教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级 上册

北京出版社

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级 上册

北京教育科学研究院 编

北 京 出 版 社

前　言

亲爱的同学们：

欢迎你们使用本套义务教育教科书！

数学是研究数量关系和空间形式的科学，是人类文化的重要组成部分。通过本套教科书，能够获得良好的数学教育，在数学上得到不同程度的发展。

栏目说明

思考

思考是数学发展的前提，不要放弃任何一个独立思考的机会，甚至在别人已经说出答案而你还没有找到例子或思路的时候也不要放弃。

交流

将你的思路和方法记录下来，有条理地向其他同学或老师表达，耐心倾听他们的意见，调整自己的思路或方法。

探索

严谨观察、细致分析、大胆猜想、细心验证、不断反思，直到找到满意的结论，体会数学探索的艰辛与乐趣。

实践

学好数学不仅要勤于动脑，也要勤于动手。动手画图、计算、列式、填表，将实际问题转化为数学问题，用数学的方法解决问题。

问题解决

你将遇到富有趣味性、挑战性的数学问题。这些问题需要你在理解的基础上，运用所学的数学知识和方法，寻求解决问题的思路和线索，猜想与验证结论，并将解决问题的整个过程有条理地记录下来，和同学们分享。

探究学习

你将面对一个新的情境，需要你发现和提出问题，独立思考，通过归纳、概括、类比、证明，得到新的猜想或规律，或者得到一个崭新的方法。

阅读理解

你将会发现数学发展的悠久历史，体验数学家探索数学的艰辛与快乐，感受数学对其他学科的巨大贡献。数学是人类文化的重要组成部分。

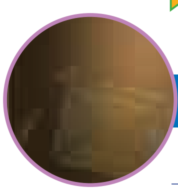
综合与实践

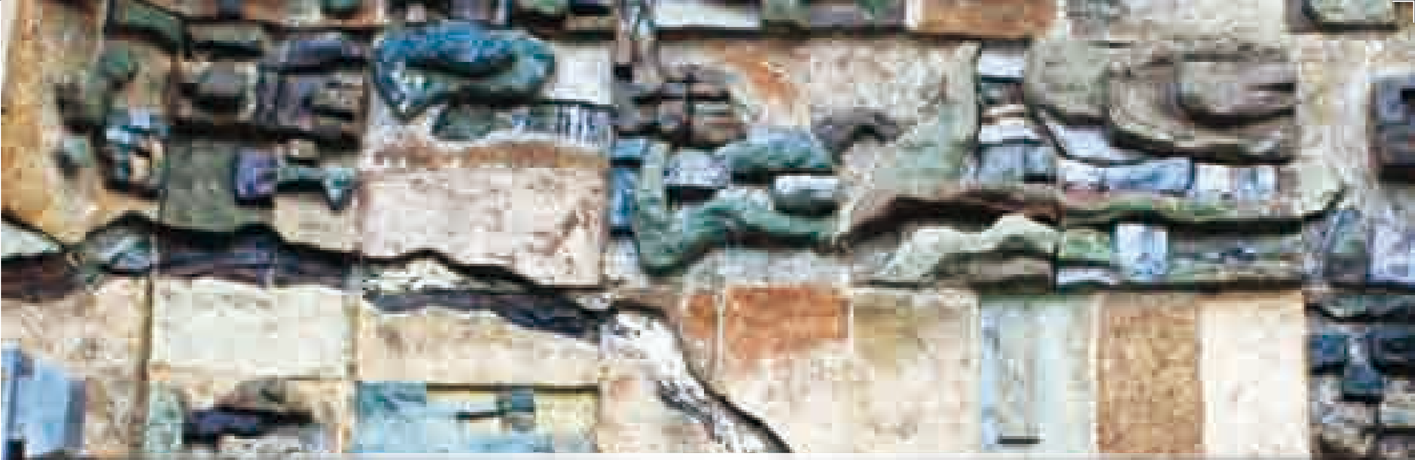
数学既能锤炼思维又具有广泛应用的事实将在这里得到充分的体现。你将尝试综合运用所学的数学概念、原理、方法和思想去解释和解决实际生活中的问题与现象，经历制定方案、调查研究、收集数据、整理数据、分析数据、做出判断、发现规律等过程，感受到数学的魅力。

希望这套数学教科书能够陪伴你度过一个充满智慧、乐趣的初中！

编者　2012 年 10 月

目 录





第十章 分式

为了美化首都，北京市对元大都城墙遗址进行了大规模的修缮、扩建，使它成为一个“春有花、夏有荫、秋有果、冬有青”的景色怡人的公园.

园林设计者计划修建一个面积为100 m^2的长方形花坛.如果原计划花坛的长是 a m，后决定延长15 m，那么，在面积不变的情况下，现在的宽用代数式怎么表示?

一、分式及其性质

10.1 分式

章前页中的问题用代数式表示为

$$100 \div (a+15).$$

两个整数相除，可以表示成分数的形式；两个整式相除时，也可以表示成类似的形式．这样，上面的问题中，花坛的宽可以表示为

$$\frac{100}{a+15}.$$

同样地，下面的代数式

$$10 \div b,\ (x-y) \div y^2,\ (2a+3b) \div (a-b)$$

也可以分别表示为 $\frac{10}{b}$，$\frac{x-y}{y^2}$，$\frac{2a+3b}{a-b}$.

上面的代数式还是整式吗？观察它们的结构，归纳概括出它们的共同特点．

思考

可以看出，代数式

$$\frac{10}{b},\ \frac{x-y}{y^2},\ \frac{2a+3b}{a-b}$$

都不是整式．它们的共同特点是：都有类似于分数的形式，分子和分母都是整式，并且分母中的整式都含有字母．

交流

在上面的式子 $\frac{10}{b}$，$\frac{x-y}{y^2}$，$\frac{2a+3b}{a-b}$ 中，字母的取值有什么限制？为什么？

一般地，用 A ，B 表示两个整式，$A \div B\ (B \neq 0)$ 可以表示为 $\frac{A}{B}$ 的形式. 如果 B 中含有字母，那么我们把式子 $\frac{A}{B}\ (B \neq 0)$ 叫做**分式**. 其中，A 叫做分式的分子，B 叫做分式的分母.

整式和分式统称为**有理式**.

例 1 用代数式表示下列数量关系，并判断它们是不是分式：

（1）一项工程，由某建筑公司单独完成需要 x 天，那么该建筑公司每天完成全部工程的多少？

（2）北京到上海的路程约为 1 400 km. 如果火车行驶的速度为 v km/h，那么从北京到上海需要多少小时？

（3）2002 年 8 月，在北京召开国际数学家大会，大会的会标取材于我国古代数学家赵爽的《勾股圆方图》. 其中的“弦图”是由四个相同的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形（图 10－1）. 如果直角三角形的直角边分别为 a，b（$a > b$），那么请写出这四个直角三角形的面积之和与小正方形的面积之比.

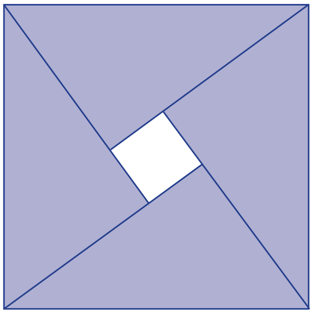


图 10－1

解：（1）$\frac{1}{x}$.

由于 $x \neq 0$，所以 $\frac{1}{x}$ 是分式.

（2）$\frac{1\,400}{v}$.

由于 $v \neq 0$，所以 $\frac{1\,400}{v}$ 是分式.

（3）$\frac{2ab}{(a-b)^2}$.

由于 $a > b$，$a - b \neq 0$，所以 $\frac{2ab}{(a-b)^2}$ 是分式.

实践

请你联系生活中的实际问题，列举一个用分式表示的数量关系.

例 2 当 x 取什么值时，下列各式有意义？

(1) $\dfrac{3x}{x-1}$；　　(2) $\dfrac{x-1}{2x+3}$.

只有当分母不等于零时，这个式子才有意义.

解：(1) 令 $x-1=0$，得

$$x=1.$$

可知，当 $x\neq 1$ 时，$\dfrac{3x}{x-1}$ 的分母 $x-1\neq 0$，所以 $\dfrac{3x}{x-1}$ 有意义.

(2) 令 $2x+3=0$，得

$$x=-\frac{3}{2}.$$

可知，当 $x\neq -\dfrac{3}{2}$ 时，$\dfrac{x-1}{2x+3}$ 的分母 $2x+3\neq 0$，所以 $\dfrac{x-1}{2x+3}$ 有意义.

一般地，称一个式子为分式时，就隐含了使分母不等于零的条件. 我们约定，本书在讨论分式的问题时，不再注明使分母不等于零的条件.

交流

1. 如果分式 $\dfrac{x^2-x}{x-1}=0$，怎样确定 x 的取值范围？

2. 在什么条件下，一个分式的值为零？

例 3 当 x 是什么数时，分式 $\dfrac{2x-1}{3x+2}$ 的值等于零？

具备什么条件时分式的值等于零？

解：分式 $\dfrac{2x-1}{3x+2}$ 的值等于零的条件是

$$\begin{cases} 3x+2\neq 0, & ① \\ 2x-1=0. & ② \end{cases}$$

由①，得 $x\neq -\dfrac{2}{3}$.

由②，得 $x=\dfrac{1}{2}$.

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，分式 $\dfrac{2x-1}{3x+2}$ 的值等于零.

练习

1. 指出下列有理式中，哪些是整式，哪些是分式.

（1）$\frac{3x+1}{6}$；　（2）$\frac{2}{a}$；　（3）$\frac{3x}{x+2}$；　（4）$\frac{a-b}{4}$.

2. 当 x 取什么值时，下列各式有意义？

（1）$\frac{x-3}{x+3}$；　（2）$\frac{2x-5}{x^2}$.

3. 当 x 取什么值时，下列各式的值等于零？

（1）$\frac{3x-1}{2x+5}$；　（2）$\frac{x+2}{x^2+7}$；　（3）$\frac{|x|-2}{x+2}$.

习 题 10－1

★基础★

1. 当 x 取什么值时，下列各式有意义？

（1）$\frac{1}{x}$；　（2）$\frac{x+3}{3x+1}$；　（3）$\frac{x}{0.2x+1}$.

2. 在下列各式中，当 x 取什么值时，分式的值等于零？

（1）$\frac{2x-3}{x+2}$；　（2）$\frac{x}{x-1}$.

★★提升★★

1. 当 x 取什么值时，下列各式有意义？

（1）$\frac{2x}{x^2+3}$；　（2）$\frac{2x+1}{x^2}$；　（3）$\frac{2x-5}{x-3}$；　（4）$\frac{4-x}{5x+3}$.

2. 当 x 取什么值时，下列各式的值等于零？

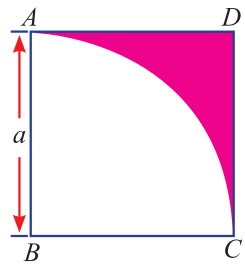
（1）$\frac{x^2-1}{x+1}$；　（2）$\frac{x^2-4}{x-2}$；　（3）$\frac{|x|-1}{x-1}$.

★★★拓展★★★

1. 求满足下列条件的 x 的取值范围：

（1）$\frac{2x+1}{x^2+3}>0$；　（2）$\frac{x-3}{x^2}<0$；　（3）$\frac{x^2+8}{x+1}>0$.

2. 如图，正方形的边长为 a，白色部分为 $\frac{1}{4}$ 的圆，试用代数式表示红色部分的面积与正方形的面积之比.



（第 2 题）

10.2 分式的基本性质

思考

回忆一下，分数有哪些基本性质．分式也具有类似的性质吗？

由于字母可以表示数，所以分式也具有与分数类似的基本性质.

分式的基本性质

1. 分式的分子、分母同乘一个不等于零的整式，分式的值不变．即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}\quad(M\neq 0).$$

2. 分式的分子、分母同除以一个不等于零的整式，分式的值不变．即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}\quad(M\neq 0).$$

思考

你能把分式 $\frac{m^2+mn}{mn}$ 表示为分母是 n 的分式，并且使分式的值不变吗？

例 1 填空（在括号内填入适当的整式，使分式的值不变）：

（1）$\dfrac{b(\quad)}{a^2b}=\dfrac{a+b}{a^2}$；

（2）$\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}=\dfrac{a+b}{(\quad)}$.

怎样运用分式的基本性质进行分式的变形？

解：（1）$a+b$；（2）a.

运用分式的基本性质，可以把分式中分子和分母的公因式约去，使分式简化．把分式中分子与分母的公因式约去，叫做**约分**．

例 2 将下列分式约分：

（1）$\dfrac{3x^2y}{15xy^2}$；　　（2）$\dfrac{2xy(x-y)^2}{4x(y-x)}$；

（3）$\dfrac{a^2-2a+1}{2-2a^2}$.

$y-x$ 与 $x-y$ 有什么关系？

分析：首先要找出分子和分母的公因式．

如何找出分子和分母的公因式？

解：（1）$\dfrac{3x^2y}{15xy^2}=\dfrac{3xy\cdot x}{3xy\cdot 5y}=\dfrac{x}{5y}$；

（2）$\dfrac{2xy(x-y)^2}{4x(y-x)}=\dfrac{2x(y-x)\cdot y(y-x)}{2x(y-x)\cdot 2}=\dfrac{y(y-x)}{2}=\dfrac{y^2-xy}{2}$；

（3）$\dfrac{a^2-2a+1}{2-2a^2}=\dfrac{(a-1)^2}{-2(a^2-1)}=-\dfrac{(a-1)(a-1)}{(a-1)\cdot 2(a+1)}=-\dfrac{a-1}{2(a+1)}$.

如果一个分式的分子与分母没有公因式，这个分式就叫做**最简分式**．

交流

约分的步骤是什么？约分时应该注意什么？

练习

1. 在括号内填入适当的整式，使分式的值不变：

（1）$\dfrac{b}{a}=\dfrac{(\quad)}{a^2}$；　　（2）$\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{(\quad)}{a(a-b)}$.

2. 把下列分式约分：

(1) $\dfrac{ab}{a^2}$；　　(2) $\dfrac{2xy^2}{-6x^2y^3}$；

(3) $\dfrac{y-x}{(x-y)^2}$；　　(4) $\dfrac{-a-b}{(a+b)^2}$.

3. 把下列分式约分：

(1) $\dfrac{9x^2-6x+1}{3x^2-x}$；　　(2) $\dfrac{4x^2-2x}{4x^2-1}$；

(3) $\dfrac{x^2-10x+25}{3x^2-75}$；　　(4) $\dfrac{2a^2-8}{a^2+4a+4}$.

习　题　10－2

★基础★

1. 将下列分式约分：

(1) $-\dfrac{6a^2b}{2ab^2}$；　　(2) $\dfrac{-3ab^3}{15a^3b}$；　　(3) $\dfrac{6m^3n^4}{-24m^4n^2}$；　　(4) $\dfrac{-3(a-b)}{12(b-a)^2}$.

2. 填空：

(1) $\dfrac{2a-2b}{a^2-b^2}=\dfrac{2}{(\quad)}$；　　(2) $\dfrac{3a-3b}{a^2-2ab+b^2}=\dfrac{3}{(\quad)}$；

(3) $\dfrac{2x-6}{x^2-6x+9}=\dfrac{2}{(\quad)}$；　　(4) $\dfrac{16a^2-b^2}{16a^2+8ab+b^2}=\dfrac{4a-b}{(\quad)}$.

★★提升★★

1. 不改变分式的值，将下列分式中分子与分母的各项系数都化为整数：

(1) $\dfrac{a}{0.5b}$；　　(2) $\dfrac{0.1x-0.3y}{1.2x+0.5y}$.

2. 将下列分式约分：

(1) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$；　　(2) $\dfrac{x^2-3x}{-x^2+6x-9}$；

(3) $\dfrac{2a^2-8ab+8b^2}{2a^2-8b^2}$；　　(4) $\dfrac{4b-10a}{25a^2-20ab+4b^2}$.

3. 选择题：

（1）下列变形正确的是（　　）.

A. $\dfrac{x^6}{x^2}=x^3$　　B. $\dfrac{x+m}{x+n}=\dfrac{m}{n}$

C. $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=x+y$　　D. $\dfrac{-x+y}{x-y}=-1$

（2）如果将分式 $\dfrac{a+b}{ab}$（a，b 均为正数）中的字母 a，b 的值分别扩大为原来的 2 倍，那么分式的值（　　）.

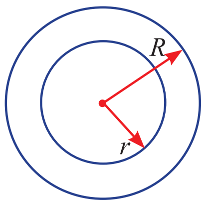
A. 扩大为原来的 2 倍　　B. 缩小为原来的 $\dfrac{1}{2}$

C. 不改变　　D. 缩小为原来的 $\dfrac{1}{4}$

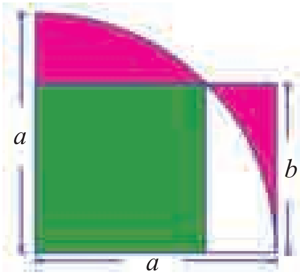
4. 如图，两个半径分别为 R，r 的圆，请用代数式表示：

（1）大圆与小圆的面积之比；

（2）圆环与大圆的面积之比.



（第 4 题）

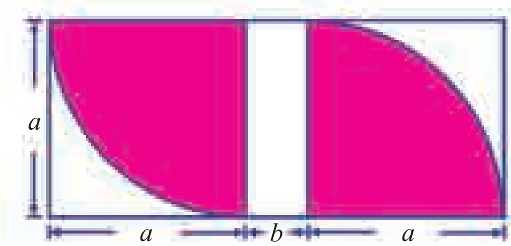


（第 5 题）

5. 如图，大长方形的长是 a，宽是 b，用代数式表示红色部分的面积与正方形（绿色部分）面积的比.

★★★ 拓展 ★★★

1. 如图，试用关于 a，b 的代数式表示红色部分的面积与各长方形的面积之比.



（第 1 题）

2. 已知 a 是非零有理数，求 $\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{a^2}{|a^2|}+\dfrac{a^3}{|a^3|}$ 的值.

二、分式的运算及其应用

10.3 分式的乘除法

交流

分数乘除法的运算法则是什么？类比分数乘除法的运算法则，怎样用式子表示分式乘除法的运算法则？

分式乘除法的运算法则

1. 分式乘分式，用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母. 用式子表示为

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

2. 分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘. 用式子表示为

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

例 1 计算：

(1) $\frac{3b}{2a^3}\cdot\frac{5c^2}{4d^2}$； (2) $\frac{-4ab}{3mn^2}\div\frac{ab^2}{6m^2n}$.

解：(1) $\frac{3b}{2a^3}\cdot\frac{5c^2}{4d^2}=\frac{3b\cdot 5c^2}{2a^3\cdot 4d^2}=\frac{15bc^2}{8a^3d^2}$；

(2) $\frac{-4ab}{3mn^2}\div\frac{ab^2}{6m^2n}$

$=-\frac{4ab}{3mn^2}\cdot\frac{6m^2n}{ab^2}$

$=-\frac{4ab\cdot 6m^2n}{3mn^2\cdot ab^2}$

$=-\frac{8m}{bn}$.

例 2 计算：

(1) $\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-a}\cdot\dfrac{a^2}{a+2}$；　　(2) $\dfrac{y-2x}{x^2-y^2}\div\dfrac{4x^2-4xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$；

(3) $\dfrac{2}{x+2}\div(x+4)\cdot\dfrac{x^2-4}{x+4}$．

解：(1) $\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-a}\cdot\dfrac{a^2}{a+2}$

$$=\frac{(a+2)^2}{a(a-1)}\cdot\frac{a^2}{a+2}$$

$$=\frac{a(a+2)}{a-1}$$

$$=\frac{a^2+2a}{a-1}\text{；}$$

(2) $\dfrac{y-2x}{x^2-y^2}\div\dfrac{4x^2-4xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$

$$=\frac{y-2x}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x-y)^2}{(y-2x)^2}$$

为什么化成 $(y-2x)^2$？

$$=\frac{x-y}{(x+y)(y-2x)}\text{；}$$

(3) $\dfrac{2}{x+2}\div(x+4)\cdot\dfrac{x^2-4}{x+4}$

$$=\frac{2}{x+2}\cdot\frac{1}{x+4}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x+4}$$

$$=\frac{2x-4}{(x+4)^2}.$$

练习

1. 计算：

(1) $\dfrac{4b}{5a}\cdot\dfrac{25c^3}{6d^2}$；　　(2) $\dfrac{-3m}{2n^2}\cdot\dfrac{3n}{4m^2}$；

(3) $\dfrac{14mn}{3a}\div 12m^2n$；　　(4) $-4ab^2\div\dfrac{8b}{3a}$．

2. 计算：

(1) $\dfrac{3a^2b}{2a-4b}\cdot\dfrac{a^2-4b^2}{6ab}$；　　(2) $\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-18}\div\dfrac{3-3x}{4x^2-12x}$．

交流

根据乘方的意义和分式乘法的运算法则，你能推出分式乘方的运算法则吗？

根据

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a}{b\cdot b}=\frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\underline{\qquad\qquad}\cdot\underline{\qquad\qquad}\cdot\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad};$$

……

可推出，当 n 是正整数时，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underline{\qquad\qquad}\cdot\underline{\qquad\qquad}\cdot\cdots\cdot\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}.$$

即有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(n\text{ 是正整数}).$$

这样，我们就得到

分式乘方的运算法则

分式的乘方是把分式的分子、分母分别乘方. 用式子表示为

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(n\text{ 是正整数}).$$

例 3 计算：

(1) $\left(\dfrac{3bc}{-2a^2}\right)^2$；　　(2) $\left(-\dfrac{3c^2}{4ab}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{2a}{3c}\right)^2$.

解：(1) $\left(\dfrac{3bc}{-2a^2}\right)^2=\dfrac{(3bc)^2}{(-2a^2)^2}=\dfrac{9b^2c^2}{4a^4}$；

(2) 原式 $=-\dfrac{(3c^2)^3}{(4ab)^3}\cdot\dfrac{(2a)^2}{(3c)^2}$

$=-\dfrac{3^3c^6}{4^3a^3b^3}\cdot\dfrac{4a^2}{3^2c^2}$

$=-\dfrac{3c^4}{16ab^3}$.

练习

1. 计算：

(1) $\left(-\dfrac{3b}{a}\right)^2$；　(2) $\left(\dfrac{-2x}{3y}\right)^3$；　(3) $\left(\dfrac{3a^2b}{-4xy}\right)^2$.

2. 计算：

(1) $\left(\dfrac{3n}{2m}\right)^2\cdot\left(-\dfrac{m}{n}\right)^3$；　(2) $4ab^2\div\left(\dfrac{-b}{a}\right)^3$.

习　题　10－3

★基础★

1. 计算：

(1) $\dfrac{3b}{a}\cdot\dfrac{5a}{2b}$；　(2) $\dfrac{-y}{x}\cdot\dfrac{3x}{2y}$；

(3) $2a^2b\div\dfrac{4ac^2}{3b^2}$；　(4) $\dfrac{5b}{2a^2}\div\dfrac{2b^2}{3a}$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{a^2-1}{-a}\cdot\dfrac{2ab^2}{a^2-2a+1}$；　(2) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\dfrac{2x^2+2xy}{x+2y}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{x^2-3x}{x+2}\div\dfrac{x-3}{x^2-4}$；　(2) $\dfrac{a-2b}{a+b}\div\dfrac{a^2-4ab+4b^2}{2a^2-2b^2}$.

4. 计算：

(1) $\left(\dfrac{3n}{2m^2}\right)^2\div\left(-\dfrac{m}{2n^2}\right)^3$；　(2) $\left(\dfrac{y}{-3x}\right)^2\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)\div\left(-\dfrac{y}{x}\right)^4$.

★★提升★★

1. 先化简，再求值：

(1) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{1+x}{1-x}$，其中 $x=-\dfrac{1}{2}$；

(2) $\dfrac{2x^2-3xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{5x+5y}{2x-y}$，其中 $x=-2$，$y=3$.

2. 计算：

(1) $\left(\dfrac{b}{-a}\right)^{2n}$（$n$ 是正整数）；　　(2) $\left(\dfrac{b^2}{-a}\right)^{n}$（$n$ 是正整数）.

3. 下列运算是否正确，如果不正确，请你予以指正：

(1) $\dfrac{a^9}{a^3}=a^3$；　　(2) $\dfrac{-x+y}{x-y}=-1$；

(3) $\dfrac{a-2b}{4a-2b}=\dfrac{1}{4}$；　　(4) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{x+3}{y+3}$.

★★★ 拓展 ★★★

1. 已知：$a+b+c=0$，且 $abc>0$，求 $\dfrac{b+c}{|a|}+\dfrac{c+a}{|b|}+\dfrac{a+b}{|c|}$ 的值.

2. 已知：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$，求 $\dfrac{3a-4b}{3a+4b}$ 的值.

3. 已知：$a^2-3a+1=0$，求 $\dfrac{a^2}{a^4+1}$ 的值.

10.4 分式的加减法

思考

能像做分数的加减运算那样进行分式的加减运算吗?

我们可以像做分数运算那样进行分式的运算：

（1）类比同分母分数的加减运算，进行同分母分式的加减运算：

$\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{7}=$ ______，　$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{b}{2a}=$ ______；

$\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{5}=$ ______，　$\dfrac{2x}{m}-\dfrac{3x}{m}=$ ______.

（2）类比异分母分数的加减运算，进行异分母分式的加减运算：

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=$ ______ $=$ ______，　$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3a}=$ ______ $=$ ______；

$\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}=$ ______ $=$ ______，　$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=$ ______ $=$ ______.

通过以上分数与分式加减运算的类比，我们可以得到：

在不改变分式值的情况下，把几个异分母的分式化为相同分母的分式的变形，叫做**通分**．

分式加减法的运算法则

1. 同分母的分式相加减时，分母不变，分子相加减．即

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

2. 异分母的分式相加减时，先进行通分化为同分母后，再进行加减运算．即

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

例 1 计算：

（1）$\dfrac{b-1}{a+1}+\dfrac{c+1}{a+1}$；（2）$\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{b-a}$．

$a-b$ 与 $b-a$ 有什么关系？

解：（1）$\dfrac{b-1}{a+1}+\dfrac{c+1}{a+1}$

$$=\frac{(b-1)+(c+1)}{a+1}$$

$$=\frac{b-1+c+1}{a+1}$$

$$=\frac{b+c}{a+1};$$

（2）$\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{b-a}$

$$=\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a-b}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}$$

$=a+b$．

分式运算的结果要化为最简分式．

练习

1. 计算：

(1) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}$；　　(2) $\frac{b}{3a}-\frac{4}{3a}$；

(3) $\frac{2x}{x-y}-\frac{2y}{x-y}$；　　(4) $\frac{x-y}{x-2y}+\frac{2x+y}{x-2y}$.

2. 计算：

(1) $\frac{2x^2}{x+y}-\frac{2y^2}{x+y}$；　　(2) $\frac{2a-b}{(a+b)^2}+\frac{2b-a}{(a+b)^2}$；

(3) $\frac{3x}{x-2}-\frac{6}{2-x}$；　　(4) $\frac{2a+b}{a-b}-\frac{a+2b}{b-a}$.

3. 计算：

(1) $\frac{x^2-4x}{x^2-1}-\frac{2x+1}{1-x^2}$；　　(2) $\frac{a^2-3ab}{(a-b)^2}+\frac{ab+b^2}{(b-a)^2}$.

交流

1. 几个异分母的分式，它们所有分母的乘积可以作为它们的公分母吗?

2. 几个异分母分式的公分母是唯一的吗？举出几个例子说明.

3. 异分母分式的公分母，是否存在一个最简单的公分母?

例 2 通分：

(1) $\frac{1}{ab}$，$\frac{b}{2a}$；　　(2) $\frac{2}{3m^2n}$，$\frac{5}{6mn^2}$；

(3) $\frac{y}{3x(x-y)^2}$，$\frac{x}{5y(y-x)}$.

解：先确定各分式的公分母.

(1) 公分母可以是 $2ab$.

$$\frac{1}{ab}=\frac{2}{2ab},$$

$$\frac{b}{2a}=\frac{b^2}{2ab}.$$

(2) 公分母可以是 $6m^2n^2$.

$$\frac{2}{3m^2n}=\frac{2\times 2n}{3m^2n\cdot 2n}=\frac{4n}{6m^2n^2},$$

$$\frac{5}{6mn^2}=\frac{5\cdot m}{6mn^2\cdot m}=\frac{5m}{6m^2n^2}.$$

(3) 公分母可以是 $15xy(x-y)^2$.

$$\frac{y}{3x(x-y)^2}=\frac{y\cdot 5y}{3x(x-y)^2\cdot 5y}=\frac{5y^2}{15xy(x-y)^2},$$

$$\frac{x}{5y(y-x)}=\frac{x\cdot 3x(y-x)}{5y(y-x)\cdot 3x(y-x)}=\frac{3x^2(y-x)}{15xy(x-y)^2}.$$

像上面 $2ab$, $6m^2n^2$, $15xy(x-y)^2$ 这样的公分母,我们把它们叫做**最简公分母**.由例 2 可以知道,通分的关键步骤是确定最简公分母.

练习

1. 通分:

(1) $\frac{1}{2a}$, $\frac{2}{5b}$;　　(2) $\frac{2}{x}$, $\frac{y}{x+y}$;

(3) $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a-b}$;　　(4) $\frac{y}{2(x-y)}$, $\frac{x}{(y-x)^2}$.

2. 通分:

(1) $\frac{1}{a^2-4}$, $\frac{1}{a^2-4a+4}$;　　(2) $\frac{a+1}{a^2-2a+1}$, $\frac{a}{a^2-a}$.

例 3 计算:

(1) $\frac{b}{3a^2}-\frac{1}{6ab}$;　　(2) $\frac{y}{x^2-xy}+\frac{x+y}{2x-2y}$.

解: (1) 因为 $\frac{b}{3a^2}=\frac{b}{3\cdot a^2}$, $\frac{1}{6ab}=\frac{1}{2\times 3\cdot a\cdot b}$, 所以它们的最简公分母是 $6a^2b$.

最简公分母 $6a^2b$ 是怎样确定的?

$$\begin{aligned}&\frac{b}{3a^2}-\frac{1}{6ab}\\=&\frac{b\cdot 2b}{3a^2\cdot 2b}-\frac{1\cdot a}{6ab\cdot a}\\=&\frac{2b^2}{6a^2b}-\frac{a}{6a^2b}\\=&\frac{2b^2-a}{6a^2b}.\end{aligned}$$

（2）因为 $\frac{y}{x^2-xy}=\frac{y}{x(x-y)}$，$\frac{x+y}{2x-2y}=\frac{x+y}{2(x-y)}$，所以它们的最简公分母是 $2x(x-y)$.

$$\begin{aligned}&\frac{y}{x^2-xy}+\frac{x+y}{2x-2y}\\=&\frac{y}{x(x-y)}+\frac{x+y}{2(x-y)}\\=&\frac{2y}{2x(x-y)}+\frac{(x+y)x}{2x(x-y)}\\=&\frac{x^2+xy+2y}{2x(x-y)}.\end{aligned}$$

交流

怎样确定几个分式的最简公分母？确定最简公分母时，最简公分母的系数部分由____________________组成，字母部分由________________组成.

例 4 计算：$\frac{x}{x+2}-\frac{2x-1}{x^2+4x+4}$.

解：由 $x^2+4x+4=(x+2)^2$，可知它们的最简公分母为 $(x+2)^2$，所以

$$\begin{aligned}&\frac{x}{x+2}-\frac{2x-1}{x^2+4x+4}\\=&\frac{x(x+2)}{(x+2)^2}-\frac{2x-1}{(x+2)^2}\\=&\frac{x(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}\\=&\frac{x^2+2x-2x+1}{(x+2)^2}\\=&\frac{x^2+1}{(x+2)^2}.\end{aligned}$$

这个括号是不是必须加的？

与分数混合运算的运算顺序一样，分式的加、减、乘、除混合运算也是先进行乘除运算，再进行加减运算；遇有括号时，先进行括号内的运算.

例 5 计算：$\dfrac{x-5}{x-3}-\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}\div\dfrac{x+1}{x-2}$．

解：原式 $=\dfrac{x-5}{x-3}-\dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)}\cdot\dfrac{x-2}{x+1}$

$$=\frac{x-5}{x-3}-\frac{x-2}{x}$$

$$=\frac{x(x-5)}{x(x-3)}-\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-5x-x^2+5x-6}{x(x-3)}$$

$$=-\frac{6}{x(x-3)}.$$

练习

计算：

(1) $\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{b}{4a^2}$；

(2) $\dfrac{x-1}{x^2-4}-\dfrac{x+2}{x^2-4x+4}$；

(3) $\left(\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{1-a}{a+1}\right)\cdot\dfrac{a+1}{a}$；

(4) $\left(\dfrac{m}{m-1}-\dfrac{2m}{m-1}\right)\div\left(1-\dfrac{1}{m+1}\right)$.

习　题　10－4

★基础★

1. 通分：

(1) $\dfrac{1}{2x}$，$\dfrac{2}{3y}$；

(2) $\dfrac{3}{2bc}$，$\dfrac{2}{5c^2}$；

(3) $\dfrac{1}{a(x-y)}$，$\dfrac{1}{b(y-x)}$；

(4) $\dfrac{1}{b-a}$，$\dfrac{1}{a^2-b^2}$.

2. 通分：

(1) $\dfrac{1}{x^2-2x+1}$，$\dfrac{1}{x^2-1}$；　(2) $\dfrac{a}{a^2-b^2}$，$\dfrac{b}{a^2+2ab+b^2}$；

(3) $\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$，$\dfrac{x-y}{2x^2-4xy+2y^2}$；　(4) $\dfrac{a-2b}{a^2-4ab+4b^2}$，$\dfrac{a+b}{a^2+2ab+b^2}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{x-y}{a}-\dfrac{x+y}{a}$；　(2) $\dfrac{a-1}{3ab}+\dfrac{a+2}{3ab}$；

(3) $\dfrac{3x-1}{2x-3}+\dfrac{x+2}{3-2x}$；　(4) $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{2a}{b-a}$.

4. 计算：

(1) $\dfrac{3}{a+b}+\dfrac{5}{a}$；　(2) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x+3}$；

(3) $\dfrac{4a}{5(a-3)}-\dfrac{3a}{2(a-3)}$；　(4) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$.

5. 计算：

(1) $\dfrac{x-1}{x}\div\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$；　(2) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}-\dfrac{a^2+b^2}{ab}$；

(3) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x-1}\div\dfrac{x-2}{x}$；　(4) $\dfrac{a^2+3a}{a^2+1+2a}\div\dfrac{a+3}{a+1}-\dfrac{2}{a+2}$.

★★ 提升 ★★

1. 某工程队要修一条长 m km 的公路，原计划平均每天修 x km. 实际施工时，每天比原计划多修了 4 km，结果提前完成了任务. 请你用代数式表示提前了多少天.

2. 求代数式的值：

$\left(\dfrac{a+1}{2a-2}-\dfrac{5}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\div\dfrac{3}{4a-4}$，其中 $a=-\dfrac{1}{2}$.

3. 已知 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$，求 $\dfrac{2x+3xy+2y}{x-2xy+y}$ 的值.

★★★ 拓展 ★★★

1. 观察下列各式：

$2\times2=4$，　$2+2=4$；

$\dfrac{3}{2}\times3=\dfrac{9}{2}$，　$\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{9}{2}$；

$\dfrac{4}{3}\times4=\dfrac{16}{3}$，　$\dfrac{4}{3}+4=\dfrac{16}{3}$；

$\frac{5}{4}\times 5=\frac{25}{4}$，　　　　　　$\frac{5}{4}+5=\frac{25}{4}$；

……

从以上左右两组式子中，你能发现什么规律？用含有字母 n 的代数式表示出来，并证明你发现的规律是否正确.

2. 分子为 1 的真分数叫做“单位分数”，我们注意到某些真分数可以写成两个单位分数的和，例如：$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

(1) 把 $\frac{7}{12}$ 写成两个单位分数的和.

(2) 研究真分数 $\frac{13}{x}$，对于某些 x 的值，它可以写成两个单位分数的和，例如当 $x=42$ 时，$\frac{13}{42}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$. 你还能找出多少个 x 的值，使得 $\frac{13}{x}$ 可以写成两个单位分数的和？

10.5 可化为一元一次方程的分式方程及其应用

1. 分式方程及其解法

问题：对于章前页中的问题，如果长方形花坛的面积 100 m^2 不变，把原长延长 5 m 后，宽变为原来的 $\frac{4}{5}$，那么原长是多少米？你能通过列方程解决吗？

已知长方形的面积为 100 m^2.

(1) 如果原长为 x m，那么原宽为 __________ m.

(2) 如果原长 x 增加 5 m，那么现在的长为 __________ m. 现在的宽可以有几种表示方法？

由此我们可以得到 $\frac{100}{x+5}=\frac{4}{5}\times\frac{100}{x}$. ①

思考

方程①与以前所学过的方程有什么不同，它还是一元一次方程吗？

方程①不是整式方程，因为在方程里含有分式. 我们把这种分母里含有未知数的方程叫做**分式方程**.

探索

类比一元一次方程的求解过程来研究分式方程的解法 .

解下列方程：

(1) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+1}{3}=1$ ；(2) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{1}{x}=1$.

解：(1) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+1}{3}=1$.

在方程两边同乘 6， 去分母，得

$$3(x-1)+2(x+1)=6 .$$

整理，得

$$5x=7 .$$

即

$$x=\frac{7}{5} .$$

所以原方程的解是 $x=\dfrac{7}{5}$.

(2) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{1}{x}=1$.

在方程两边同乘 $x(x-1)$，去分母，得

$$x(x+1)-(x-1)=x(x-1) .$$

整理，得

$$x=-1 .$$

$x=-1$ 是不是原方程的解呢？

把 $x=-1$分别代入原方程的左右两边检验：

因为左边 $=\dfrac{-1+1}{-1-1}-\dfrac{1}{-1}=1$，右边 $=1$.

所以左边 = 右边 .

所以原方程的解是 $x=-1$.

交流

1. 上面两个方程的求解过程中，去分母时所乘的式子有什么不同？

2. 比较解整式方程和解分式方程有什么相同点，有什么不同点．解分式方程的步骤是什么？

例 1 解下列方程：

（1）$\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}=1$；　　（2）$\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{10}{(x-2)(x+3)}$．

解：（1）去分母，得

$$x(x+1)-2(x-1)=(x-1)(x+1).$$

解这个方程，得

$$x=3.$$

检验：当 $x=3$ 时，方程左右两边相等，所以 $x=3$ 是原方程的解．

所以原方程的解是 $x=3$.

（2）去分母，得

$$x(x+3)-(x-1)(x-2)=10.$$

解这个方程，得

$$x=2.$$

检验：当 $x=2$ 时，最简公分母 $(x-2)(x+3)=0$，原方程中的分式无意义．

所以原方程无解．

这个步骤可以省略吗？为什么要检验？

练习

1. 解下列方程：

（1）$\dfrac{4}{x-4}=\dfrac{1}{x+3}$；　　（2）$\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{1}{x+1}$．

2. 解下列方程：

（1）$\dfrac{x-1}{x+3}-\dfrac{2}{x-1}=1$；　　（2）$\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+5}{x^2-x}=0$．

2. 可化为一元一次方程的分式方程的应用

例 2 宏达公司生产了 A 型、B 型两种计算机，它们的台数相同，但总价值和单价不同．已知 A 型计算机总价值为 102 万元；B 型计算机总价值为 81.6 万元，且单价比 A 型机便宜了 2 400 元．问 A 型、B 型两种计算机的单价各是多少万元．

分析：如果设 A 型机单价为 x 万元，那么 B 型机单价为 $(x-0.24)$ 万元．台数 = 总价 ÷ 单价．请把下表中的空白处填写完整．

	单价／万元	总价／万元	台数／台
A型机	x		$\frac{102}{x}$
B型机	$x-0.24$	81.6	

解：设 A 型机单价为 x 万元，那么 B 型机单价为 $(x-0.24)$ 万元，A 型机有 $\frac{102}{x}$ 台，B 型机有 $\frac{81.6}{x-0.24}$ 台．根据题意，得

$$\frac{102}{x}=\frac{81.6}{x-0.24}.$$

解这个方程，得

$$x=1.2.$$

经检验，$x=1.2$ 是所列方程的解，并且符合实际问题的意义．

当 $x=1.2$ 时，有

$$x-0.24=0.96.$$

答：A 型机单价为 1.2 万元，B 型机单价为 0.96 万元．

例 3 为了缓解交通拥堵现象，某市决定修一条轻轨铁路．为使工程提前 2 个月完成，在保证质量的前提下，必须把工作效率提高 10%. 问原计划完成这项工程需要用多少个月．

分析：工作效率 = 工作总量 ÷ 工作时间，此题中工作总量可用单位 1 表示．

解：设原计划完成这项工程需要用 x 个月，那么原工作效率为 $\frac{1}{x}$；实际上要用 $(x-2)$ 个月完成，那么实际工作效率为 $\frac{1}{x-2}$．根据题意，得

$$(1+10\%)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2}.$$

即

$$\frac{11}{10x}=\frac{1}{x-2}.$$

解这个方程，得

$$x=22.$$

经检验，$x=22$ 是所列方程的解，并且符合实际问题的意义．

答：原计划完成这项工程需要用 22 个月．

例 4 远大中学组织同学到离学校 15 km 的郊区进行社会调查．一部分同学骑自行车前往，另一部分同学在骑自行车的同学出发 40 min 后，乘汽车沿相同路线行进，结果骑自行车的与乘汽车的同学同时到达目的地．已知汽车速度是自行车速度的 3 倍，求自行车和汽车的速度．

分析：设自行车的速度是 x km / h，汽车的速度是 $3x$ km / h.

时间 = 路程 ÷ 速度．请填写下列表格：

	路程 / km	速度 /($km \cdot h^{-1}$)	时间 / h
骑自行车			
乘汽车			

因为骑自行车的同学出发40 min 后，乘汽车的同学才出发，并且同时到达目的地，这说明行驶15 km，汽车比自行车少用 $\frac{2}{3}$ h．即

自行车行驶15 km 所用的时间 − 汽车行驶15 km 所用的时间 = $\frac{2}{3}$.

解：设自行车的速度是 x km / h，汽车的速度是 $3x$ km / h. 根据题意，得

$$\frac{15}{x}-\frac{15}{3x}=\frac{2}{3}.$$

去分母，得

$$45-15=2x.$$

解得

$$x=15.$$

经检验，$x=15$是所列方程的解，并且符合实际问题的意义．

当$x=15$时，$3x=3\times15=45$．

答：自行车、汽车的速度分别是15 km / h，45 km / h．

练习

1. 同学们在计算机课上学打字．李华比王妍每分钟多录入 20 个字，李华录入 300 个字与王妍录入 200 个字的时间相同．问李华、王妍每分钟各录入多少个字．
2. 甲、乙两火车站相距 1 280 千米，采用“和谐”号动车组提速后，列车行驶速度是原来的 3.2 倍，从甲站到乙站的运行时间缩短了 11 小时，求列车提速后的速度．

3. 公式的变形

在工程技术和数学、物理、化学等学科中，经常要用到各类公式．在应用时，又常常要对公式作相应的变形．例如：$s=vt$（s 表示路程，v 表示速度，t 表示时间）是行程问题中的常用公式，它常变形为

$$v=\frac{s}{t},\quad t=\frac{s}{v}$$

的形式．

例 5 已知：公式 $\frac{p_1}{V_2}=\frac{p_2}{V_1}$，其中 p_1，p_2，V_1，V_2 均不等于零．试用 p_2，V_1，V_2 表示 p_1．

解：$\frac{p_1}{V_2}=\frac{p_2}{V_1}$，

去分母，得

$$p_1V_1=p_2V_2.$$

又因为 $V_1\neq 0$，所以

$$p_1=\frac{p_2V_2}{V_1}.$$

思考

把公式 $\frac{p_1}{V_2}=\frac{p_2}{V_1}$ 变形为 $p_1=\frac{p_2V_2}{V_1}$ 的过程是否可以看做是解方程的过程？如果可以，它和我们解过的方程有什么区别？

例 6 公式 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$，其中 R，R_1，R_2 均不等于零，且 $R_1+R_2\neq 0$．

（1）求用 R_1，R_2 表示 R 的式子；

（2）当 $R_1=1.36$，$R_2=2.47$ 时，求 R 的值（结果精确到 0.01）．

解：(1) 因为 R，R_1，R_2 均不等于零，去分母，得

$$R_1R_2 = RR_2 + RR_1 .$$

$$R(R_1 + R_2) = R_1R_2 .$$

又因为 $R_1 + R_2 \neq 0$，所以

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} .$$

(2) 当 $R_1 = 1.36$，$R_2 = 2.47$ 时，

$$R = \frac{1.36 \times 2.47}{1.36 + 2.47} .$$

用计算器计算：

	具体操作	结　果
A型计算器	1.36 × 2.47 ÷ (1.36 + 2.47) =	0.877075718
B型计算器	1.36 × 2.47 ÷ (1.36 + 2.47) = [illegible]	

$$R \approx 0.88 .$$

答：当 $R_1 = 1.36$，$R_2 = 2.47$ 时，$R \approx 0.88$.

练习

对梯形面积公式 $S = \frac{1}{2}(a + b)h$，

(1) 用 a，b，S 的代数式表示 h；

(2) 当 $a = 1.08$，$b = 3.15$，$S = 5.18$ 时，求 h 的值(结果精确到 0.01).

习　题　10 – 5

★基础★

1. 请你举例说明分式运算与解分式方程有哪些异同 .

2. 解下列分式方程：

(1) $\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{2}{3-x}$ ；　　(2) $\dfrac{4x}{x-2}-\dfrac{3}{2-x}=1$ ；

(3) $\dfrac{x}{x-1}-1=\dfrac{2}{x}$ ；　　(4) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=2$.

3. 当 x 为何值时，分式 $\dfrac{3x-1}{x+1}$ 与 $\dfrac{6x+1}{2x+1}$ 的值相等？

4. 解关于 x 的方程：$\dfrac{b}{x+a}+1=\dfrac{x}{x-a}$ ，其中 $a\neq b$.

5. 如果代数式 $\dfrac{2x+9}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}$ 的值为 2，求 x 的值 .

6. 甲、乙两站相距 480 km，货车与客车同时从甲站出发开往乙站 . 已知客车的速度是货车的 2.5 倍，结果客车比货车早 6 h 到达乙站，求两种车的速度各是多少 .

7. 一个两位数，两个数字之和为 12 . 如果把它的两个数字的位置交换后，得到的新数与原数的比是 4 : 7，求原来的两位数 .

8. 李红与张明进行计算机的文字录入 . 已知李红比张明每小时少录入 200 个字，李红录入 10 000 个字与张明录入 11 000 个字所需的时间相同 . 问李红、张明每小时各录入多少个字 .

9. $s=v_0t+\dfrac{1}{2}gt^2\ (t\neq 0)$ 是物理学中的一个公式 .

(1) 请用 s，g，t 表示 v_0 ；

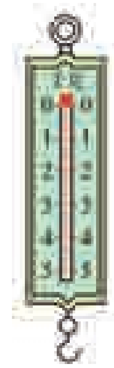
(2) 请用 s，v_0，t 表示 g .

10. 某种弹簧秤原来的长度为 l，悬挂重物后的长度 L 可以用公式 $L=l+\dfrac{m}{k}$ 表示，其中 m 是悬挂物的质量，k 是常数 .

(1) 用 L，l，k 表示 m ；

(2) 用 L，l，m 表示 k ；

(3) 当 $L=25$ ，$l=10$，$m=20$ 时，求 k 的值 .



（第 10 题）

★★ 提升 ★★

1. 某校准备购买同样台数的 A 型和 B 型计算器 . 已知 A 型计算器的单价比 B 型计算器的单价高 10 元，购买 A 型计算器花了 1 000 元，购买 B 型计算器花了 800 元，请你帮忙计算一下 A，B 两种计算器的单价各是多少 .

2. 王小明腿有残疾，他的好朋友李阳非常关心他．如图，李阳家到学校的路程是 0.5 km，到王小明家的路程是 3 km．李阳原来是步行上学．为让王小明每天准时到学校上课，他坚持骑小三轮车接送王小明．已知李阳骑小三轮车的速度是他步行速度的 3 倍，接送王小明上学要比他自己步行上学多用 20 min，求李阳步行速度和骑车速度各是多少．

（第 2 题）

★★★拓展★★★

1. 阅读下列解题过程，回答问题．

解方程 $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{2}{x-2}$．

解：方程两边同时乘 $(x+2)(x-2)$，得

$(x+2)(x-2)\left[\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}\right]=\dfrac{2}{x-2}\cdot(x+2)(x-2)$．…………………（A）

化简，得 $(x-2)+4x=2(x+2)$．……………………………………………………（B）

去括号，移项，得 $x+4x-2x=2+4$．…………………………………………………（C）

解这个方程，得 $x=2$．……………………………………………………………（D）

∴ $x=2$ 是原方程的解．…………………………………………………………（E）

（1）上述过程是否正确？

（2）如果有错误，错在哪一步？

（3）该步错误的原因是什么？

（4）请将该步改写正确．

2. 观察一列数：0，3，8，15，24，35，…．设 x 是这列数的第 2015 个数，且 x 满足 $M=x\left(1-\dfrac{1}{1-x}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)$，试求 $M+2\,015^2$ 的值．

问题解决

请你计算下列算式，观察并归纳其中的规律：

(1) $\dfrac{1}{1\times 2}=$ ________；

(2) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}=$ ________；

(3) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}=$ ________；

(4) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dfrac{1}{4\times 5}=$ ________；

……

比一比，看谁计算得快，并和同学们交流．

思考

1. $\dfrac{1}{n(n+1)}=$ ________ $-$ ________，这个结果与上面的计算有什么联系吗？

2. 计算：

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+2\,014)(n+2\,015)}.$$

3. 解分式方程：

$$\frac{1}{(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=1.$$

4. 在上面的“问题解决”中，我们得到

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

运用它可以使具有这类特性的分式计算得到简化．请你试一试，把这个规律推广到更一般的情况，并用公式表示出来．

阅读理解

知识、学识、见识

下面是著名数学家华罗庚教授写的一篇文章的节选．请你读后与同学们交流自己的感受．

人们认识事物有一个由感性认识到理性认识的过程，学习和从事科学研究，也有一个由“知”到“识”的过程．我们平常所说的“知识”、“学识”、“见识”这几个概念，其实都包含了这方面的意思，反映了认识事物的两个阶段．“知识”是先知而后识，“学识”是先学而后识，“见识”是先见而后识．知了，学了，见了，这还不够，还要有个提高过程，即识的过程．因为我们要认识事物的本质，达到灵活运用，变为自己的东西，就必须知而识之，学而识之，见而识之，不断提高．孔子说：“学而不思则罔，思而不学则殆．”这句话的意思是说，只学，不用心思考，结果是毫无所得；不学习，不在接受前人成果的基础上去思考，也是很危险的．学和思，两者缺一不可．我们不仅应该重视学，更要把所学的东西上升到识的高度．知、学、见是识的基础，而识则是知、学、见的更高阶段．由知、学、见到识，是毛主席所指出的“去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里”的过程，非如此，不能进入认识的领域．一般来说，衡量知、学、见是用广度，好的评语是广，是博；衡量识是用深度，好的评语是深，是精．因而，我们对知识的要求是既要有广度，又要有深度，广博深精才是对知识丰富的完好评语．一个人所知、所学、所见的既广博，理解的又深刻，才算得上是一个有知识、有学识、有见识的人．

从“知”、“学”、“见”到“识”，并不是一次了事的过程，而是不断提高的过程．今天认为有些认识了的东西，明天可能发现自己并未了解，也许竟把更内在更实质的东西漏了．同时在知、学、见不断扩充的过程中，只要我们有“求知欲”，我们的认识就会不断提高，而“识”的提高又会加深对知、学、见的接受能力，两者相辅相成，如钱塘怒潮，一浪推着一浪前进，后浪还比前浪高．①

① 选自 1962 年第 12 期《中国青年》．

回顾与整理

知识要点

本章学习的知识主要有：分式的概念和基本性质，分式的通分与约分，分式的运算，以及可化为一元一次方程的分式方程及其简单应用．

1. 有关的概念和性质．

（1）分式：分母中含有字母的式子（分母的值不等于零）．

（2）分式的基本性质：

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}\quad(M\neq 0);$$

$$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}\quad(M\neq 0).$$

利用分式的基本性质可以进行分式的通分与约分．

2. 分式的基本运算．

（1）同分母的加减运算：

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

（2）异分母的加减运算，先通分，化为同分母的加减运算．

（3）分式的乘除：

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

（4）分式的乘方：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(n\text{ 是正整数}).$$

注意：分式运算的结果如果是分式时，要化为最简分式．

3. 分式方程的解法及其应用．

把分式方程转化为整式方程是解分式方程的基本思路．运用去分母的方法可以把分式方程转化为整式方程，但是需要对结果进行检验．

列分式方程解决实际问题是我们学习的重要内容，在应用中需注意求出的解要符合实际问题的意义．

学习指导

1. 运用类比的方法学习分式.

类比是人们认识事物的一种方法.

分式与分数在结构、性质、运算上都具有相似之处，分数的知识与方法对学习分式都有很好的启示作用，因此通过分数的知识运用类比的方法学习分式，有利于理解和认识分式，掌握它的性质，加深对相关知识的记忆.

2. 转化是解决数学问题的重要方法.

在学习中我们经常用到转化的方法.

例如，在分式的运算中，把异分母的分式相加减，通过通分转化为同分母的分式运算；把分式的除法转化为乘法运算；解分式方程时，通过去分母把分式方程转化为整式方程来求解等.

值得注意的是，转化总是有条件的.

例如，运用去分母的方法解分式方程时，只有在使公分母不等于零的条件下，所求得的解才是原方程的解，否则就会使原方程中的分式无意义. 因此，验根是解分式方程时必不可少的步骤.

3. 分式的知识和技能与其他学科的联系.

公式变形是在学习数学、物理、化学中经常遇到的问题. 当我们把其中某个字母看做是未知数时，就可以运用解方程的方法作公式变形. 在公式变形时，要认准变形的目标，并注意进行变形的条件和依据.

复习题

★基础★

1. 选择题：

(1) 如果分式 $\dfrac{x(x+2)}{x}$ 的值为零，那么 x 的值是（　　）.

A. $x=0$　　B. $x=2$

C. $x=-2$　　D. $x=-2$ 或 $x=0$

(2) 下列分式中，最简分式是（　　）.

A. $\dfrac{2x+4}{6x+8}$　　　　B. $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$

C. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$　　　　D. $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

(3) 分式 $\dfrac{a+b}{b^2-a^2}$ 化简的结果为（　　）.

A. $\dfrac{1}{a-b}$　　　　B. $-\dfrac{1}{a-b}$

C. $b-a$　　　　D. $-b-a$

2. 当 x 取什么值时，下列各式有意义？

(1) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$；　　(2) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3b}$；　　(2) $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$；

(3) $\dfrac{b}{2a-b}-\dfrac{a}{b-2a}+\dfrac{a}{2a-b}$；　　(4) $\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a^2}{a^2-1}-\dfrac{2}{1-a^2}$.

4. 计算：

(1) $(x^2-9)\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-3}-1\right)$；　　(2) $\left(1-\dfrac{1}{1-a}\right)\div\dfrac{a^2+2a}{a^2-2a+1}$.

5. 先化简，再求值：

$\left(\dfrac{a-2}{a^2+2a}-\dfrac{a-1}{a^2+4a+4}\right)\div\dfrac{a-4}{a+2}$，其中 $a=-1$.

6. 解下列方程：

(1) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{6}{x^2-1}=1$；

(2) $\dfrac{5x-4}{2x-4}+\dfrac{2x+5}{6-3x}=\dfrac{1}{2}$.

7. 把下列公式按要求进行变形：

(1) 已知 $V=abc$，求 a；

(2) 已知 $R=\dfrac{r_1\cdot r_2}{r_1+r_2}$，求 r_2.

8. 学校要建立两个计算机教室，为此要购买相同数量的 A，B 型计算机. 已知 A 型机比 B 型机每台便宜 400 元，购买 A 型机需用 22.4 万元，购买 B 型机需用 24 万元，那么 A，B 型计算机每台各需多少元？

9. A，B 两地相距 50 km. 甲骑自行车从 A 地出发 1.5 h 后，乙骑摩托车从 A 地出发追赶甲. 已知乙的速度是甲的速度的 2.5 倍，且乙比甲早 1 h 到达 B 地，求甲、乙的速度.

★★ 提升 ★★

1. 选择题：

(1) 下列各式中一定成立的是(　　).

A. $\dfrac{-a+b}{a-b}=\dfrac{a-b}{a+b}$　　B. $\dfrac{-a+b}{a+b}=\dfrac{a-b}{-a+b}$

C. $\dfrac{-a+b}{a+b}=\dfrac{a-b}{-a-b}$　　D. $\dfrac{-a+b}{a+b}=\dfrac{a+b}{a-b}$

(2) 下列分式中，无论 x 取什么值，一定有意义的是(　　).

A. $\dfrac{x-1}{x+1}$　　B. $\dfrac{x+1}{x^2}$

C. $\dfrac{x-1}{x^2+1}$　　D. $\dfrac{1}{x^3-1}$

2. 解下列方程：

(1) $\dfrac{6x+12}{x^2+4x+4}+\dfrac{4-x^2}{x^2-4x+4}=\dfrac{x^2}{4-x^2}$；

(2) $\dfrac{1}{x^2-2x-3}+\dfrac{2}{x^2-x-6}+\dfrac{3}{x^2+3x+2}=0$.

3. 已知 $\dfrac{3x-9}{(x^2-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}$. 试求 A，B，C 的值.

4. 甲、乙二人分别从相距 36 km 的 A，B 两地同时相向而行，甲从 A 地出发 1 km 后发现有物品遗忘在 A 地，便立即返回，取了物品立即从 A 地向 B 地行进，这样甲、乙恰在 AB 中点相遇. 如果甲每小时比乙多走 0.5 km，求甲、乙二人的速度各是多少.

5. 在公式 $A=\pi r(r+L)$ 中，所有字母均不等于零，试用代数式表示 L.

★★★ 拓展 ★★★

1. 试比较 $\dfrac{m}{n}$ 与 $\dfrac{m+1}{n+1}$ (m，n 是正整数) 的大小.

2. 阅读下列材料：

$$\because \quad \frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\ \frac{1}{3\times 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),\ \frac{1}{5\times 7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),$$

……

$$\frac{1}{2\,013\times 2\,015}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,013}-\frac{1}{2\,015}\right),$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{2\,013\times 2\,015}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2\,013}-\frac{1}{2\,015}\right).$$

解答下列问题：

(1) 在和式 $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots$ 中，第 5 项为 ________，第 n 项为 ________.

上述求和的想法是：通过运用 ________ 法则，将和式中的各分数转化为两个数之差，使得除首末两项外的中间各项可以 ________，从而达到求和目的.

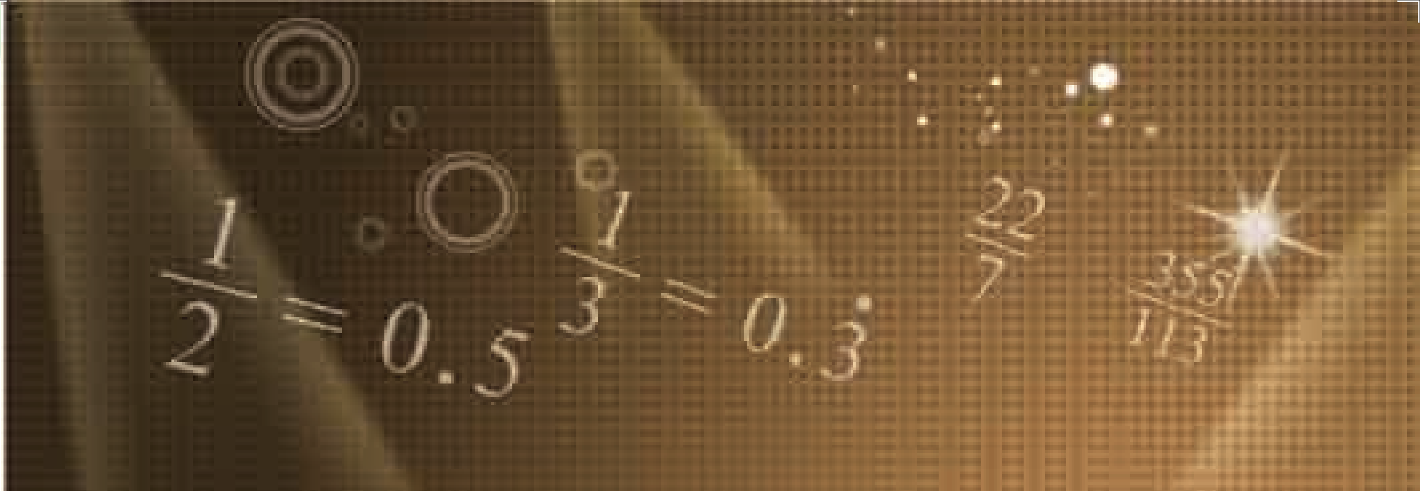
(2) 利用上述结论计算：

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\cdots+\frac{1}{(x+2\,014)(x+2\,016)}.$$

3. 从火车上下来两个旅客，他们沿着一个方向到同一个地点去. 第一个旅客一半路程以速度 a 行走，另一半路程以速度 b 行走；第二个旅客一半时间以速度 a 行走，另一半时间以速度 b 行走. 车站到目的地的路程为 s.

(1) 试表示两个旅客从火车站到目的地所需时间 t_1，t_2.

(2) 哪个旅客先到达目的地？

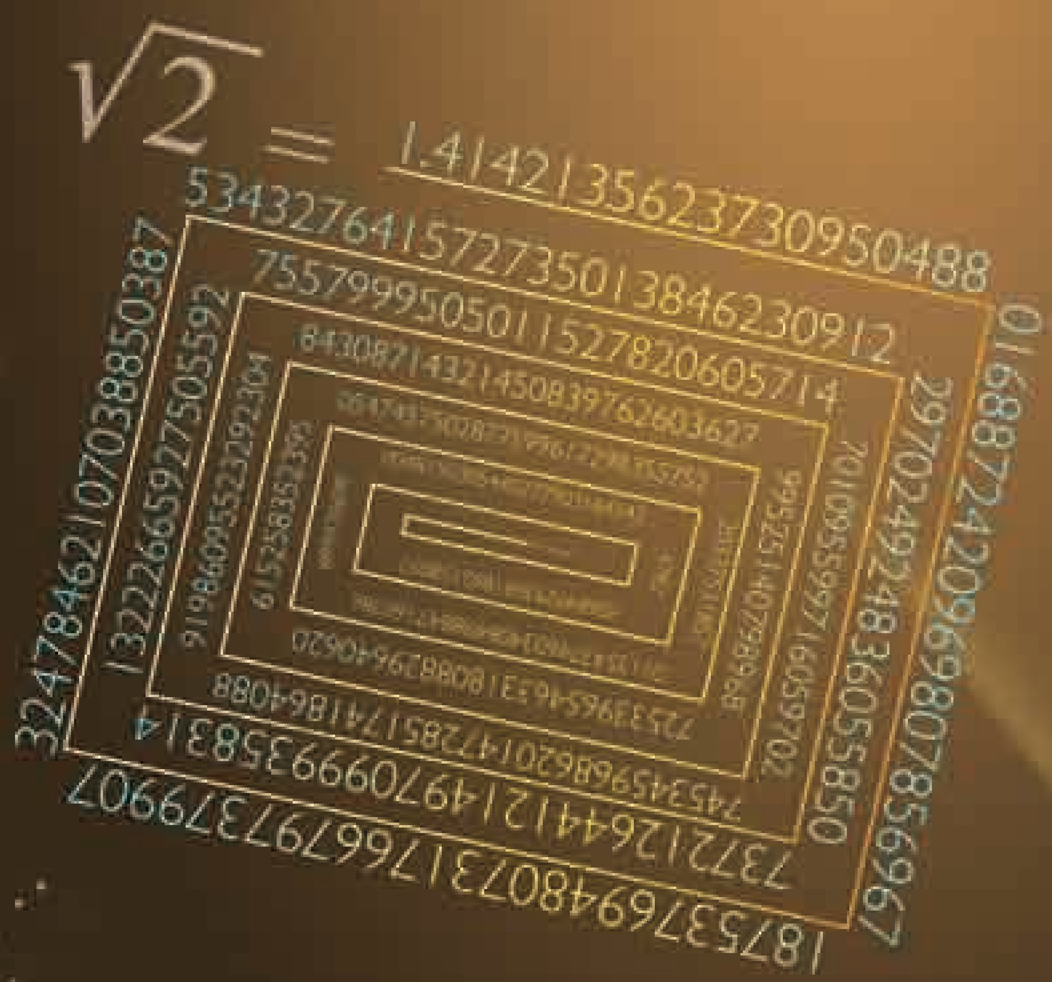


第十一章 实数和二次根式

在现实世界中，除了整数和分数，还有别的数吗？

古希腊的毕达哥拉斯学派曾断言：“世界上只有整数和分数，除此之外，就再也没有别的什么数了.”

这个断言对吗？下面这个数是哪一种数呢？



一、实数

11.1 平方根

探索

你能将两个边长为 1 个单位长度的正方形纸片，剪一剪，拼一拼，得到一个面积为 2 的正方形吗？

如果设新的正方形边长为 x，那么 x 满足什么条件？你能求出 x 的值吗？

1. 平方根

面积为 2 的正方形边长是多少呢？这个问题的实质就是要找一个正数，使这个数的平方等于 2.

思考

如果 $x^2=4$，那么 $x=$_______；如果 $y^2=\frac{16}{25}$，那么 $y=$_______；如果 $z^2=0$，那么 $z=$_______.

一般地，如果一个数 x 的平方等于 a，那么这个数 x 就叫做 a 的**平方根**. 也就是，如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根 .

由平方根的定义，4 的平方根是 2 和 -2，$\frac{16}{25}$ 的平方根是 $\frac{4}{5}$ 和 $-\frac{4}{5}$，0 的平方根是 0.

求一个数的平方根的运算叫做**开平方** . 开平方与加、减、乘、除、乘方一样，是一种运算，它的运算结果是平方根 .

例 1 求下列各数的平方根：

(1) 81；　　(2) $\frac{25}{16}$；　　(3) 0.09 .

解：（1）因为 $9^2=81$，$(-9)^2=81$，所以 81 的平方根是 9 和 -9，也可以说，81 的平方根是 ± 9；

（2）因为 $\left(\pm\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$，所以 $\frac{25}{16}$ 的平方根是 $\pm\frac{5}{4}$；

（3）因为 $(\pm 0.3)^2=0.09$，所以 0.09 的平方根是 ± 0.3 .

由此可知，开平方与平方互为逆运算 .

交流

我们所学过的数都有平方根吗？如果有，有几个？

由于任何一个有理数的平方都是一个非负数，所以只有非负数才有平方根 . 因此，有如下结论：

- 正数有两个平方根，它们互为相反数；
- 零的平方根是零；
- 负数没有平方根 .

练习

1. 判断题：

（1）1 的平方根是 1；（　　）

（2）-1 是 1 的平方根；（　　）

（3）-1 的平方根是 -1；（　　）

（4）$-\frac{2}{3}$ 不是 $\frac{4}{9}$ 的平方根；（　　）

（5）0.2 是 0.4 的平方根 .（　　）

2. 求下列各数的平方根：

（1）64；　（2）$\frac{9}{4}$；　（3）0.001 6；　（4）$(-13)^2$.

2. 算术平方根

我们把正数 a 的正的平方根叫做 a 的**算术平方根**，记作 $\sqrt{a}$（读作“二次根

号 a”)；另一个负的平方根是 $\sqrt{a}$ 的相反数，即 $-\sqrt{a}$. 因此正数 a 的平方根可以记作 $\pm\sqrt{a}$, a 叫做**被开方数** .

规定：0 的算术平方根是 0.

例 2 (1) 求 49 的正的平方根； (2) 求 $\frac{4}{9}$ 的负的平方根；

(3) 求 0.04 的算术平方根 .

解：(1) 因为 $(\pm 7)^2=49$，所以 49 的正的平方根是 7，即

$$\sqrt{49}=7 .$$

(2) 因为 $\left(\pm\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，所以 $\frac{4}{9}$ 的负的平方根是 $-\frac{2}{3}$，即

$$-\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{2}{3}.$$

(3) 因为 $(\pm 0.2)^2=0.04$，所以 0.04 的算术平方根是 0.2，即

$$\sqrt{0.04}=0.2 .$$

每个式子表示的意义是什么?

例 3 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{36}$； (2) $\pm\sqrt{\frac{25}{9}}$； (3) $-\sqrt{(-11)^2}$.

解：(1) 因为 $\sqrt{36}$ 表示 36 的算术平方根，且 $6^2=36$，所以 $\sqrt{36}=6$；

(2) 因为 $\pm\sqrt{\frac{25}{9}}$ 表示 $\frac{25}{9}$ 的平方根，且 $\left(\pm\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，所以 $\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$；

(3) 因为 $-\sqrt{(-11)^2}$ 表示 $(-11)^2$ 的负的平方根，又因为 $(-11)^2=121$，所以 $-\sqrt{(-11)^2}=-\sqrt{121}=-11$.

练习

1. 判断题：

(1) -3 是 9 的平方根； ( )

(2) 9 的平方根是 -3； ( )

(3) $\sqrt{4}=\pm 2$； ( )

(4) $\sqrt{(-17)^2}=-17$. ( )

2. 求下列各数的算术平方根：

(1) 16； (2) $\frac{9}{49}$； (3) 3.24； (4) $\sqrt{16}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{100}$； (2) $-\sqrt{0.0001}$； (3) $\sqrt{(-5)^2}$； (4) $-\sqrt{(-5)^2}$.

11.2 立方根

交流

为了建造一个容积为 343 立方米，形状为正方体的蓄水池，它的棱长应取多少米?

这个问题的实质就是要找一个数，使这个数的立方等于 343 .

一般地，如果一个数 x 的立方等于 a，那么这个数 x 就叫做 a 的**立方根**．也就是，如果 $x^3 = a$，那么 x 叫做 a 的立方根，记作 $\sqrt[3]{a}$（读作“三次根号 a”），3 叫做**根指数**，a 叫做**被开方数**．

求一个数的立方根的运算叫做**开立方**．开立方的运算结果是立方根．

例 1 求下列各数的立方根：

(1) 27； (2) $-\frac{1}{64}$； (3) -0.001 .

解：(1) 因为 $3^3 = 27$，所以 3 是 27 的立方根，即

$$\sqrt[3]{27} = 3 .$$

(2) 因为 $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$，所以 $-\frac{1}{4}$ 是 $-\frac{1}{64}$ 的立方根，即

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} = -\frac{1}{4} .$$

(3) 因为 $(-0.1)^3=-0.001$，所以 -0.1 是 -0.001 的立方根，即

$$\sqrt[3]{-0.001}=-0.1.$$

交流

1. 一个正数有两个平方根，那么一个正数有几个立方根？
2. 负数没有平方根，那么负数有立方根吗？

我们有如下结论：

- 正数的立方根是正数；
- 负数的立方根是负数；
- 零的立方根是零．

例 2 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{0.001}$；　　(2) $\sqrt[3]{-8}$．

解：(1) $\sqrt[3]{0.001}$表示 0.001 的立方根，因为 $0.1^3=0.001$，所以$\sqrt[3]{0.001}=0.1$；

(2) $\sqrt[3]{-8}$表示 -8 的立方根，因为 $(-2)^3=-8$，所以$\sqrt[3]{-8}=-2$．

练习

1. 判断题：

(1) -2 的立方根是 -8；　(　　)

(2) $\frac{1}{8}$的立方根是$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$；　(　　)

(3) 负数没有立方根；　(　　)

(4) 如果 m 的立方根是 4，那么 $-m$ 的立方根就是 -4．　(　　)

2. 求下列各数的立方根：

(1) -1；　　(2) 0.512．

3. 填空：

(1) $\sqrt[3]{8}=$______，$\sqrt[3]{-8}=$______；　(2) $\sqrt[3]{64}=$______，$\sqrt[3]{-64}=$______；

(3) $\sqrt[3]{0.125}=$________，$\sqrt[3]{-0.125}=$________.

你发现了什么规律？用式子表示出来：____________________.

11.3 用科学计算器开方

例 用科学计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{538.24}$；　　(2) $\sqrt{23.7}$（结果精确到 0.000 1）；

(3) $\sqrt[3]{-0.02}$（结果精确到 0. 000 1）.

解：

(1)

	具体操作	结　果
A型计算器	[2nd] [illegible] 538. 24 [=]	23.2
B型计算器	[√■] 538. 24 [=] [S⇔D]	

所以 $\sqrt{538.24}=23.2$；

(2)

	具体操作	结　果
A型计算器	[2nd] [illegible] 23. 7 [=]	4.868264578
B型计算器	[√■] 23. 7 [=]	

因为计算结果要精确到 0.000 1，所以 $\sqrt{23.7}\approx4.8683$；

(3)

	具体操作	结　果
A型计算器	3 [2nd] [illegible] [(−)] 0. 02 [=]	−0.271441762
B型计算器	[SHIFT] [√■] [(−)] 0. 02 [=]	−0.2714417617

因为计算结果要精确到 0.000 1，所以$\sqrt[3]{-0.02}\approx-0.2714$.

练习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{0.2116}$；　(2) $\sqrt[3]{4096}$；　(3) $\sqrt{2.53}$（结果精确到 0.001）；

(4) $\sqrt[3]{-17.576}$；　(5) $\sqrt[3]{317}$（结果精确到 0.001）.

2. 某种型号的复印纸对折以后宽与长的比值是不变的，请你计算一下这种复印纸的宽与长的比值（结果精确到 0.001）.

11.4 无理数与实数

1. 无理数

我们已经知道，面积等于 2 的正方形的边长为 $\sqrt{2}$，体积等于 5 的正方体的棱长为 $\sqrt[3]{5}$. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt[3]{5}$ 是有理数吗？

实践

1. 用计算器计算：$\sqrt{2}$ = __________.
2. 用计算器计算：

(1) $1.414\,213^2$ = __________；

(2) $1.414\,213\,562^2$ = __________；

(3) $1.414\,213\,562\,373^2$ = __________.

你有什么发现？

事实上，没有任何一个有理数的平方等于 2. 把 $\sqrt{2}$ 写成小数形式，$\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\cdots$，它的小数点后面的位数是无限的，而且是不循环的，它是一个无限不循环小数.

交流

把 6，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{7}$ 分别写成小数的形式，它们的小数部分各有什么特点？

有理数都可以用有限小数或无限循环小数表示；反过来，有限小数或无限循环小数也都是有理数．由此可见，无限不循环小数不是有理数．

无限不循环小数有很多，类似的还有：

$$\sqrt{3}=1.732\ 050\ 807\cdots,$$
$$\sqrt[3]{5}=1.709\ 975\ 946\cdots,$$
$$-\sqrt{53}=-7.280\ 109\ 889\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\pi=3.141\ 592\ 653\cdots.$$

我们把无限不循环小数叫做**无理数**．

有理数能用数轴上的点表示，那么无理数呢？

探索

你能在数轴上找到表示$\sqrt{2}$的点吗？

从图 11－1 所示的折纸中（正方形纸片边长为 2），你能不能得到启发？

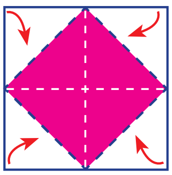


图 11－1

在图 11－1 中，容易知道，红色部分的正方形面积为 2．因此，边长为 1 的正方形的对角线的长度为$\sqrt{2}$．我们可以利用这个结果在数轴上作出表示$\sqrt{2}$的点．

作法：在数轴 Ox 上以 1 个单位长度的线段 OA 为一边作正方形 $OABC$，连接 OB；

在 Ox 轴上截取线段 $OD=OB$，所以 $OD=\sqrt{2}$．点 D 所对应的数便是 $\sqrt{2}$（图 11－2）．

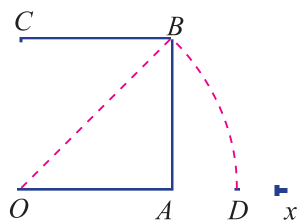


图 11－2

与有理数类似，无理数也可以用数轴上的点表示．

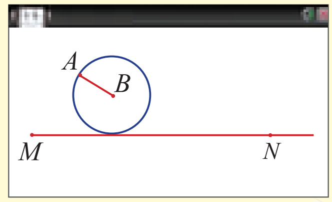
练习

1. 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

-3，0，$\sqrt{16}$，$\dfrac{335}{113}$，$\sqrt{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\sqrt[3]{7}$，$1.\dot{7}$，$-0.121\ 221\ 222\ 1\cdots$（两个 1 之间依次多一个 2）．

2. “形如 $\sqrt{a}$，$\sqrt[3]{a}$的数是无理数”，这个说法对吗？为什么？

3. 在图形计算器中演示：直径为 1 个单位长度的圆，在一条直线上从点 M 滚动一周到点 N. 利用这一演示，你能在数轴上找到表示数 π 的点吗?



（第 3 题）

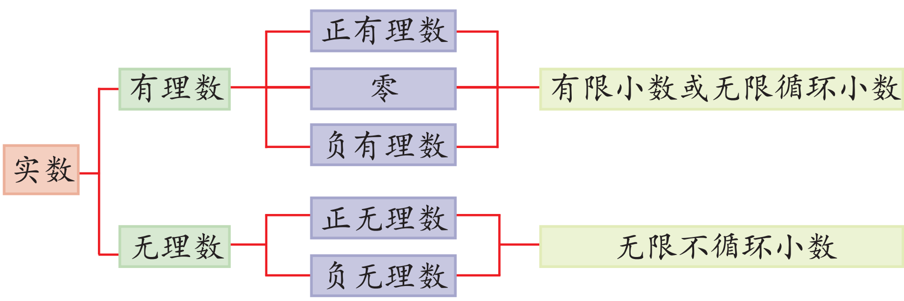
2. 实数

通过求数的平方根与立方根，我们认识了无限不循环小数，即无理数. 有理数和无理数统称为**实数**.

交流

怎样将实数分类? 可以有几种分类方法?

实数可以分类如下：



有理数和无理数都能用数轴上的点表示. 这样，每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数. 这说明，实数和数轴上的点是一一对应的.

任何两个实数都是可以比较大小的，数轴上右边的点比左边的点表示的数大.

有理数的运算法则和运算律对实数同样适用.

例 1 （1）求实数 $\sqrt[3]{-29}$ 的相反数和绝对值；

（2）求绝对值为 $\sqrt{3}$ 的实数；

(3) 比较无理数 $-\sqrt{10}$ 和 $-\pi$ 的大小．

解：(1) ∵ $\sqrt[3]{-29}=-\sqrt[3]{29}<0$，

∴ $\sqrt[3]{-29}$ 的相反数是 $\sqrt[3]{29}$，$\left|\sqrt[3]{-29}\right|=\left|-\sqrt[3]{29}\right|=\sqrt[3]{29}$．

(2) ∵ $\left|+\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$，$\left|-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$，

∴ 绝对值为 $\sqrt{3}$ 的实数是 $\pm\sqrt{3}$．

(3) 用计算器算得 $\left|-\sqrt{10}\right|=\sqrt{10}=3.162\,2\cdots$，$\left|-\pi\right|=3.141\,5\cdots$，

∴ $\left|-\sqrt{10}\right|>\left|-\pi\right|$．

∴ $-\sqrt{10}<-\pi$．

例 2 某易拉罐饮料的罐上标有“净含量 240 mL”，量得它的高为 12 cm．如果将它近似看成圆柱体，试求易拉罐的底面直径（结果精确到 1 cm，1 mL = 1 cm^3，圆柱体体积公式为 $V=\pi R^2 h$）．

分析：由题意得 $\pi R^2\times 12=240$，所以直径 $2R=2\times\sqrt{\dfrac{20}{\pi}}$．

在实际生产和生活中，常要把实数运算中的无理数，通过取各自的近似值，转化为有理数来进行运算．科学计算器是十分方便、实用的计算工具．

解：

	具体操作	结　果
A型计算器	2 × 2nd x^2 20 ÷ π [illegible]	5.046265044
B型计算器	2 × √■ 20 ÷ SHIFT $\times10^x$ =	

所以 $2R\approx 5$．

答：易拉罐底面直径约为 5 cm．

练习

1. 求下列各实数的绝对值：

(1) $\sqrt[3]{-37}$；　　(2) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$．

2. 比较以下每组数中两个数的大小：

(1) $-\sqrt[3]{3}$ 和 $\sqrt{2}$；　　(2) $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{\pi}$；　　(3) $-\sqrt[3]{5}$ 和 $-\sqrt{38}$．

3. 生物学研究表明，初中阶段的青少年每天(24 h)应饮水约 1 300 mL．

(1) 如果你用一个高和底面直径相等的圆柱形容器装这些水，那么这个容器的高约

为多少（结果精确到 1 cm）？

（2）找一个圆柱形的水杯，量量它的高和底面直径各是多少．算一算如果用这个水杯喝水，一天大约应喝几杯水．

探索

估计 $\sqrt{11}$ 介于哪两个连续整数之间，更接近哪个整数．

例 3 太阳的体积约是地球体积的 130 万倍．如果将它们近似地看成球体，估算太阳的半径约是地球半径的多少倍（球体体积公式为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$）．

解： 设太阳半径是 R，地球半径是 r．

由题意，有

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi r^3\times 130\times 10^4.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{R}{10r}\right)^3=1300.$$

$$\therefore\quad \frac{R}{10r}=\sqrt[3]{1\,300}.$$

又 $\because\quad 10^3=1\,000，11^3=1\,331$，

$\therefore$ 估得 $\sqrt[3]{1\,300}$ 介于 10 和 11 之间，但更接近 11．

$$\therefore\quad \frac{R}{10r}\approx 11.$$

$$\therefore\quad R\approx 110r.$$

答：太阳半径约是地球半径的 110 倍．

用计算器算一算！
再比较一下结果．

练习

1. 估计 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 0.5 哪个大．
2. 估计 $\sqrt[3]{5}$ 介于哪两个连续整数之间．

习　题　11－1

★基础★

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) -49 的平方根是 -7；

(2) 3 的平方根是 $\pm\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{9}$ 的平方根是 ± 3；

(4) 算术平方根都是正数.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{0.36}$；　(2) $-\sqrt{1.21}$；　(3) $\pm\sqrt{0.09}$；

(4) $-\sqrt{\dfrac{9}{4}}$；　(5) $\sqrt{(-13)^2}$；　(6) $-\sqrt{(-6)^2}$.

3. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^2=25$；　(2) $x^2-81=0$；　(3) $4x^2=49$；　(4) $25x^2-36=0$.

4. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 8 的立方根是 ± 2；

(2) 负数开立方没有意义；

(3) 任何数都有立方根；

(4) $\sqrt[3]{3}$是 3 的立方根.

5. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{0.001}$；　(2) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}$；　(3) $-\sqrt[3]{64}$；　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$.

6. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^3=0.008$；　(2) $64x^3+1=0$；　(3) $x^3-3=\dfrac{3}{8}$；　(4) $(x-1)^3=8$.

7. 用计算器求下列各式的值（结果精确到 0.000 1）：

(1) $\sqrt{1\,396}$；　(2) $\sqrt{0.34}$；　(3) $\sqrt[3]{4\,936}$；　(4) $\sqrt[3]{-43.4}$.

8. 判断题：

(1) 带根号的数一定是无理数；　(　　)

(2) 无限小数一定是无理数；　(　　)

(3) 无理数是无限小数；　(　　)

(4) 无理数是开平方或开立方开不尽的数.　(　　)

9. 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？哪些是实数？

$3.141\,6$，$\sqrt{\dfrac{16}{9}}$，$\sqrt{3}$，$0.\dot{3}\dot{2}$，$-0.571\,435\,7$，$\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{2}{3}$，$\sqrt[3]{-8}$，$-\sqrt[3]{4}$.

10. 比较下列各组中两个实数的大小：

(1) $1.654\,7$ 和 $1.\dot{5}$；　(2) $\sqrt{29}$ 和 $\dfrac{69}{13}$；　(3) $\sqrt[3]{17}$ 和 $\sqrt{6.7}$.

11. 求下列各数的相反数和绝对值：

$-\sqrt{5}$；$\sqrt[3]{-7}$；$\sqrt{5}-\sqrt{7}$；$\pi-3.14$；$-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

12. 计算：

（1）$\sqrt{10}+2.23-\pi$（结果精确到 0.01）；

（2）$(-4)\times\sqrt{7}+2\sqrt[3]{6}$（结果精确到 0.001）.

13. 某种冰淇淋蛋筒可以近似地看成圆锥体 . 已知它的高为 15 cm，体积为 140 cm^3. 求这个圆锥体底面圆形纸盖半径的大小（圆锥体体积公式为 $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h$，结果精确到 1 cm）.

★★提升★★

1. 实数 x 在什么范围内取值时，下列各式有意义？

（1）$\sqrt{2x}$；（2）$\sqrt{-x}$；（3）$\sqrt{x^2}$；（4）$\sqrt{3x+2}$.

2. a 一定有平方根吗？如果有，那么 a 应该是什么样的数？如果没有，为什么？

3. 如果 16 的平方根为 a，b 的绝对值为 5，求 $a+b$ 的值 .

4. 要剪一块正方形铁皮，使它的面积等于直径为 3 cm 的圆的面积 . 这块铁皮的边长是多少（结果精确到 0.1 cm）？

★★★拓展★★★

1. 某种球形冰淇淋是用塑料纸包装的，有 60 g 装和 150 g 装两种规格 . 已知其包装成本的立方与质量的平方成正比 .

（1）如果 60 g 装冰淇淋的包装成本为 0.60 元，求 150 g 装冰淇淋的包装成本是多少元（结果精确到 0.01 元）.

（2）如果 60 g 装冰淇淋的售价为 1.5 元，150 g 装冰淇淋的售价为 3.25 元 . 两种规格中，买哪种比较合算？

2. 用科学计算器探索下列各式的值：

（1）$\sqrt{121(1+2+1)}$；

（2）$\sqrt{12\,321(1+2+3+2+1)}$；

（3）$\sqrt{1\,234\,321(1+2+3+4+3+2+1)}$；

由此猜想 $\sqrt{1\,234\,567\,654\,321(1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1)}$ 的值 .

二、二次根式

11.5 二次根式及其性质

交流

$\sqrt{a}$ 表示什么？ a 需要满足什么条件？

一般地，式子 $\sqrt{a}$（$a \geqslant 0$）叫做**二次根式**．

如 $\sqrt{7}$，$\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt{m^2+1}$，$\sqrt{(x-y)^2}$ 等都是二次根式．在实数范围内，由于负数没有平方根，所以 $\sqrt{a}$（$a<0$）没有意义．也就是说，二次根式 $\sqrt{a}$ 中的字母 a 只能表示大于或等于零的实数．

例 1 实数 x 在什么范围内取值时，下列各式表示二次根式？

（1）$\sqrt{2x+3}$；　　　　（2）$\sqrt{2-4x}$．

解：（1）由 $2x+3 \geqslant 0$，得

$$x \geqslant -\frac{3}{2}.$$

所以当 $x \geqslant -\frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{2x+3}$ 表示二次根式．

（2）由 $2-4x \geqslant 0$，得

$$x \leqslant \frac{1}{2}.$$

所以当 $x \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{2-4x}$ 表示二次根式．

根据平方根和算术平方根的意义，我们进一步研究二次根式的性质．

思考

1. 式子 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ 分别表示什么意义？
2. $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ 的平方分别等于几？为什么？
3. 式子 $\sqrt{a}$（$a \geqslant 0$）的意义是什么？$(\sqrt{a})^2$ 等于什么？

由于$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）表示非负数 a 的算术平方根，根据平方根的意义，那么$\sqrt{a}$的平方等于 a. 这样我们得到了二次根式的一个基本性质，即

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0).$$

用语言表述为：**非负数的算术平方根的平方，等于这个非负数**.

例 2 计算：

(1) $(5\sqrt{3})^2$；　　(2) $(\sqrt{a^2+b^2})^2$.

$5\sqrt{3}=5\times\sqrt{3}$.

解：(1) $(5\sqrt{3})^2=5^2\times(\sqrt{3})^2=25\times 3=75$.

(2) 因为对于任何实数 a 和 b，都有 $a^2+b^2\geqslant 0$，所以

$$(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2.$$

探索

在实数范围内分解因式：

(1) x^2-6；　　(2) a^3-3a.

练习

1. 下列各式中，哪些是二次根式？哪些不是二次根式？

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$；　(2) $\sqrt{-0.7}$；　(3) $\sqrt{3-\pi}$；　(4) $\sqrt{x^2+4x+4}$.

2. 实数 x 在什么范围内取值时，下列各式表示二次根式？

(1) $\sqrt{2x+5}$；　(2) $\sqrt{\frac{x}{2}-3}$.

3. 计算：

(1) $(\sqrt{0.7})^2$；　(2) $(7\sqrt{10})^2$；　(3) $\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2$.

交流

1. $\sqrt{a^2}$ 的意义是什么？字母 a 可以取怎样的数？

2. $\sqrt{a^2}$ 一定等于 a 吗？为什么？

由于$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$，$\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$，$\sqrt{11^2}=\sqrt{121}=11$，$\sqrt{0^2}=0$，…，所以，一般地，当 $a\geqslant 0$ 时，有$\sqrt{a^2}=a$；

由于$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$，$\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$，$\sqrt{(-10)^2}=\sqrt{100}=10$，…，所以，一般地，当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$．

2 和 -2，5 和 -5，10 和 -10 有什么关系？

综合上面的结果，有

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

探索

回顾实数绝对值的意义，用一个式子概括$\sqrt{a^2}$的化简结果．

二次根式的一个重要性质：

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

用语言表述为：**一个数的平方的算术平方根等于这个数的绝对值**．

例 3 计算：

(1) $\sqrt{(-1.9)^2}$； (2) $\sqrt{(x^2+1)^2}$； (3) $\sqrt{(3-\pi)^2}$；

(4) $\sqrt{25a^2b^2}$ $(a\geqslant 0,\ b<0)$； (5) $\sqrt{x^2-10x+25}$ $(x<5)$．

解：(1) $\sqrt{(-1.9)^2}=|-1.9|=1.9$．

(2) $\because\ x^2\geqslant 0$，

$\therefore\ x^2+1>0$．

$\therefore\ \sqrt{(x^2+1)^2}=|x^2+1|=x^2+1$．

(3) $\because\ 3<\pi$，

$\therefore\ 3-\pi<0$．

$\therefore\ \sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3$．

(4) $\because\ a\geqslant 0,\ b<0$，

$\therefore\ ab\leqslant 0$．

$\therefore\ \sqrt{25a^2b^2}=\sqrt{(5ab)^2}=|5ab|=-5ab$．

(5) $\because \quad x<5$,

$\therefore \quad x-5<0$.

$\therefore \quad \sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|=-(x-5)=5-x$.

练习

1. 下列等式是否成立？为什么？

(1) $\sqrt{(-7)^2}=-7$，$\sqrt{7^2}=7$，$(\sqrt{-7})^2=-7$，$(\sqrt{7})^2=7$；

(2) $\sqrt{0.3^2}=\pm 0.3$；

(3) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{(x-5)^2}\ (x \geqslant 5)$；

(2) $\sqrt{(2-x)^2}\ (x \geqslant 2)$；

(3) $\sqrt{p^2+6p+9}\ (p<-3)$.

交流

$(\sqrt{a})^2$ 和 $\sqrt{a^2}$ 表示的意义相同吗？ a 的取值范围一样吗？

11.6 二次根式的乘除法

1. 二次根式的乘法

实践

1. 一个长方形的长 $a=\sqrt{15}$ cm，宽 $b=\sqrt{6}$ cm，求这个长方形的面积.

2. 研究一下，当 $a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{ab}$ 相等吗？

两个二次根式相乘，怎样进行计算呢？

下面我们从特殊的例子入手研究一下：

$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$ ________，$\sqrt{4\times9}=$ ________；

$\sqrt{4}\times\sqrt{25}=$ ________，$\sqrt{4\times25}=$ ________；

$\sqrt{5}\times\sqrt{7}=$ ________，$\sqrt{5\times7}=$________（用计算器计算）；

……

一般地，有

二次根式的乘法法则

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad(a\geqslant0,\ b\geqslant0).$$

用语言表述为：**两个非负数的算术平方根的乘积等于这两个数的乘积的算术平方根**.

例 1 计算：

（1）$\sqrt{3}\times\sqrt{7}$； （2）$\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{48}$.

解：（1）$\sqrt{3}\times\sqrt{7}=\sqrt{3\times7}=\sqrt{21}$；

（2）$\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{48}=\sqrt{\frac{1}{3}\times48}=\sqrt{16}=4$.

我们把等式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$反过来写，就得到

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0).$$

我们可以利用它把二次根式进行化简，使被开方数不含有能开得尽方的因数或因式.

例 2 化简下列二次根式：

（1）$\sqrt{48}$； （2）$\sqrt{25m^3}$； （3）$\sqrt{17^2-8^2}$.

解：（1）$\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times3}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$；

（2）$\sqrt{25m^3}$

$=\sqrt{25}\times\sqrt{m^2\cdot m}$

$=5\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{m}$

$=5m\sqrt{m}$；

为什么$\sqrt{m^2}=m$？

(3) $\sqrt{17^2-8^2}$

$=\sqrt{(17+8)(17-8)}$

$=\sqrt{25\times 9}$

$=\sqrt{25}\times\sqrt{9}$

$=15$.

例 3 计算：

(1) $\sqrt{15}\times\sqrt{6}$； (2) $-2\sqrt{20}\times 5\sqrt{35}$.

解：(1) $\sqrt{15}\times\sqrt{6}=\sqrt{15\times 6}=\sqrt{3^2\times 5\times 2}=3\sqrt{10}$；

(2) $-2\sqrt{20}\times 5\sqrt{35}$

$=-10\sqrt{20\times 35}$

$=-10\sqrt{2^2\times 5^2\times 7}$

$=-100\sqrt{7}$.

被开方数不含有能开得尽方的因数.

练习

1. 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$； (2) $2\sqrt{10}\times(-\sqrt{15})$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{50}$； (2) $-\sqrt{27\times 15}$； (3) $\sqrt{16a^5}$； (4) $\sqrt{45ab^2}$ $(b\geqslant 0)$.

3. 估计 $2\sqrt{7}$ 介于哪两个连续整数之间.

*4. 等式 $\sqrt{(x-5)(x+2)}=\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+2}$ 一定成立吗？

2. 二次根式的除法

交流

两个二次根式相除，应该怎样进行计算呢？

一般地，有

二次根式的除法法则

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad(a\geqslant 0,\ b>0).$$

用语言表述为：**两个非负数的算术平方根的商等于这两个数的商的算术平方根**.

例 4 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}}$； (2) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}\div\sqrt{\dfrac{1}{3}}$； (3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

解：(1) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\dfrac{24}{8}}=\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}\div\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{4}{3}\div\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{4}{3}\times 3}=\sqrt{4}=2$；

被开方数的因数是整数.

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{3\times 2}{2\times 2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

如果一个二次根式满足下列两个条件：

(1) 被开方数不含有能开得尽方的因数或因式；

(2) 被开方数的因数是整数，字母因式是整式.

我们把这个二次根式叫做**最简二次根式**.

一般地，二次根式运算的结果应化成最简二次根式.

例 5 把下列根式化为最简二次根式：

(1) $\sqrt{18}$； (2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$； (3) $\sqrt{4a^3b}\ (a<0)$.

解：(1) $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{2\times 3}{3\times 3}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{6}$.

(3) $\sqrt{4a^3b}=\sqrt{(2a)^2ab}=|2a|\sqrt{ab}$.

你能够确定 b 的符号吗?

$\because\ a<0$,

$\therefore\ \sqrt{4a^3b}=-2a\sqrt{ab}$.

交流

不用计算器，利用$\sqrt{2}\approx 1.414$计算$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$的近似值．下面两位同学的算法中，哪种算法比较简单、快速？

甲同学的算法是：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx\dfrac{1}{1.414}=\dfrac{1\,000}{1\,414}=\dfrac{500}{707}\approx 0.707$；

乙同学的算法是：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx\dfrac{1.414}{2}=0.707$．

实际上，首先化去分母中的根号，运算比较简单．

化去分母中的根号的依据是什么？

探索

用化去分母中的根号的方法，完成下列除法运算：

（1）$5\div\sqrt{2}$；　　（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．

把分母中的根号化去，叫做**分母有理化**．

例 6 把下列各式的分母有理化：

（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$；　　（2）$\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}$；　　（3）$\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{18}}$．

解：（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3\times 5}}{(\sqrt{5})^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$；

（2）$\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}=\dfrac{a\cdot\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}=\dfrac{a}{a+b}\sqrt{a+b}$；

（3）$\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{18}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$．

练习

1. 计算：

(1) $2\sqrt{18} \div \sqrt{3}$； (2) $\sqrt{8} \times \sqrt{3} \div \sqrt{12}$；

(3) $\sqrt{18} \div (\sqrt{18} \times \sqrt{27})$； (4) $\sqrt{2} \div \sqrt{11}$.

2. 把下列根式化成最简二次根式：

(1) $5\sqrt{12}$； (2) $6\sqrt{\frac{3}{8}}$；

(3) $\sqrt{50a^2b}$ $(a>0)$； (4) $\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}$ $(n<0)$.

3. 把下列各式的分母有理化：

(1) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$； (2) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{27}}$； (3) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$； (4) $\frac{-6a^2}{\sqrt{4ab}}$.

11.7 二次根式的加减法

思考

怎样计算下列各式？结果是什么？

(1) $\sqrt{5}+\sqrt{5}$；

(2) $\sqrt{12}+\sqrt{3}$.

$\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{5+5}$ 吗？

对于算式 (1)，可设 $\sqrt{5}$ 为 a，那么 a 和 a 是同类项，可按照合并同类项法则进行运算，$\sqrt{5}+\sqrt{5}=a+a=2a=2\sqrt{5}$；

对于算式 (2)，由于 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，所以 $\sqrt{12}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

由以上过程可以看出，像 $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{3}$ 这样的二次根式之间可以进行加减运算.

把 $\sqrt{18}$，$\sqrt{8}$ 化为最简二次根式分别得 $3\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，这两个根式的被开方数相同，我们称它们为同类二次根式.

一般地，几个二次根式分别化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，就把这几个二次根式叫做**同类二次根式**.

例 1 指出下列每组的根式中，哪些是同类二次根式（字母均为正数）：

（1）$\sqrt{27}$，$\sqrt{72}$，$\frac{1}{2}\sqrt{75}$，$\sqrt{\frac{1}{50}}$；

（2）$\sqrt{8ab^3}$，$\sqrt{\frac{a}{2b}}$，$\sqrt{32a^3b^5}$.

判断同类二次根式要注意什么？

解：（1）由于 $\sqrt{27}=\sqrt{3^2\times3}=3\sqrt{3}$，

$$\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\times3}=\frac{5}{2}\sqrt{3},$$

$$\sqrt{\frac{1}{50}}=\sqrt{\frac{2}{10^2}}=\frac{1}{10}\sqrt{2}.$$

所以，$\sqrt{72}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{50}}$ 是同类二次根式，$\sqrt{27}$ 和 $\frac{1}{2}\sqrt{75}$ 也是同类二次根式.

（2）由于 $a>0$，$b>0$，

$$\sqrt{8ab^3}=\sqrt{2^2\cdot b^2\cdot 2ab}=2b\sqrt{2ab},$$

$$\sqrt{\frac{a}{2b}}=\sqrt{\frac{a\cdot 2b}{2b\cdot 2b}}=\frac{1}{2b}\sqrt{2ab},$$

$$\sqrt{32a^3b^5}=\sqrt{4^2\cdot a^2b^4\cdot 2ab}=4ab^2\sqrt{2ab}.$$

所以，$\sqrt{8ab^3}$，$\sqrt{\frac{a}{2b}}$ 和 $\sqrt{32a^3b^5}$ 都是同类二次根式.

二次根式的加减运算实际上就是先把每个二次根式化成最简二次根式，再合并同类二次根式.

例 2 计算：

（1）$2\sqrt{18}-4\sqrt{\frac{1}{8}}+3\sqrt{32}$；

（2）$\left(\sqrt{32}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$.

解：（1）$2\sqrt{18}-4\sqrt{\frac{1}{8}}+3\sqrt{32}$

$$=6\sqrt{2}-\sqrt{2}+12\sqrt{2}$$

$$= (6-1+12)\sqrt{2}$$

$$= 17\sqrt{2}\ ;$$

和多项式的加减法类似!

$$(2)\ \left(\sqrt{32}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+5\sqrt{3}$$

$$= \frac{15}{4}\sqrt{2}+\frac{13}{3}\sqrt{3}\ .$$

练习

1. 下列各组中的二次根式是不是同类二次根式?

（1）$\sqrt{63}$，$\sqrt{28}$；　（2）$\sqrt{12}$，$\sqrt{27}$，$\sqrt{\frac{1}{3}}$；　（3）$\sqrt{4a^3}$，$3\sqrt{a}$，$2\sqrt{\frac{2a}{3}}$.

2. 计算：

（1）$\sqrt{2}+\sqrt{8}$；　（2）$3\sqrt{40}-\sqrt{\frac{2}{5}}-2\sqrt{\frac{1}{10}}$；

（3）$\sqrt{8ab}-2b\sqrt{\frac{a}{2b}}$ $(b>0)$；　（4）$\sqrt{2x}-\sqrt{8x^3}+2\sqrt{2xy^2}$ $(y<0)$.

例 3 计算：

（1）$\left(\sqrt{\frac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\times\sqrt{6}$；　（2）$(5+2\sqrt{6})(5\sqrt{2}-\sqrt{12})$.

解：（1）$\left(\sqrt{\frac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\times\sqrt{6}$

$$= \sqrt{\frac{8}{27}}\times\sqrt{6}-5\sqrt{3}\times\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{27}\times 6}-5\sqrt{3\times 6}$$

$$= \frac{4}{3}-15\sqrt{2}\ ;$$

(2) $(5+2\sqrt{6})(5\sqrt{2}-\sqrt{12})$

$=25\sqrt{2}-5\sqrt{12}+10\sqrt{6\times 2}-2\sqrt{6\times 12}$

$=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+20\sqrt{3}-12\sqrt{2}$

$=13\sqrt{2}+10\sqrt{3}$.

和多项式乘法类似！

例 4 计算：

(1) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$ ；　　(2) $(\sqrt{6}-3\sqrt{3})^2$.

解：(1) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2$

$=12-18$

$=-6$ ；

用了什么乘法公式？有什么作用？

(2) $(\sqrt{6}-3\sqrt{3})^2$

$=(\sqrt{6})^2-2\times\sqrt{6}\times 3\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2$

$=6-18\sqrt{2}+27$

$=33-18\sqrt{2}$.

探索

将下列各式分母有理化：

(1) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ ；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

练习

计算：

(1) $(\sqrt{12}-2\sqrt{75})\times\sqrt{3}$ ；　　(2) $-\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$ ；

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})$ ；　　(4) $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ；

(5) $(\sqrt{5}+1)^2$ ；　　(6) $(3\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$.

习 题 11－2

★基础★

1. 实数 a 在什么范围内取值时，下列各式是二次根式？

（1）$\sqrt{a-7}$；　（2）$\sqrt{3-9a}$；　（3）$\sqrt{6a}$；　（4）$\sqrt{\frac{1}{2}a+3}$.

2. 计算：

（1）$(\sqrt{13})^2$；　（2）$(\sqrt{0.001})^2$；　（3）$(2\sqrt{3})^2$；　（4）$\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2$.

3. 在实数范围内分解因式：

（1）x^2-3；　（2）$2x^2-10$；　（3）a^4-49；　（4）m^3-2m.

4. 计算：

（1）$\sqrt{144}$；　（2）$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$；

（3）$\sqrt{m^2}$（$m>0$）；　（4）$\sqrt{(a-2)^2}$（$a\geqslant 2$）.

5. 计算：

（1）$\sqrt{15}\times\sqrt{20}$；　（2）$(-5\sqrt{8})\times(-3\sqrt{2})$；

（3）$\left(-\frac{2}{3}\sqrt{27}\right)\times\frac{3}{4}\sqrt{6}$；　（4）$3\sqrt{5a}\cdot(-2\sqrt{10b})$.

6. 化简：

（1）$\sqrt{18}$；　（2）$\sqrt{24}$.

7. 计算：

（1）$5\sqrt{14}\div(-\sqrt{7})$；　（2）$2\sqrt{18}\div 3\sqrt{2}$；

（3）$-\frac{3}{2}\sqrt{6}\div 2\sqrt{3}$；　（4）$-\sqrt{\frac{8}{5}}\div\sqrt{\frac{16}{5}}$.

8. 化简：

（1）$\sqrt{\frac{8}{7}}$；　（2）$\sqrt{\frac{25}{8}}$；

（3）$\sqrt{\frac{5b}{4a}}$（$b\geqslant 0$）；　（4）$\sqrt{\frac{a-5}{a+5}}$（$a>5$）.

9. 化简：

（1）$\frac{5}{\sqrt{6}}$；　（2）$\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{15}}$；

（3）$\frac{3a}{\sqrt{a}}$；　（4）$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}}$.

10. 把下列根式化成最简二次根式：

(1) $2\sqrt{48}$；　　(2) $\sqrt{1.5}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{18}{a}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{2a^5b^3}{125}}$ $(a \geqslant 0)$.

11. 下列根式中，哪些是同类二次根式（字母均为正数）？

$\sqrt{8}$，$\sqrt{20}$，$-\sqrt{\dfrac{5}{16}}$，$\sqrt{\dfrac{1}{18}}$，$3\sqrt{\dfrac{4}{5}}$，$-\sqrt{121a^3}$，$a\sqrt{\dfrac{1}{a}}$.

12. 计算：

(1) $3\sqrt{2}-5\sqrt{8}+4\sqrt{8}$；　　(2) $\sqrt{12}-3\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{4}{5}\sqrt{75}$.

13. 计算：

(1) $(\sqrt{32}+2\sqrt{3})(-\sqrt{2})$；　　(2) $(\sqrt{12}-5\sqrt{8})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $(3\sqrt{5}+1)(2\sqrt{3}-\sqrt{15})$；　　(4) $(\sqrt{8}-\sqrt{48})(\sqrt{12}-\sqrt{50})$.

14. 计算：

(1) $(5\sqrt{2}-3\sqrt{5})(5\sqrt{2}+3\sqrt{5})$；　　(2) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{6})^2$；

(3) $(\sqrt{12}+\sqrt{8})(\sqrt{27}-\sqrt{18})$；　　(4) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)$.

15. (1) 如果 $|x-3|+(4+y)^2+\sqrt{z+2}=0$，求代数式 $\dfrac{3x}{2y+z}$ 的值；

(2) 已知 $a=\dfrac{\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}}{b}+2b$，求 ab 的值.

★★提升★★

1. 实数 a 在什么范围内取值时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{a(a-1)}$；　　(2) $\dfrac{a+3}{\sqrt{2a+1}}$；　　(3) $\sqrt{a^2-2a+3}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{m^2}$；　　(2) $\sqrt{(m+1)^2}$；

(3) $\sqrt{(2m+3)^2}$；　　(4) $\sqrt{m^2-4m+4}$.

3. 求满足下列条件的实数 x 的取值范围：

(1) $\sqrt{x^2}=x$；　　(2) $\sqrt{x^2}=-x$；

(3) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=1$；　　(4) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=-1$.

4. 化简：

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

5. 将下列各式分母有理化：

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$；　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$；　　(4) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$.

★★★拓展★★★

1. 当 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 时，求代数式 x^2+y^2-5xy 的值.

2. 尽可能多地编写根式化简题，要求满足以下两个条件：

(1) 根式由 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ 这三个（或者其中的两个）无理数经过各种运算组成；

(2) 化简的结果是一个有理数.

问题解决

用计算器探索发现：

问题 1：计算 $\sqrt{11-2}$，$\sqrt{1\,111-22}$，$\sqrt{111\,111-222}$，$\sqrt{11\,111\,111-2\,222}$，…，你发现了什么规律？能用式子表示吗？

问题 2：取一个很大或很小（小于 1）的正数多次开平方会出现什么结果？

问题 3：已知按一定规律排列的一组数：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{4}}$，…，$\dfrac{1}{\sqrt{20}}$. 如果从中选出若干个数，使它们的和大于 3，那么至少要选几个数？

阅读理解

希帕苏斯与无理数

我们已经知道，除去整数、分数这些有理数之外，还有无理数，如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π，$\sqrt[3]{7}$，…，可见毕达哥拉斯 (Pythagoras) 学派的断言“世界上只有整数和分数，除此之外，就再也没有别的什么数了”是一个谬论．这个学派残忍地杀害了它的一个门徒，而这个门徒正是第一个站起来反对这一谬论的人——希帕苏斯 (Hippasus)．

毕达哥拉斯学派曾在数学上做出过突出的贡献．在两千多年前，该学派碰到了一个伤脑筋的问题：如果 $l^2=2$，那么 l 到底是多少呢？是整数，还是分数呢？显然 l 不是整数．因为 $1^2=1$，$2^2=4$，所以 l 一定比 1 大，比 2 小．按照毕达哥拉斯学派对数的认识，l 就一定是分数了．可是他们费了九牛二虎之力，也找不到这个分数．

作为毕达哥拉斯学派的门徒，希帕苏斯对此问题很感兴趣，他花费了很大的精力去研究这个问题．经过深入细致的研究后，他断言，l 既不是整数，也不是分数，而是当时还没有认识的一种新数．

希帕苏斯发现了新的数，推翻了毕达哥拉斯学派关于数只有整数和分数的结论，动摇了毕达哥拉斯学派的基础．该学派大为恐慌，立即下令封锁该“发现”，并扬言，谁敢把这一机密泄露给局外人，就对谁处以极刑．真理是封锁不住的，尽管毕达哥拉斯学派内部纪律严明，希帕苏斯的发现还是被许多人知道了．学派追查泄密的人，结果发现不是别人，正是希帕苏斯自己．这还了得，希帕苏斯竟敢背叛自己所在的学派，一定要严惩他．这样，悲剧就发生了．

我们可以采用反证法，假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，于是可以用两个整数 m，n 表示为 $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$，进而得到 $2m^2=n^2$，这个式子的左边有奇数个 2 因子，右边有偶数个 2 因子，矛盾！这就否定了反证假设．

真理是不可战胜的．据柏拉图记载，后来又发现了类似 $l^2=2$ 的数，这些“怪物”深深地困惑着古希腊的数学家们．这些数就是我们现在所认识的无理数．

回顾与整理

知识要点

本章知识主要由实数、二次根式的概念与运算组成．

1. 平方根．

平方根的概念	表示法	性　质	算术平方根
如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根	正数 a 的平方根为“$\pm\sqrt{a}$”	一个正数有两个平方根，它们互为相反数；零的平方根是零；负数没有平方根	正数 a 的正的平方根 $\sqrt{a}$ 叫做 a 的算术平方根，零的算术平方根是零

2. 立方根．

立方根的概念	表示法	性　质
如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根	a 的立方根为“$\sqrt[3]{a}$”	正数的立方根是正数；零的立方根是零；负数的立方根是负数

3. 实数．

无理数的概念	实数的概念	实数与数轴	实数的分类
无限不循环小数叫做无理数	有理数和无理数统称为实数	实数和数轴上的点是一一对应的	实数 有理数：正有理数、零、负有理数 无理数：正无理数、负无理数

4. 二次根式．

概　念	性　质	最简二次根式	同类二次根式
式子 $\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$ 叫做二次根式	$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$； $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$	满足两个条件： (1) 被开方数不含能开得尽方的因数或因式； (2) 被开方数的因数是整数，字母因式是整式	化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式

知识要点

5. 二次根式的运算.

加　减	先把每个二次根式化成最简二次根式，再合并同类二次根式
乘	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$
除	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$

学习指导

1. 学习概念时要抓住本质，不受表面形式的干扰. 由于无理数的概念是从非负数的开平方引出的，所以容易产生“带根号的数是无理数”的错误认识.

圆周率 π 和 0.303 003 000…都是不带根号的数，但它们都是无限不循环小数，是无理数. 可见，是否含有根号不是无理数的本质特征.

2. 学习时要注意比较相近概念的相同点和不同点，这样才可以深刻地理解概念，减少错误. 如：平方根与算术平方根这两个概念，其相同点是只有非负数才有平方根和算术平方根；不同点是正数的平方根有两个，而它的算术平方根只有一个.

3. 注意公式、法则使用的条件及正用与逆用，如公式 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 成立的条件是 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$；正用（从左到右）是二次根式的乘法法则，逆用（从右到左）主要是用来化简二次根式.

复　习　题

★基础★

1. 判断题：

（1）$\dfrac{125}{512}$ 的立方根是 $\dfrac{5}{8}$ 和 $-\dfrac{5}{8}$；（　　）

(2) 7 的算术平方根是 $\pm\sqrt{7}$ ； (　　)

(3) $\sqrt{9}=\pm 3$ ； (　　)

(4) 无限小数都是无理数； (　　)

(5) 带根号的数都是无理数； (　　)

(6) $\sqrt{-7x}$ 一定没有意义； (　　)

(7) 1 的平方根与立方根相等． (　　)

2. 已知下列各数：

$\sqrt{16}$，0.333…，$\frac{5}{7}$，$\sqrt[3]{16}$，$0.\dot{6}\dot{1}$，$\sqrt[3]{-27}$，3.141 59，$\sqrt{0.25}$，3.212 112 111 211 11…（小数部分每两个 2 之间依次增加一个 1）．这些数中：

(1) ______________________________ 是自然数；

(2) ______________________________ 是整数；

(3) ______________________________ 是有理数；

(4) ______________________________ 是无理数；

(5) ______________________________ 是实数．

3. 两个无理数的和、差、积、商一定是无理数吗？举例说明．

4. 实数 x 在什么范围内取值时，下列各式表示二次根式？

(1) $\sqrt{2x-1}$ ；　　(2) $\sqrt{3x+5}$ ；

(3) $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}$ ；　　(4) $\sqrt{\frac{3}{x^2}}$ ．

5. 实数 x 在什么范围内取值时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}$ ；　　(2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ ；

(3) $\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{1-3x}$ ；　　(4) $\frac{\sqrt{2x+3}}{x+1}$ ．

6. 计算：

(1) $-\sqrt[3]{-125}$；　　(2) $\sqrt{(-2)^2}$ ；

(3) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$ ；　　(4) $(\sqrt{a^2+1})^2$ ．

7. 计算：

(1) $5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{3}{2}\sqrt{20}-\frac{15}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$ ；

(2) $\sqrt{12}+6\sqrt{\frac{3}{2}}-\left(\sqrt{3-\frac{9}{4}}-\sqrt{24}\right)$；

(3) $4\sqrt{\frac{1}{2}}\div(-\sqrt{6})\times\frac{1}{3}\sqrt{12}$；

(4) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{3})$；

(5) $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$；

(6) $(2\sqrt{3}+\sqrt{15})(\sqrt{15}-2\sqrt{3})$.

★★ 提升 ★★

1. 实数 x 在什么范围内取值时，下列各式有意义？

(1) $\frac{3x-5}{\sqrt{3-5x}}$；　　(2) $\sqrt{4-x^2}$；

(3) $\sqrt{\frac{2x}{1+x}}$；　　(4) $\frac{5}{\sqrt{x}-1}$.

2. 计算：

(1) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

(2) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3})$；

(3) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$；

(4) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

3. 已知 $|3x+2y-4|+\sqrt{2x-y-5}=0$，求实数 x 和 y 的值.

4. 已知 $x=3+2\sqrt{2}$，$y=3-2\sqrt{2}$，求 x^2y-xy^2 的值.

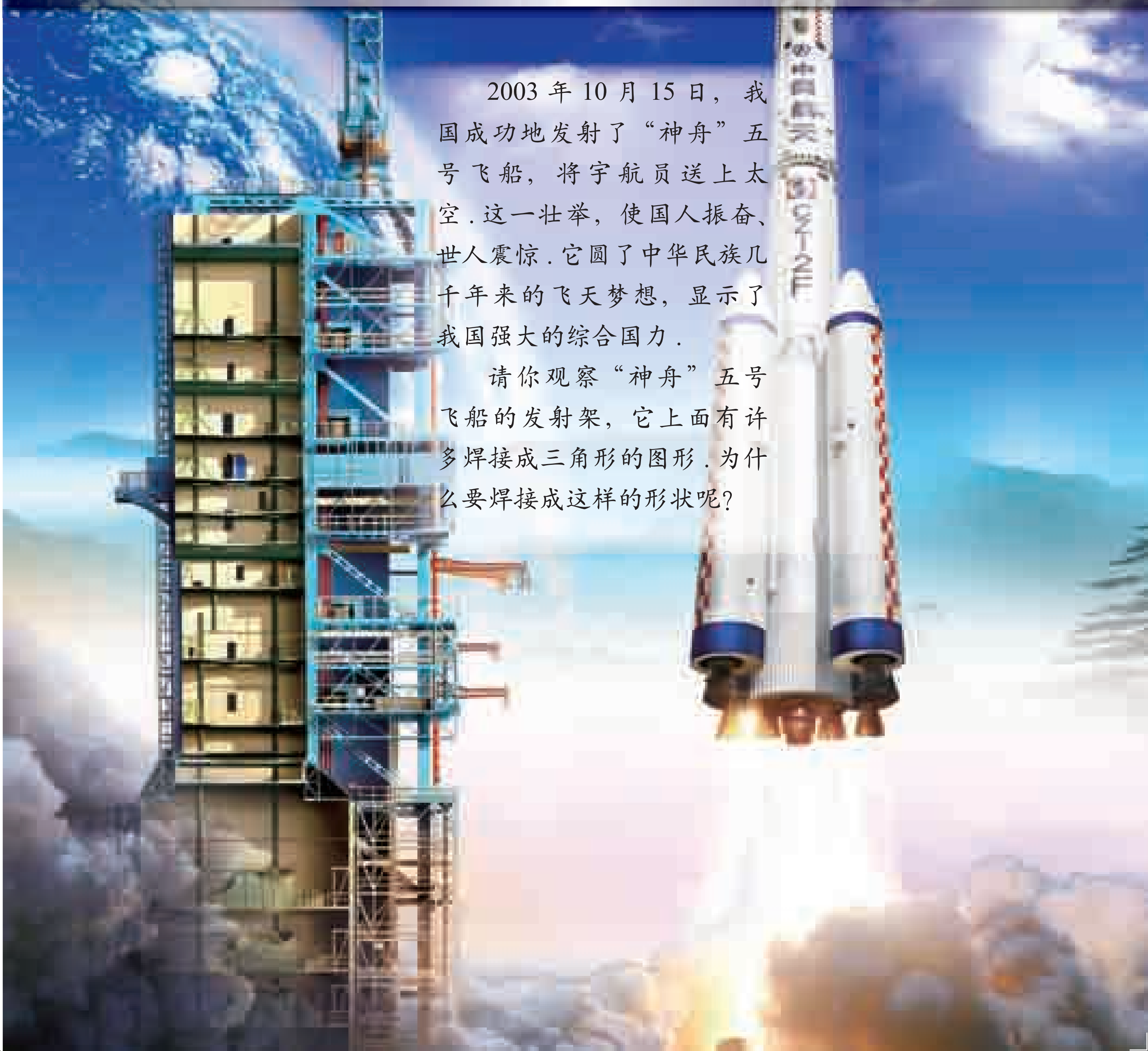
★★★ 拓展 ★★★

1. 化简：

(1) $\sqrt{x^2}$；　　(2) $\sqrt{(x-1)^2}$；　　(3) $\sqrt{(x+1)^2}$；　　(4) $\sqrt{x^2-6x+9}$.

2. 不用计算器，估计 $\sqrt{11}+\sqrt{17}$ 的值在哪两个整数之间，比一比谁估计的误差小.

第十二章 三角形



2003 年 10 月 15 日，我国成功地发射了“神舟”五号飞船，将宇航员送上太空．这一壮举，使国人振奋、世人震惊．它圆了中华民族几千年来的飞天梦想，显示了我国强大的综合国力．

请你观察“神舟”五号飞船的发射架，它上面有许多焊接成三角形的图形．为什么要焊接成这样的形状呢？

一、三角形及其性质

12.1 三角形

如图 12－1，由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接组成的图形叫做**三角形**．三角形用符号“△”表示．三角形 ABC 记作“△ ABC”，读作“三角形 ABC”．其中点 A，B，C 叫做三角形的**顶点**；线段 AB，BC，AC 叫做三角形的**边**；$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 叫做三角形的**内角**，简称为三角形的角．

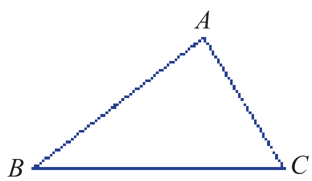


图 12－1

实践

选取三根长度适当的木条（或硬纸条）组成一个三角形，每两根的交叉点用铁钉固定起来（图 12－2）．你能发现什么现象?

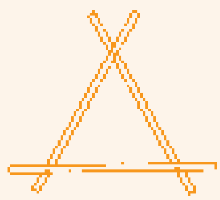


图 12－2

我们发现，这个三角形的形状和大小固定不变了．这个性质称为三角形的稳定性.

你能举出生活中应用三角形稳定性的例子吗?你能回答“神舟”五号飞船的发射架为什么要焊接成三角形的结构吗？

12.2 三角形的性质

1. 三角形边的性质

我们已经学过，两点之间线段最短．在图 12－3 中，$AB + AC > BC$，$AB +$

$BC > AC$，$AC + BC > AB$. 于是可以总结出三角形三边之间的一个性质，即

三角形两边之和大于第三边.

我们将上面的不等式作适当变形，便可以得到：$BC - AB < AC$，$BC - AC < AB$，$AB - AC < BC$. 于是可总结出三角形三边之间的又一个性质，即

三角形两边之差小于第三边.

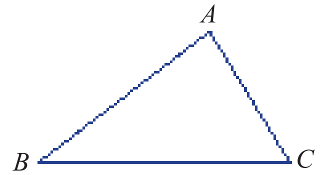


图 12－3

例 1 已知等腰三角形的周长为 12 cm，其中一边的长为 3 cm，求另外两边的长.

解：因为长为 3 cm 的边可能是腰，也可能是底，所以分两种情况计算.

(1) 如果 3 cm 长的边为底，设腰长为 x cm.

由已知条件，有

$$x + x + 3 = 12.$$

解出 $$x = 4.5.$$

(2) 如果 3 cm 长的边为腰，设底边长为 x cm.

由已知条件，有

$$3 + 3 + x = 12.$$

解出 $$x = 6.$$

因为 $3 + 3 = 6$，不符合三角形两边之和大于第三边，所以以 3 cm 长为腰不能组成三角形.

答：另外两边的长都是 4.5 cm.

交流

如果任意给出三条线段，它们一定可以组成一个三角形吗?

探索

现有五根木条，它们的长度分别为 1 cm，2 cm，3 cm，4 cm，5 cm. 选用其中的三根木条首尾相接，哪三根木条可以组成一个三角形？一共有多少种不同的组法?

2. 三角形角的性质

在小学时，我们通过把三角形的三个角拼成一个平角（图 12－4），得出三角形的三个内角的和等于 180°. 现在我们还可以借助图形计算器的测量功能得出这个结论（图 12－5）.

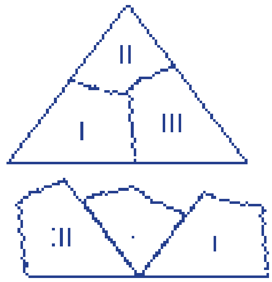


图 12－4

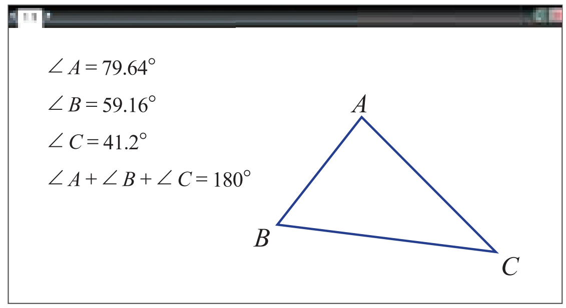


图 12－5

上面介绍的方法仅仅是通过实验、观察得出的结论，我们还需要通过理论上的证明，得出一般性的结论 .

受图 12－4 的启发，我们得到下面一种证明方法 .

已知：△ ABC（图 12－6）.

求证：$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$.

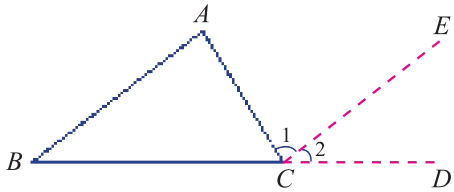


图 12－6

证明：延长 BC 到 D，过 C 作 $CE \parallel AB$（图 12－6）.

∴ $\angle 1=\angle A$，$\angle 2=\angle B$.

∵ $\angle 1+\angle 2+\angle ACB=180°$，

∴ $\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$.

探索

你能用其他添加辅助线的方法证明三角形的内角和为 180° 吗？（比如：如图 12－7，过点 A 作 $DE \parallel BC$）

请你再用不同的方法进行证明 .

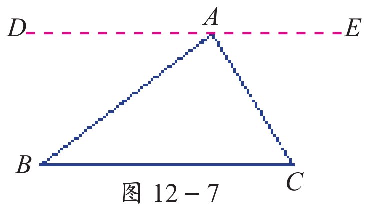


图 12－7

由以上的证明，我们可以得到三角形三个内角之间的一个重要性质 .

定理　三角形三个内角的和等于 180°.

这个定理称为三角形内角和定理，它的应用十分广泛 .

以上的各种证明方法，启发我们在添加辅助线时，要利用已经学过的相关知识 . 比如：平角等于 180°.

例 2 已知：如图 12－8，在△ ABC 中，$\angle A=100°$，$\angle B=\angle C$. 求：$\angle B$，$\angle C$ 的度数 .

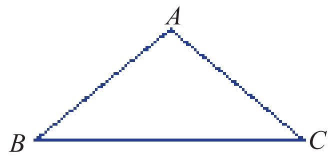


图 12－8

解：设 $\angle B$ 的度数为 x，

$\because$　$\angle B=\angle C$，

$\therefore$　$\angle C$ 的度数也为 x.

$\because$　$\angle A+\angle B+\angle C=180°$　（三角形内角和定理），

$\therefore$　$100+x+x=180$，

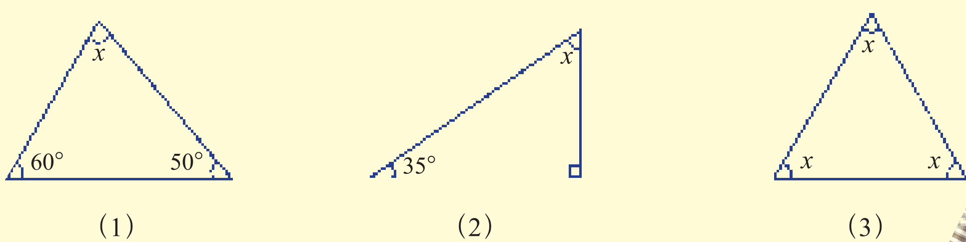
　　$2x=80$.

$\therefore$　$x=40$.

即 $\angle B=40°$，$\angle C=40°$.

练习

计算下列三角形中标有 x 的角的度数 .



探索

图 12－9 是一个四边形，你能推出 ∠A，∠B，∠C，∠D 四个角的度数之和吗？

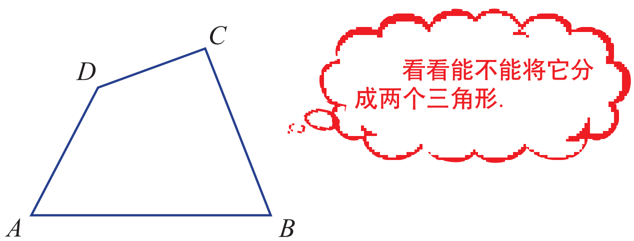
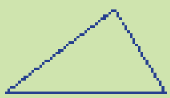
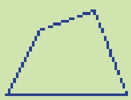
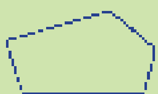
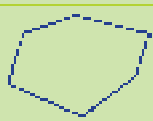
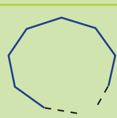


图 12－9

观察图形、发现规律，并填写下表：

	图　形	内角和
三角形		$(3-2)\times 180^\circ = 180^\circ$
四边形		$(4-2)\times 180^\circ = 360^\circ$
五边形		
六边形		
…	…	…
n 边形		

如图 12－10，点 D 是△ ABC 的边 BC 延长线上的一点，那么∠ ACD 叫做△ ABC 的一个**外角**.

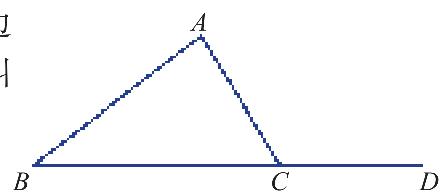


图 12－10

思考

在图 12－10 中，$\angle ACD$ 与 $\angle A$，$\angle B$ 之间有什么关系？试证明你的发现．

根据三角形内角和定理，可以发现：

推论 1　三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和．

推论 2　三角形的一个外角大于与它不相邻的任意一个内角．

例 3 如图 12－11，点 B，C，D，E 是同一直线上的四点，$\angle B=\angle BAC=30^\circ$，$\angle CAD=60^\circ$．求 $\angle ADE$ 的度数．

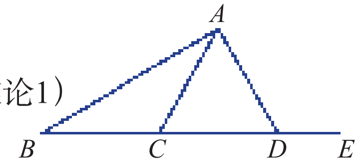


图 12－11

解：$\because$　$\angle B=\angle BAC=30^\circ$，

$\therefore$　$\angle ACD=\angle B+\angle BAC$（三角形内角和定理的推论1）

$=30^\circ+30^\circ=60^\circ$．

又$\because$　$\angle CAD=60^\circ$（已知），

$\therefore$　$\angle ADE=\angle ACD+\angle CAD$（三角形内角和定理的推论 1）

$=60^\circ+60^\circ=120^\circ$．

即 $\angle ADE=120^\circ$．

还有其他解法吗？

交流

如图 12－12，线段 AB，CD，EF 两两交于点 G，P，H．怎样求 $\angle A+\angle C+\angle E+\angle B+\angle D+\angle F$ 的度数？

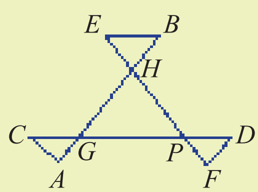


图 12－12

思考

1．三角形的内角中最多能有几个直角？

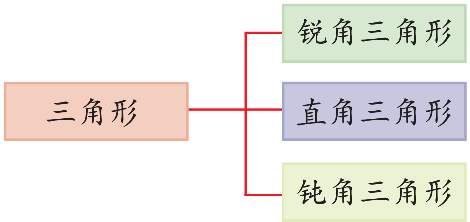
2．三角形的内角中最多能有几个钝角？

三个角都是锐角的三角形叫做**锐角三角形**；

有一个角是直角的三角形叫做**直角三角形**；

有一个角是钝角的三角形叫做**钝角三角形**.

这样，三角形按角的大小可以分成：



交流

如果一个三角形有两个锐角互余，你能判定这个三角形的形状吗?

由此我们可以得到直角三角形的一个判定方法：**有两个锐角互余的三角形是直角三角形**.

12.3 三角形中的主要线段

1. 三角形的中线

在三角形中，连接一个顶点和它的对边中点的线段，叫做这个三角形的**中线**.

在图 12－13 中，D 是 BC 中点，那么线段 AD 是 BC 边上的中线.

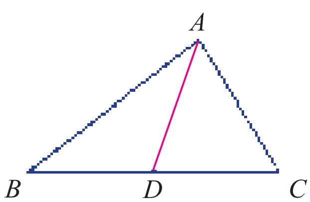
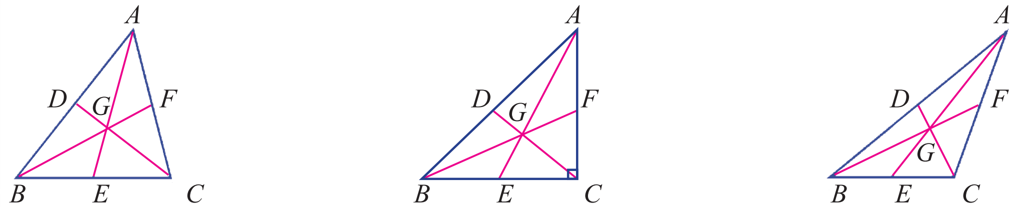


图 12－13

探索

在一块质地均匀的三角形硬纸板上，画出它的三条中线.观察这三条中线是否交于一点.如果这三条中线交于一点，用笔尖托住这个交点，观察硬纸板能否保持平衡.

从图 12－14 可以看出，一个三角形的三条中线交于一点，这个点叫做三角形的**重心**．



锐角三角形　　直角三角形　　钝角三角形

图 12－14

2. 三角形的角平分线

在三角形中，一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段，叫做这个三角形的**角平分线**．

在图 12－15 中，AT 是 $\angle BAC$ 的平分线，那么线段 AT 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，所以有

$$\angle BAT=\angle CAT=\frac{1}{2}\angle BAC.$$

三角形的三条角平分线是否交于一点？动手试一试．

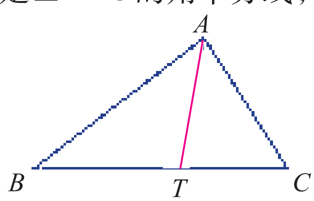


图 12－15

3. 三角形的高

由三角形的一个顶点向它的对边所在的直线引垂线，顶点和垂足之间的线段叫做这个三角形的**高线**，简称三角形的**高**．

在图 12－16 中，$AH\perp BC$ 于 H，那么线段 AH 是 $\triangle ABC$ 的高．

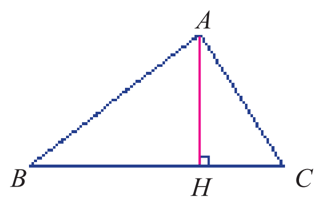


图 12－16

如图 12－17，形状不同的三角形中，垂足 H 的位置有什么不同？

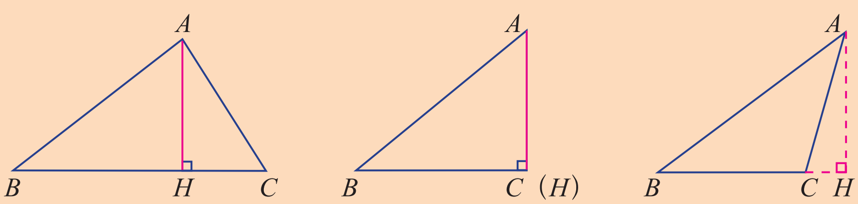


图 12－17

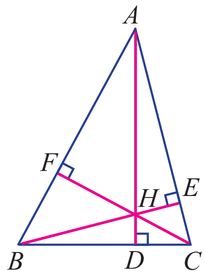
思考

实践

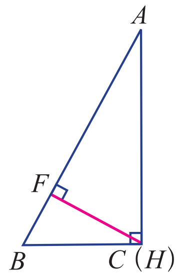
按不同类三角形讨论.

三角形的三条高（或所在的直线）交于一点吗?

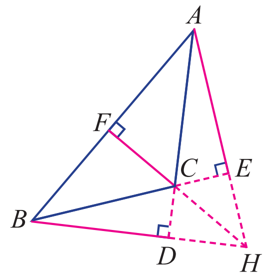
锐角三角形的三条高交于一点，交点在三角形的内部；直角三角形的三条高交于一点，交点与直角顶点重合;钝角三角形的三条高所在的直线交于一点，交点在三角形的外部（图 12－18）.



锐角三角形



直角三角形



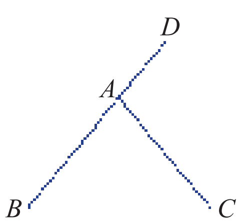
钝角三角形

图 12－18

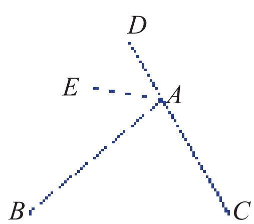
习　题　12－1

★基础★

1. 举出你观察到的应用三角形稳定性的例子.
2. 三角形中，其中两条边长分别是 3 cm 和 4 cm. 求第三条边的长度的取值范围.
3. 三角形的三个内角的度数的比为 1∶2∶3. 求这三个内角的度数.
4. 三角形中一个角的度数等于另外两个角的度数的和. 试判断这个三角形的形状.
5. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle B = \angle C$，D 是 BA 延长线上一点，且 $\angle DAC = 100°$. 求 $\angle B$ 的度数.



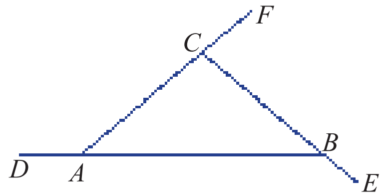
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 已知：如图，△ ABC 中，D 是 CA 延长线上一点，AE 是 ∠ DAB 的平分线，∠ $B=40°$，∠ $C=60°$. 求 ∠ DAE 的度数 .

7. 已知：如图，D 是 BA 延长线上一点，E 是 CB 延长线上一点，F 是 AC 延长线上一点，∠ $DAC=140°$，∠ $ACB=100°$. 求 ∠ ABE 的度数 .



（第 7 题）

★★提升★★

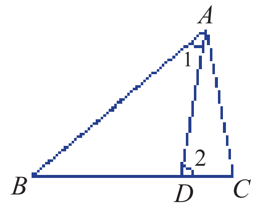
1. 有长分别为 2 cm，3 cm，4 cm，5 cm 的四根木棍，用其中的三根首尾相接组成三角形，共有多少种组成方法？

2. 如果三角形的三边长分别为 5，8，$2a+1$. 求 a 的取值范围 .

3. 三角形的两条边长分别为 2 cm 和 5 cm，第三边的长是一个偶数 . 求第三边的长 .

4. △ ABC 中，∠ $A=2$ ∠ B，∠ $A+$ ∠ $B=2$ ∠ C. 求 ∠ A 的度数 .

5. 已知:如图，∠ $B=40°$，∠ $B=$ ∠ 1，∠ 2 = ∠ C. 求 ∠ DAC 的度数 .

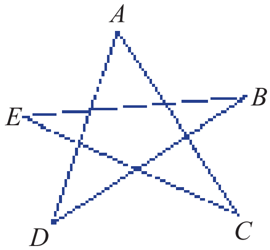


（第 5 题）

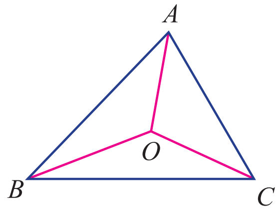
★★★拓展★★★

1. 如图所示的五角星中，∠ $A+$ ∠ $B+$ ∠ $C+$ ∠ $D+$ ∠ E 等于多少度？

2. 已知：如图，O 是△ ABC 内一点 . 求证：$OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.



（第 1 题）



（第 2 题）

二、全等三角形

12.4 全等三角形

小明买了几张猴年邮票，准备送给他的老师和同学．他把其中的任意两张邮票叠放在灯光下一照，发现猴的图案能够完全重合在一起（图 12－19）．

图 12－19

像这样能够完全重合的两个图形叫做**全等形**．

探索

在同学们手中的三角尺中，能否找到全等的图形？

在图 12－20 中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle MPN$ 能够完全重合，我们说这两个三角形全等．“全等”用符号“$\cong$”来表示，读作“全等于”．$\triangle ABC$ 全等于 $\triangle MPN$，记作“$\triangle ABC \cong \triangle MPN$”．

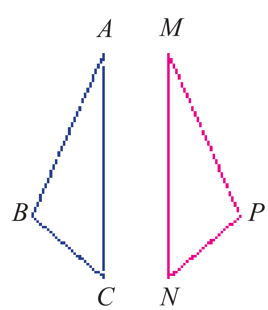


图 12－20

当两个三角形重合时，互相重合的顶点叫做**对应顶点**，互相重合的边叫做**对应边**，互相重合的角叫做**对应角**．

由上，我们可以得出：

全等三角形的对应边相等；全等三角形的对应角相等．

思考

1. 在图 12－21 中，将△ ABC 平移至△ DEF，那么△ ABC ≌______. 指出对应顶点、对应边和对应角 .

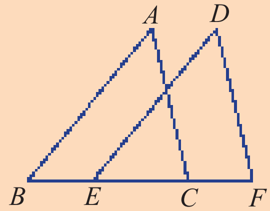


图 12－21

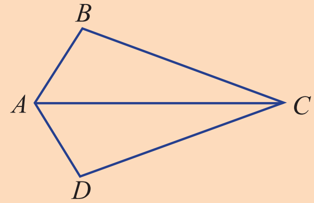


图 12－22

2. 在图 12－ 22 中，将△ ABC 沿 AC 翻折至△ ADC，那么△ ABC ≌______. 指出对应顶点、对应边和对应角 .

3. 在图 12－23 中，将△ ABD 绕 BD 的中点 O 旋转至△ CDB，那么 △ ABD ≌______. 指出对应顶点、对应边和对应角 .

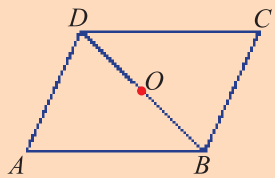


图 12－23

12.5 全等三角形的判定

交流

科技小组的同学们在活动中，不小心将一块三角形形状的玻璃摔成三块，如图 12 － 24. 他们决定到商店去配一块大小、形状相同的玻璃，应该怎么办呢？

同学甲说：“应带 A 去 .”

同学乙说：“应带 B 去 .”

同学丙说：“应带 C 去 .”

同学丁说：“应把 A，B，C 都带去 .”

他们谁说的有道理呢？你还有其他方法吗？

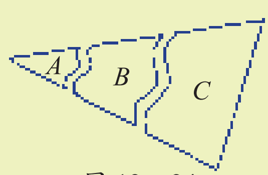


图 12－24

实践

请每个同学使用量角器和刻度尺画一个三角形 ABC，如图 12－25，使它满足 $AB=70\text{ mm}$，$\angle A=60°$，$\angle B=80°$. 然后每个同学把$\triangle ABC$剪下来，并与邻座同学的三角形互相叠放在一起，它们互相重合吗？

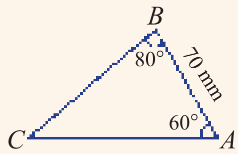


图 12－25

我们发现它们能彼此重合在一起，也就是说，它们是全等三角形．

由此可以总结出：

基本事实　有两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（简记为：**角边角**或 **ASA**）.

如图 12－26，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$BC=B'C'$，那么，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

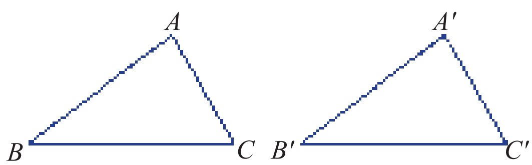


图 12－26

例 1　已知：如图 12－27，$AC\parallel BD$，AB 交 CD 于点 O，且 $AC=BD$. 求证：$\triangle AOC\cong\triangle BOD$.

证明：$\because$　$AC\parallel BD$，

$\therefore$　$\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$.

在$\triangle AOC$和$\triangle BOD$中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AC=BD,\\ \angle C=\angle D,\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle AOC\cong\triangle BOD$　（ASA）.

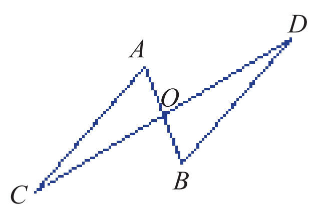
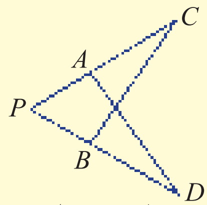


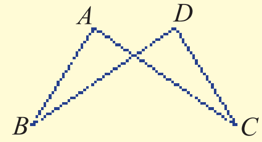
图 12－27

练习

1. 已知：如图，$PC=PD$，$\angle C=\angle D$. 求证：$\triangle PCB \cong \triangle PDA$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$\angle ABC=\angle DCB$，$\angle DBC=\angle ACB$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

类似的，我们可以总结出：

基本事实　有两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等（简记为：**边角边**或 **SAS**）**.**

如图 12－28，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle A=\angle A'$，那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

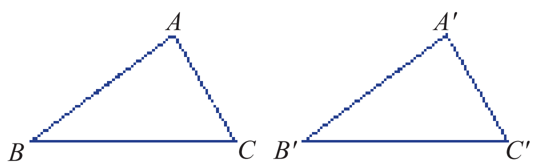


图 12－28

例 2　已知：如图 12－29，$AC=AD$，AB 平分 $\angle CAD$.

求证：(1) $\triangle CAB \cong \triangle DAB$；(2) $\angle C=\angle D$.

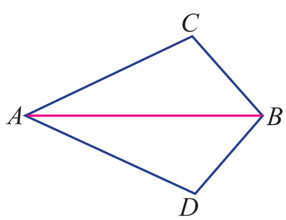


图 12－29

证明：(1) $\because$　AB 平分 $\angle CAD$，

$\therefore$　$\angle CAB=\angle DAB$.

在 $\triangle CAB$ 和 $\triangle DAB$ 中，

$$\begin{cases} AC=AD, \\ \angle CAB=\angle DAB, \\ AB=AB, \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle CAB \cong \triangle DAB$　（SAS）.

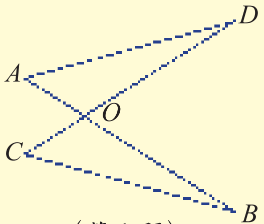
(2) $\because$　$\triangle CAB \cong \triangle DAB$　（已证），

$\therefore$　$\angle C=\angle D$　（全等三角形对应角相等）.

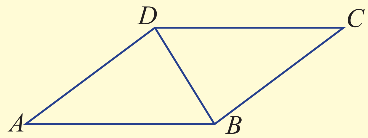
练习

1. 已知：如图，AB，CD 相交于点 O，$AO=CO$，$OD=OB$.

求证：$\triangle AOD \cong \triangle COB$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB \parallel CD$，且 $AB=CD$. 求证：$\triangle ADB \cong \triangle CBD$.

类似的，我们还可以总结出：

基本事实　有三边分别相等的两个三角形全等（简记为：**边边边**或 **SSS**）**.**

如图 12 − 30，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$，那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

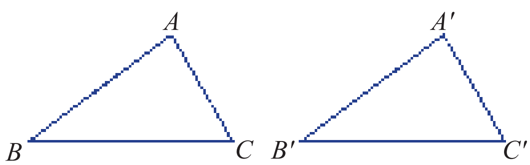


图 12 − 30

例 3　已知：如图 12 − 31，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 中点 .

求证：AD 平分 $\angle BAC$.

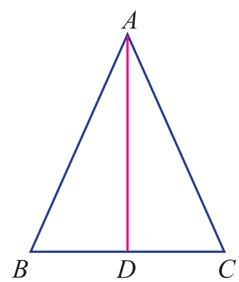


图 12 − 31

证明：$\because$　D 为 BC 的中点，

$\therefore$　$BD=CD$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

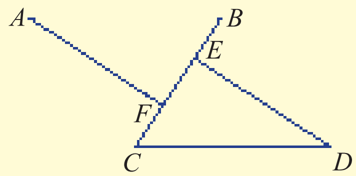
$\therefore$　$\triangle ABD \cong \triangle ACD$　（SSS）.

$\therefore$　$\angle BAD=\angle CAD$　（全等三角形对应角相等）.

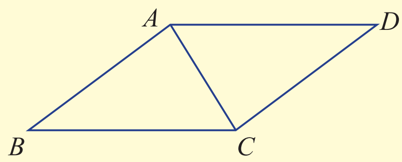
即 AD 平分 $\angle BAC$.

练习

1. 已知：如图，E，F 是线段 BC 上两点，$AB=DC$，$AF=DE$，$BE=CF$.
   求证：$\triangle ABF \cong \triangle DCE$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB=CD$，$AD=CB$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

交流

有两个角及其中一个角的对边分别相等的两个三角形是否全等？

如图 12－32，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，满足条件 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是否全等？请给出证明.

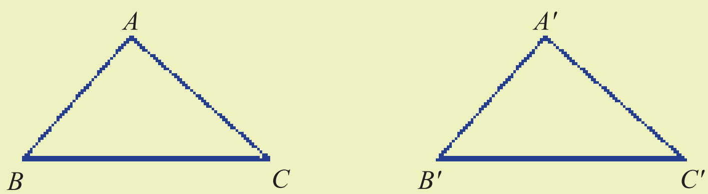


图 12－32

由此不难推导出又一种判定两个三角形全等的方法：

定理　有两个角及其中一个角的对边分别相等的两个三角形全等（简记为：**角角边**或 **AAS**）.

如图 12－32，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

例 4 已知：如图 12－33，$\angle C=\angle D=90^\circ$，$AB$ 平分 $\angle CAD$.

求证：$AC=AD$.

证明：$\because$ AB 平分 $\angle CAD$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

在 $\triangle CAB$ 和 $\triangle DAB$ 中，

$$\begin{cases}\angle C=\angle D,\\ \angle 1=\angle 2,\\ AB=AB,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle CAB\cong\triangle DAB$ （AAS）.

$\therefore$ $AC=AD$ （全等三角形对应边相等）.

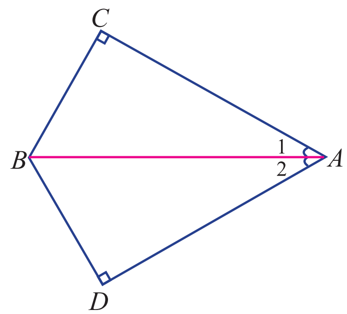


图 12－33

探索

从你所学的三角形全等的判定方法中任选一种，自编一道判定两个三角形全等的题目，写出已知、求证、证明，并画出图形.

思考

如图 12－34，$\angle ACB=\angle DBC$，如果再增加一个什么条件，可以判定 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$？

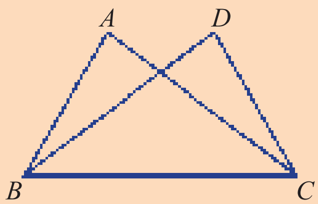


图 12－34

利用全等三角形的性质，我们还可以进一步证明两条线段相等、两个角相等、两条直线平行及垂直等.

例 5 已知：如图 12－35，四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$.

求证：(1) $AB=CD$； (2) $\angle B=\angle D$.

证明：(1) 连接 AC.

$\because$ $AB \parallel CD$,

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

$\because$ $AD \parallel BC$,

$\therefore$ $\angle 3 = \angle 4$.

在 $\triangle CAB$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ AC = CA, \\ \angle 3 = \angle 4, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle CAB \cong \triangle ACD$ (ASA).

$\therefore$ $AB = CD$ (全等三角形对应边相等).

(2) $\because$ $\triangle CAB \cong \triangle ACD$ (已证),

$\therefore$ $\angle B = \angle D$ (全等三角形对应角相等).

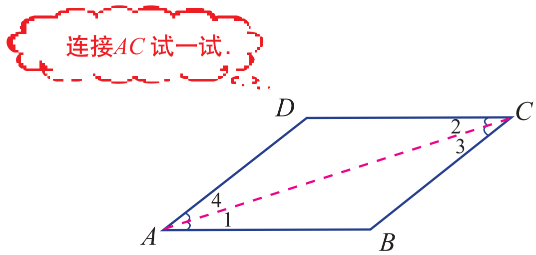
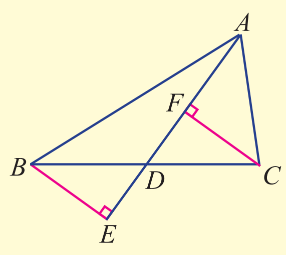


图 12－35

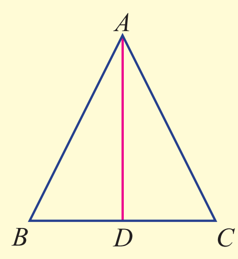
练习

1. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 的中点，$BE \perp AD$ 的延长线于 E，$CF \perp AD$ 于 F.

   求证：$BE = CF$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D.

   求证：$AD \perp BC$.

综合与实践

关于鱼塘大小的测量

刘大伯承包了一个鱼塘，他想知道鱼塘的宽 AB 究竟有多长（图 12 – 36）.

请你用学过的知识，帮助刘大伯解决这个问题.

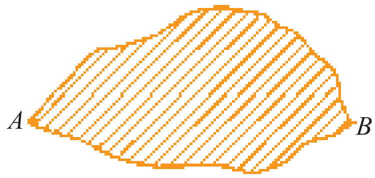
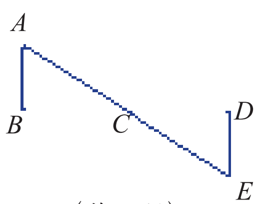


图 12 – 36

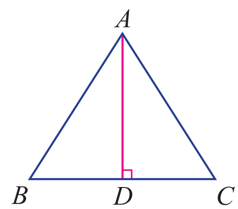
习　题　12 – 2

★基础★

1. 如图所示，在两个全等三角形中，点 A 和点 E 是一组对应顶点，写出其余的对应顶点、对应边和对应角.



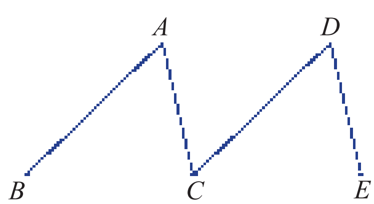
（第 1 题）



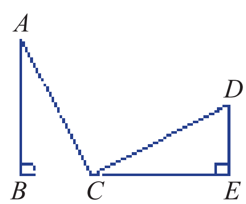
（第 2 题）

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle B = \angle C$，$AD \perp BC$ 于 D. 求证：$BD = CD$.

3. 已知：如图，C 是 BE 的中点，$AB \parallel DC$，$AB = DC$. 求证：$\angle A = \angle D$.



（第 3 题）

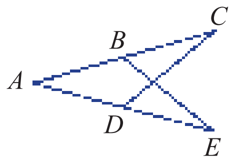


（第 4 题）

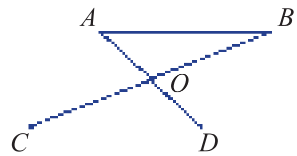
4. 已知：如图，点 C 在 BE 上，$AB \perp BE$，$DE \perp BE$，且 $AB = CE$，$BC = ED$.

求证：$AC \perp CD$.

5. 已知：如图，$AC=AE$，B 是 AC 的中点，D 是 AE 的中点．求证：$\angle C=\angle E$.



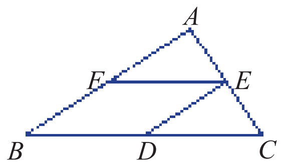
（第 5 题）



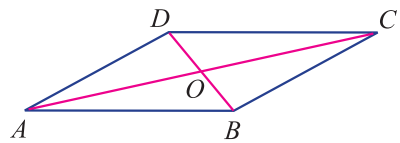
（第 6 题）

6. 已知：如图，$AB\parallel CD$，$AB=DC$，AD 与 BC 交于点 O. 求证：$OA=OD$，$OB=OC$.

7. 已知：如图，E 是 AC 的中点，$DE\parallel AB$，$EF\parallel BC$．求证：$FE=DC$.



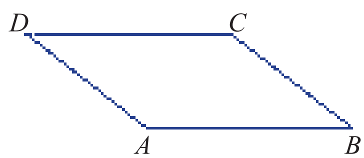
（第 7 题）



（第 8 题）

8. 已知：如图，AC，BD 交于点 O，且 $OA=OC$，$OB=OD$. 求证：$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$.

9. 已知：如图，$AB=CD$，$AD=BC$. 求证：$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$.

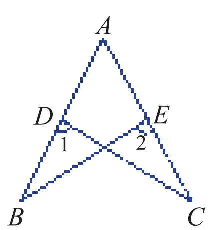


（第 9 题）

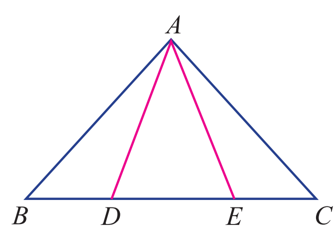
★★ 提升 ★★

1. 已知：如图，D，E 分别是 AB，AC 上的点，$AD=AE$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$AB=AC$.

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，D，E 是 BC 上两点，$AB=AC$，$AD=AE$，$BD=CE$.
求证：$\angle BAE=\angle CAD$.

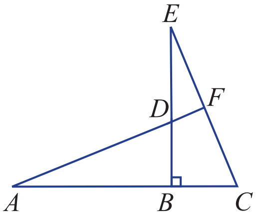


（第 1 题）

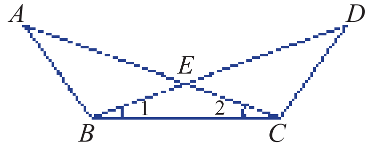


（第 2 题）

3. 已知：如图，$EB \perp AC$ 于 B，$AB = EB$，D 是 EB 上一点，$DB = CB$，AD 的延长线交 EC 于 F. 求证：$AF \perp EC$.



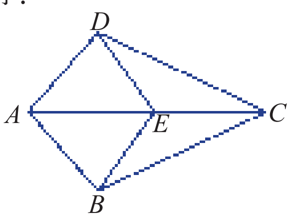
（第 3 题）



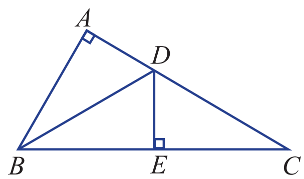
（第 4 题）

4. 已知：如图，$\angle A = \angle D$，$\angle 1 = \angle 2$. 你能证明图中哪些线段相等？哪些角相等？

5. 已知：如图，E 是 AC 上一点，$AD = AB$，$CD = CB$. 你能证明图中哪些线段相等？哪些角相等？



（第 5 题）

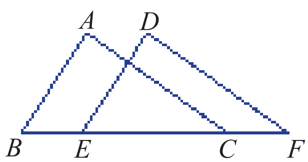


（第 6 题）

6. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$DE \perp BC$ 于 E，且 $BE = EC$. 求证：$AB = EC$.

7. 已知：如图，E，C 是 BF 上两点，且 $BE = CF$，$AB = DE$，$AC = DF$.

求证：$AB \parallel DE$，$AC \parallel DF$.

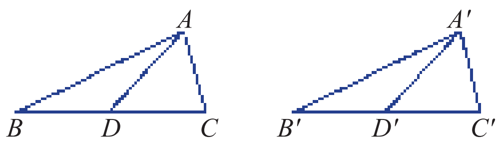


（第 7 题）

8. (1) 已知：如图，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$D$ 是 BC 的中点，D' 是 $B'C'$ 的中点.

求证：$AD = A'D'$.

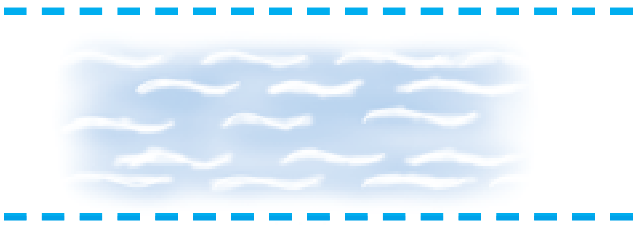
(2) 试用一个命题来表述 (1) 的结论，你能找一个类似的猜想吗？



（第 8 题）

★★★拓展★★★

已知：如图，运用全等三角形的知识，设计一种测量河宽的方案，并证明你设计的方案的合理性 .



三、等腰三角形与直角三角形

12.6 等腰三角形

1. 等腰三角形

我们已经知道，有两条边相等的三角形叫做**等腰三角形** . 相等的两条边叫做**腰**，另一边叫做**底**，如图 12 – 37.

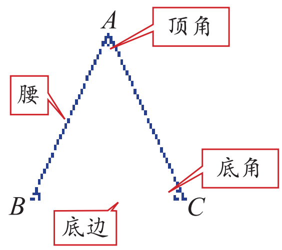


图 12 – 37

等腰三角形由于造型美观，因此在建筑上有着广泛的应用 . 比如，古埃及的金字塔、古罗马的万神殿（图 12 – 38）中都隐含有等腰三角形，某些房屋的屋脊（图 12 – 39）也呈等腰三角形的形状 .

图 12 – 38

图 12 – 39

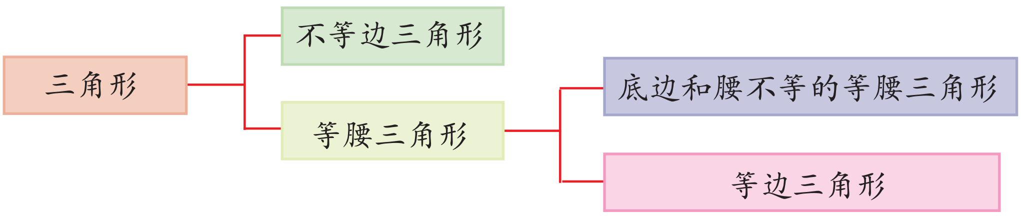
思考

腰和底边相等的等腰三角形的三条边有什么关系？

三条边都相等的三角形叫做**等边三角形**．

三条边互不相等的三角形叫做**不等边三角形**．

三角形按边分类：



三角形按边分类也可以用集合来表示，如图 12－40.

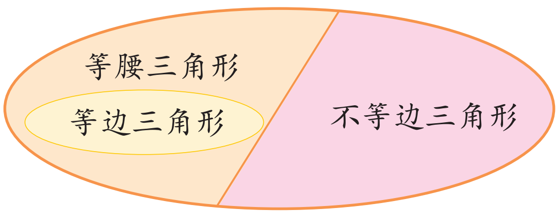


图 12－40

实践

一个平面的五角星里面有许多等腰三角形．下面通过折纸条的方法画一个五角星进行观察．

先裁一张宽窄一样的纸条，照图 12－41 的顺序打一个纸结，然后拉紧、压平；把它的五个顶点描在纸上，将不相邻的两个点用线段连接，便得到一个五角星．

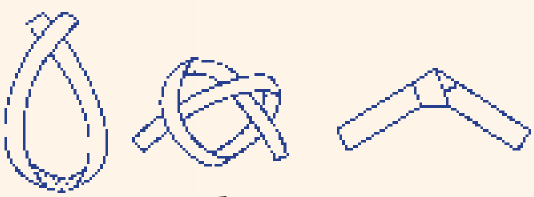


图 12－41

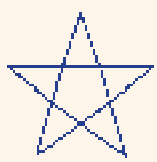


图 12－42

请你通过测量和观察，指出图 12－42 中的五角星中一共有多少个等腰三角形．

2. 等腰三角形的性质

我们可以通过折叠的方法，或用量角器度量的方法得知等腰三角形的两个底角相等．

利用图形计算器，可以直观地看到：任意形状的等腰三角形，它的两个底角的度数都相等，如图 12－43.

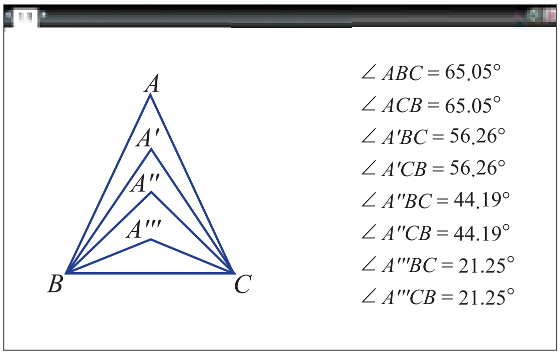


图 12－43

下面我们来证明等腰三角形的两个底角相等．

已知：如图 12－44，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$.

求证：$\angle B = \angle C$.

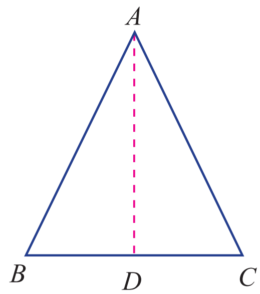


图 12－44

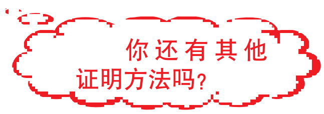
证明： 作 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D.

$\because$ AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle BAD = \angle CAD$.

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAD = \angle CAD, \\ AD = AD, \end{cases}$$



$\therefore$ $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ （SAS）.

$\therefore$ $\angle B = \angle C$ （全等三角形对应角相等）.

由此得出：

性质定理 1　等腰三角形的两个底角相等（简记为：**等边对等角**）.

例 1　已知：如图 12－45，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 120°$. 求 $\angle B$，$\angle C$ 的度数．

解： $\because$ $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，

$\therefore$ $\angle B = \angle C$ （等边对等角）.

$\because$ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ （三角形内角和定理），

$\angle A = 120°$，

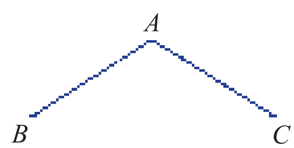


图 12－45

∴ $\angle B+\angle C=180°-120°=60°$.

∴ $2\angle B=60°$.

∴ $\angle B=30°$, $\angle C=30°$.

如图 12－46，△ ABC 中，$AB=AC$；△ PBC 中，$PB=PC$. 找出图中相等的角 .

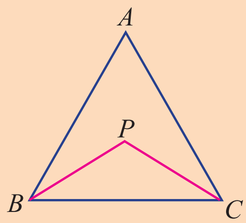


图 12－46

思考

练习

1. 已知：△ ABC 中，$AB=AC$, $\angle B=2\angle A$. 求 $\angle A$ 的度数 .
2. 已知：△ ABC 中，$AB=AC$, $\angle B-\angle A=30°$. 求 $\angle A$ 的度数 .
3. 已知：△ ABC 中，$AB=AC$, $\angle A=90°$. 求 $\angle B$, $\angle C$ 的度数 .

交流

观察图 12－47，当△ ABC 的顶点 A 在与 BC 平行的直线上移动时，BC 边上的中线、高线及 $\angle A$ 的平分线会重合吗？当 AB，AC 满足什么关系时，这三条线互相重合？为什么？

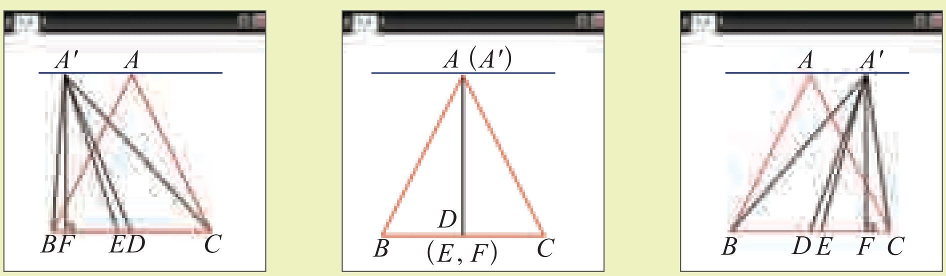


图 12－47

由“交流”，你可以得出什么猜想？你的猜想是____. 试对你的猜想进行证明．

由此可以推出：

性质定理 2　等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合（简记为：**三线合一**）．

例 2　已知：如图 12－48，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$. 小明想作 $\angle BAC$ 的平分线，但他没有量角器，只有刻度尺，他如何作出 $\angle BAC$ 的平分线？

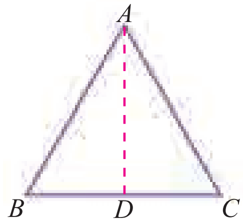


图 12－48

解：取 BC 的中点 D，连接 AD，那么 AD 平分 $\angle BAC$.

$\triangle ABC$ 中，因为 $AB=AC$，AD 是底边上的中线，根据三线合一定理，AD 是顶角的平分线．

例 3　已知：如图 12－49，B，D，E，C 在同一直线上，$AB=AC$，$AD=AE$. 求证：$BD=CE$.

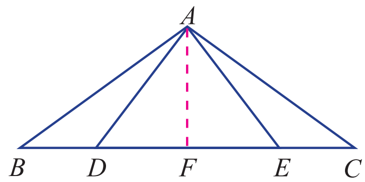


图 12－49

证明：取 BC 中点 F，连接 AF，

$\because$　$AB=AC$，

$\therefore$　$AF\perp BC$　（三线合一）．

$\because$　$AD=AE$，

$\therefore$　$DF=EF$　（三线合一）．

$\therefore$　$BF-DF=CF-EF$．

$\therefore$　$BD=CE$．

综合与实践

桌子摆放是否水平

数学小组想检验如图 12－50 所示的桌子摆放得是否水平，他们运用所学的等腰三角形的知识解决了这个问题．

请你设计一种检验方案，并说明理由．

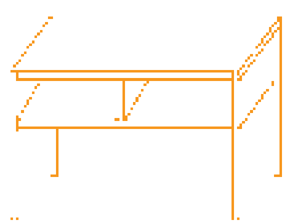


图 12－50

3. 等边三角形的性质

思考

1. 等边三角形是等腰三角形吗？
2. 等边三角形的每个角是多少度？

由此可以总结出：

性质定理　等边三角形的每个角都相等，并且都等于 60°.

实践

1. 用等边三角形能拼出图 12－51 中所示的六边形（六条边相等，六个角也相等）吗？

2. 能用等边三角形的瓷砖来铺设地面吗？

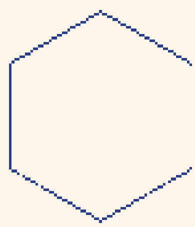


图 12－51

思考

如图 12－52，B 是 AC 上一点，$\triangle ABD$，$\triangle BCE$ 都是等边三角形，分别连接 AE 和 CD. 图中隐藏着一对全等三角形，你能找出它们吗？试说出道理．

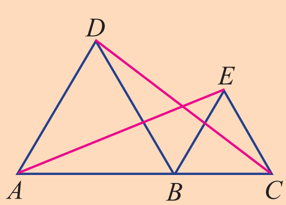


图 12－52

4. 等腰三角形的判定

思考

小明用量角器画出 $\angle MBC=\angle NCB$，其中 BM 和 CN 交于点 A（图 12－53），那么，$\triangle ABC$ 是一个什么形状的三角形呢？

你能应用三角形全等的知识证明你的判断吗？

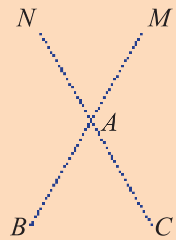
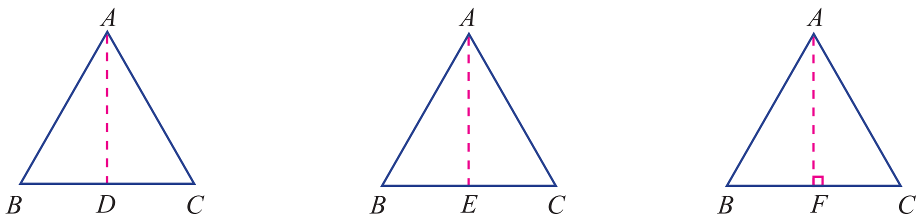


图 12－53

甲、乙、丙三位同学在图 12－53 的 $\triangle ABC$ 中各添加了一条辅助线（图 12－54），你能用哪位同学添加辅助线的方法证明 $AB=AC$？



甲：作 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D

乙：取 BC 中点 E，连接 AE

丙：作 $AF\perp BC$ 于 F

图 12－54

由此可以推出：

判定定理　如果一个三角形有两个角相等，那么两个角所对的边也相等（简记为：**等角对等边**）．

例 4　已知：如图 12－55，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，BD 平分 $\angle ABC$. 问图中共有多少个等腰三角形．试说明理由．

答：图中共有 3 个等腰三角形，它们是 $\triangle ABC$，$\triangle BCD$，$\triangle DAB$. 由已知条件可以计算出 $\angle ABC=\angle C=72°$，$\angle ABD=36°$，$\angle BDC=72°$. 根据“等角对等边”可以判断图中的 3 个三角形都是等腰三角形．

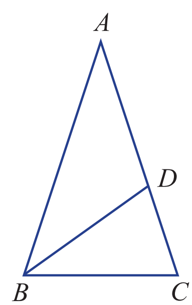


图 12－55

5. 等边三角形的判定

思考

1. 三个角都相等的三角形是什么三角形?

2. 有一个角是 60° 的等腰三角形是什么三角形?

不难总结出：

判定定理 1　三个角都相等的三角形是等边三角形．

判定定理 2　有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形．

60°的角是顶角还是底角?

例 5　已知：如图 12－56，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$DE \parallel BC$ 分别交 AB，AC 于 D，E. 试判断 $\triangle ADE$ 的形状．

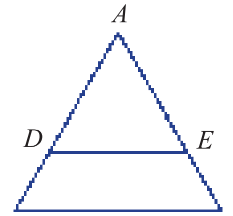


图 12－56

解：$\because$　$\triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore$　$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

$\because$　$DE \parallel BC$，

$\therefore$　$\angle ADE = \angle B = 60°$，

$\angle AED = \angle C = 60°$.

又 $\because$　$\angle A = 60°$，

$\therefore$　$\angle A = \angle ADE = \angle AED$.

$\therefore$　$\triangle ADE$ 是等边三角形（三个角都相等的三角形是等边三角形）.

你还能用其他方法判断出 $\triangle ADE$ 是等边三角形吗?

12.7 直角三角形

1. 直角三角形的性质

由三角形内角和定理很容易得出：

性质定理　直角三角形的两个锐角互余.

直角三角形ABC也可表示为Rt $\triangle ABC$.

2. 直角三角形全等的判定

在直角三角形中，由于有一个角是直角，在判定两个直角三角形全等时，除了应用“SAS”、“AAS”、“ASA”或“SSS”外，还有其他方法吗？

实践

已知线段 a，c，如图 12－57．请每个同学使用量角器和刻度尺画一个直角三角形 ABC，使它满足：一条直角边 BC 为 a，斜边 AB 为 c．然后每个同学把△ABC 剪下来，并与邻座同学的三角形互相叠放在一起，它们互相重合吗？

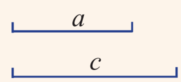


图 12－57

由此我们可以得到一种判定两个直角三角形全等的方法：

定理　斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（简记为：**斜边、直角边**或 **HL**）．

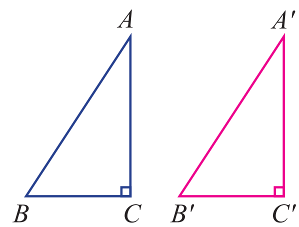


图 12－58

如图12－58，△ABC和△$A'B'C'$中，如果 $\angle C=\angle C'=90°$，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，那么△ABC ≌ △$A'B'C'$.

例　已知：如图12－59，△ABC中，$BD\perp AC$ 于D，$CE\perp AB$于E，且 $BD=CE$.

只要证出$\angle ABC=\angle ACB$即可．

求证：$AB=AC$.

证明：在△BDC 和△CEB 中，

∵　$BD\perp AC$于D，$CE\perp AB$于E，

∴　$\angle BDC$ 和 $\angle CEB$ 是直角．

在Rt△BDC和Rt△CEB中，

$$\begin{cases} BD=CE, \\ BC=CB, \end{cases}$$

∴　Rt△BDC ≌ Rt△CEB（HL）．

∴　$\angle BCD=\angle CBE$（全等三角形对应角相等）．

∴　$AB=AC$（等角对等边）．

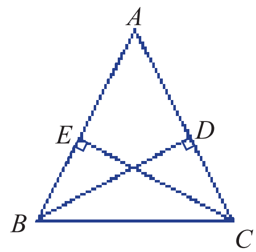


图 12－59

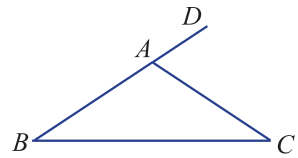
由此可知，两条边上的高相等的三角形是等腰三角形.

习 题 12－3

★基础★

1. 等腰三角形的顶角为 140°，求它每个底角的度数 .

2. 已知：如图，△ ABC 中，$AB=AC$，D 是 BA 延长线上一点 . 如果 $\angle DAC=70°$，求 $\angle B$，$\angle C$ 的度数 .

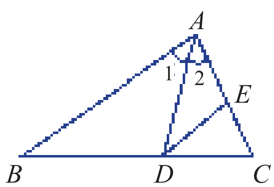


（第 2 题）

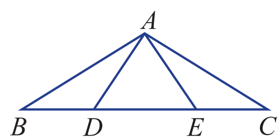
3. (1) 等腰三角形中，一条边的长是 1 cm，另一条边的长是 2 cm. 求这个三角形的周长 .

(2) 等腰三角形中，一条边的长是 2 cm，另一条边的长是 3 cm. 求这个三角形的周长 .

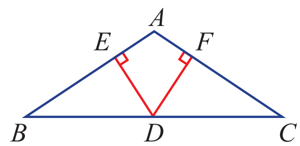
4. 已知：如图，△ ABC 中，$\angle 1=\angle 2$，$DE \parallel AB$. 求证：△ ADE 是等腰三角形 .



（第 4 题）



（第 5 题）

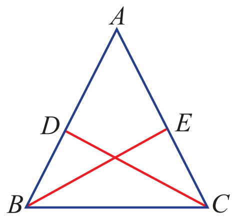


（第 6 题）

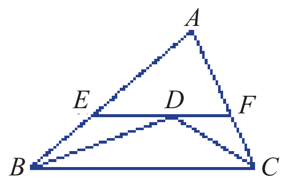
5. 已知：如图，△ ABC 中，D，E 是 BC 上两点，且 $AB=AC$，$BD=CE$. 判断：图中有哪些角相等？哪些线段相等？试证明你的判断 .

6. 已知：如图，△ ABC 中，$AB=AC$，D 是 BC 的中点，$DE \perp AB$ 于 E，$DF \perp AC$ 于 F. 求证：$DE=DF$.

7. 已知：如图，△ ABC 中，$AB=AC$，BE，CD 分别是 $\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线 . 求证：$BE=CD$.



（第 7 题）

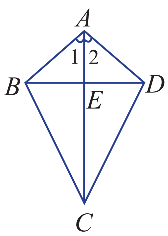


（第 8 题）

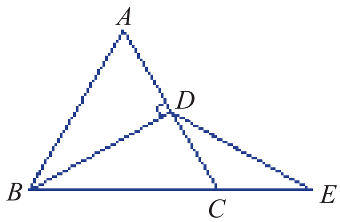
8. 已知：如图，△ ABC 中，$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线交于点 D，过点 D 作 BC 的平行线交 AB 于 E，交 AC 于 F. 求证：(1) $EB=ED$；(2) $FC=FD$；(3) $EF=EB+FC$.

9. 已知:如图,四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$CB=CD$,AC 与 BD 交于点 E. 求证:(1) $\angle 1=\angle 2$;(2) $AC\perp BD$.

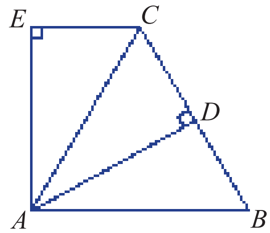
10. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$BD\perp AC$ 于 D，延长 BC 到 E，使 $CE=CD$. 求证：$DB=DE$.



（第 9 题）



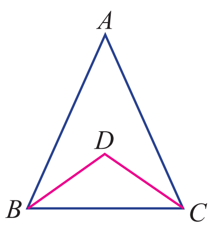
（第 10 题）



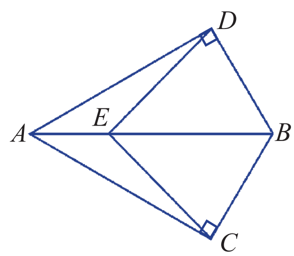
（第 11 题）

11. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$AD\perp BC$ 于 D，$CE\parallel AB$，且 $AE\perp EC$. 求证：$AE=AD$.

12. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是$\triangle ABC$ 内一点，$DB=DC$. 求证：$\angle ABD=\angle ACD$.



（第 12 题）

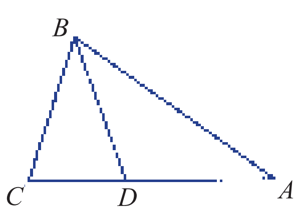


（第 13 题）

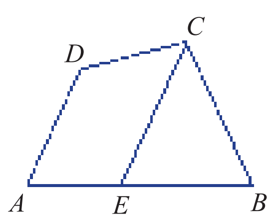
13. 已知：如图，$\angle ACB=\angle ADB=90°$，$AD=AC$，$E$ 是 AB 上一点，判断图中有几对相等的角，并证明你的结论 .

★★ 提升 ★★

1. 求证：等腰三角形两腰上的高相等 .
2. 等腰三角形的顶角比每个底角大 30°. 求顶角的度数 .
3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 AC 上一点，$DA=DB=BC$. 求 $\angle A$ 的度数 .



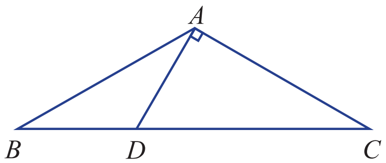
（第 3 题）



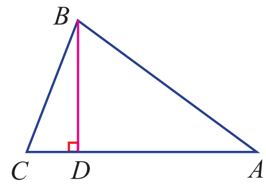
（第 4 题）

4. 已知：如图，$\angle A=\angle B$，$CE \parallel AD$. 求证：$CB=CE$.

5. 已知:如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$AD\perp AC$. 求证:$\triangle ABD$ 是等腰三角形 .



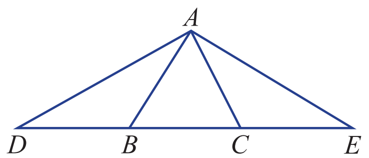
（第 5 题）



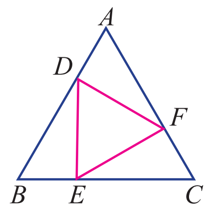
（第 6 题）

6. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BD\perp AC$ 于 D. 求证：$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

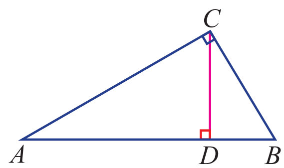
7. 已知：如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，D，E 在直线 BC 上，且 $DB=CE=BC$. 求证：$AD=AE$.



（第 7 题）



（第 8 题）



（第 10 题）

8. 已知：如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，D，E，F 分别是 AB，BC，CA 上一点，且 $AD=BE=CF$. 求证：$\triangle DEF$ 是等边三角形 .

9. 直角三角形中，一个锐角等于另一个锐角的 2 倍 . 求较小的锐角的度数 .

10. 已知:如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，那么图中互余的角共有（　　）.

A. 1 对　　B. 2 对　　C. 3 对　　D. 4 对

四 尺规作图及轴对称

12.8 基本作图

我们除了利用刻度尺、量角器、三角尺等工具完成一些基本作图外，还要学习利用直尺（不允许利用上面的刻度）和圆规完成基本作图，称之为**尺规作图**.

1. 作一条线段等于已知线段

例 1　已知：线段a.

求作：一条线段，使它等于线段a.

*作法：(1) 作射线 OA；

(2) 以 O 为圆心，a 为半径作弧交 OA 于 B.

所以线段 OB 就是所求作的线段（图 12－60）.

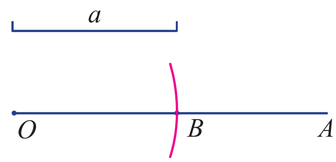


图 12－60

2. 作一个角等于已知的角

例 2　已知：$\angle AOB$.

求作：一个角，使它等于$\angle AOB$.

*作法：(1) 作射线 $O'A'$；

(2) 以 O 为圆心，任意长为半径作弧，交 OA 于 C，交 OB 于 D；

(3) 以 O' 为圆心，OC 为半径作弧 $C'E'$，交 $O'A'$ 于 C'；

(4) 以 C' 为圆心，CD 为半径作弧，交弧 $C'E'$ 于 D'；

(5) 过点 D' 作射线 $O'B'$.

所以 $\angle A'O'B'$ 就是所求作的角（图 12－61）.

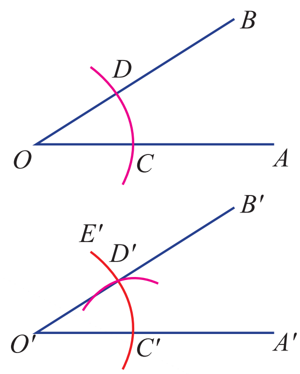


图 12－61

为什么 $\angle A'O'B' = \angle AOB$？

思考

3. 作角的平分线

例 3　已知：$\angle AOB$.

求作：射线OC，使它平分$\angle AOB$.

*作法：(1) 以 O 为圆心，任意长为半径作弧，交 OA 于 D，交 OB 于 E；

(2) 分别以 D，E 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的同样长为半径作弧，两弧交于点 C；

(3) 作射线 OC.

所以射线 OC 就是所求作的射线（图 12－62）.

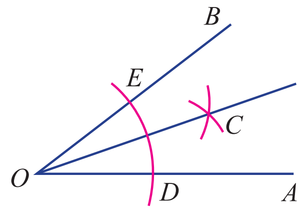
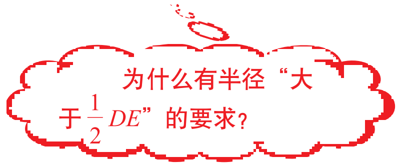


图 12－62



交流

如图 12－63，OP 是 $\angle AOB$ 的平分线，C 是 OP 上任意一点，$CM \perp OA$ 于 M，$CN \perp OB$ 于 N，探究 CM 与 CN 之间的关系.

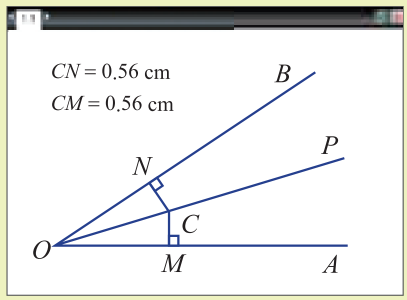


图 12－63

当点 C 在 OP 上移动时，观察 CM 与 CN 的数量关系，可得出什么猜想？能证明你的猜想吗？

由此可以总结出角平分线的性质：

定理　角平分线上的点到角的两边的距离相等.

例 4 已知：如图12－64，Rt△ ABC中，$\angle C = 90°$，$CA = CB$，AD平分$\angle BAC$，$DE \perp AB$ 于 E.

求证：$DC = BE$.

证明： ∵　$\angle C = \angle DEA = 90°$，且 AD 平分 $\angle BAC$，

∴　$DC = DE$（角平分线上的点到角的两边的距离相等）.

∵　$\angle C = 90°$，$CA = CB$，

∴　$\angle B = 45°$.

∴　$\angle EDB = 180° - 90° - 45° = 45°$.

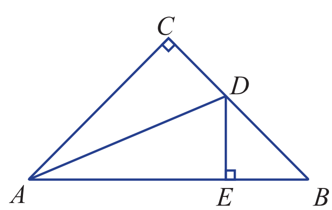


图 12－64

$\therefore\quad \angle B=\angle EDB$.

$\therefore\quad BE=DE$.

$\therefore\quad DC=BE$.

实践

如图 12－65，点 P 是 $\angle AOB$ 内一点，$PC\perp OA$ 于 C，$PD\perp OB$ 于 D，且 $PC=PD$.

猜想：点 P 在什么位置上？能证明你的猜想吗？

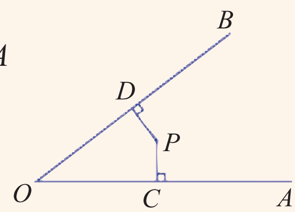


图 12－65

通过上述活动，我们可以总结出：

定理　到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上 .

4. 作线段的垂直平分线

例 5　已知：线段 AB.

求作：线段 AB 的垂直平分线 .

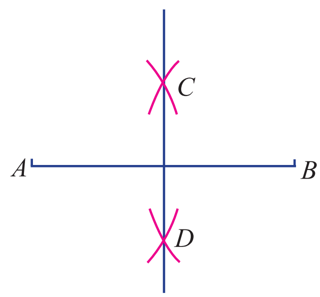


图 12－66

*作法：(1) 分别以 A，B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的同样长为半径作弧，两弧分别交于点 C，D；

(2) 作直线 CD.

所以直线 CD 就是所求作的直线（图 12－66）.

练习

1. 已知直线 l 以及直线上一点 A. 求作：过点 A 与 l 垂直的直线 .
2. 已知直线 l 以及直线外一点 B. 求作：过点 B 与 l 垂直的直线 .

交流

1. 如图 12－67，CD 是线段 AB 的垂直平分线，P 是 CD 上一点，分别连接 PA，PB. 当点 P 在 CD 上移动时，观察 PA，PB 长度的关系，可得出什么猜想？能证明你的猜想吗？

2. 如图 12－68，$PA = PB$，点 P 在什么位置上？

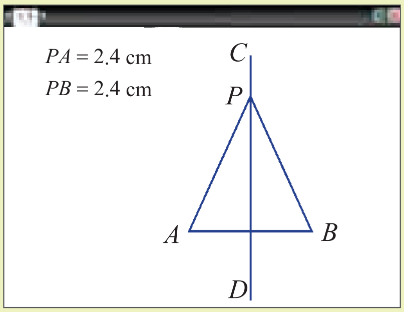


图 12－67

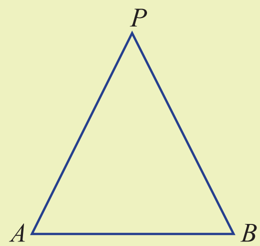


图 12－68

对比角平分线的两个定理，可以得出线段垂直平分线的两个定理：

定理　线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等 .

定理　到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上 .

例 6　已知：如图 12－69，$AC = AD$，$BC = BD$，E 是 AB 上任意一点 .

求证：$EC = ED$.

证明：$\because$　$AC = AD$，

$\therefore$　点 A 在线段 CD 的垂直平分线上　（到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上）.

同理可证：点 B 在线段 CD 的垂直平分线上 .

根据两点确定一条直线，可知 AB 是线段 CD 的垂直平分线 .

$\because$　点 E 在 AB 上，

$\therefore$　$EC = ED$　（线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等）.

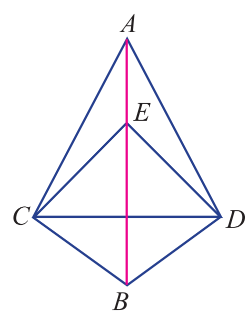
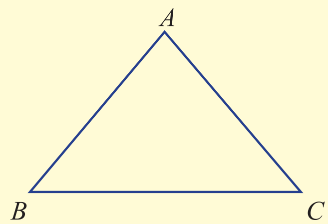


图 12－69

练习

已知：△ ABC 中，$AB=AC$，用尺规作出 BC 的垂直平分线，看看它是否经过 A 点．



5. 作三角形

例 7 已知三边，求作三角形．

已知：线段 a，b，c.

求作：△ ABC，使 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$.

*作法：(1) 作线段 $BC=a$；

(2) 分别以 B，C 为圆心，以 c，b 为半径作弧，两弧交于点 A；

(3) 分别连接 AB，AC.

所以△ ABC 就是所求作的三角形（图 12－70）．

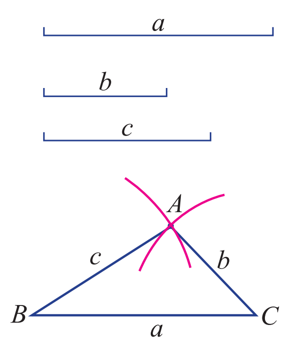


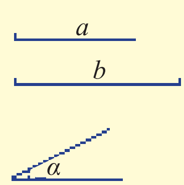
图 12－70

练习

按要求作三角形：

(1) 已知：线段 a，b 及 $\angle\alpha$.

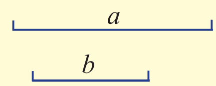
求作：△ ABC，使 $BC=a$，$AC=b$，$\angle C=\angle\alpha$.



[第 (1) 题]

（2）已知线段 a，b.

求作：Rt $\triangle ABC$，使得斜边 $BC = a$，一条直角边 $AC = b$.



[第（2）题]

思考

已知等腰三角形的底边及底边上的高，怎样作出这个等腰三角形？

12.9 逆命题、逆定理

每一个命题都可以写成“如果……，那么……”的形式. 比如：“两条直线平行，内错角相等”，也可以写成：如果两条直线平行，那么内错角相等.

又如:“对顶角相等”，可以写成:如果两个角是对顶角，那么这两个角相等.

我们把命题的题设和结论写在下面表格中：

题　设	结　论
两条直线平行	内错角相等

把题设和结论交换一下位置，便得到一个新命题：

题　设	结　论
内错角相等	两条直线平行

两个命题，如果第一个命题的题设是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的题设，那么这两个命题叫做**互逆命题**. 如果把其中的一个命题叫做**原命题**，那么另一个命题叫做它的**逆命题**.

交流

1. 请你把“对顶角相等”这个命题的题设和结论写在下表中，然后再写出它的逆命题．

	题　设	结　论
原命题		
逆命题		

2. 把命题“如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$”的题设和结论填写在下表中，然后再写出它的逆命题．

	题　设	结　论
原命题		
逆命题		

根据上面的“交流”，请你判断一个真命题的逆命题一定是真命题吗？

如果一个命题是真命题，可以称它为定理．如果一个定理的逆命题也是真命题，可以称它为原定理的逆定理．

线段垂直平分线的两个定理是否互为逆定理？角平分线的两个定理是否也互为逆定理？

12.10 轴对称和轴对称图形

实践

把一张透明白纸对折，照图 12－71 的样子描出图案，并在对折页上拓出相应图案，然后把纸打开，观察得到的图案有什么特点．

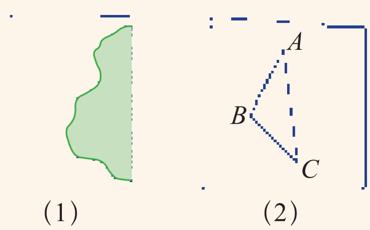


图 12－71

我们发现，由图 12 – 71（1）得到的图案是一个完整的图案（如图 12 –72）. 当我们把这个图案沿折痕翻折过来时，图案的两部分能够完全重合，我们把这样的图形叫做**轴对称图形**，中间的折痕所在的直线叫做**对称轴**.

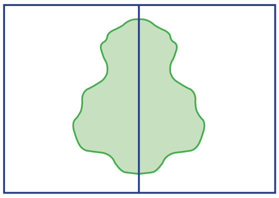


图 12 – 72

由于轴对称图形比较美观，所以在现实生活中的应用十分广泛，如建筑物、工艺品、生活用具等的形状常呈现轴对称.

思考

1. 图 12 – 73 是我国五个国有银行的图标，其中哪几个图标是轴对称图形？

图 12 – 73

2. 图 12 – 74 的交通标志中，哪些是轴对称图形？

图 12 – 74

练习

1. 举几个轴对称图形的例子.
2. 轴对称图形的对称轴是唯一的吗？

我们再来看图 12 – 71 (2) 打开后的情形（如图 12 – 75）. △ ABC 和 △ $A'B'C'$ 是两个图形. 当沿直线 MN 翻折后，它们能够互相重合，我们称这两个图形关于这条直线对称，简称为**轴对称**，互相重合的点叫做**对称点**，这条直线叫做**对称轴**.

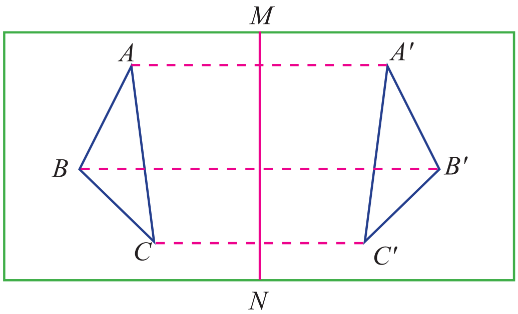


图 12 – 75

由轴对称的定义可以看出：

1. 关于某条直线对称的两个图形是全等形；
2. 如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是对称点连线的垂直平分线.

实践

在图 12 – 76 中，分别画出△ ABC 关于直线 l 的轴对称图形.

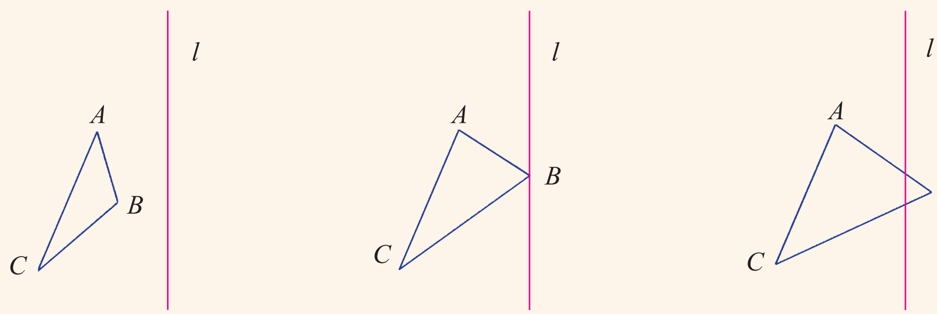


图 12 – 76

综合与实践

轴对称图形设计

1. 搜集生活中见到的轴对称图形 .

2. 设计一个轴对称图形并和同学交流 .

习 题 12 – 4

★基础★

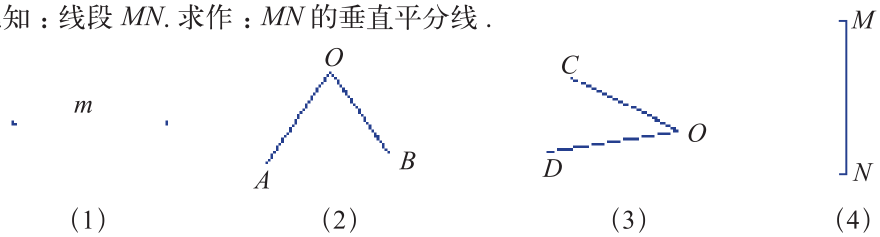
1. 用尺规完成以下作图 :

(1) 已知 : 线段 m. 求作 : 一条线段，使它等于线段 m.

(2) 已知 : $\angle AOB$. 求作 : 一个角，使它等于 $\angle AOB$.

(3) 已知 : $\angle COD$. 求作 : $\angle COD$ 的平分线 .

(4) 已知 : 线段 MN. 求作 : MN 的垂直平分线 .



(第 1 题)

2. 把下列命题写成“如果……，那么……”的形式 :

(1) 等腰三角形的两个底角相等 ;

(2) 等边三角形的每个角都等于 60° ;

(3) 直角三角形中，两个锐角互为余角 .

3. 写出下列命题的逆命题，并判断真假 :

(1) 全等三角形的对应边相等 ;

(2) 个位数字是 5 的整数一定可以被 5 整除 .

4. 下列图形中哪些一定是轴对称图形?

(1) 长方形 ; (2) 圆 ; (3) 等边三角形 ; (4) 角 ;

(5) 线段 ; (6) 等腰三角形 ; (7) 直角三角形 .

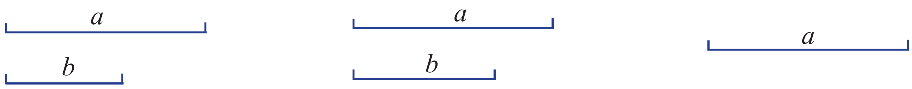
★★提升★★

1. 已知下列条件，用尺规作三角形：

（1）已知：线段 a，b. 求作：等腰三角形，使它的腰长为 a，底长为 b.

（2）已知：线段 a，b. 求作：直角三角形，使它的两条直角边分别为 a，b.

（3）已知：线段 a. 求作：等边三角形，使它的边长为 a.



（1）　　　　（2）　　　　（3）

（第 1 题）

2. 已知下列条件，用尺规完成下列作图：

（1）已知：$\angle\alpha$，$\angle\beta$，线段 a. 求作：三角形 ABC，使 $AB=a$，$\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$.

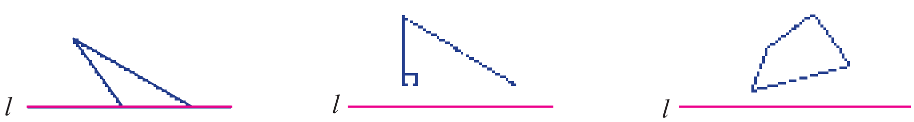
（2）已知：$\angle\alpha$，$\angle\beta$. 求作：$\angle AOB$，使 $\angle AOB=\angle\alpha+\angle\beta$.

（1）　　　　（2）

（第 2 题）

★★★拓展★★★

画出下列图形关于直线 l 的轴对称图形：



（1）　　　　（2）　　　　（3）

五 勾股定理

12.11 勾股定理

实践

用圆规和刻度尺作以下三个直角三角形.使它们的两条直角边分别为3 cm，4 cm；6 cm，8 cm；5 cm，12 cm.然后用刻度尺量出它们斜边的长.

我们发现，它们的斜边长分别为5 cm，10 cm和13 cm.

你能从3 cm，4 cm，5 cm；6 cm，8 cm，10 cm；5 cm，12 cm，13 cm这三组数据中发现什么规律吗?

我们看到：

$3^2+4^2=5^2$，$6^2+8^2=10^2$，$5^2+12^2=13^2$.

由此可以猜想出：

在直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边的平方的和.

以上规律很早就被我国古代劳动人民发现了，他们把直角三角形较短的直角边叫做勾，较长的直角边叫做股，斜边叫做弦（图12－77）.

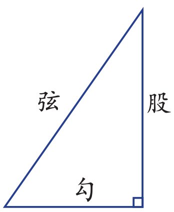


图 12－77

我国古代的《周髀算经》[①] 便记载有周公与商高的一段对话.商高说:“……故折矩以为勾广三,股修四,径隅五.”其中“勾广”就是勾长，“股修”就是股长，“径隅”就是弦长.

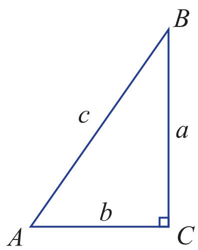


图 12－78

勾股定理　在直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方.

如图12－78，在△ABC中，$\angle C=90°$，那么

$$a^2+b^2=c^2.$$

人们找出许多方法证明这个定理，下面介绍一种用拼图证明的方法.

①《周髀算经》成书于西汉或更早时期，是长期积累编纂而成的数理天文学著作.原名《周髀》，唐代李淳风等加“算经”两字.

先作四个全等的直角三角形，设它们的两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c. 然后照图 12－79 的样子将它们拼成正方形. 可以得到

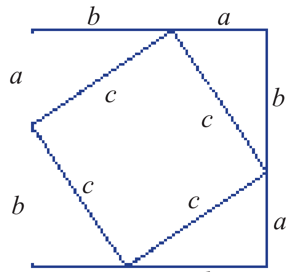


图 12－79

$$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2.$$

$\therefore\quad a^2+2ab+b^2=2ab+c^2.$

$\therefore\quad a^2+b^2=c^2.$

例 1 如图 12－80，一棵大树被大风刮倒，折断的一段恰好落在地面上的 A 处，量得 $BC=5$ m，$AC=10$ m. 试计算这棵大树的高度（结果精确到 1 m）.

解： 在直角三角形 ABC 中，

$\because\quad \angle ACB=90°$，

$\therefore\quad BC^2+AC^2=AB^2$ （勾股定理）.

$\therefore\quad AB^2=5^2+10^2=125.$

$\therefore\quad AB\approx 11$（m）.

树高 $=AB+BC\approx 16$（m）.

答：这棵树约有 16 m 高.

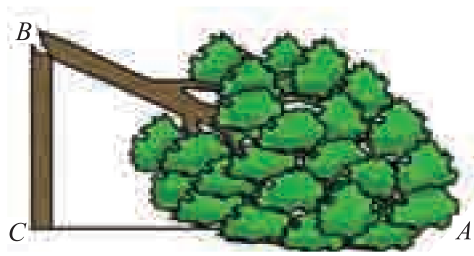


图 12－80

例 2 已知：Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=8$，$BC=3\sqrt{2}$. 求 AC.

解： 在 Rt△ABC 中，

$\because\quad \angle C=90°$，

$\therefore\quad BC^2+AC^2=AB^2$ （勾股定理）.

$\therefore\quad AC^2=8^2-(3\sqrt{2})^2=46.$

$\therefore\quad AC=\sqrt{46}.$

实践

欲作长度分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$ 的线段，仔细观察图 12－81，找出表示 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$ 的线段.

你还能作出表示长度分别为 $\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$ 的线段吗?

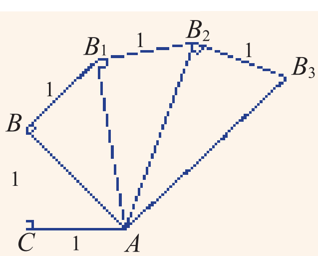


图 12－81

练习

1. 在 Rt △ ABC 中，已知 $\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别是 a，b，c.

(1) 如果 $\angle B = 45°$，$a = 1$，求 b，c 的长；

(2) 如果 $\angle A = 45°$，$c = 2$，求 a，b 的长.

2. 在 Rt △ ABC 中，已知 $\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别是 a，b，c.

(1) 如果 $a = 3$，$b = 4$，求 c；　　(2) 如果 $a = 6$，$b = 8$，求 c；

(3) 如果 $a = 9$，$b = 12$，求 c；　　(4) 如果 $a = 0.3$，$b = 0.4$，求 c.

12.12 勾股定理的逆定理

实践

1. 写出勾股定理的逆命题，并判断它的真假.

2. 三条线段 a，b，c 的长度分别为 8 cm，15 cm，17 cm. 作出以 a，b，c 为三边的三角形，量一量 c 边所对的角为多少度.

3. 分别以3 cm，4 cm，5 cm；5 cm，12 cm，13 cm两组数据为三角形的边长作三角形，并判断这两个三角形的形状.

勾股定理的逆定理　**如果三角形的三边 a，b，c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$，那么这个三角形是直角三角形.**

已知：△ABC中，$AB = c$，$BC = a$，$AC = b$，且 $a^2 + b^2 = c^2$（图12－82）.

求证：$\angle C = 90°$.

证明： 作△$A'B'C'$，使 $\angle C' = 90°$，$B'C' = BC$，$A'C' = AC$.

$\therefore\quad A'B'^2 = a^2 + b^2$.

$\because\quad c^2 = a^2 + b^2$，

$\therefore\quad A'B'^2 = c^2 = AB^2$.

$\therefore\quad A'B' = AB$.

$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（SSS）.

$\therefore\quad \angle C = \angle C' = 90°$.

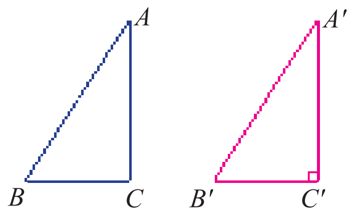


图 12－82

练习

三角形的三边长分别为：

(1) 1，1，$\sqrt{2}$ ；　　(2) 2，3，$\sqrt{13}$ ；　　(3) 3，5，7.

试判断这些三角形是否为直角三角形.

习 题 12－5

★基础★

1. 填空题：

(1) 直角三角形的两条直角边的长分别为 2，4，那么斜边的长为 ________.

(2) 直角三角形的一条直角边的长为 1，斜边长为 3，那么另一条直角边的长为 ________.

(3) 直角三角形的斜边长为 5，一条直角边的长为另一条直角边的长的 2 倍，那么这个三角形的周长为 ________.

(4) $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$\angle B=45°$，$BC=2$，那么 AB 的长为 ________.

(5) 等腰三角形的一腰长为 4，底边长为 2，那么它底边上的高为 ________.

2. 等边三角形的边长为 6 cm. 求它的高 .

3. 判断下列以 a，b，c 为边的三角形是否为直角三角形：

(1) $a=5$，$b=7$，$c=9$ ；

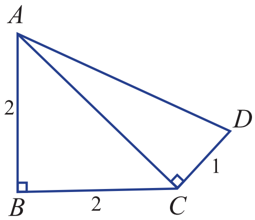
(2) $a=1$，$b=2$，$c=\sqrt{5}$ ；

(3) $a=2$，$b=2$，$c=2\sqrt{2}$ ；

(4) $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{5}$.

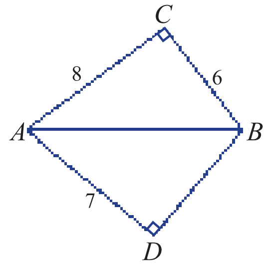
★★提升★★

1. 已知：如图，$\angle B=\angle ACD=90°$，$AB=BC=2$，$CD=1$. 求 AD 的长 .



（第 1 题）

2. 已知：如图，$\angle C=\angle D=90°$，$AC=8$，$BC=6$，$AD=7$. 求 BD 的长 .



（第 2 题）

3. 等腰三角形的一腰长为 4 cm，底边长为 3 cm. 求它的面积 .

4. 等边三角形的边长为 2 cm. 求它的面积 .

5. 判断下列以 a，b，c 为边的三角形是否为直角三角形：

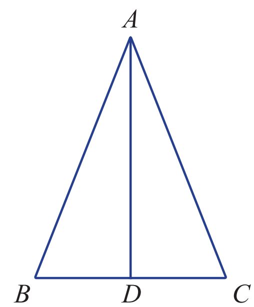
（1）$a=\sqrt{5}$，$b=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{17}$；

（2）$a=1$，$b=2\sqrt{6}$，$c=5$.

★★★ 拓展 ★★★

已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于 D，$AB+CD=AC+BD$.

求证：$AB=AC$.



探究学习

三角形全等的应用

1. 有两条边及其中一边的对角分别相等的两个三角形是否全等？如果认为全等，请说明理由；如果认为不全等，画出一个反例的图形 .

在图12－83中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle B=\angle B'$，显然$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

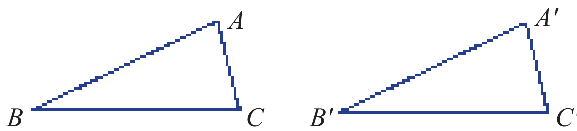


图 12－83

在图12－84中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle B=\angle B'$，显然$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

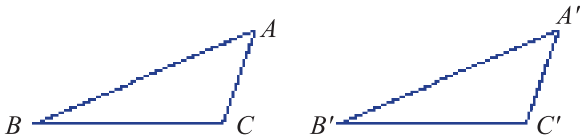


图 12－84

由以上两个证明，你能做出判断吗？

2. 利用图形计算器探索：

已知：C 是线段 AB 所在平面内任意一点，分别以 AC，BC 为边，在 AB 同侧作等边三角形 ACE，等边三角形 BCD .

(1) 如图 12－85 (1)，当点 C 在线段 AB 上移动时，$AD=BE$ 是否总成立？证明你的结论 .

(2) 如图 12－85 (2)，拖动点 C，使点 C 在直线 AB 外，观察 $AD=BE$ 是否仍成立 . 证明你的结论 .

(3) 如图 12－85 (3)、(4)，如果$\triangle AEC$，$\triangle BDC$ 为等腰直角三角形，$AD=BE$ 是否成立？证明你的结论 .

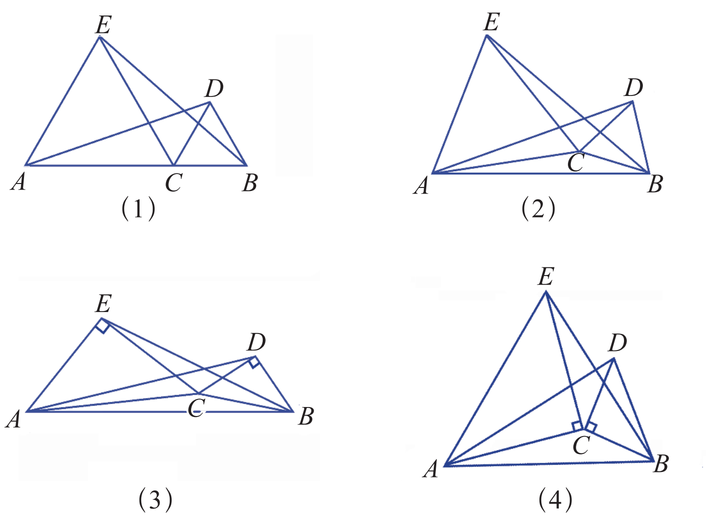


图 12－85

综合与实践

蜂房与正六边形

蜂巢是由许多蜂房组成的，蜂房的横截面是正六边形.

我们把各边相等，各内角相等的多边形叫做正多边形.

问题1：哪些全等的正多边形可以彼此之间不留空隙也不重叠地铺在一个平面上？这种铺法也叫平面图形的密铺.

实验1：试一试，全等的正三角形能密铺吗？用纸片摆一摆.

实验2：试一试，全等的正方形能密铺吗？用纸片摆一摆.

实验3：试一试，全等的正五边形能密铺吗？用纸片摆一摆.

想一想：还有正几边形可以密铺？

问题2：周长为6的正六边形、正方形、正三角形中，哪个图形的面积最大？

周长为6的正六边形的面积为__________________；

周长为6的正方形的面积为____________________；

周长为6的正三角形的面积为__________________.

由以上学习可知，可以密铺的正多边形有三种，分别是正六边形、正方形和正三角形.当周长给定时，正六边形的面积最大. 反过来，面积一定的上述三种正多边形中，正六边形的周长最小.

蜂房的横截面采用正六边形，就是为了节省材料.

阅读理解

勾股定理史话

勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理，相传是古希腊数学家、哲学家毕达哥拉斯于公元前 550 年首先发现的 . 其实，我国古代劳动人民对

这一数学定理的发现和应用，远比毕达哥拉斯早得多．如果说大禹治水因年代久远而无法确切考证的话，那么周公与商高的对话时间则可以确定在公元前1100年左右的西周时期，比毕达哥拉斯要早500多年．其中所说的“勾广三，股修四，径隅五”，正是勾股定理的一个特例（$3^2+4^2=5^2$）．同书还有学者陈子与荣方的一段对话：“求邪（斜）至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日．”陈子已经不限于“3，4，5”的情形，而是推广到了一般．所以现在数学界把它称为勾股定理，这是非常恰当的．

在稍后出现的《九章算术》一书中，勾股定理得到了更加规范的一般性表述．书中的《勾股章》说，把勾和股分别自乘，然后把它们的积加起来，再进行开方，便可以得到弦．即

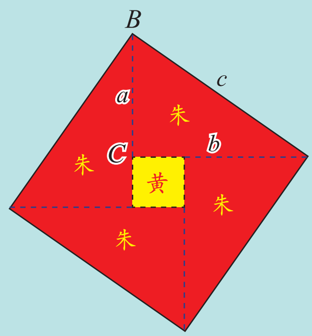
$$弦=\sqrt{勾^2+股^2}.$$

用字母表示为

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

中国古代的数学家不仅很早就发现并应用勾股定理，而且很早就尝试对勾股定理做出证明．最早对勾股定理进行证明的，是三国时期吴国的数学家赵爽．他创制了一幅“勾股圆方图”．

赵爽说：“按弦图，又可勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为黄实，加差实，亦成弦实．”这里的“实”指面积．意思是：把直角三角形的两个直角边相乘，正好是两个直角三角形的面积，涂上朱（红）色，再二倍，就得到四个朱（红）色三角形，都涂以红色．中间是以勾股之差为边的小正方形，涂上黄色．组合在一起，构成以直角三角形斜边为边的正方形．



赵爽弦图

赵爽运用面积的出入相补证明了勾股定理：分别以图12－86（1）中的直角三角形的两条直角边为边作正方形，如图12－86（2），其面积为a^2+b^2，按图12－86（3）中虚线将其分成三部分，并将其中的两个直角三角形移补到图12－86（4）所示位置，得到图12－86（5）所示的正方形，其边长为原直角三角形斜边长，即它的面积为c^2．因为移补前后的面

积不变，所以得到 $a^2+b^2=c^2$.

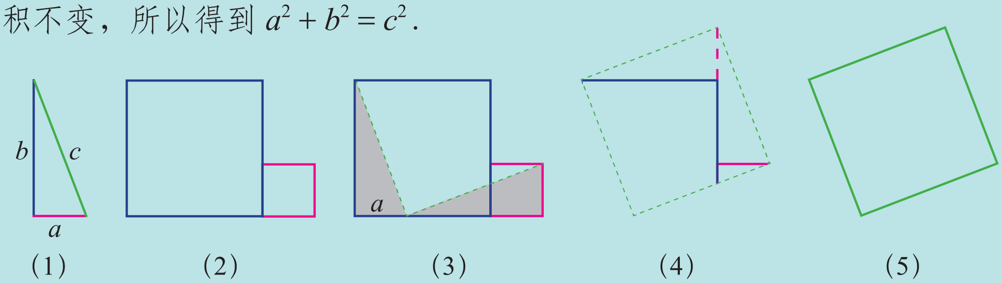


图 12－86

赵爽的这个证明可谓别具匠心，富有创新意识．他用几何图形的截、割、拼、补来证明代数式之间的恒等关系，既具严密性，又具直观性．它开创了中国古代“以形证数”的方法．形数统一、代数和几何紧密结合的特点在这里得到了印证．后来的数学家们大多继承了这一方法并且有所发展．稍后一点的刘徽在证明勾股定理时也是用“以形证数”的方法，只是图形的具体分、合、移、补略有不同而已．

中国古代数学家对于勾股定理的发现和证明，在世界数学史上具有独特的地位．尤其是其中体现的“形数统一”的思想方法，更具有科学创新的意义．正如当代中国数学家吴文俊所说：“在中国的传统数学中，数量关系与空间形式往往是形影不离地并肩发展着的……17 世纪笛卡儿解析几何的发明，正是这种传统思想与方法在几百年停顿后的重现与继续.”

回顾与整理

知识要点

1. 三角形的分类.

(1) 按边的长短分为：

- 三角形
  - 不等边三角形
  - 等腰三角形
    - 底边和腰不等的等腰三角形
    - 等边三角形

知识要点

(2) 按角的大小分为：

- 三角形
  - 锐角三角形
  - 直角三角形
  - 钝角三角形

2. 三角形的性质.

(1) 三边之间的性质：三角形两边之和大于第三边；两边之差小于第三边.

(2) 三角之间的性质：三角形内角的和等于 $180°$；每一个外角等于与它不相邻的两内角之和，且大于与它不相邻的任意一个内角.

(3) 边角之间的关系：等边对等角；等角对等边.

(4) 特殊三角形的性质：等腰三角形三线合一；等边三角形每个角都相等，并且都等于 $60°$；直角三角形的两个锐角互余.

3. 全等三角形的判定. 必须具备三个条件，且至少有一个条件为边. 其判定方法主要有 SAS，ASA，SSS，AAS，HL.

4. 逆命题与逆定理.

根据原命题构造逆命题，原命题正确时，它的逆命题不一定正确；如果一个定理的逆命题正确，那么它是原定理的逆定理.

5. 尺规作图.

(1) 能用尺规完成以下基本作图：

① 作一条线段等于已知线段；

② 作一个角等于已知角；

③ 作一个角的平分线；

④ 作一条线段的垂直平分线；

⑤ 过一点作已知直线的垂线.

(2) 会利用基本作图作三角形：

① 已知三边、两边及其夹角、两角及其夹边作三角形；

② 已知底边及底边上的高作等腰三角形；

③ 已知一直角边和斜边作直角三角形.

知识要点

6. 角平分线和线段垂直平分线.

(1) 角平分线性质定理及其逆定理;

(2) 线段垂直平分线性质定理及其逆定理.

7. 勾股定理及其逆定理.

在直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方；如果三角形的三边 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

学习指导

1. 学习三角形的内容时，除了掌握有关的知识外，还必须加强训练思维的严谨性、有序性，做到言必有据.

2. 在学习过程中，要充分利用图形的直观性. 例如，借助图形，猜测相等的线段、相等的角，再利用有关知识进行证明.

3. 三角形是多边形中最简单、最基础的图形，后续许多知识都是转化成三角形后加以认识的，因此，要熟练掌握三角形的知识，运用转化思想为后续知识的学习打下良好的基础.

4. 运用所学知识解决实际问题，能够将实际问题转化为几何问题，利用全等三角形、等腰三角形等相关知识予以解决，培养应用数学知识的能力.

复习题

★基础★

1. 用长度分别为 2 cm，2 cm，3 cm，4 cm，5 cm 的五根木棍中的三根，可以组成多少个三角形?

2. 已知 a，b，c 是三角形的三条边长，$a+b+c=12$，$a+b=2c$，$a-b=2$. 求 a，b，c 的长.

3. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=100°$，$\angle B$ 的一个外角等于 $120°$. 求 $\angle C$ 的度数.

4. 三角形的两条边长分别为 5 cm 和 8 cm. 求第三边的长度范围.

5. 三角形有一个外角是锐角，判断这个三角形的形状 .

6. 三角形的周长为 15 cm，三条边的长是三个连续整数 . 求这三条边的长 .

7. 三角形的一个内角等于其他两个内角的差，试判断这个三角形的形状 .

8. 判断题 ：

（1）全等三角形的面积相等；（　　）

（2）面积相等的两个三角形全等；（　　）

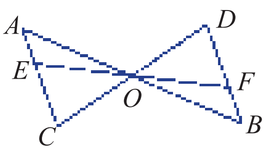
（3）顶角相等的两个等腰三角形全等；（　　）

（4）有一对角为45°的两个直角三角形全等；（　　）

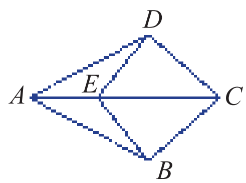
（5）底边相等的两个等腰三角形全等；（　　）

（6）有一条边长相等的两个等边三角形全等.（　　）

9. 已知：如图，AB，CD，EF交于O点，且$AO=BO$，$CO=DO$．求证：$EO=FO$．



（第 9 题）

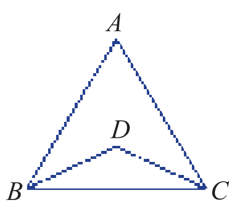


（第 11 题）

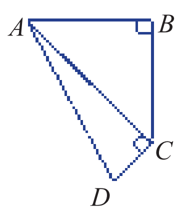
10. 求证 ：等腰三角形两腰上的中线相等.

11. 已知 ：如图，E 是 AC 上一点，$AB=AD$，$CB=CD$．求证 ：$BE=DE$.

12. 已知 ：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BD 平分 $\angle ABC$，CD 平分 $\angle ACB$. 求证 ：$DB=DC$.



（第 12 题）



（第 15 题）

13. 用直尺和圆规作一个 45° 的角.

14. 写出以下命题的逆命题，并判断真假 ：等腰三角形顶角的平分线也是底边上的中线.

15. 已知 ：如图，$\angle B=90°$，$AB=BC$，$\angle ACD=90°$，$AD=3$，$CD=1$．求 AB 的长.

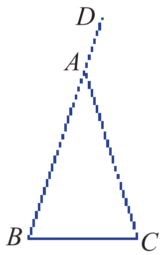
★★提升★★

1. 三角形的两个外角都是钝角，那么这个三角形的形状是（　　）.

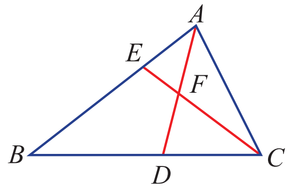
A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 无法确定

2. 在三角形的每一个顶点处只取一个外角，那么在三个外角中，最多有多少个锐角？

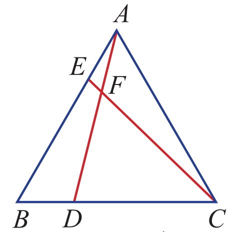
3. 已知：如图，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是BA延长线上一点. 求证：$\angle DAC=2\angle B$.



（第 3 题）



（第 4 题）



（第 6 题）

4. 已知：如图，D 是 BC 上一点，E 是 AB 上一点，CE 交 AD 于 F，那么图中共有多少个三角形？

5. 写出下列命题的逆命题，并判断真假：

（1）如果 $x=0$，那么 $x(x+1)=0$；

（2）在同一个三角形中，等边对等角.

6. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$AE=BD$，AD 与 CE 交于点 F. 求 $\angle CFD$ 的度数.

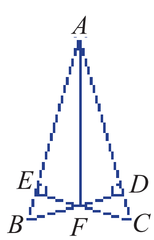
7. 等腰三角形的腰长为 m. 求底边 x 的取值范围.

8. 等边三角形的边长为 a cm. 求它的面积.

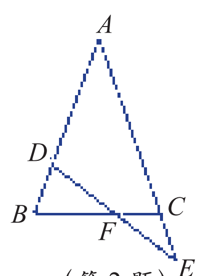
★★★ 拓展 ★★★

1. 已知：如图，$AB=AC$，$BD\perp AC$ 于 D，$CE\perp AB$ 于 E，BD 与 CE 交于 F，连接 AF. 求图中共有多少对全等的三角形.

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 AB 上一点，延长 AC 到 E，使 $CE=DB$，DE 与 BC 交于 F. 求证：$DF=EF$.



（第 1 题）



（第 2 题）

第十三章 事件与可能性

元旦期间，商场举行有奖促销活动，凡购物满 100 元，可获奖券一张，参加本商场的幸运抽奖活动．小明在这个商场购物后，得到一张奖券，他去抽奖，一定能抽到奖吗？抽到几等奖的可能性比较大？

一 事件

13.1 必然事件与随机事件

在日常生活中，我们经常需要对一些在一定条件下将要发生的事情做出判断：哪些事情一定会发生？哪些事情一定不会发生？哪些事情可能会发生？

思考

下面列举的事件中，哪些一定会发生？哪些一定不会发生？哪些可能会发生？请你做出判断.

序　号	事　件	判　断
(1)	明天早晨，大家能看到太阳从东方冉冉升起	
(2)	从分别写有 2，4，6 三个数字的三张卡片中随机抽出一张，卡片上的数字能被 2 整除	
(3)	从装满红球的袋子中随机摸出一个球，是白球	

实践

口袋中装有 1 角的硬币 2 枚、5 角的硬币 1 枚，从中随意摸出两枚硬币，在下面列举的事件中，哪些一定会发生？哪些一定不会发生？哪些可能会发生？

序　号	事　件	判　断
(4)	两枚硬币币值的和正好是2角	
(5)	两枚硬币币值的和正好是7角	
(6)	两枚硬币币值的和不超过6角	

上面列举的事件中，事件（2）、（6）一定会发生，像这样的事件我们称它们为**必然事件**.

事件（3）、（5）一定不会发生，像这样的事件我们称它们为**不可能事件**.

但是，事件（1）、（4）可能会发生，也可能不会发生，像这样的事件称为**随机事件**．随机事件是否会发生，是我们预先不能够确定的.

交流

我们本章研究的事件，按它发生的情况可以进行怎样的分类？分为哪几类？

- 事件
  - 能够确定是否会发生
    - 一定会发生 —— 必然事件
    - 一定不会发生 —— 不可能事件
  - 不能够确定是否会发生 —— 随机事件

练习

1. 下列事件中，哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？

   （1）王叔叔申请了北京市小客车购买指标，在申请后的第一次“摇号”时就中签；

   （2）任意掷一枚硬币，落地后正面和反面同时朝上；

   （3）在只含有 4 件次品的若干件产品中随机抽出 5 件，至少有一件是合格品．

2. 一个盒子里只装有 4 个球，除颜色外都相同，其中有 1 个红球，3 个黄球．把下列事件的序号填入下表的对应栏目中．

   （1）从盒子里随意摸出 1 个球，摸出的是黄球；

   （2）从盒子里随意摸出 1 个球，摸出的是白球；

   （3）从盒子里随意摸出 2 个球，至少有 1 个是黄球．

事　件	必然事件	不可能事件	随机事件
序　号			

习　题　13－1

★基础★

1. 下列事件中，哪些是随机事件？哪些是必然事件？

(1) 通常情况下，自来水在 10 ℃就结冰；

(2) 随时打开电视机，正在播新闻；

(3) 哥哥的年龄比弟弟的年龄大．

2. 任意掷一枚骰子．下列事件中，哪些必然出现，哪些不可能出现，哪些可能出现也可能不出现？

(1) 面朝上的点数小于 1；

(2) 面朝上的点数大于 1；

(3) 面朝上的点数大于 0；

(4) 面朝上的点数等于 6．

（第 2 题）

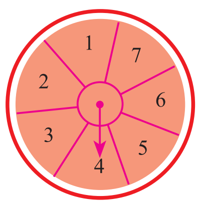
3. 如图，是一个转盘，用力转动转盘，当它停止后，指针对准下列数字区域[①]的事件中，哪些必然发生，哪些不可能发生，哪些可能发生也可能不发生？

(1) 能被 8 整除的数字；

(2) 奇数数字；

(3) 小于 8 的数字；

(4) 偶数数字．



（第 3 题）

★★提升★★

书箱里只有10本大小相同、厚薄差不多的书．从中随意摸出一本，如果“摸出一本小说”是下列事件，分别确定书箱里小说的数量是多少或在什么范围内：

(1) 必然事件；

(2) 不可能事件；

(3) 随机事件．

① 当指针对准区域的边线时，规定为它指向的是其右边相邻区域．

★★★拓展★★★

盒子里有除颜色外都相同的6个球，其中有红球和白球．搅匀后，如果从中随意摸出3个球时“至少有2个红球”是随机事件.求盒子里的红球可能有多少个.（写出红球的所有可能个数）

二、可能性

13.2 随机事件发生的可能性

我们来做一个摸球实验．

一个箱子里装有5个除颜色外都相同的球，其中有4个红球，1个黑球.

如果从箱子里随意摸出一个球，摸到的球一定是红球吗？为什么？

思考

实践

每位同学的口袋里只装有 4 个红球，1 个黑球．

每位同学把口袋里的球搅匀后，从中随意摸出一个球，记下球的颜色，统计全班同学实验的结果：

摸到球的颜色	红	黑
摸到的人数		

在我们随意摸一个球时，摸到每个球的机会都是相等的．但是，摸到哪种颜色的球是不确定的．因此“摸到红球”与“摸到黑球”都是随机事件．

根据全班同学所摸到的球的颜色统计结果，我们发现摸到红球的同学多，摸到黑球的同学少．

由于口袋里红球的数量（4个）比黑球的数量（1个）多，所以，摸到红球的机会比摸到黑球的机会多，也就是说，摸到红球的可能性比摸到黑球的可能性大．

由此可见，随机事件发生的可能性是有大小的．可能性的大小也就是**概率**的大小．

例 1 如图 13－1 是一个可以转动的转盘．盘面上有 8 个全等的扇形区域，其中 1 个是红色，2 个是绿色，2 个是白色，3 个是黄色．用力转动转盘，当转盘停止后，指针对准哪种颜色区域的可能性最小？对准哪种颜色区域的可能性最大？

图 13－1

分析：用力转动转盘，转盘停止后，指针对准每个区域都有相等的机会，只需比较各种颜色区域数量的多少．

解：因为红色区域数量最少（1 个），而黄色区域数量最多（3 个），所以，指针对准红色区域的可能性最小，而对准黄色区域的可能性最大．

思考

指针对准白色区域与对准绿色区域的可能性有什么关系？

不难看出：由于白色区域和绿色区域的数量相等（都是2个），因此，指针对准这两种颜色区域的可能性也相等．

例 2 任意掷一枚骰子，比较下列情况出现的可能性的大小．

(1) 面朝上的点数小于 2；　　(2) 面朝上的点数是奇数；

(3) 面朝上的点数是偶数；　　(4) 面朝上的点数大于 2．

分析：掷一枚骰子，每个面都有相等的机会朝上，6 个面的点数分别是：

1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点．因此，只需比较这些点数所在的面的数量的多少即可比较出这些面出现的可能性的大小．

解：因为“点数小于 2”的面数只有 1 个，即 1 点．“点数是奇数”和“点数是偶数”的面数各有 3 个：1 点、3 点、5 点和 2 点、4 点、6 点．“点数大于 2”的面数有 4 个：3 点、4 点、5 点、6 点． 所以，“点数小于 2”出现的可能性小于“点数是奇数”和“点数是偶数”出现的可能性，更小于“点数大于 2”出现的可能性．其中，“点数是奇数”和“点数是偶数”出现的可能性相等．

交流

在日常生活中，我们所说的“不大可能”发生的事件一定不会发生吗？“很可能”发生的事件一定会发生吗？

事件发生的可能性很小，不一定不会发生．比如，某地区的体育彩票，中特等奖的可能性大小是八百万分之一，即 0.000 000 125，结果却有人中奖了．

同样，事件发生的可能性很大，不一定就会发生．比如，乒乓球运动员小平和小芳的身体条件、技战术水平相当，两人在一局乒乓球比赛中，小芳已经以 9∶1 遥遥领先于小平，赢得这局比赛的可能性非常大，但是小芳却在最后输了这局比赛．

练习

1. 先统计你们班级男、女生的人数，再从你们班级的同学学号中随意找一名同学，这名同学是男生还是女生的可能性相等吗？如果不相等，哪个大，为什么？
2. 从一副 54 张的扑克牌中随意抽出一张，比较下列事件发生的可能性的大小：

   （1）抽到大王或小王；（2）抽到梅花；

   （3）抽到方块；（4）抽到黑桃 A．

习　题　13－2

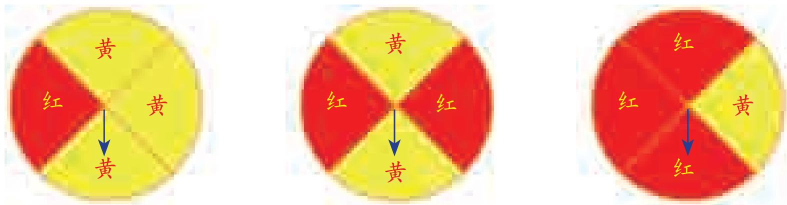
★基础★

1. “事件可能发生”是指事件（　　　）.

A. 一定会发生　　　　　　　　　B. 也许会发生，也许不会发生

C. 发生的机会很少　　　　　　　D. 发生的机会很多

2. 下面是代号分别为 A，B，C 的三个转盘，每个转盘上有四个全等的区域，颜色分布如图所示，将转盘的代号字母填在下面各题的空白处.



A　　　　B　　　　C

（第 2 题）

（1）转动转盘 ____，当转盘停止后，指针对准红色区域的可能性比对准黄色区域的可能性大；

（2）转动转盘 ____，当转盘停止后，指针对准红色区域和对准黄色区域的可能性相等.

3. 从一副除大王和小王以外的 52 张扑克牌中随意抽出一张，将抽出一张牌是下列结果的可能性从小到大排列：

（1）红色；　　　（2）黑桃；　　　（3）梅花；　　　（4）方块 A.

★★提升★★

1. 在你们学校中随意找出两个人. 这两个人同时出生在 10 月份的可能性大，还是同时出生在星期日的可能性大?

2. 口袋里只有 10 个球，除颜色外都相同，其中有 x 个红球、y 个白球，没有其他颜色的球. 从中随意摸出一个球：

（1）如果摸到红球与摸到白球的可能性相等，分别求 x 和 y 的值；

（2）如果摸到红球的可能性大于摸到白球的可能性，分别求 x 和 y 的可能值.

★★★拓展★★★

从有2名男生和3名女生的5名同学的学号中，随意找出4名同学．试问找出“2名男生和2名女生”与找出“1名男生和3名女生”的可能性哪个大？请说明理由．

13.3 求简单随机事件发生的可能性的大小

在前一节的学习中，我们知道，事件发生的可能性是有大小的．

这一节，我们来学习求简单事件发生的可能性的大小．

例如，口袋里有5个除颜色外都相同的球，其中有4个红球，1个黑球．我们给红球编号为①、②、③、④．从口袋里随意摸出一个球，通过前一节的摸球实验我们知道，摸到每个球的机会都相等．因此，摸出一个球的所有可能的结果有5个，即“红球①”、“红球②”、“红球③”、“红球④”和“黑球”，而且每个结果发生的可能性都相等．

其中，“摸出红球”的可能结果有4个，“摸出黑球”的可能结果有1个．

那么，“摸出红球”和“摸出黑球”事件发生的可能性大小分别是：

摸出红球的可能结果个数．

摸出红球的可能性大小：$\frac{4}{5}=0.8$；

摸出一个球的所有可能的结果个数．

摸出黑球的可能性大小：$\frac{1}{5}=0.2$．

由此可知，事件发生的可能性大小可以用数值表示，通常用P表示，记作P（事件）．在上面的例子里，“摸出红球”事件发生的可能性大小可以记作：

P（摸出红球）$=\frac{4}{5}=0.8$．

交流

从上面的实例分析和计算过程中，你能归纳、概括出计算随机事件发生的可能性大小的方法和步骤吗？

一般地，随机事件发生的可能性大小的计算方法和步骤是：

(1) 列出所有可能发生的结果，并判定每个结果发生的可能性都相等；

(2) 确定所有可能发生的结果个数 n 和其中出现所求事件的结果个数 m；

(3) 计算所求事件发生的可能性大小：

$$P（所求事件）= \frac{m}{n}.$$

任意掷一枚瓶盖，求“盖面朝上”事件发生的可能性大小，能用上面的公式计算吗？为什么？

思考

例 1 罐子里有 10 枚除颜色外其他都相同的棋子，其中有 4 枚为黑子，6 枚为白子．从罐子里随意摸出一枚棋子，求下列事件发生的可能性大小：

(1) 摸出一枚黑子；　　　　(2) 摸出一枚白子．

分析：从罐子里随意摸出一枚棋子的所有可能的结果有 10 个：4 个结果是“摸出黑子”，6 个结果是“摸出白子”，而且每个结果发生的可能性都相等．

解：因为所有可能发生的结果有 10 个，其中，出现“摸出黑子”的结果有 4 个，出现“摸出白子”的结果有 6 个．所以，“摸出一枚黑子”和“摸出一枚白子”事件发生的可能性大小分别是：

$$P（摸出一枚黑子）= \frac{4}{10} = 0.4；$$

$$P（摸出一枚白子）= \frac{6}{10} = 0.6.$$

例 2 任意掷一枚骰子，求下列事件发生的可能性大小：

（1）4点朝上；　　　　（2）奇数点朝上．

分析：点数朝上的所有可能的结果是 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点，而且每个结果发生的可能性都相等．

解：因为所有可能发生的结果有 6 个，其中，出现“4 点朝上”的结果有 1 个，出现“奇数点朝上”的结果有 3 个．所以，“4 点朝上”和“奇数点朝上”事件发生的可能性大小分别是：

$$P（4 点朝上）= \frac{1}{6}；\qquad P（奇数点朝上）= \frac{3}{6} = 0.5.$$

交流

必然事件和不可能事件发生的可能性大小分别有多大?

我们知道，从只装有 5 个红球的口袋里随意摸出一个球，“摸出一个红球”和“摸出一个白球”分别是必然事件和不可能事件．可以计算出“摸出一个红球”（必然事件）和“摸出一个白球”（不可能事件）发生的可能性大小分别是：

$$P（必然事件）=\frac{5}{5}=1；$$

$$P（不可能事件）=\frac{0}{5}=0.$$

练习

口袋里有 15 个球，除颜色外都相同，其中有 1 个红球，5 个黄球，9 个绿球．从口袋里随意摸出一个球，那么，下列事件发生的可能性大小分别是：

(1) 摸出一个红球的可能性大小是 ________；

(2) 摸出一个黄球的可能性大小是 ________；

(3) 摸出一个绿球的可能性大小是 ________；

(4) 摸出一个白球的可能性大小是 ________．

思考

在日常生活中，会遇到一些求简单事件的可能性大小问题，应当怎样解决呢?

例 3 小华有一串形状、大小差不多的钥匙，其中只有 2 把能开教室门锁，其余 3 把是开其他门锁的．在看不见的情况下随意摸出一把钥匙开门锁，小华能打开教室门锁的可能性大小有多大?

分析：只需求出摸到能开教室门锁的钥匙的可能性大小即可．从 5 把钥匙

中随意摸出 1 把，所有可能摸到钥匙的数量有 5 把，而且摸到每把钥匙的可能性都相等．

解：因为所有可能摸到钥匙的数量有 5 把，其中，出现“能开教室门锁钥匙”的数量有 2 把．

所以，摸到能开教室门锁钥匙的可能性大小是：

$$P(\text{摸到能开教室门锁钥匙})=\frac{2}{5}=0.4.$$

答：小华随意摸一把钥匙能打开教室门锁的可能性大小是 0.4.

例 4 某演出团在一周（7 天）内的任何一天都有可能来 A 剧场演出节目，且每周只来一次．试问：在休息日（星期六、星期日）该演出团到 A 剧场演出节目的可能性大小有多大？

分析：演出团到 A 剧场演出节目的所有可能的天数有 7 天，而且每天到 A 剧场演出节目的可能性都相等．

解：因为所有可能到 A 剧场演出节目的天数有 7 天，其中，出现“休息日”的天数有 2 天，所以，休息日到 A 剧场演出节目的可能性大小是：

$$P(\text{休息日到 A 剧场演出节目})=\frac{2}{7}.$$

答：演出团在休息日到 A 剧场演出节目的可能性大小是 $\frac{2}{7}$．

上面两个生活中的问题，是类比哪个实验（抛掷、摸球、转盘）求事件发生的可能性大小的？

思考

练习

1. 在 50 件同种产品中，有 5 件次品．检验员从中随意取出了一件进行检验，他取出次品的可能性大小是多少？
2. 如果你所在的班级一周内只有一节音乐课，从星期一至星期五每天都可以上音乐课．试问：星期一不上音乐课的可能性大小有多大？

习 题 13－3

★基础★

1. 一个均匀的正方体，6 个面中有 1 个面是红色的、2 个面是黄色的、3 个面是绿色的．任意掷一次此正方体，求下列事件发生的可能性大小：

(1) 红色面朝上； (2) 红色或绿色面朝上；

(3) 黄色面朝上； (4) 绿色或黄色面朝上．

2. 餐桌上有 8 个同样型号的杯子，其中有 1 杯为矿泉水，有 2 杯为凉开水，有 5 杯为白糖水．从 8 个杯子中随意取出 1 杯，求下列事件发生的可能性大小：

(1) 取到白糖水； (2) 取到矿泉水； (3) 取到凉开水； (4) 取到的不是白糖水．

3. 10 人围成一圈玩“击鼓传花”的游戏，其中有 2 位老人，5 位中年人，3 位小孩．开始击鼓时按顺序传花，鼓声停止时花在谁手中谁就需要表演一个节目．当鼓声随意停止时，求下列人群表演节目的可能性大小：

(1) 老年人； (2) 中年人； (3) 不是老年人．

4. 在 100 件规格相同的产品中，混有 2 件次品，其余均为合格品．为了找到这 2 件次品，随意从中抽出一件产品进行检验．求第一次检验时能够找到次品的可能性大小．

5. 某商场为了吸引顾客购物，设立一个转盘．转盘上有 21 个形状相同、面积相等的扇形区域，其中 7 个有奖区域均匀地分布在转盘上，有奖区域中分别标明奖励购物券的金额．奖励 100 元的区域有 1 个、50 元的区域有 2 个、20 元的区域有 4 个．商场规定顾客购买商品满 100 元，就能获得转动一次转盘的机会．转盘停止后，如果指针对准某个有奖区域，那么顾客就可以获得这个区域上所标金额的购物券．

某顾客购买了 140 元的商品，他获得购物券的可能性大小如何？分别求出他获得 100 元、50 元、20 元购物券的可能性大小．

★★提升★★

按要求设计实验：

(1) 抛掷实验：使得任意掷一个正方体，“2”点朝上的可能性大小是 $\frac{1}{3}$．

(2) 摸球实验：使得从口袋里随意摸出一个球，摸到红球的可能性大小是 $\frac{1}{3}$，而摸到黄球的可能性大小是 $\frac{1}{4}$．

(3) 转盘实验：用力转动转盘，当转盘停止后，使得指针对准的区域是红色的可能性大小为 $\frac{1}{2}$，是黄色的可能性大小为 $\frac{1}{4}$．

★★★ 拓展 ★★★

在一批同一型号的零件中，混有 5 件次品．从这批零件中随意抽取一件检验，如果抽取出合格品的可能性大小为 0.98，试问这批零件中有多少件合格品．

回顾与整理

知识要点

本章主要内容是：事件和可能性．主要知识有必然事件、不可能事件与随机事件，事件发生的可能性，求简单随机事件发生的可能性大小的方法，以及由本章内容反映的随机思想．

1．事件．以事件的发生分类如下：

- 事件
  - 必然事件
  - 不可能事件
  - 随机事件

2．可能性．随机事件是否会发生，预先是不能确定的，是随机发生的．有机会发生，通常称可能发生．发生的机会多了，发生的可能性就大；发生的机会相等，发生的可能性就相等．

可能性是有大小的，可用数值表示，记作 P (事件)．

3．简单随机事件发生的可能性的大小．

简单随机事件发生的可能性大小可以通过计算求得．计算的方法和步骤是：

(1) 列出所有可能发生的结果，并判定每个结果发生的可能性都相等；

知识要点

(2) 确定所有可能发生的结果个数 n 和其中出现所求事件的结果个数 m；

(3) 计算所求事件发生的可能性大小：

$$P(\text{所求事件}) = \frac{m}{n}.$$

这是求简单的随机事件发生的可能性大小的基本方法．

学习指导

1. 学习中通过实例认识和对实验经历体检，体会并了解必然事件、不可能事件和随机事件的含义．

2. 从多次重复的实验中认识一次实验中事件发生的可能性大小．可能性的大小是可以比较的．

3. 在求随机事件发生的可能性大小时，要列出所有可能的发生的结果，并判断每个结果发生的可能性相等，这是计算简单随机事件发生可能性大小的关键．

4. 会求三种典型实验（摸球实验、转盘实验、抛掷实验）中简单随机事件发生的可能性大小，并会类比三种实验，初步学会求生活中类似事件发生的可能性大小．

5. 体会“任意”、“随意”、“用力转动”中蕴含的随机思想，体会“均匀”、“相同”、“全等”中蕴含的可能性相等的含义．

复习题

★基础★

1. 下列事件中，哪些必然发生，哪些不可能发生，哪些可能发生？

(1) 同时掷 3 枚骰子，面朝上的点数之和小于 19；

(2) 同时掷 5 枚硬币，正面朝上与反面朝上的个数相等；

(3) 科学实验中，前 100 次实验都失败，第 101 次实验会成功；

(4) 用长度分别是 2 cm，3 cm，6 cm 的细木条首尾相连组成一个三角形．

2. 下面的说法对不对，为什么？

(1) 在 10 万次试验中，每次都发生了的事件是必然事件；

(2) 必然事件在 10 万次试验中，每次都发生；

(3) 在 10 万次试验中，每次都没有发生的事件是不可能事件；

(4) 不可能事件在 10 万次试验中，每次都不发生．

3. 如图所示，根据题意将罐子的代号填在下面的空白中：

（第 3 题）

从罐子中随意摸出一粒棋子，摸到白子的可能性的大小关系是：

从 _____ 中摸到的可能性，大于从 _____ 中摸到的可能性，大于从 _____ 中摸到的可能性，大于从 _____ 中摸到的可能性，大于从 _____ 中摸到的可能性．

4. 把转盘面分成 8 个全等扇面，其中 4 个红色、1 个黄色、3 个绿色．用力转动转盘，当转盘停止后，求指针对准下列扇面的可能性大小：

(1) 红色扇面； (2) 黄色扇面；

(3) 绿色扇面； (4) 不是红色扇面．

5. 设计一个均匀的正方体，各面分别标有字母 A，B，…，任意掷一次这样的正方体：

(1) 使面朝上的字母是 A 或 B 的可能性大小都是 $\frac{1}{2}$，应该如何标各面的字母？

(2) 使面朝上的字母是 A 或 B 的可能性大小都是 $\frac{1}{3}$，应该如何标各面的字母？

(3) 使面朝上的字母是 A 或 B 的可能性大小都是 $\frac{1}{6}$，应该如何标各面的字母？

(4) 使面朝上的字母是 A 的可能性大小为 $\frac{1}{3}$，是 B 的可能性大小为 $\frac{1}{2}$，应该如何标各面的字母？

6. 你们班上共有 ____ 名同学，其中男生 ____ 人，喜欢数学的同学 ____ 人，足球迷 _____ 人．从你们班同学的学号中随意找一名同学，求找到这名同学是下列同学的可能性大小：

(1) 女生；

(2) 喜欢数学的同学；

(3) 足球迷．

7. 某超市货架上有 50 瓶酸奶，其中有 5 瓶接近保质期．某顾客随意从货架上取出一瓶，求他取出的是一瓶快到保质期酸奶的可能性大小．

8. 某人有一块带秒针的手表，随意看一下手表，求这时秒针在下列区域的可能性大小：

(1) 秒针在 3 时至 4 时（包括 3 时不包括 4 时）之间；

(2) 秒针在 2 时至 5 时（包括 2 时不包括 5 时）之间．

★★ 提升 ★★

1. 两人进行乒乓球比赛，在一局比赛中，甲已得 9 分，乙只得了 2 分．某观众说："这局甲一定胜．"这个说法对吗？为什么？

2. 口袋里有 m 个球，除颜色外都相同，其中有 4 个红球．从口袋里随意摸出一个球，分别求符合下列条件中 m 的值或 m 的取值范围．

(1) 摸出一个红球是必然事件；

(2) 摸出一个红球的可能性大小是 $\frac{1}{3}$；

(3) 摸出一个红球是随机事件．

★★★ 拓展 ★★★

某电视台《幸运 52》栏目中的"百宝箱"互动环节，是一种竞猜游戏．游戏规则如下：在 20 个商标中，有 5 个商标牌的背面注明一定的奖励分数，其余商标牌的背面没有奖励分数，参与这个游戏的观众有三次翻牌的机会（翻过的牌不能再翻）．

(1) 求第一次随意翻一个牌获奖可能性的大小；

(2) 如果第一次翻牌获奖，求第二次随意翻一个牌获奖可能性的大小；

(3) 如果第一次翻牌获奖，第二次翻牌未获奖，求第三次随意翻一个牌获奖可能性的大小．

附　录

部分中英文词汇索引