l$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/b$，求证：$a/\!/l$，$b/\!/l$.

1 $/\!/$　　2 $\not\subset$　　3 $\varnothing$　　4 异面或平行　　5 $l/\!/m$

11.3.3 平面与平面平行

前面我们已经通过棱柱直观地认识了平面与平面平行，并且知道两个平面的位置关系只有相交、平行两种. 一般地，平面与平面的位置关系可以用图 11-3-18 表示.

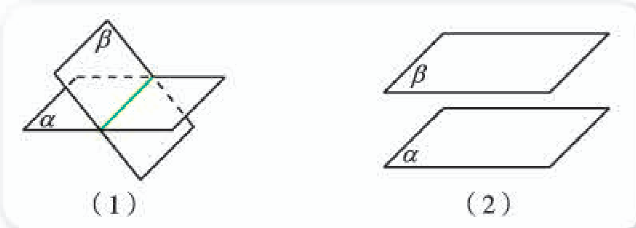


图 11-3-18

而且我们还知道，如果平面 α 与平面 β 没有公共点，则 $\alpha /\!/ \beta$.

同直线与平面平行类似，用定义来判定平面与平面平行并不容易，因此我们有必要寻求其他的判定平面与平面平行的方法.

尝试与发现

如图 11-3-19 所示，假设直线 l 与直线 m 都在平面 α 内，且 $l \cap m \neq \varnothing$，将直线 l 与直线 m 同时平移出平面 α（记平移后的直线分别为 l' 与 m'），则 $l /\!/ l'$，$m /\!/ m'$. 设 l' 与 m' 确定的平面为 β. 判断平面 α 与平面 β 的位置关系，并说明理由.

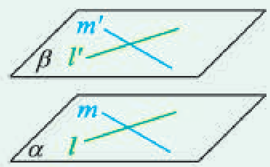


图 11-3-19

直观上可以猜出，α 与 β 没有公共点，即 $\alpha /\!/ \beta$. 这个猜测是否正确呢？如图 11-3-20 所示，假设 α 与 β 有公共点，且 $\alpha \cap \beta = k$.

由 $l /\!/ l'$，$l \subset \alpha$ 且 $l' \not\subset \alpha$，可知 $l' /\!/ \alpha$. 又因为 $l' \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = k$，所以 $l' /\!/ k$. 同理有 $m' /\!/ k$.

因此 $m' /\!/ l'$，这与 l' 与 m' 相交矛盾，所以 $\alpha /\!/ \beta$.

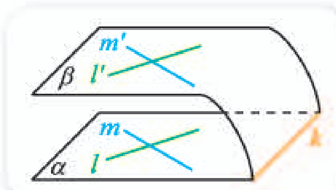


图 11-3-20

一般地，我们可以得出如下**平面与平面平行的判定定理**（简称为面面平行的判定定理）.

如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

这可以用符号表示为

如果 $l \subset \alpha$，$m \subset \alpha$，$l \cap m \neq$ $\boxed{1}$____，$l /\!/ \beta$，$\boxed{2}$____，则 $\alpha /\!/ \beta$.

这给出了面面平行的一个充分条件.

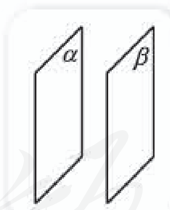


图 11-3-21

根据上述结果，在画两个平面平行时，通常把表示这两个平面的平行四边形的相邻两边分别画成平行线，如图 11-3-18(2) 和 11-3-21 所示.

例 1 如图 11-3-22 所示，已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，D，E，F 分别是 PA，PB，PC 的中点.

求证：面 $DEF /\!/$ 面 ABC.

证明 在 $\triangle PAB$ 中，因为 D，E 分别是 PA，PB 的

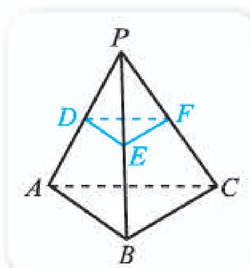


图 11-3-22

中点，所以 $DE/\!/AB$.

又知 $DE\not\subset$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，因此 $DE/\!/$ 平面 ABC.

同理，$EF/\!/$ 平面 ABC.

又因为 $DE\cap EF=E$，所以由面面平行的判定定理可得

$$\text{面 } DEF/\!/\text{面 } ABC.$$

利用线面平行的判定定理，由面面平行的判定定理可得：

推论 如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线，则这两个平面平行.

这个推论也可用来判定面面平行.

下面我们来探讨，如果平面 α 与平面 β 平行，能得出一些什么性质.

想一想

如果一个平面内存在无数条直线平行于另一个平面，那么这两个平面一定平行吗?

尝试与发现

当 $\alpha/\!/\beta$ 时，α 与 β 没有公共点. 此时，若 $l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，则 $l\cap m=$ 3 ______. 这就是说，l 与 m 的位置关系是 4 ______. 那么，什么情况下，l 与 m 平行呢?

一般地，我们可以证明如下**平面与平面平行的性质定理**（简称为面面平行的性质定理）.

如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行.

这可以用符号表示为

$$\text{如果 } \alpha/\!/\beta,\ \alpha\cap\gamma=l,\ \beta\cap\gamma=m,\ \text{则} \boxed{5}\_\_\_\_.$$

这给出了面面平行的一个必要条件.

证明 如图 11-3-23 所示，因为 $\alpha/\!/\beta$，所以 α 与 β 没有公共点.

又因为 $l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，所以

$$l\cap m=\varnothing.$$

注意到 $l\subset\gamma$ 且 $m\subset\gamma$，所以 l 与 m 共面且没有公共点，即 $l/\!/m$.

面面平行的性质定理说明，可以利用空间中的“面面平行”去证明空间中的“线线平行”.

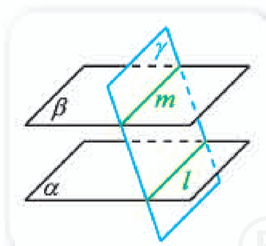


图 11-3-23

例 2 如图 11-3-24 所示，已知 α，β，γ 都是平面，且 $\alpha/\!/\beta/\!/\gamma$，两条直线 l，m 分别与平面 α，β，γ 相交于点 A，B，C 和点 D，E，F.

求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

证明 连接 DC，设 DC 与平面 β 相交于点 G，则平面 ACD 与平面 α，β 分别相交于直线 AD，BG，平面 DCF 与平面 β，γ 分别相交于直线 GE，CF.

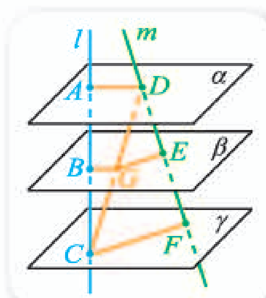


图 11-3-24

因为 $\alpha /\!/ \beta$，所以 $BG /\!/ AD$，因此 $\triangle CBG \backsim \triangle CAD$，因此

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC}.$$

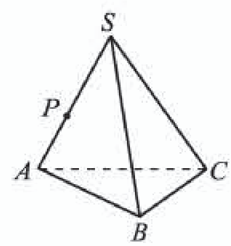
同理可得 $\frac{DG}{GC}=\frac{DE}{EF}$. 因此 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

例 2 的结论通常可叙述为

两条直线被三个平行平面所截，截得的对应线段成比例.

练习A

1. 已知 α，β，γ 都是平面，那么当 $\alpha /\!/ \beta$ 且 $\beta /\!/ \gamma$ 时，是否一定有 $\alpha /\!/ \gamma$（即平面平行是否具有传递性）？为什么？
2. 求证：如果两个平面平行，那么在其中一个平面内的直线平行于另外一个平面.
3. 如图所示是一个三棱锥，欲过点 P 作一个截面，使得截面与底面平行，该怎样在侧面上画出截线？

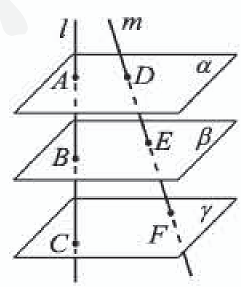


（第 3 题）

4. 判断下列命题的真假.
   (1) 如果两个平面不相交，那么它们就没有公共点；
   (2) 如果一个平面内有两条直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行；
   (3) 如果一个平面内的任何一条直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行；
   (4) 分别在两个平行平面内的两条直线平行.
5. 如果一条直线与两个平行平面中的一个平行，写出这条直线与另一个平面的位置关系.

练习B

1. 判断下列命题的真假.
   (1) 过不在平面内的一点，有且只有一个平面与这个平面平行；
   (2) 过不在平面内的一条直线，有且只有一个平面与这个平面平行；
   (3) 给定两个平行平面中一个平面内的一条直线，则在另一个平面内有且只有一条直线与这条直线平行.
2. 如图，已知 α，β，γ 都是平面，且 $\alpha /\!/ \beta /\!/ \gamma$，两条直线 l，m 分别与平面 α，β，γ 相交于点 A，B，C 和点 D，E，F. 已知 $AC=14$ cm，$DE=5$ cm，$AB:BC=3:4$，求 AB，BC，EF 的长.

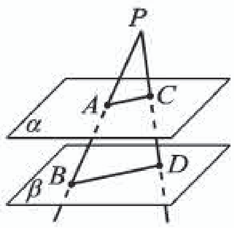


（第 2 题）

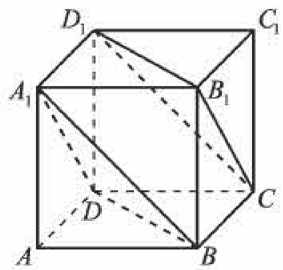
3 如图，已知$\alpha // \beta$，点 P 是平面α，β 外的一点，直线 PA 和 PC 分别与β相交于 B 和 D.

(1) 求证：$AC // BD$；

(2) 已知 $PA=4$ cm，$AB=5$ cm，$PC=3$ cm，求 PD 的长.



（第 3 题）



（第 4 题）

4 求证：如图所示正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $A_1BD//$平面 CB_1D_1.

5 求证：夹在两个平行平面间的两条平行线段相等.

1 $\varnothing$　2 $m//\beta$　3 $\varnothing$　4 异面或平行　5 $l//m$

习题11-3A

1 判断下列命题的真假.

(1) 过直线外一点可以作且只可以作一条直线与这条直线平行；

(2) 过平面外一点可以作无数个平面与这个平面平行.

2 判断下列命题的真假.

(1) $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\not\subset\beta$，$n\not\subset\beta\Rightarrow\alpha//\beta$；

(2) $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta\Rightarrow m//n$；

(3) $\alpha//\beta$，$l\subset\beta\Rightarrow l//\alpha$.

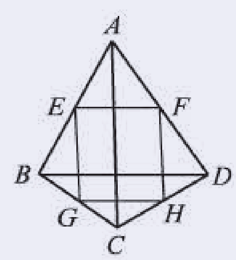
3 在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，分别写出与以下对象平行的所有面.

(1) 直线 AB；　　(2) 面 $ABCD$.

4 如图，已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别为 AB，AD，BC，CD 的中点. 求证：

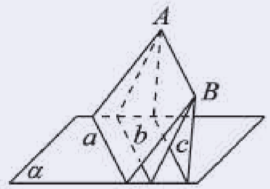
(1) E，F，G，H 共面；

(2) $AC//$面 $EFHG$，$BD//$面 $EFHG$.

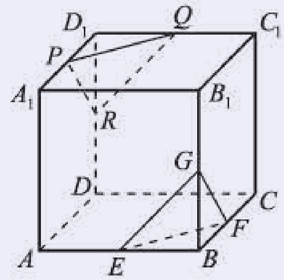


（第 4 题）

5. 如图，已知直线 AB 平行于平面 α，经过 AB 的 3 个平面和平面 α 分别相交于直线 a，b，c，求证：$a /\!/ b /\!/ c$.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，P，Q，R 都是所在棱的中点．求证：面 $PQR /\!/$ 面 EFG.

7. 已知棱长为 a 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为 CD，AD 的中点．求证：四边形 MNA_1C_1 是梯形．

习题11-3B

1. 判断下列命题的真假．

（1）平行于同一条直线的两条直线平行；

（2）平行于同一条直线的两个平面平行；

（3）平行于同一个平面的两条直线平行；

（4）平行于同一个平面的两个平面平行．

2. 判断下列命题的真假．

（1）若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l /\!/ \alpha$；

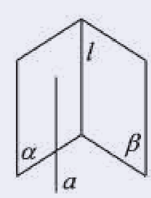
（2）若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都平行；

（3）若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都没有公共点；

（4）如果两条平行直线中的一条与一个平面平行，则另一条直线也与这个平面平行．

3. 已知平面 α 与平面 β 平行，直线 AB，AC 分别与 α，β 交于 D，B 和 E，C，求证：

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

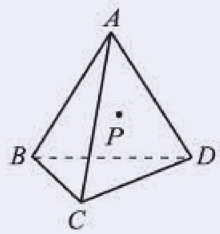


（第 4 题）

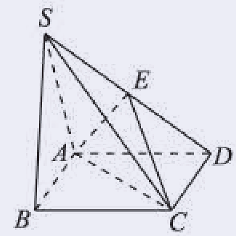
4. 如图，已知 $\alpha \cap \beta = l$，$a /\!/ \alpha$，$a /\!/ \beta$，求证：$a /\!/ l$.

5. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，E，F 分别是 A_1B_1，A_1D_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点．求证：面 $AMN /\!/$ 面 $EFDB$.

6 如图，P 是三棱锥 $A\text{-}BCD$ 侧面 ACD 上一点，过点 P 作一个截面，使得 AB 与 CD 都与截面平行．请作出截面与三棱锥各面的交线，并写出作法．



（第 6 题）

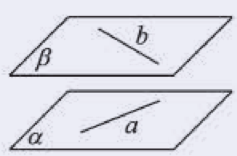


（第 7 题）

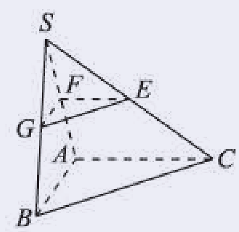
7 如图，棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，底面是平行四边形，E 为 SD 的中点．求证：$SB\parallel$ 面 AEC．

习题11-3C

1 如图，a，b 是异面直线，$a\subset\alpha$，$a\parallel\beta$，$b\subset\beta$，$b\parallel\alpha$，求证：$\alpha\parallel\beta$．



（第 1 题）



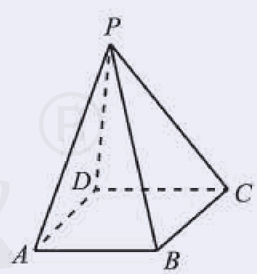
（第 2 题）

2 如图，三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，E，F，G 分别为 SC，SA，SB 上的点，而且 $FE\parallel AC$，$FG\parallel AB$，求证：$GE\parallel BC$．

3 如图所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$．回答下面的问题．

(1) 在侧面 PAB 中能否作一条直线段使其与 DC 平行？如果能，请写出作图过程并给出证明；如果不能，请说明理由．

(2) 在侧面 PBC 中能否作一条直线段使其与 AD 平行？如果能，请写出作图过程并给出证明；如果不能，请说明理由．



（第 3 题）

11.4　空间中的垂直关系

11.4.1　直线与平面垂直

1. 直线与直线所成角

初中几何中已经提到，两条直线相交，可以形成四个角，其中有些角是对顶角，有些角是邻补角，而且对顶角相等，邻补角互补．如图 11-4-1 中，直线 l 与直线 m 相交形成的四个角中，$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是对顶角，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是邻补角，因此

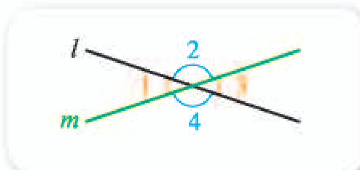


图 11-4-1

$$\angle 1=\angle 3,\ \angle 1+\angle 2=180^\circ.$$

习惯上，两条相交直线所成角的大小，指的是它们相交所得到的不大于直角的角的大小．例如，图 11-4-1 中，直线 l 与直线 m 所成角的大小，指的是 $\angle 1$ 或 $\angle 3$ 的大小．

从几何体等的学习中，我们已经知道：空间中的两条直线，有可能相交，也有可能不相交；当两条直线不相交时，它们要么平行，要么异面；不存在任何一个平面，能同时过两条异面直线．

尝试与发现

如图 11-4-2 所示正方体中，AB 与 B_1C_1 异面，AB 与 B_1D_1 也异面．

(1) 直观上，你认为这两种异面有什么区别？

(2) 如果要利用角的大小来区分这两种异面，你认为该怎样做？

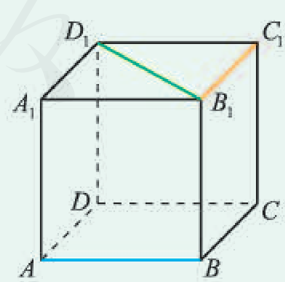


图 11-4-2

一般地，如果 a，b 是空间中的两条异面直线，过空间中任意一点，分别作与 a，b 平行或重合的直线 a'，b'，则 a'与 b'所成角的大小，称为**异面**

直线 a 与 b 所成角的大小.

例如，图 11-4-2 中，AB 与 B_1C_1 所成角的大小，等于 A_1B_1 与 B_1C_1 所成角的大小，即为 **1** ______；AB 与 B_1D_1 所成角的大小，等于 A_1B_1 与 B_1D_1 所成角的大小，即为 **2** ______.

为了方便起见，规定空间中两条平行直线所成角的大小为 0°，这样一来，空间中任意两条直线所成角的大小都是确定的. 两条直线所成的角也称为这两条直线的夹角. 特别地，空间中两条直线 l，m 所成角的大小为 90° 时，称 l 与 m **垂直**，记作 $l \perp m$.

显然，若 $a /\!/ b$ 且 $b \perp c$，则一定有 $a \perp c$.

2. 直线与平面垂直及其判定定理

前面我们已经通过长方体等直观认识了直线与平面的垂直，知道直线 l 与平面 α 垂直，指的是直线 l 与平面 α 内过它们公共点的所有直线都垂直.

由空间中两条直线相互垂直的定义可知，直线 l 与平面 α 垂直的充要条件是，直线 l 与平面 α 内的任意直线都垂直. 这可以用符号表示为

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \forall m \subset \alpha,\ l \perp m.$$

一般地，直线与平面垂直，可以用图 11-4-3 表示.

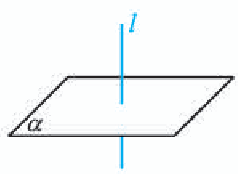


图 11-4-3

图 11-4-4

我们的日常生活中，很多线面的形象都可以抽象成直线与平面垂直，如图 11-4-4 所示.

由于平面内过指定点的直线有无数条，因此利用直线与平面垂直的定义来判定直线与平面垂直是不便于操作的，所以我们有必要寻求其他方法来判定直线与平面垂直.

尝试与发现

如图 11-4-5 所示，$m \subset \alpha$，$n \subset \alpha$，$m \cap n \neq \varnothing$，如果空间中的直线 l 满足 $l \perp m$，那么一定有 $l \perp \alpha$ 吗？如果 $l \perp m$ 且 $l \perp n$ 呢？利用合适的实物演示，并猜测直线与平面垂直的判定方法.

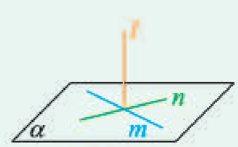


图 11-4-5

一般地，我们可以归纳出如下**直线与平面垂直的判定定理**（简称为线面垂直的判定定理）.

如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则这条直线与这个平面垂直.

这就是说，如果 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，3 ________，$l\perp m$，$l\perp n$，则 $l\perp\alpha$. 这给出了线面垂直的一个充分条件.

例 1 地面上插有一根直杆，将地面看成平面，只借助于绳子与米尺，你能检测出直杆与地面是否垂直吗？写出你的方案并说明理由.

分析 根据线面垂直的判定定理，只需检测直杆是否与地面上的两条相交直线垂直即可. 又因为利用米尺可以量长度，所以可以借助勾股定理来检测.

解 如图 11-4-6 所示，将绳子的一端固定在直杆的 A 处，并使得 $AB=0.8$ m. 截取绳子的长度，使得绳长为 1 m. 拉紧绳子，并把它不固定的那端放在地面上与 B 不共线的两点 C，D 处. 测量 BC 与 BD 的长度，如果它们的长度都是 0.6 m，那么直杆就和地面垂直.

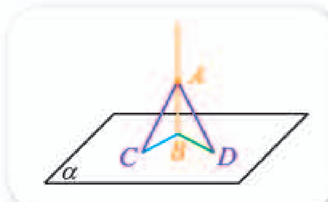


图 11-4-6

这是因为在$\triangle ABC$ 中，如果 $AB=0.8$ m，$AC=1$ m，$BC=0.6$ m，那么

$$AB^2+BC^2=AC^2,$$

所以$\angle ABC=90^\circ$，即 $AB\perp BC$.

同理可知 $BD=0.6$ m 时，有 $AB\perp BD$.

又因为 B，C，D 3 点不共线，所以 $AB\perp$面 BCD，即直杆与地面垂直.

例 2 如图 11-4-7 所示的四棱锥 S-$ABCD$ 中，已知底面 $ABCD$ 是一个平行四边形，$AC\cap BD=O$，且 $SA=SC$，$SB=SD$. 求证：$SO\perp$面 $ABCD$.

证明 由已知可得 O 为 AC 的中点.

在$\triangle SAC$ 中，因为 $SA=SC$，且 $AO=OC$，所以由等腰三角形三线合一可知

$$SO\perp AC.$$

同理，$SO\perp BD$.

又因为 $AC\cap BD=O$，所以 $SO\perp$面 $ABCD$.

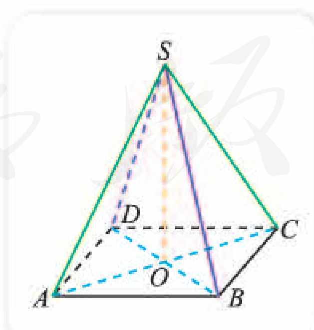


图 11-4-7

例 2 中，SO 实际上是四棱锥的高，因此利用线面垂直的判定定理，可以找出几何体的高.

3. 直线与平面垂直的性质

尝试与发现

如果直线 a 垂直于一个平面 α，直线 b 与直线 a 平行，那么直线 b 与平面 α 是否垂直？利用合适的实物演示，猜测结果并说明理由.

一般地，我们可以证明结论：如果两条平行直线中，有一条直线垂直于一个平面，那么另一条直线也垂直于这个平面.

证明 如图 11-4-8 所示，要证明这个结论，只要证明 $l//m$ 且 $l\perp\alpha$ 时，能够推出 $m\perp\alpha$ 即可.

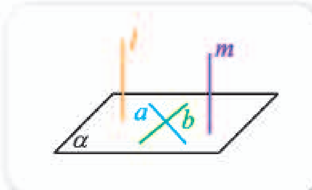


图 11-4-8

事实上，设直线 a，b 为平面 α 内的任意两条相交直线，则由 $l\perp\alpha$ 可知

$$l\perp a，l\perp b.$$

又因为 $l//m$，根据空间中两条直线互相垂直的定义知

$$m\perp a，m\perp b，$$

所以根据线面垂直的判定定理得 $m\perp\alpha$.

尝试与发现

如果两条直线同时垂直于一个平面，那么这两条直线具有怎样的位置关系？利用合适的实物演示，猜测结果并说明理由.

一般地，我们可以归纳出**直线与平面垂直的性质定理**（简称为线面垂直的性质定理）.

如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行.

证明 如图 11-4-9 所示，$l\perp\alpha$，$m\perp\alpha$，设 $m\cap\alpha=O$.

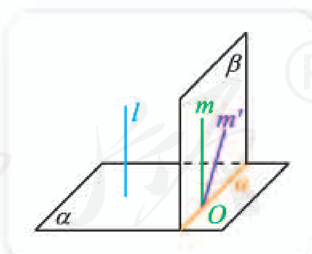


图 11-4-9

假设直线 m 不与直线 l 平行，则过点 O 可作直线 m' 与 l 平行. 由线面垂直的性质定理可知 $m'\perp\alpha$.

因为 $m\cap m'=O$，所以 m 与 m' 能确定一个平面，记为 β，设 $\alpha\cap\beta=a$.

由 $m\perp\alpha$，$m'\perp\alpha$ 可知 $m\perp a$，$m'\perp a$. 这样一来，在平面 β 内，过点 O 有两条不同的直线都与直线 a 垂直，这是不可能的.

因此假设不成立，即 $l//m$.

上述证明过程也说明，过空间中一点，有且只有一条直线与已知平面垂直.

4. 直线与平面垂直的应用

我们已经知道，如果 A 是平面 α 外一点，B 是平面 α 内一点，则 $AB\perp\alpha$ 时，AB 是平面 α 的垂线段. 类似地，如果 C 是平面 α 内一点，且 AC 与 α 不垂直，则称 AC 是平面 α 的**斜线段**（相应地，直线 AC 称为平面 α 的**斜线**），称 C 为**斜足**.

不难看出，过平面外同一点的垂线段与斜线段，能够看成一个直角三角形的两条边. 如图 11-4-10 中，AB 是平面 α 的垂线段，AC 是平面 α 的斜线段，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形，其中 $AB\perp BC$. 另外，因为 B 为 A 在平面 α 内的射影，所以直线 BC 称为直线 AC 在平面 α 内的射影. 特别地，$\angle ACB$ 称为直线 AC 与平面 α 所成的角.

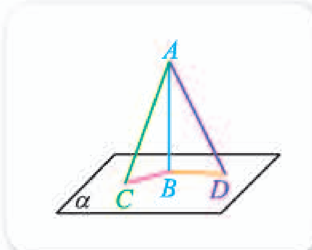


图 11-4-10

类似地，图 11-4-10 中，$\triangle ABD$ 也是直角三角形，$AB\perp BD$，且直线 BD 为直线 AD 在平面 α 内的射影，$\angle ADB$ 为直线 AD 与平面 α 所成的角.

由勾股定理不难看出，图 11-4-10 中，$AC=AD$ 的充要条件是

$$BC=BD \text{ 或 } \angle ACB=\angle ADB.$$

例 3 如图 11-4-11 所示三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，$AB\perp BC$，且 $AB=BC=2$，$SA=SB=SC=\sqrt{6}$，求这个三棱锥的体积.

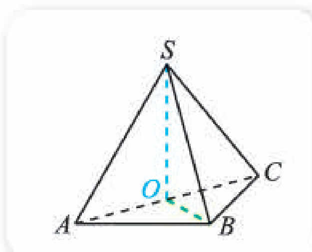


图 11-4-11

分析 为了求出这个三棱锥的体积，关键是作出三棱锥的高，也就是要找到 S 在底面的射影.

解 设 S 在底面的射影为 O，则由 $SA=SB=SC$，有 $OA=OB=OC$，即 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，又因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形，所以 O 是线段 AC 的中点.

因为

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2},$$

所以 $OA=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，又因为 $\triangle SOA$ 是直角三角形，从而

$$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{6-2}=2.$$

因此所求体积为

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times BC\times SO=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

例 3 说明，利用线面垂直，可以找出点到平面的距离，从而求出一般几何体的高，进而得到几何体的体积等.

另外，因为直线与平面平行时直线与平面的距离，以及两平行平面之间的距离，都是通过点到平面的距离来定义的，所以我们也可以利用点到平面的距离来求出直线与平面的距离，以及两平行平面之间的距离.

例 4 如图 11-4-12 所示，已知 AB 是平面 α 的一条垂线，AC 是平面 α 的一条斜线，$l\subset\alpha$，$l\perp BC$. 求证：$l\perp AC$.

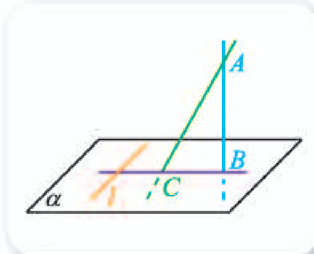


图 11-4-12

证明 因为 $AB\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，所以

$$AB\perp l.$$

又因为 $l\perp BC$ 且 $AB\cap BC=B$，所以

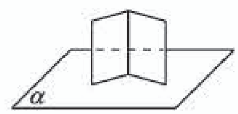
$$l\perp \text{面 } ABC,$$

而且 $AC\subset$ 面 ABC，所以 $l\perp AC$.

例 4 的结果可以简述为“平面内垂直于射影的直线也垂直于斜线”.

练习A

1. 如果一条直线垂直于平面内的两条平行直线，那么这条直线垂直于这个平面吗？举例说明.
2. 如图，拿一张矩形的纸对折后略微展开，竖立在桌面上，说明折痕为什么和桌面垂直.



（第 2 题）

3. 三角形的两边，可以同时垂直于同一个平面吗？说明理由.
4. 已知两个平行平面中，有一个平面与一条已知直线垂直，写出另一个平面与这条直线的位置关系.
5. 在空间中，过任意一点都存在一条且只有一条直线与已知直线垂直吗？为什么？

练习B

1. 设 AB 是空间中的一条线段，则 AB 的垂直平分线有多少条？这些垂直平分线共面吗？如果共面，AB 与这个平面垂直吗？这个平面可以由 AB 的两条垂直平分线确定吗？
2. 判断下列命题的真假.

   (1) 如果一条直线垂直于一个平面，那么这条直线与这个平面内的任何直线都垂直；

   (2) 如果一条直线与一个平面不垂直，那么这条直线与这个平面内的任何直线都不垂直；

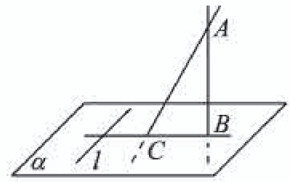
   (3) 如果一条直线垂直于平面内的无数条直线，则这条直线与这个平面垂直.
3. 如果一条直线垂直于一个平面内的

   (1) 三角形的两条边；　(2) 梯形的两条边；　(3) 圆的两条直径.

   分别判断这条直线是否与平面垂直，并说明理由.

4. 已知平面 α 和直线 a，b，如果 $a // \alpha$，且 $b \perp a$，那么 $b \perp \alpha$ 是否一定正确？举例说明．

5. 如图所示，已知 AB 是平面 α 的一条垂线，AC 是平面 α 的一条斜线，$l \subset \alpha$，$l \perp AC$．求证：$l \perp BC$（即"平面内垂直于斜线的直线也垂直于射影"）．



（第 5 题）

1 90°　　2 45°　　3 $m \cap n \neq \varnothing$　　4 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$

11.4.2 平面与平面垂直

1. 二面角

情境与问题

如图 11-4-13 所示，笔记本电脑在打开的过程中，会给人以面面"夹角"变大的感觉．你认为应该怎样刻画面面"夹角"呢？

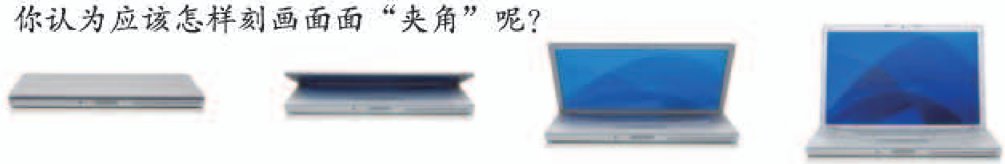


图 11-4-13

一般地，平面内的一条直线把一个平面分成两部分，其中的每一部分都称为一个半平面．从一条直线出发的两个半平面所组成的图形称为**二面角**，这条直线称为二面角的棱，这两个半平面称为二面角的面．

如图 11-4-14 所示，以 AB 为棱，α 和 β 为半平面的二面角，通常记作二面角 α-AB-β．如果 C 和 D 分别是半平面 α 和 β 内的点，那么这个二面角也可记作 C-AB-D．那么如何来刻画二面角的大小呢？

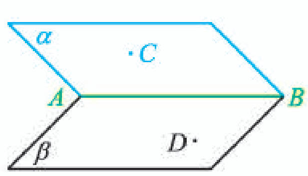


图 11-4-14

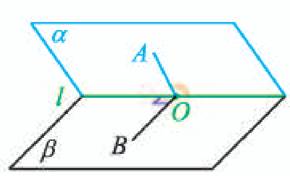


图 11-4-15

如图 11-4-15 所示，在二面角 α-l-β 的棱上任取一点 O，以 O 为垂足，分别在半平面 α 和 β 内作垂直于棱的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 所成的角称为**二面角的平面角**．二面角的大小用它的平面角的大小来度量，即二面角大小等于它的平面角大小．特别地，平面角是直角的二面角称为**直二面角**．

例 1 如图 11-4-16 所示，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，求二面角 D'-AB-D 的大小．

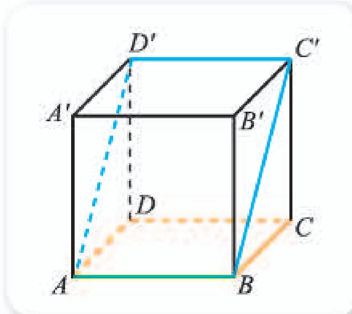


图 11-4-16

解 连接 $D'A$ 和 $C'B$．由已知有

$$AB \perp \text{面 } ADD'A',$$

所以

$$AD' \perp AB,\ AD \perp AB,$$

因此 $\angle D'AD$ 即为二面角 D'-AB-D 的平面角．

由于 $\triangle D'AD$ 是等腰直角三角形，因此 $\angle D'AD = 45°$，所以二面角 D'-AB-D 的大小是 45°．

一般地，两个平面相交时，它们所成角的大小，指的是它们所形成的 4 个二面角中，不大于 90°的角的大小．因此，如图 11-4-16 中，平面 $ABC'D'$ 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 1 ________，平面 $ADD'A'$ 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 2 ________．

2. 平面与平面垂直

一般地，如果两个平面 α 与 β 所成角的大小为 90°，则称这两个平面互相垂直，记作 $\alpha \perp \beta$．作图时，两个平面互相垂直可画成图 11-4-17 所示的样子．

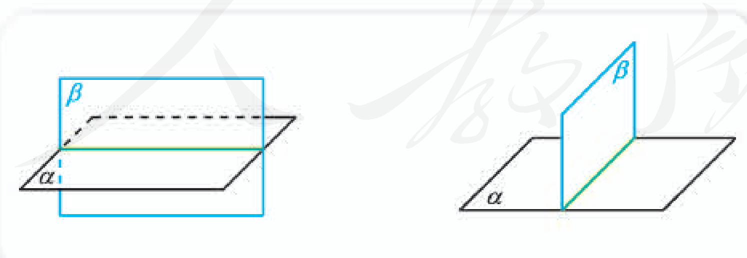


图 11-4-17

不难看到，利用二面角来判断两个平面是否互相垂直有时候是不方便的，那么有没有其他的判断面面垂直的办法呢？

情境与问题

如图 11-4-18 所示，建筑工人在砌墙时，为了保证所砌墙面与水平面垂直，通常会用铅锤等先构造出一条与水平面垂直的线，然后紧贴线来砌墙.

(1) 你知道为什么此时墙面就一定会与水平面垂直吗?

(2) 从数学的角度，这一现象能概括出什么结论? 试分别用自然语言与符号语言描述.

图 11-4-18

一般地，我们可以归纳出如下**平面与平面垂直的判定定理**（简称为面面垂直的判定定理）.

如果一个平面经过另外一个平面的一条垂线，则这两个平面互相垂直.

这就是说，如果 $l\subset\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$. 这给出了面面垂直的一个充分条件.

实际上，当 $l\subset\alpha$，$l\perp\beta$ 时，α 与 β 一定相交. 如图 11-4-19 所示，设 $\alpha\cap\beta=m$，$l\cap\beta=O$. 过 O 在平面 β 内作与 m 垂直的直线 OA，则有 $l\perp OA$. 从而可知 α 与 β 所成角的大小为 $90°$，因此 $\alpha\perp\beta$.

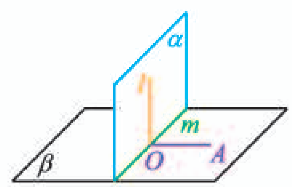


图 11-4-19

由面面垂直的判定定理，容易证明直棱柱的每个侧面都与底面互相垂直，理由是直棱柱的侧棱垂直于底面.

反过来，如果平面 α 与平面 β 互相垂直，能得出一些什么性质呢? 一般地，可以证明如下**平面与平面垂直的性质定理**（简称为面面垂直的性质定理）.

如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

这可以用符号表示为

如果 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$AO\subset\alpha$，$AO\perp m$，则 $AO\perp\beta$.

这给出了面面垂直的一个必要条件.

证明 如图 11-4-20 所示，设 $AO\cap\beta=O$. 过 O 在平面 β 内作与 m 垂直的直线 OB，则 $\angle AOB$ 为二面角 A-m-B 的平面角.

因为 $\alpha\perp\beta$，所以 $\angle AOB=90°$，因此

$$AO\perp OB.$$

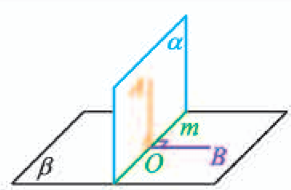


图 11-4-20

又因为 $AO\perp m$，$m\cap OB=O$，$m\subset\beta$ 且 $OB\subset\beta$，所以 $AO\perp\beta$.

值得注意的是，面面垂直的判定定理与性质定理是有区别的，前者是由线面垂直得到面面垂直，后者是由面面垂直得到线面垂直.

例 2 如图 11-4-21 所示，已知 $\alpha\perp\beta$，在 α 与 β 的交线上取线段 $AB=\sqrt{3}$，且 AC，BD 分别在平面 α 和平面 β 内，它们都垂直于交线 AB，并且 $AC=1$，$BD=2$，求 CD 的长.

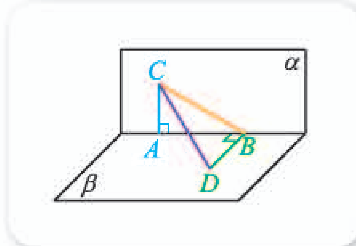


图 11-4-21

解 连接 BC.

因为 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=AB$，$BD\subset\beta$，$BD\perp AB$，所以 $BD\perp\alpha$. 又因为 $BC\subset\alpha$，所以 $BD\perp BC$，因此 $\triangle CBD$ 是直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中，有

$$BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad}.$$

进而在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，有

$$CD=\sqrt{BC^2+BD^2}=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}.$$

例 3 如图 11-4-22(1)所示，已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=AC=a$，AD 是斜边 BC 上的高. 如图 11-4-22(2)所示，以 AD 为折痕将 $\triangle ABC$ 折起，使 $\angle BDC$ 为直角. 在图 11-4-22(2)中，求证：

(1) 面 $ABD\perp$ 面 BDC，面 $ACD\perp$ 面 BDC；

(2) $\angle BAC=60^\circ$.

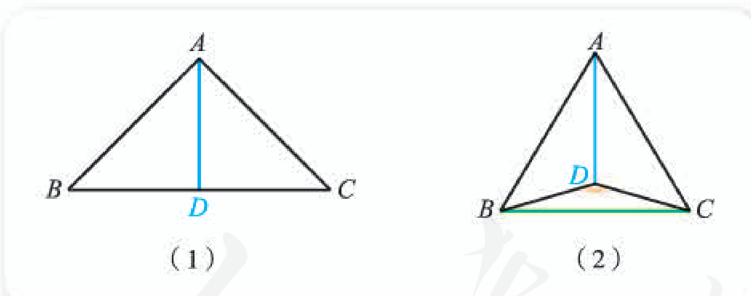


图 11-4-22

证明 (1) 由已知有 $AD\perp BD$，$AD\perp DC$，因此在图 11-4-22(2)中，有

$$AD\perp \text{面 } BDC.$$

又因为 $AD\subset$ 面 ABD，所以面 $ABD\perp$ 面 BDC.

同理，面 $ACD\perp$ 面 BDC.

(2) 因为 $AB=AC=a$，所以在图 11-4-22(1)中，有 $BC=\sqrt{2}a$. 从而

$$BD=DC=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

因此图 11-4-22(2)中 $\triangle BDC$ 是等腰直角三角形，所以

$$BC=\sqrt{2}BD=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=a.$$

从而 $AB=AC=BC$，所以

$$\angle BAC=60^\circ.$$

练习A

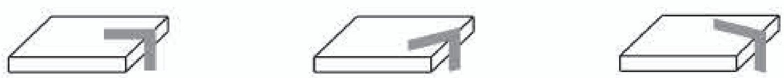
1. 在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求二面角 $A'\text{-}AB\text{-}D$ 的大小.
2. 长方体任意两个相邻的面是否一定垂直?
3. 互相垂直的两个平面将空间分成几部分? 两两互相垂直的三个平面呢?
4. 判断下列命题的真假.

   (1) 过平面外一点只可作一个平面与已知平面垂直;

   (2) 已知 α，β，γ 都是平面，则 $\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$ 时，$\alpha\perp\gamma$.
5. 求证：若 3 条直线 OX，OY，OZ 两两互相垂直，则 3 个平面 XOY，YOZ，ZOX 也两两互相垂直.

练习B

1. 一个平面垂直于二面角的棱，它和二面角的两个面的交线形成的角就是二面角的一个平面角，对吗? 为什么?
2. 如图，检查工件相邻的两个面是否垂直时，只要将曲尺的一边紧靠在工件的一个面上，另一边在工件的另一个面上转动，观察尺边是否和面密合就可以了. 为什么? 如果不转动可以检查是否垂直吗?

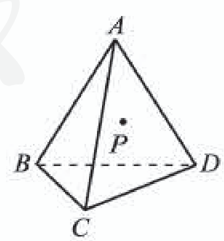


（第 2 题）

3. 判断下列命题的真假.

   (1) 过不在平面内的一条直线可以作无数个平面与已知平面垂直;

   (2) 已知 α，β，γ，δ 都是平面，则 $\alpha/\!/\beta$，$\gamma/\!/\delta$，$\alpha\perp\gamma$ 时，$\beta\perp\delta$.
4. 已知 $\alpha\perp\beta$，在 α 与 β 的交线上取线段 $AB=3$，且 AC，BD 分别在平面 α 和平面 β 内，它们都垂直于交线 AB，并且 $AC=4$，$BD=12$，求 CD 的长.
5. 如图，P 是正三棱锥侧面 ACD 上一点，要在面 ACD 上过点 P 作一条与棱 AB 垂直的线段，该怎样作? 写出作法，并说明理由.



（第 5 题）

1 45°　2 90°　3 $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$　4 $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

习题11-4A

1. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的面所在的平面中，分别写出与下列直线垂直的平面.

(1) AA_1；　　(2) AB；　　(3) B_1C_1.

2. 在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，已知 $AB=\sqrt{3}$，$BB'=1$，求二面角 $B'\text{-}AD\text{-}B$ 的大小.

3. 已知线段 AB，空间中到 A，B 距离相等的点的轨迹是什么?

4. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，则空间中到 A，B，C 距离相等的点的轨迹是什么?

5. 判断下列命题的真假.

(1) $a/\!/b$，$a\perp\alpha\Rightarrow b\perp\alpha$；

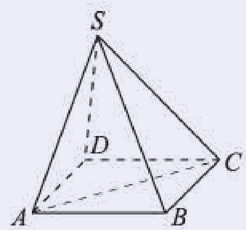
(2) $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha\Rightarrow a/\!/b$；

(3) $a\perp\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，$b/\!/\beta\Rightarrow a\perp b$；

(4) $\alpha/\!/\beta$，$a/\!/b$，$a\perp\alpha\Rightarrow b\perp\beta$.

6. 如图，棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，底面是菱形，且 $SA=SC$. 求证：$AC\perp SD$.

7. 已知棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面是矩形，$AD\perp PD$. 求证：面 $PDC\perp$ 面 $ABCD$.

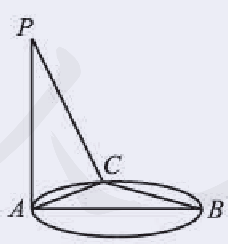


（第 6 题）

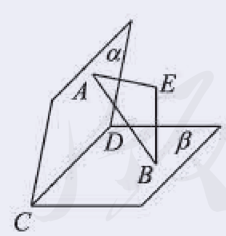
习题11-4B

1. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC$，$DB=DC$. 求证：$BC\perp AD$.

2. 如图，已知 AB 是圆的直径，PA 垂直于圆所在的平面，C 为圆上任意一点. 求证：$BC\perp$ 面 PAC.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\alpha\cap\beta=CD$，$EA\perp\alpha$，$EB\perp\beta$，且 A，B 都为垂足. 求证：$CD\perp AB$.

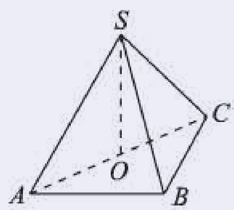
4. 判断下列命题的真假.

(1) $a/\!/\alpha$，$a\perp b\Rightarrow b\perp\alpha$；　　(2) $a\perp b$，$a\perp\alpha\Rightarrow b/\!/\alpha$；

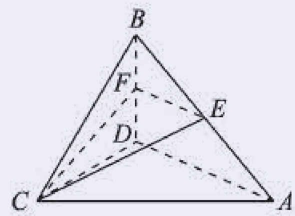
(3) $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，$a/\!/b\Rightarrow\alpha/\!/\beta$；　　(4) $a/\!/\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，$a\perp b\Rightarrow b\perp\beta$.

5. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AC=AD$，$BC=BD$，且 E 是 CD 的中点，求证：面 $ABE\perp$ 面 ACD.

6. 如图，在三棱锥 S-ABC 中，侧面 SAB 与侧面 SAC 均为等腰三角形，$SA=SB=SC$，而且 $\angle ABC=90°$，O 为 AC 的中点，求证：$SO\perp$ 面 ABC.



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，$CB=CD$，$AD\perp BD$，点 E，F 分别是 AB，BD 的中点，求证：

(1) 直线 $EF/\!/$ 面 ACD；

(2) 面 $EFC\perp$ 面 BCD.

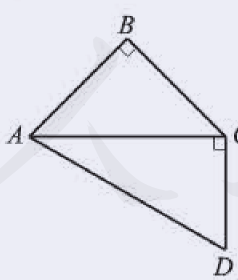
习题11-4C

1. 已知大小为 $60°$ 的二面角的一个面内有一点，它到另一个面的距离是 3，求这个点到二面角的棱的距离.

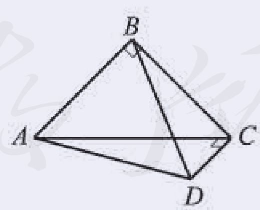
2. 如图(1)所示，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 都是直角三角形，$AB=BC=\sqrt{6}$，$\angle CAD=30°$. 如图(2)所示，把 $\triangle ABC$ 沿 AC 边折起，使 $\triangle ABC$ 所在平面与 $\triangle ACD$ 所在平面垂直，连接 BD.

(1) 求 BD 与平面 ADC 所成的角的余弦值；

(2) 求点 C 到面 ABD 的距离.



(1)



(2)

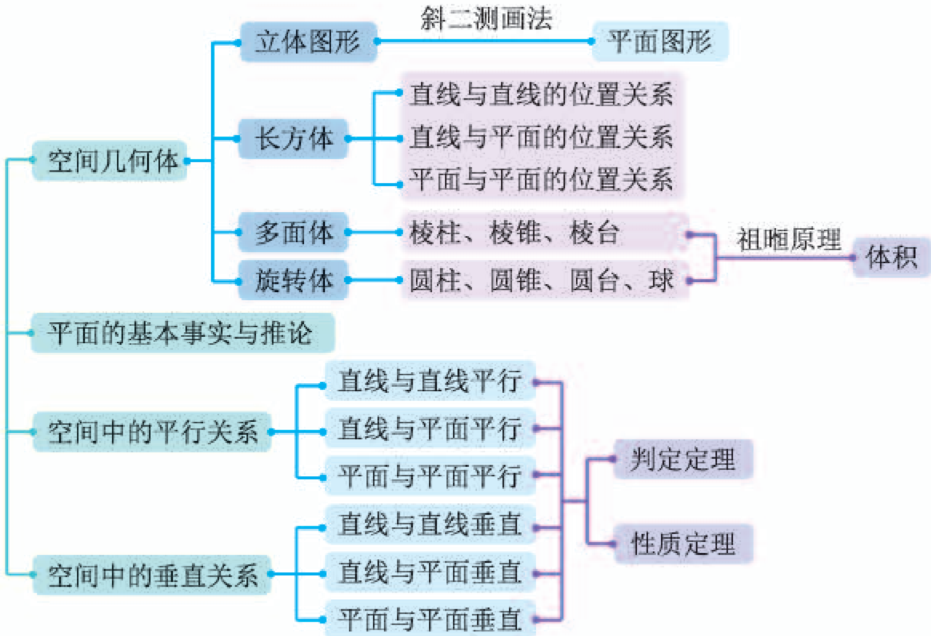
（第 2 题）

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章首先学习了空间几何体，利用长方体总结出了直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，学习了棱柱、棱锥、棱台等多面体，以及圆柱、圆锥、圆台、球等旋转体；然后学习了平面的基本事实与推论；最后讨论了空间中的平行关系和垂直关系，这两种关系的学习都是分成直线与直线、直线与平面、平面与平面进行的，并分别总结出了相应的判定定理和性质定理.

本章的知识结构可用下图表示.



请按照自己的理解试着作出其他样式的知识结构图吧！

02 课题作业

（1）我国古代数学家在几何方面曾作出过多项领先的成果，请查阅有关数学史的资料，了解《墨经》《周髀算经》《九章算术》等著作中涉及几何的成就，整理成论文，并与其他同学交流.

（2）通过书籍或网络搜集几何学发展的历史资料，了解几何学发展过程中，有哪些关键人物，他们分别取得了什么样的突出成果. 自选一个角度，整理成演讲材料，并与其他同学交流.

03 复习题

A 组

1. 判断下列命题的真假.

(1) 四棱柱一定是平行六面体;

(2) 六个面都是矩形的六面体一定是长方体;

(3) 直平行六面体一定是长方体;

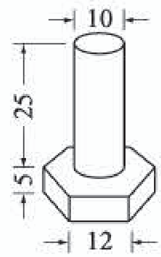
(4) 底面是矩形的四棱柱一定是长方体.

2. 写出棱台中任意两个侧面的位置关系.

3. 已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AC_1=8\sqrt{2}$，$\angle C_1AB=60^\circ$，$\angle C_1AA_1=45^\circ$，求 AD.

4. 已知正六棱柱底面边长为 10 cm，高为 15 cm，求这个正六棱柱的表面积和体积.

5. 已知一种螺杆可看成由六棱柱与圆柱构成的组合体，尺寸如图所示（单位：mm）. 如果电镀一平方米用锌 0.11 kg，则电镀 100 个这样的螺杆需要多少千克锌？（π 取为 3.14，计算结果精确到 0.01.）



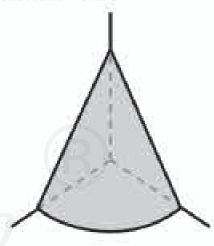
（第 5 题）

6. 过正四棱台各侧棱中点的截面称为正四棱台的中截面. 若正四棱台的两底面边长分别为 3 和 5，求它的中截面的面积.

7. 一块扇形薄铁板的半径长是 30 cm，圆心角是 120°. 用这块薄铁板围成一个圆锥筒，求圆锥筒的容积.

8. 已知圆锥的轴截面是正三角形，求证：它的侧面积是底面积的 2 倍.

9. 如图，在仓库一角有一堆谷，呈四分之一圆锥形. 量得底面弧长为 2.8 m，母线长为 2.2 m. 这堆谷重约多少千克？（谷的密度取为 720 kg/m^3.）



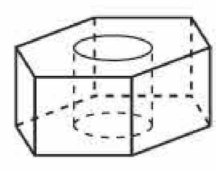
（第 9 题）

10. 在球内有相距 9 cm 的两个平行截面，面积分别为 49π cm^2，400π cm^2，求此球的半径.

11. 海面上，地球球心角 $1'$所对的大圆的圆弧长为 1 n mile（海里），1 n mile 是多少千米？（将地球看成球体，半径取为 6 370 km.）

12. 已知一个圆柱上、下底面的圆周都在一个球面上，已知球的直径为 10，圆柱底面的直径为 6，求球和圆柱的表面积.

13. 如图，有一堆相同规格的六角螺帽毛坯，共重 5.8 kg. 已知螺帽的底面六边形边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm，这一堆螺帽约有多少个？（铁的密度取为 7.8 g/cm^3，π 取为 3.14.）



（第 13 题）

14. 一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？

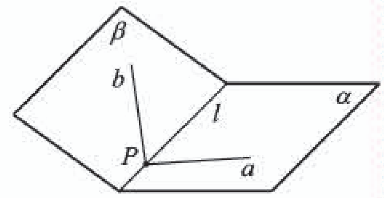
15. 一条直线与两条平行直线都相交，这 3 条直线是否一定共面？为什么？

16. 怎样检查一张桌子的 4 条腿的下端是否在同一平面内？

17. 一个平面能把空间分成几个部分？两个平面呢？3 个平面呢？分别画出示意图.

18. 3 条直线两两相交，可以确定几个平面？

19. 用符号表示图中点、直线、平面的位置关系.



(第 19 题)

20. 如果 a 与 b 异面，a 与 c 异面，则 b 与 c 一定异面吗？为什么？

21. 将下列命题改写成自然语言叙述，并判断它们的真假.

(1) 如果 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in AB$，那么 $C\in\alpha$；

(2) 如果 $A\in\alpha$，$B\notin\alpha$，那么线段 $AB\subset\alpha$.

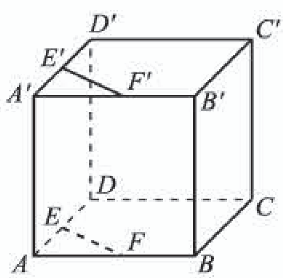
22. 判断下列命题的真假.

(1) $\alpha/\!/\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta\Rightarrow a/\!/b$；　(2) $l\perp\alpha$，$m\subset\beta$，$\alpha/\!/\beta\Rightarrow l\perp m$；

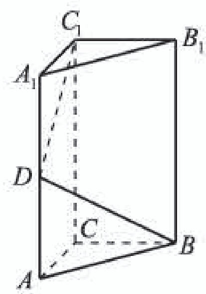
(3) $\alpha\perp\beta$，$l\subset\alpha$，$m\subset\beta\Rightarrow l\perp m$；　(4) $\alpha\cap\beta=a$，$b/\!/a\Rightarrow b/\!/\alpha$；

(5) $\alpha\perp\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\perp b\Rightarrow a\perp\beta$，$b\perp\alpha$.

23. 如图所示正方体中，已知 $AE=A'E'$，$AF=A'F'$，求证：$EF\perp\!\!\!\!=E'F'$.



(第 23 题)



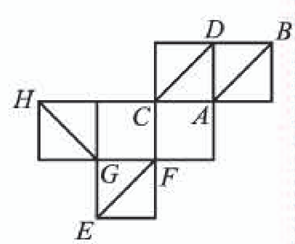
(第 24 题)

24. 如图，直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC=\dfrac{1}{2}AA_1$，D 是棱 AA_1 的中点，$DC_1\perp BD$. 求证：$DC_1\perp BC$.

B 组

1. 一个正方体，如果它的每条棱都增加 1 cm，则它的体积扩大为原来的 8 倍，求这个正方体的棱长.

2. 如图所示是一个正方体的表面展开图，则在正方体中，AB，CD，EF，GH 这 4 条线段所在的直线中，是异面直线的有几对？



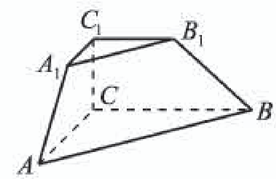
(第 2 题)

3. 侧棱长和底面边长相等的正三棱锥又称为正四面体，一个正四面体的棱长为 a，求这个正四面体的高.

4. 已知正三棱锥的侧棱两两互相垂直，且侧棱长都等于 a，求这个棱锥的表面积和体积.

5. 有一个正四棱台形状的油槽，最多装油 190 L，已知它的两底面边长分别为 60 cm 和 40 cm，求它的深度.

6. 如图所示，已知三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的上、下底面都是等腰直角三角形，$CC_1\perp$面 ABC，$AC=2$，$A_1C_1=1$，$CC_1=1$. 求这个三棱台的全面积.



（第 6 题）

7. 求正三棱柱的内切圆柱和外接圆柱的体积比（以正棱柱两个底面的内切圆面为底面的圆柱称为正棱柱的内切圆柱，以正棱柱两个底面的外接圆面为底面的圆柱称为正棱柱的外接圆柱）.

8. 已知圆锥的母线长为 5 cm，高为 4 cm，求这个圆锥的侧面积和体积.

9. 已知一个等边三角形的边长为 a，这个等边三角形绕其一边所在的直线旋转一周，求所得旋转体的表面积和体积.

10. 我国古代数学名著《九章算术》中“开立圆术”曰：置积尺数，以十六乘之，九而一，所得开立方除之，即立圆径.“开立圆术”相当于给出了已知球的体积 V，求其直径 d 的一个近似公式 $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$. 人们还用过一些类似的近似公式. 根据 $\pi=3.141\,59\cdots$ 判断，下列近似公式中最精确的一个是（　　）.

(A) $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$　　(B) $d\approx\sqrt[3]{2V}$　　(C) $d\approx\sqrt[3]{\frac{300}{157}V}$　　(D) $d\approx\sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$

11. 已知球 O 的半径为 2，一平面截球面所得圆的圆心为 O_1，且 A，B 都是圆 O_1 上的点，$AO_1\perp BO_1$，$AO_1=1$，求$\triangle OAB$ 的面积.

12. 一个圆台的母线长为 20，母线与轴的夹角为 30°，上底面的半径为 15，求圆台的高和下底面的面积.

13. 已知 A，B，C 是球 O 上的 3 点，$AB=10$，$AC=6$，$BC=8$，球 O 的半径等于 13，求球心 O 到面 ABC 的距离.

14. 已知 S，A，B，C 是球 O 表面上的点，$SA\perp$面 ABC，$AB\perp BC$，$SA=AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，求球 O 的表面积.

15. 已知直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上. 若 $AB=3$，$AC=4$，$AB\perp AC$，$AA_1=12$，求球 O 的半径.

16. 已知点 P，A，B，C，D 是球 O 表面上的点，$PA\perp$面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是边长为$\sqrt{3}$的正方形. 若 $PA=2\sqrt{6}$，求$\triangle OAB$ 的面积.

17. 已知 A，B 是球 O 的球面上两点，$\angle AOB=90°$，C 为球面上的动点. 若三棱锥 $O\text{-}ABC$ 体积的最大值为 36，求球 O 的表面积.

18. 判断下列命题的真假.

(1) 若 $m \perp \alpha$，$n // \alpha$，则 $m \perp n$；　　(2) 若 $\alpha // \beta$，$\beta // \gamma$，$m \perp \alpha$，则 $m \perp \gamma$；

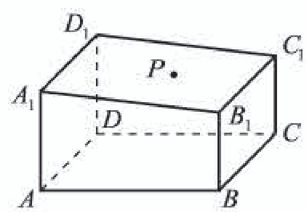
(3) 若 $m // \alpha$，$n // \alpha$，则 $m // n$；　　(4) 若 $\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，则 $\alpha // \beta$.

19. 判断下列命题的真假.

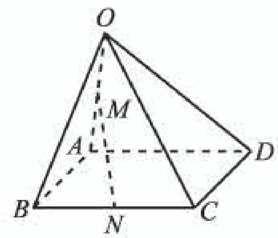
(1) 如果直线 a 上有两个不同的点不在平面 α 内，且到平面 α 的距离相等，则 $a // \alpha$；

(2) 如果直线 a 上有 3 个不同的点不在平面 α 内，且到平面 α 的距离相等，则 $a // \alpha$.

20. 如图所示的一块木料中，$BC //$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，P 为面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，现要用经过 P 和棱 BC 的一个平面将木料锯开，该如何画线？



（第 20 题）



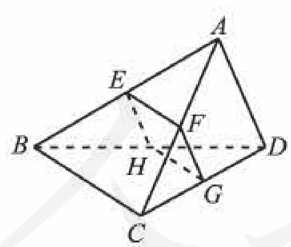
（第 21 题）

21. 如图所示，在四棱锥 $O\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，M 为 OA 的中点，N 为 BC 的中点. 求证：直线 $MN //$ 面 OCD.

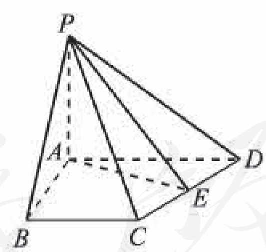
22. 如图，四面体 $ABCD$ 被一平面所截，截面与 4 条棱 AB，AC，CD，BD 相交于 E，F，G，H 4 点，且截面 $EFGH$ 是一个平行四边形.

(1) 求证：$EF // BC$；

(2) 求证：$AD //$ 面 $EFGH$.



（第 22 题）



（第 23 题）

23. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA \perp$ 面 $ABCD$，且 $AB=4$，$BC=3$，$AD=5$，$\angle ABC=90°$，E 是 CD 的中点，求证：面 $PCD \perp$ 面 PAE.

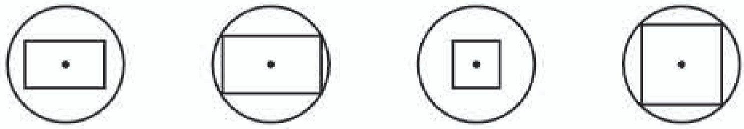
C 组

1. 球面上是否存在共线的 3 个点？为什么？

2. 我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题：在下雨时，用一个

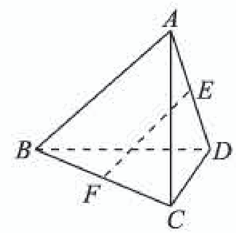
圆台形的天池盆接雨水．天池盆盆口直径为二尺八寸，盆底直径为一尺二寸，盆深一尺八寸．若盆中积水深九寸，求该处的平地降雨量（盆中积水体积与盆口面积之比）．

3. 一个正方体内接于一个球（即正方体的 8 个顶点都在球面上），过球心作一截面，则截面的图形可能是__________．



（第 3 题）

4. 如图所示四面体中，E，F 分别是 AD，BC 的中点，若 $AC=BD=a$，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$\angle BDC=90°$，求证：$BD\perp$面 ACD．



（第 4 题）

5. 设 A，B，C，D 是空间中 4 个不同的点，在下列命题中，不正确的是（　　）．

(A) 若 AC 与 BD 共面，则 AD 与 BC 共面

(B) 若 AC 与 BD 是异面直线，则 AD 与 BC 是异面直线

(C) 若 $AB=AC$，$DB=DC$，则 $AD=BC$

(D) 若 $AB=AC$，$DB=DC$，则 $AD\perp BC$

6. 平面 α 的斜线 AB 交 α 于点 B，过定点 A 的动直线 l 与 AB 垂直，且交 α 于点 C，判断动点 C 的轨迹并说明理由．

7. 已知正三棱锥 $P\text{-}ABC$，点 P，A，B，C 都在半径为$\sqrt{3}$的球面上，若 PA，PB，PC 两两相互垂直，求球心到截面 ABC 的距离．

8. 已知球的直径 $SC=4$，A，B 是该球球面上的两点，$AB=\sqrt{3}$，$\angle ASC=\angle BSC=30°$，求棱锥 $S\text{-}ABC$ 的体积．

9. 如图，水平的广场上有一盏路灯挂在高 10 m 的电线杆顶上，记电线杆的底部为点 A．把路灯看作一个点光源，身高 1.5 m 的女孩站在离点 A 5 m 的点 B 处．回答下面的问题．

(1) 若女孩以 5 m 为半径绕着电线杆走一个圆圈，人影扫过的是什么图形，求这个图形的面积；

(2) 若女孩向点 A 前行 4 m 到达点 D，然后从点 D 出发，沿着以 BD 为对角线的正方形走一圈，画出女孩走一圈时头顶影子的轨迹，说明轨迹的形状．

（第 9 题）

后　记

本套教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，经国家教材委员会专家委员会2019年审核通过.

本套教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧.

我们衷心感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的所有编写人员，尤其是因为种种原因未能参加此次教材修订的专家、学者：丁尔陞、江守礼、房艮孙、张润琦、高尚华、万庆炎、魏榕彬、邱万作、陈研、段发善、李迈岸、陈亦飞、刘长明、郭鸿、王池富……

本套教科书在编写过程中，得到了《普通高中数学课程标准（2017年版）》制定组、国家教材委员会专家委员会等的大力支持. 借此机会，向所有制定组成员、专家委员会成员以及其他为我们教材编写提供过帮助的专家表示衷心的感谢！

我们感谢对本套教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的所有同仁和社会各界朋友：王跃飞、胡细宝、邵丽云、王晓声、曹付生、侯立伟、王中华、王光图、王秀梅、卞文、邓艳强、田媛、史洪波、付一博、吕希、吕晶、朱明鲜、刘超、闫旭、池洪清、阮征、孙国华、牟柏林、李刚、李光勤、李洪岩、何艳国、张伟、张羽、张明、张文刚、张春青、张晶强、金永涛、郑继平、常丽艳、潘戈、薛达志、郑海军、赵争鸣、吴晖湘、戴莉、金盈、舒风杰、李祥广、胡文亮、王玉洁、杨长智、徐会吉、尹玉柱、尹燕花……

本套教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示衷心的感谢！同时也向为本书提供照片的单位表示感谢！

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本套教科书的过程中提出宝贵意见. 我们将集思广益，不断修订，以使教科书日臻完善.

本书责任编辑：王旭刚；美术编辑：史越；整体设计：吕旻、史越；插图绘制：郑海军.

联系方式

电话：010-58758523，010-58758866

电子邮箱：wangxg@pep.com.cn，jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组

2019 年 4 月