义务教育教科书

# 数学

## 七年级

上册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东
本册主编：李海东

主要编写人员：章建跃　薛　彬　田载今　俞求是　刘金英　孙延洲
　　　　　　　李果民　景　敏　何志平　顾洪敏　袁　爽
责任编辑：刘长明
美术编辑：王俊宏

封面设计：吕　旻　王俊宏
版式设计：王俊宏　金　葆
　　　　　文鲁工作室（封面）

义务教育教科书　数学　七年级　上册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　　版　人民教育出版社
　　　　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
重　　印　××× 出版社
发　　行　××× 新华书店
印　　刷　××× 印刷厂
版　　次　2012 年 6 月第 1 版
印　　次　　　年　月第　次印刷
开　　本　787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张　10
字　　数　165 千字
印　　数　××× 册
书　　号　ISBN 978-7-107-24453-7
定　　价　××× 元


如发现内容质量问题，请登录中小学教材意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与 ××× 联系调换。电话：×××

# 主编的话

同学们，欢迎大家使用这套数学教科书，希望它能成为你们学习数学的好帮手。

为什么要学习数学呢？最主要的理由有两方面：

**数学应用很广泛。**数学是重要的基础科学，是开启科学大门的金钥匙。华罗庚说："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在。"当今，由于与计算机技术的结合，数学已渗透到人类社会的各个领域。在我们的生活、学习、工作乃至娱乐中，数学的作用与日俱增。

**数学使人更聪明。**数学是锻炼思维的体操。学习数学能使我们更合乎逻辑、更有条理、更严密、更精确、更深入地思考和解决问题，能增强我们的好奇心、想象力和创造性，有助于提高学习能力。懂得并能运用数学，就意味着你有更多的机会和选择。

如何使用这套教科书学好数学呢？下面提出一些想法，供大家参考。

**勤于思考，勇于探究，善于归纳。**数学的发展源远流长，我们所学的数学基础知识，大多是从丰富的实际背景中抽象概括而成的。例如，当你感到"人很多""月亮很圆""速度变了"时，会进一步想到人数的估算、圆的特征、速度的变化规律等，由此又可引发关于数量和图形的一系列问题，这是一个循序渐进、由表及里、逐步深入的过程。这套书安排了"思考""探究""归纳"等栏目，引导大家经历上述过程，通过观察、分析、猜想、试验、推理、反思、交流等活动获取数学知识，积累学习经验，逐步学会发现、提出、分析和解决问题。

**巩固基础，注重运用，提高能力。**学数学首先要充分重视概念、公式和定理等，并且要通过解题等实践活动，深化认识和提高能力。为此，这套书设计了"复习巩固""综合运用""拓广探索"等不同层次的习题，每章后面都有"数学活动"。学习这些内容时，同学们应加强独立思考，认真地分析问题、探寻解题思路、落实解题步骤，并要及时反思解题过程。只要采取科学合理的、适合自己的学习方式，学数学、用数学的能力一定能不断提高。

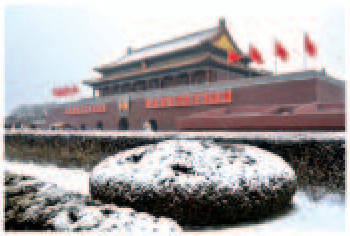
**开阔视野，自主学习，立足发展。**数学通今达古、博大精深，奥妙无穷。为使同学们在更广阔的数学天地中提升自学能力，这套书提供了"阅读与思考""观察与猜想""实验与探究"和"信息技术应用"等选学内容。希望同学们通过生动活泼、积极主动的学习，培养更广泛的数学学习兴趣，不断增强探究能力。

千里之行，始于足下，让我们从七年级上册开始学习吧！在这册书中，数的范围扩充到了**"有理数"**，由此拓展了研究问题的领域。**"整式的加减"**让你认识含字母的式子及其运算，从而体会从算术到代数的发展。**"一元一次方程"**提供了重要的数学工具，用它能更好地变未知为已知。**"几何图形初步"**带你进一步领略丰富多彩的图形世界。

同学们，你们处在学习数学的最佳时期，学好数学将会终生受益。未来的世界等待你们去建设，科学的高峰等待你们去攀登。预祝你在新的学习征途上不断奋进！

# 目　　录

## 第一章　有理数



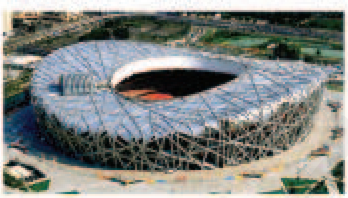


## 第二章　整式的加减

## 第三章　一元一次方程



## 第四章　几何图形初步



# 第一章　有理数

在生活、生产和科研中，经常遇到数的表示和运算等问题. 例如：

(1) 北京冬季里某一天的气温为$-3$ ℃～3 ℃. “$-3$”的含义是什么？这一天北京的温差是多少？

(2) 某年，我国花生产量比上一年增长1.8%，油菜籽产量比上一年增长$-2.7\%$. “增长$-2.7\%$”表示什么意思？

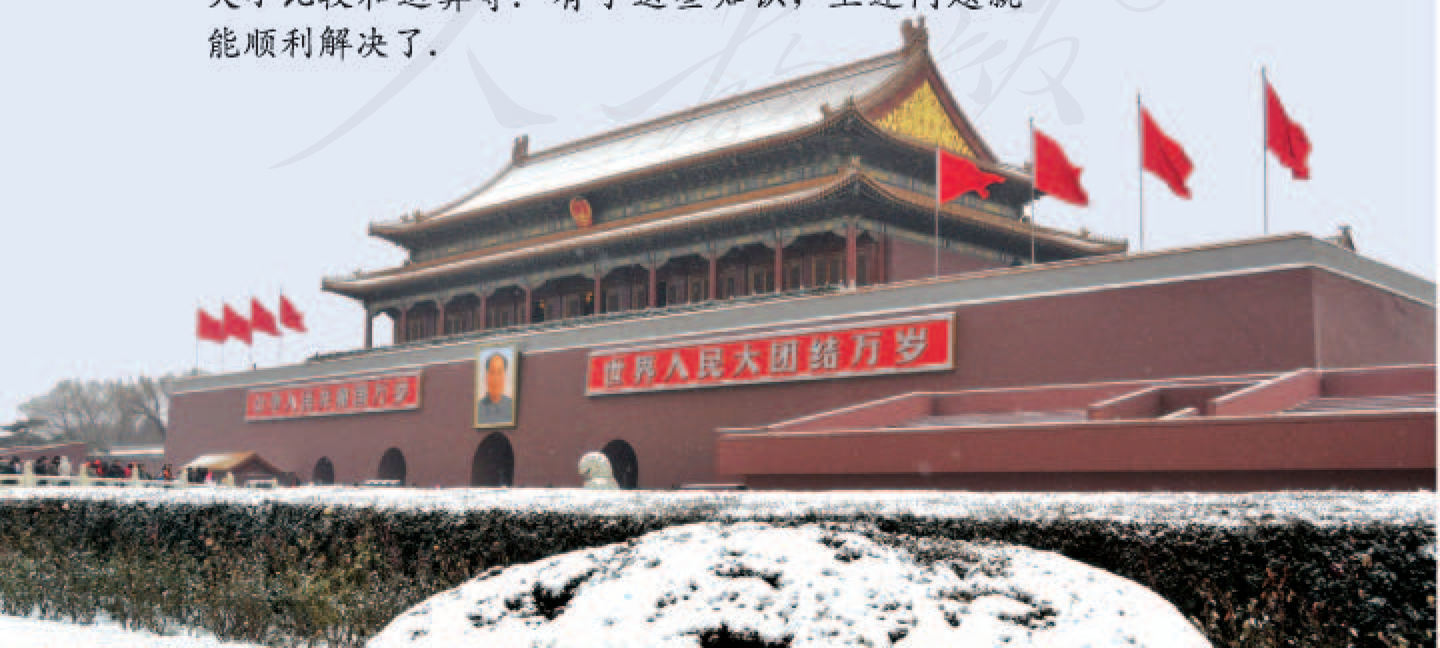
(3) 夏新同学通过捡、卖废品，既保护了环境，又积攒了零花钱. 下表是他某个月的部分收支情况（单位：元）.

收支情况表　　　　______年___月

| 日期 | 收入(＋)或支出(－) | 结余 | 注释 |
|---|---|---|---|
| 2日 | 3.5 | 8.5 | 卖废品 |
| 8日 | $-4.5$ | 4.0 | 买圆珠笔、铅笔芯 |
| 12日 | $-5.2$ | $-1.2$ | 买科普书，同学代付 |

这里，“结余$-1.2$”是什么意思？怎么得到的？

上面的例子涉及“$3-(-3)=?$”等新问题. 本章我们将在小学认识负数的基础上，把数的范围扩充到有理数，并在这个范围内研究数的表示、大小比较和运算等. 有了这些知识，上述问题就能顺利解决了.



# 1.1 正数和负数

数的产生和发展离不开生活和生产的需要.

由记数、排序，产生数 1，2，3，…

由表示“没有”“空位”，产生数 0

由分物、测量，产生分数$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…

图 1.1-1

本章引言中，表示温度、产量增长率、收支情况时，既要用到数 3，1.8%，3.5 等，还要用到数−3，−2.7%，−4.5，−1.2 等，它们的实际意义分别是：零下 3 摄氏度，减少 2.7%，支出 4.5 元，亏空 1.2 元.

你能说说 3，1.8%，3.5 等的实际意义吗?

我们知道，像 3，1.8%，3.5 这样大于 0 的数叫做正数. 像−3，−2.7%，−4.5，−1.2这样在正数前加上符号“−”（负）的数叫做负数. 有时，为了明确表达意义，在正数前面也加上“+”（正）号. 例如，+3，+2，+0.5，$+\frac{1}{3}$，… 就是 3，2，0.5，$\frac{1}{3}$，…. 一个数前面的“+”“−”号叫做它的符号.

0 既不是正数，也不是负数.

中国古代用算筹（表示数的工具）进行计算，红色算筹表示正数，黑色算筹表示负数.

**例** (1) 一个月内，小明体重增加 2 kg，小华体重减少 1 kg，小强体重无变化，写出他们这个月的体重增长值；

(2) 某年，下列国家的商品进出口总额比上年的变化情况是：

美国减少 6.4%，　德国增长 1.3%，

法国减少 2.4%，　英国减少 3.5%，

意大利增长 0.2%，　中国增长 7.5%.

写出这些国家这一年商品进出口总额的增长率.

“负”与“正”相对. 增长−1，就是减少 1；增长−6.4%，是什么意思？

什么情况下增长率是 0？

**解**：(1) 这个月小明体重增长 2 kg，小华体重增长 −1 kg，小强体重增长 0 kg.

(2) 六个国家这一年商品进出口总额的增长率是：

美国　−6.4%，　德国　1.3%，

法国　−2.4%，　英国　−3.5%，

意大利　0.2%，　中国　7.5%.

### 归纳

如果一个问题中出现相反意义的量，我们可以用正数和负数分别表示它们.

### 练习

1. 2010 年我国全年平均降水量比上年增加 108.7 mm，2009 年比上年减少 81.5 mm，2008 年比上年增加 53.5 mm. 用正数和负数表示这三年我国全年平均降水量比上年的增长量.

2. 如果把一个物体向右移动 1 m 记作移动 +1 m，那么这个物体又移动了 −1 m 是什么意思？如何描述这时物体的位置？

把0以外的数分为正数和负数，它们表示具有相反意义的量. 随着对正数、负数意义认识的加深，正数和负数在实践中得到了广泛应用. 在地形图上表示某地的高度时，需要以海平面为基准（规定海平面的海拔为0 m），通常用正数表示高于海平面的某地的海拔，用负数表示低于海平面的某地的海拔. 例如，珠穆朗玛峰的海拔为8 844.43 m，吐鲁番盆地的海拔为$-155$ m. 记账时，通常用正数表示收入款额，用负数表示支出款额.

0是正数与负数的分界. 0 ℃是一个确定的温度，海拔0 m表示海平面的平均高度. 0的意义已不仅是表示“没有”.

## 思考

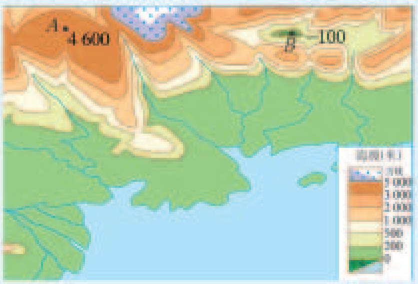



图 1.1-2

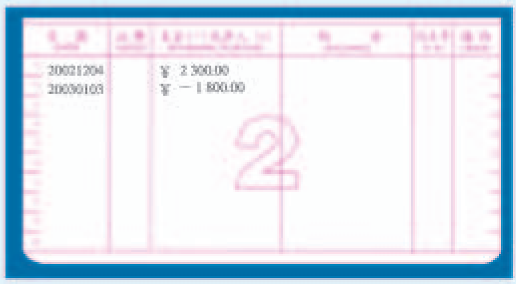



图 1.1-3

上面图中的正数和负数的含义是什么？你能再举一些用正数、负数表示数量的实际例子吗？

## 练习

1. 读下列各数，并指出其中哪些是正数，哪些是负数.

$$-1，2.5，+\frac{4}{3}，0，-3.14，120，-1.732，-\frac{2}{7}.$$

2. 如果80 m表示向东走80 m，那么$-60$ m表示__________.
3. 如果水位升高3 m时水位变化记作$+3$ m，那么水位下降3 m时水位变化记作________ m，水位不升不降时水位变化记作________ m.
4. 月球表面的白天平均温度零上126 ℃，记作________ ℃，夜间平均温度零下150 ℃，记作________ ℃.

## 习题 1.1

### 复习巩固

1. 下面各数哪些是正数，哪些是负数？

$$5, -\frac{5}{7}, 0, 0.56, -3, -25.8, \frac{12}{5}, -0.000\,1, +2, -600.$$

2. 某蓄水池的标准水位记为 0 m，如果用正数表示水面高于标准水位的高度，那么

(1) 0.08 m 和 −0.2 m 各表示什么？

(2) 水面低于标准水位 0.1 m 和高于标准水位 0.23 m 各怎样表示？

3. "不是正数的数一定是负数，不是负数的数一定是正数"的说法对吗？为什么？

### 综合运用

4. 如果把一个物体向后移动 5 m 记作移动 −5 m，那么这个物体又移动 +5 m 是什么意思？这时物体离它两次移动前的位置多远？

5. 测量一幢楼的高度，七次测得的数据分别是：79.4 m，80.6 m，80.8 m，79.1 m，80 m，79.6 m，80.5 m. 这七次测量的平均值是多少？以平均值为标准，用正数表示超出部分，用负数表示不足部分，它们对应的数分别是什么？

6. 科学实验表明，原子中的原子核与电子所带电荷是两种相反的电荷. 物理学规定，原子核所带电荷为正电荷. 氢原子中的原子核与电子各带1个电荷，把它们所带电荷用正数和负数表示出来.

### 拓广探索

7. 某地一天中午 12 时的气温是 7 ℃，过 5 h 气温下降了 4 ℃，又过 7 h 气温又下降了 4 ℃，第二天 0 时的气温是多少？

8. 某年，一些国家的服务出口额比上年的增长率如下：

| 美国 | 德国 | 英国 | 中国 | 日本 | 意大利 |
|---|---|---|---|---|---|
| −3.4% | −0.9% | −5.3% | 2.8% | −7.3% | 7.0% |

这一年，上述六国中哪些国家的服务出口额增长了？哪些国家的服务出口额减少了？哪国增长率最高？哪国增长率最低？

# 1.2 有理数

## 1.2.1 有理数

**思考**

回想一下，我们认识了哪些数？

我们学过的数有：

正整数，如 1，2，3，…；

零，0；

负整数，如 $-1$，$-2$，$-3$，…；

正分数，如 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{15}{7}$，0.1，5.32，…；

负分数，如 $-0.5$，$-\frac{5}{2}$，$-\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{7}$，$-150.25$，….

> 所有正整数组成正整数集合，所有负整数组成负整数集合.

> 因为这里的小数可以化为分数，所以我们也把它们看成分数.

正整数、0、负整数统称为整数；正分数、负分数统称为分数.

整数和分数统称为**有理数**（rational number）.

从小学开始，我们首先认识了正整数，后来又增加了 0 和正分数，在认识了负整数和负分数后，对数的认识就扩充到了有理数范围.

**练习**

1. 所有正数组成正数集合，所有负数组成负数集合. 把下面的有理数填入它属于的集合的圈内：

$$15，-\frac{1}{9}，-5，\frac{2}{15}，-\frac{13}{8}，0.1，-5.32，-80，123，2.333.$$

2. 指出下列各数中的正数、负数、整数、分数：

$$-15，+6，-2，-0.9，1，\frac{3}{5}，0，3\frac{1}{4}，0.63，-4.95.$$

## 1.2.2 数轴

**问题** 在一条东西向的马路上，有一个汽车站牌，汽车站牌东 3 m 和 7.5 m 处分别有一棵柳树和一棵杨树，汽车站牌西 3 m 和 4.8 m 处分别有一棵槐树和一根电线杆，试画图表示这一情境 .

如图 1.2-1，画一条直线表示马路，从左到右表示从西到东的方向，在直线上任取一个点 $O$ 表示汽车站牌的位置，规定 1 个单位长度（线段 $OA$ 的长）代表 1 m 长. 于是，在点 $O$ 右边，与点 $O$ 距离 3 个和 7.5 个单位长度的点 $B$ 和点 $C$，分别表示柳树和杨树的位置；点 $O$ 左边，与点 $O$ 距离 3 个和 4.8 个单位长度的点 $D$ 和点 $E$，分别表示槐树和电线杆的位置.

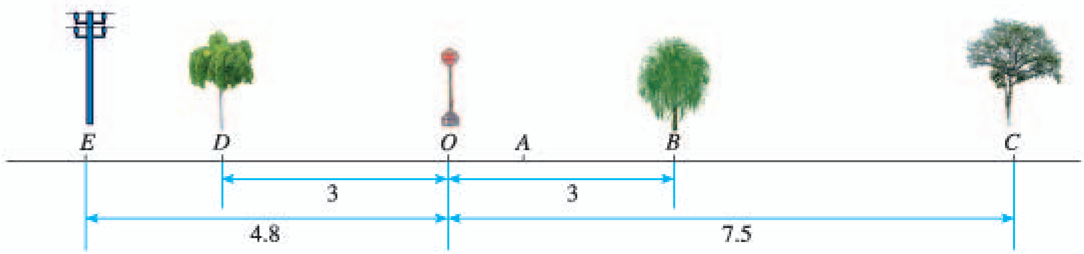



图 1.2-1

**思考**

怎样用数简明地表示这些树、电线杆与汽车站牌的相对位置关系（方向、距离）?

上面的问题中，“东”与“西”、“左”与“右”都具有相反意义. 如图 1.2-2，在一条直线上取一个点 $O$ 为基准点，用 0 表示它，再用负数表示点 $O$ 左边的点，用正数表示点 $O$ 右边的点. 这样，我们就用负数、0、正数表示出了这条直线上的点.

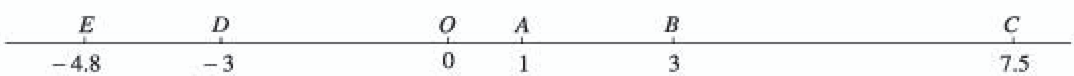



图 1.2-2

用上述方法，我们就可以把这些树、电线杆与汽车站牌的相对位置关系表示出来了．例如，－4.8 表示位于汽车站牌西侧 4.8 m 处的电线杆，等等．

你能说说图中其他数的实际意义吗？

## 思考

图 1.2-3 中的温度计可以看作表示正数、0 和负数的直线．它和图 1.2-2 有什么共同点，有什么不同点？

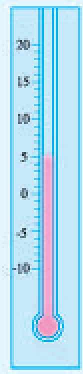



图 1.2-3

在数学中，可以用一条直线上的点表示数，这条直线叫做**数轴**（number axis），它满足以下要求：

（1）在直线上任取一个点表示数 0，这个点叫做**原点**(origin)；

（2）通常规定直线上从原点向右（或上）为正方向，从原点向左（或下）为负方向；

（3）选取适当的长度为单位长度，直线上从原点向右，每隔一个单位长度取一个点，依次表示 1，2，3，…；从原点向左，用类似方法依次表示－1，－2，－3，…（图 1.2-4）．

0 是正数和负数的分界点；原点是数轴的“基准点”．


图 1.2-4

分数或小数也可以用数轴上的点表示，例如从原点向右 6.5 个单位长度的点表示小数 6.5，从原点向左$\frac{3}{2}$个单位长度的点表示分数$-\frac{3}{2}$（图 1.2-4）．

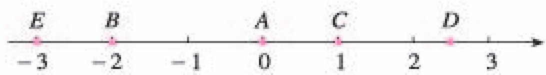
**归纳**

一般地，设 $a$ 是一个正数，则数轴上表示数 $a$ 的点在原点的____边，与原点的距离是____个单位长度；表示数 $-a$ 的点在原点的____边，与原点的距离是____个单位长度.

用数轴上的点表示数对数学的发展起了重要作用，以它作基础，可以借助图直观地表示很多与数相关的问题.

**练习**

1. 如图，写出数轴上点 $A$，$B$，$C$，$D$，$E$ 表示的数.




（第 1 题）

2. 画出数轴并表示下列有理数：

$$1.5,\ -2,\ 2,\ -2.5,\ \frac{9}{2},\ -\frac{3}{4},\ 0.$$

3. 数轴上，如果表示数 $a$ 的点在原点的左边，那么 $a$ 是一个____数；如果表示数 $b$ 的点在原点的右边，那么 $b$ 是一个____数.

## 1.2.3 相反数

**探究**

在数轴上，与原点的距离是 2 的点有几个？这些点各表示哪个数？

设 $a$ 是一个正数. 数轴上与原点的距离等于 $a$ 的点有几个？这些点表示的数有什么关系？

可以发现，数轴上与原点距离是 2 的点有两个，它们表示的数是 $-2$ 和 2.

**归纳**

一般地，设 $a$ 是一个正数，数轴上与原点的距离是 $a$ 的点有两个，它们分别在原点左右，表示 $-a$ 和 $a$（图 1.2-5），我们说这两点关于原点对称.

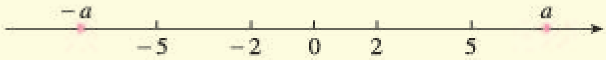



图 1.2-5

像 2 和 $-2$，5 和 $-5$ 这样，只有符号不同的两个数叫做互为**相反数**（opposite number）．这就是说，2 的相反数是 $-2$，$-2$ 的相反数是 2；5 的相反数是 $-5$，$-5$ 的相反数是 5.

一般地，$a$ 和 $-a$ 互为相反数．特别地，0 的相反数是 0．这里，$a$ 表示任意一个数，可以是正数、负数，也可以是 0．例如：

当 $a=1$ 时，$-a=-1$，1 的相反数是 $-1$；同时，$-1$ 的相反数是 1.

**思考**

设 $a$ 表示一个数，$-a$ 一定是负数吗?

容易看出，在正数前面添上“$-$”号，就得到这个正数的相反数．在任意一个数前面添上“$-$”号，新的数就表示原数的相反数．例如，

$-(+5)=-5$，$-(-5)=+5$，$-0=0$.

你能借助数轴说明 $-(-5)=+5$ 吗?

**练习**

1. 判断下列说法是否正确：

(1) $-3$ 是相反数；　(2) $+3$ 是相反数；

(3) 3 是 $-3$ 的相反数；　(4) $-3$ 与 $+3$ 互为相反数.

2. 写出下列各数的相反数：

$$6，-8，-3.9，\frac{5}{2}，-\frac{2}{11}，100，0.$$

3. 如果 $a=-a$，那么表示 $a$ 的点在数轴上的什么位置?

4. 化简下列各数：

$$-(-68)，-(+0.75)，-\left(-\frac{3}{5}\right)，-(+3.8).$$

## 1.2.4　绝对值

两辆汽车从同一处 $O$ 出发，分别向东、西方向行驶 10 km，到达 $A$，$B$ 两处（图 1.2-6）．它们的行驶路线相同吗？它们的行驶路程相等吗？

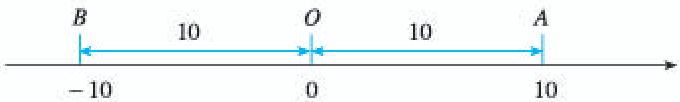



图 1.2-6

一般地，数轴上表示数 $a$ 的点与原点的距离叫做数 $a$ 的**绝对值**（absolute value），记作 $|a|$．例如，图 1.2-6 中 $A$，$B$ 两点分别表示 10 和 $-10$，它们与原点的距离都是 10 个单位长度，所以 10 和 $-10$ 的绝对值都是 10，即

> 这里的数 $a$ 可以是正数、负数和0.

$$|10|=10,\quad |-10|=10.$$

显然 $|0|=0$．

由绝对值的定义可知：

**一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0．**即

(1) 如果 $a>0$，那么 $|a|=a$；

(2) 如果 $a=0$，那么 $|a|=0$；

(3) 如果 $a<0$，那么 $|a|=-a$．

**练习**

1．写出下列各数的绝对值：

$$6,\ -8,\ -3.9,\ \frac{5}{2},\ -\frac{2}{11},\ 100,\ 0.$$

2．判断下列说法是否正确：

(1) 符号相反的数互为相反数；

(2) 一个数的绝对值越大，表示它的点在数轴上越靠右；

(3) 一个数的绝对值越大，表示它的点在数轴上离原点越远；

(4) 当 $a\neq0$ 时，$|a|$ 总是大于 0.

3．判断下列各式是否正确：

(1) $|5|=|-5|$；　　(2) $-|5|=|-5|$；　　(3) $-5=|-5|$．

我们已知两个正数（或 0）之间怎样比较大小，例如

$$0<1，1<2，2<3，\cdots.$$

任意两个有理数（例如$-4$和$-3$，$-2$和 0，$-1$和 1）怎样比较大小呢？

**思考**

图 1.2-7 给出了未来一周中每天的最高气温和最低气温，其中最低气温是多少？最高气温呢？你能将这七天中每天的最低气温按从低到高的顺序排列吗？


图 1.2-7

这七天中每天的最低气温按从低到高排列为

$$-4，-3，-2，-1，0，1，2.$$

按照这个顺序排列的温度，在温度计上所对应的点是从下到上的．按照这个顺序把这些数表示在数轴上，表示它们的各点的顺序是从左到右的（图 1.2-8）．


图 1.2-8

数学中规定：在数轴上表示有理数，它们从左到右的顺序，就是从小到大的顺序，即左边的数小于右边的数．

由这个规定可知

$$-6<-5，-5<-4，-4<-3，-2<0，-1<1，\cdots.$$

**思考**

对于正数、0 和负数这三类数，它们之间有什么大小关系？两个负数之间如何比较大小？前面最低气温由低到高的排列与你的结论一致吗？

一般地，

**(1) 正数大于 0，0 大于负数，正数大于负数；**

**(2) 两个负数，绝对值大的反而小.**

例如，1 ______ 0，0 ______ −1，1 ______ −1，−1 ______ −2.

**例** 比较下列各对数的大小：

(1) $-(-1)$和$-(+2)$；　(2) $-\frac{8}{21}$和$-\frac{3}{7}$；　(3) $-(-0.3)$和$\left|-\frac{1}{3}\right|$.

**解：**(1) 先化简，$-(-1)=1$，$-(+2)=-2$.

因为正数大于负数，所以 $1>-2$，即

$$-(-1)>-(+2).$$

(2) 这是两个负数比较大小，先求它们的绝对值.

$$\left|-\frac{8}{21}\right|=\frac{8}{21},\quad \left|-\frac{3}{7}\right|=\frac{3}{7}=\frac{9}{21}.$$

因为 $$\frac{8}{21}<\frac{9}{21},$$

即 $$\left|-\frac{8}{21}\right|<\left|-\frac{3}{7}\right|,$$

所以 $$-\frac{8}{21}>-\frac{3}{7}.$$

(3) 先化简，$-(-0.3)=0.3$，$\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$.

因为 $$0.3<\frac{1}{3},$$

所以 $$-(-0.3)<\left|-\frac{1}{3}\right|.$$

异号两数比较大小，要考虑它们的正负；同号两数比较大小，要考虑它们的绝对值.

**练习**

比较下列各对数的大小：

(1) 3 和 −5；　(2) −3 和 −5；

(3) −2.5 和 $-|-2.25|$；　(4) $-\frac{3}{5}$和$-\frac{3}{4}$.

# 习题 1.2

## 复习巩固

1. 把下面的有理数填在相应的大括号里（将各数用逗号分开）：

$$15，-\frac{3}{8}，0，0.15，-30，-12.8，\frac{22}{5}，+20，-60.$$

正数：{　　　　　　　　　　…}　　负数：{　　　　　　　　　　…}

2. 在数轴上表示下列各数：

$$-5，+3，-3.5，0，\frac{2}{3}，-\frac{3}{2}，0.75.$$

3. 在数轴上，点 $A$ 表示$-3$，从点 $A$ 出发，沿数轴移动 4 个单位长度到达点 $B$，则点 $B$ 表示的数是多少？

4. 写出下列各数的相反数，并将这些数连同它们的相反数在数轴上表示出来：

$$-4，+2，-1.5，0，\frac{1}{3}，-\frac{9}{4}.$$

5. 写出下列各数的绝对值：

$$-125，+23，-3.5，0，\frac{2}{3}，-\frac{3}{2}，-0.05.$$

上面的数中哪个数的绝对值最大？哪个数的绝对值最小？

6. 将下列各数按从小到大的顺序排列，并用“$<$”号连接：

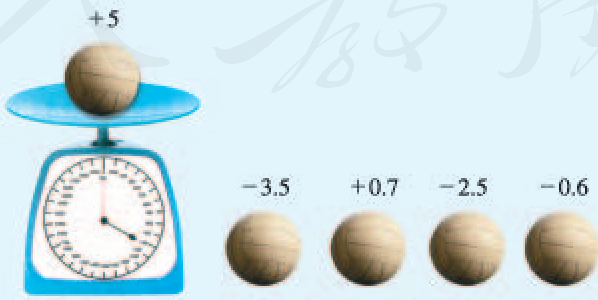
$$-0.25，+2.3，-0.15，0，-\frac{2}{3}，-\frac{3}{2}，-\frac{1}{2}，0.05.$$

## 综合运用

7. 下面是我国几个城市某年一月份的平均气温，把它们按从高到低的顺序排列.

| 北京 | 武汉 | 广州 | 哈尔滨 | 南京 |
|---|---|---|---|---|
| $-4.6$ ℃ | 3.8 ℃ | 13.1 ℃ | $-19.4$ ℃ | 2.4 ℃ |

8. 如图，检测 5 个排球，其中质量超过标准的克数记为正数，不足的克数记为负数. 从轻重的角度看，哪个球最接近标准？




（第 8 题）

9. 某年我国人均水资源比上年的增幅是$-5.6\%$．后续三年各年比上年的增幅分别是$-4.0\%$，$13.0\%$，$-9.6\%$．这些增幅中哪个最小？增幅是负数说明什么？

10. 在数轴上，表示哪个数的点与表示$-2$和$4$的点的距离相等？

## 拓广探索

11. (1) $-1$与$0$之间还有负数吗？$-\frac{1}{2}$与$0$之间呢？如有，请举例．

    (2) $-3$与$-1$之间有负整数吗？$-2$与$2$之间有哪些整数？

    (3) 有比$-1$大的负整数吗？

    (4) 写出3个小于$-100$并且大于$-103$的数．

12. 如果$|x|=2$，那么$x$一定是2吗？如果$|x|=0$，那么$x$等于几？如果$x=-x$，那么$x$等于几？

# 1.3 有理数的加减法

## 1.3.1 有理数的加法

在小学，我们学过正数及 0 的加法运算. 引入负数后，怎样进行加法运算呢?

实际问题中，有时也会遇到与负数有关的加法运算. 例如，在本章引言中，把收入记作正数，支出记作负数，在求“结余”时，需要计算$8.5+(-4.5)$，$4+(-5.2)$等.

**思考**

小学学过的加法是正数与正数相加、正数与 0 相加. 引入负数后，加法有哪几种情况?

引入负数后，除已有的正数与正数相加、正数与 0 相加外，还有负数与负数相加、负数与正数相加、负数与 0 相加等. 下面借助具体情境和数轴来讨论有理数的加法.

看下面的问题.

一个物体作左右方向的运动，我们规定向左为负，向右为正. 向右运动 5 m 记作 5 m，向左运动 5 m 记作$-5$ m.

**思考**

如果物体先向右运动 5 m，再向右运动 3 m，那么两次运动的最后结果是什么? 可以用怎样的算式表示?

两次运动后物体从起点向右运动了 8 m. 写成算式就是

$$5+3=8. \quad ①$$

将物体的运动起点放在原点，则这个算式可用数轴表示为图 1.3-1.


图 1.3-1

**思考**

如果物体先向左运动 5 m，再向左运动 3 m，那么两次运动的最后结果是什么？可以用怎样的算式表示？

两次运动后物体从起点向左运动了 8 m. 写成算式就是

$$(-5)+(-3)=-8. \qquad ②$$

这个运算也可以用数轴表示，其中假设原点 $O$ 为运动起点（图 1.3-2）.


图 1.3-2

从算式①②可以看出：符号相同的两个数相加，结果的符号不变，绝对值相加.

**探究**

（1）如果物体先向左运动 3 m，再向右运动 5 m，那么两次运动的最后结果怎样？如何用算式表示？

（2）如果物体先向右运动 3 m，再向左运动 5 m，那么两次运动的最后结果怎样？如何用算式表示？

（1）结果是物体从起点向右运动了 2 m. 写成算式就是

$$(-3)+5=2. \qquad ③$$

（2）结果是物体从起点向左运动了 2 m. 写成算式就是

$$3+(-5)=-2. \qquad ④$$

你能用数轴表示算式③④吗？

从算式③④可以看出：符号相反的两个数相加，结果的符号与绝对值较大的加数的符号相同，并用较大的绝对值减去较小的绝对值.

**探究**

如果物体先向右运动 5 m，再向左运动 5 m，那么两次运动的最后结果如何？

结果是仍在起点处．写成算式就是

$$5+(-5)=0. \quad ⑤$$

算式⑤表明，互为相反数的两个数相加，结果为 0.

如果物体第 1 s 向右（或左）运动 5 m，第 2 s 原地不动，那么 2 s 后物体从起点向右（或左）运动了5 m．写成算式就是

$$5+0=5 \text{（或}(-5)+0=-5\text{）}. \quad ⑥$$

**思考**

从算式⑥可以得出什么结论？

从算式①～⑥可知，有理数加法运算中，既要考虑符号，又要考虑绝对值．你能从这些算式中归纳出有理数加法的运算法则吗？

有理数加法法则：

**1．同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加．**

**2．绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值．互为相反数的两个数相加得 0．**

**3．一个数同 0 相加，仍得这个数．**

**例 1** 计算：

(1) $(-3)+(-9)$；

(2) $(-4.7)+3.9$.

先定符号，再算绝对值．

**解：**(1) $(-3)+(-9)=-(3+9)=-12$；

(2) $(-4.7)+3.9=-(4.7-3.9)=-0.8$.

**练习**

1．用算式表示下面的结果：

(1) 温度由$-4$ ℃上升 7 ℃；

(2) 收入 7 元，又支出 5 元．

2．口算：

(1) $(-4)+(-6)$；　(2) $4+(-6)$；　(3) $(-4)+6$；

(4) $(-4)+4$；　(5) $(-4)+14$；　(6) $(-14)+4$；

(7) $6+(-6)$；　(8) $0+(-6)$.

3. 计算：

(1) $15+(-22)$；　　(2) $(-13)+(-8)$；

(3) $(-0.9)+1.5$；　　(4) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)$.

4. 请你用生活实例解释 $5+(-3)=2$，$(-5)+(-3)=-8$的意义.

我们以前学过加法交换律、结合律，在有理数的加法中它们还适用吗？

**探究**

计算

$$30+(-20),\quad (-20)+30.$$

两次所得的和相同吗？换几个加数再试一试.

从上述计算中，你能得出什么结论？

有理数的加法中，**两个数相加，交换加数的位置，和不变.**

加法交换律：$a+b=b+a$.

**探究**

计算

$$[8+(-5)]+(-4),\quad 8+[(-5)+(-4)].$$

两次所得的和相同吗？换几个加数再试一试.

从上述计算中，你能得出什么结论？

有理数的加法中，**三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.**

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$.

**例 2** 计算 $16+(-25)+24+(-35)$.

**解：** $16+(-25)+24+(-35)$

$=16+24+[(-25)+(-35)]$

$=40+(-60)=-20$.

例 2 中是怎样使计算简化的？根据是什么？

利用加法交换律、结合律，可以使运算简化．认识运算律对于理解运算有很重要的意义．

**例 3**　10 袋小麦称后记录如图 1.3-3 所示（单位：kg）．10 袋小麦一共多少千克？如果每袋小麦以 90 kg 为标准，10 袋小麦总计超过多少千克或不足多少千克？


图 1.3-3

**解法 1：** 先计算 10 袋小麦一共多少千克：

$91+91+91.5+89+91.2+91.3+88.7+88.8+91.8+91.1=905.4.$

再计算总计超过多少千克：

$$905.4-90\times10=5.4.$$

**解法 2：** 每袋小麦超过 90 kg 的千克数记作正数，不足的千克数记作负数．10 袋小麦对应的数分别为 $+1$，$+1$，$+1.5$，$-1$，$+1.2$，$+1.3$，$-1.3$，$-1.2$，$+1.8$，$+1.1$．

$$\begin{aligned}&1+1+1.5+(-1)+1.2+1.3+(-1.3)+(-1.2)+1.8+1.1\\=&[1+(-1)]+[1.2+(-1.2)]+\\&[1.3+(-1.3)]+(1+1.5+1.8+1.1)\\=&5.4.\end{aligned}$$

$90\times10+5.4=905.4.$

比较两种解法．解法 2 中使用了哪些运算律？

**答：** 10 袋小麦一共 905.4 kg，总计超过 5.4 kg．

**练习**

1. 计算：

(1) $23+(-17)+6+(-22)$；　(2) $(-2)+3+1+(-3)+2+(-4)$．

2. 计算：

(1) $1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)$；　(2) $3\frac{1}{4}+\left(-2\frac{3}{5}\right)+5\frac{3}{4}+\left(-8\frac{2}{5}\right)$．

## 实验与探究

### 填　幻　方

有人建议向火星发射如图 1 的图案．它叫做幻方，其中 9 个格中的点数分别是 1，2，3，4，5，6，7，8，9．每一横行、每一竖列以及两条斜对角线上的点数的和都是 15．如果火星上有智能生物，那么他们可以从这种“数学语言”了解到地球上也有智能生物（人）．

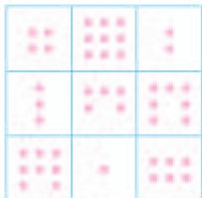


图 1

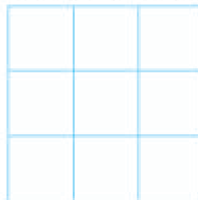


图 2

你能将 $-4$，$-3$，$-2$，$-1$，0，1，2，3，4 这 9 个数分别填入图 2 的幻方的 9 个空格中，使得处于同一横行、同一竖列、同一斜对角线上的 3 个数相加都得 0 吗？

你是将 0 填入中央的格中吗？与同学交流一下，你们填这个幻方的方法相同吗？

## 1.3.2　有理数的减法

实际问题中有时还要涉及有理数的减法．例如，本章引言中，北京某天的气温是 $-3$ ℃～3 ℃，这天的温差（最高气温减最低气温，单位：℃）就是 $3-(-3)$．这里遇到正数与负数的减法．

如图 1.3-4，你能看出 3 ℃比 $-3$ ℃高多少摄氏度吗？

减法是加法的逆运算，计算 $3-(-3)$，就是要求出一个数 $x$，使得 $x$ 与 $-3$ 相加得 3．因为 6 与 $-3$ 相加得 3，所以 $x$ 应该是 6，即

$$3-(-3)=6. \qquad ①$$

另一方面，我们知道

$$3+(+3)=6, \qquad ②$$

由①②，有

$$3-(-3)=3+(+3). \qquad ③$$

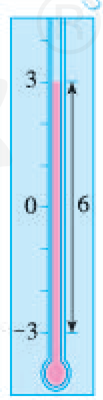



图 1.3-4

**探究**

从③式能看出减$-3$相当于加哪个数吗？把3换成0，$-1$，$-5$，用上面的方法考虑

$0-(-3)$，$(-1)-(-3)$，$(-5)-(-3)$.

这些数减$-3$的结果与它们加$+3$的结果相同吗？

换几个数再试一试

计算

$9-8$，$9+(-8)$；$15-7$，$15+(-7)$.

从中又有什么新发现？

可以发现，有理数的减法可以转化为加法来进行.

有理数减法法则：

**减去一个数，等于加这个数的相反数.**

有理数减法法则也可以表示成

$$\boxed{a-b=a+(-b).}$$

**例4** 计算：

(1) $(-3)-(-5)$；  (2) $0-7$；

(3) $7.2-(-4.8)$；  (4) $\left(-3\frac{1}{2}\right)-5\frac{1}{4}$.

**解：** (1) $(-3)-(-5)=(-3)+5=2$；

(2) $0-7=0+(-7)=-7$；

(3) $7.2-(-4.8)=7.2+4.8=12$；

(4) $\left(-3\frac{1}{2}\right)-5\frac{1}{4}=\left(-3\frac{1}{2}\right)+\left(-5\frac{1}{4}\right)=-8\frac{3}{4}$.

**思考**

在小学，只有当$a$大于或等于$b$时，我们才会做$a-b$（例如$2-1$，$1-1$）. 现在，当$a$小于$b$时，你会做$a-b$（例如$1-2$，$(-1)-1$）吗？

一般地，较小的数减去较大的数，所得的差的符号是什么？

**练习**

1. 计算：

(1) $6-9$；　　(2) $(+4)-(-7)$；

(3) $(-5)-(-8)$；　　(4) $0-(-5)$；

(5) $(-2.5)-5.9$；　　(6) $1.9-(-0.6)$.

2. 计算：

(1) 比 2 ℃低 8 ℃的温度；　　(2) 比−3 ℃低 6 ℃的温度.

下面我们研究怎样进行有理数的加减混合运算.

**例 5**　计算$(-20)+(+3)-(-5)-(+7)$.

**分析：** 这个算式中有加法，也有减法．可以根据有理数减法法则，把它改写为

$$(-20)+(+3)+(+5)+(-7),$$

使问题转化为几个有理数的加法.

**解：**

$$\begin{aligned}&(-20)+(+3)-(-5)-(+7)\\=&(-20)+(+3)+(+5)+(-7)\\=&[(-20)+(-7)]+[(+5)+(+3)]\\=&(-27)+(+8)\\=&-19.\end{aligned}$$

这里使用了哪些运算律?

**归纳**

引入相反数后，加减混合运算可以统一为加法运算.

$$a+b-c=a+b+(-c).$$

算式

$$(-20)+(+3)+(+5)+(-7)$$

是−20，3，5，−7 这四个数的和，为书写简单，可以省略算式中的括号和加号，把它写为

$$-20+3+5-7.$$

这个算式可以读作“负 20、正 3、正 5、负 7 的和”，或读作“负 20 加 3

加 5 减 7”．例 5 的运算过程也可以简单地写为

$$
\begin{aligned}
&(-20)+(+3)-(-5)-(+7)\\
=&-20+3+5-7\\
=&-20-7+3+5\\
=&-27+8\\
=&-19.
\end{aligned}
$$

**探究**

在数轴上，点 $A$，$B$ 分别表示数 $a$，$b$．利用有理数减法，分别计算下列情况下点 $A$，$B$ 之间的距离：

$a=2$，$b=6$；$a=0$，$b=6$；$a=2$，$b=-6$；$a=-2$，$b=-6$.

你能发现点 $A$，$B$ 之间的距离与数 $a$，$b$ 之间的关系吗？

**练习**

计算：

(1) $1-4+3-0.5$；

(2) $-2.4+3.5-4.6+3.5$；

(3) $(-7)-(+5)+(-4)-(-10)$；

(4) $\frac{3}{4}-\frac{7}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)-1$.

## 习题 1.3

### 复习巩固

1. 计算：

(1) $(-10)+(+6)$；

(2) $(+12)+(-4)$；

(3) $(-5)+(-7)$；

(4) $(+6)+(-9)$；

(5) $(-0.9)+(-2.7)$；

(6) $\frac{2}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)$；

(7) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{5}$；

(8) $\left(-3\frac{1}{4}\right)+\left(-1\frac{1}{12}\right)$.

2. 计算：

(1) $(-8)+10+2+(-1)$；

(2) $5+(-6)+3+9+(-4)+(-7)$；

(3) $(-0.8)+1.2+(-0.7)+(-2.1)+0.8+3.5$；

(4) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$.

3. 计算：

(1) $(-8)-8$；　(2) $(-8)-(-8)$；　(3) $8-(-8)$；

(4) $8-8$；　(5) $0-6$；　(6) $0-(-6)$；

(7) $16-47$；　(8) $28-(-74)$；　(9) $(-3.8)-(+7)$；

(10) $(-5.9)-(-6.1)$.

4. 计算：

(1) $\left(+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)$；　(2) $\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)$；

(3) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$；　(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}$；

(5) $-\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)$；　(6) $0-\left(-\frac{3}{4}\right)$；

(7) $(-2)-\left(+\frac{2}{3}\right)$；　(8) $\left(-16\frac{3}{4}\right)-\left(-10\frac{1}{4}\right)-\left(+1\frac{1}{2}\right)$.

5. 计算：

(1) $-4.2+5.7-8.4+10$；　(2) $-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$；

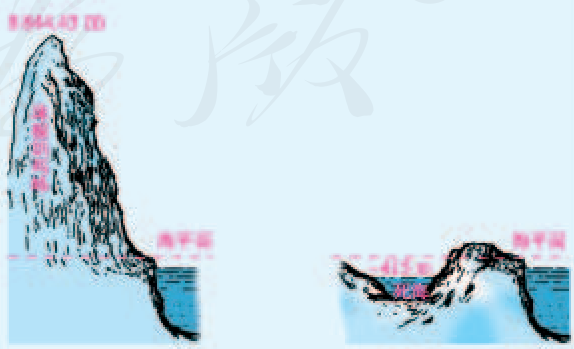
(3) $12-(-18)+(-7)-15$；　(4) $4.7-(-8.9)-7.5+(-6)$；

(5) $\left(-4\frac{7}{8}\right)-\left(-5\frac{1}{2}\right)+\left(-4\frac{1}{4}\right)-\left(+3\frac{1}{8}\right)$；

(6) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left|0-5\frac{1}{6}\right|+\left|-4\frac{5}{6}\right|+\left(-9\frac{1}{3}\right)$.

## 综合运用

6. 如图，陆上最高处是珠穆朗玛峰的峰顶，最低处位于亚洲西部名为死海的湖，两处高度相差多少？




（第 6 题）

7. 一天早晨的气温是$-7$ ℃，中午上升了 11 ℃，半夜又下降了 9 ℃，半夜的气温是多少摄氏度？

8. 食品店一周中各天的盈亏情况如下（盈余为正）：

132 元，$-12.5$ 元，$-10.5$ 元，127 元，$-87$ 元，136.5 元，98 元.

一周总的盈亏情况如何？

9. 有 8 筐白菜，以每筐 25 kg 为准，超过的千克数记作正数，不足的千克数记作负数，称后的记录如下：

$1.5, -3, 2, -0.5, 1, -2, -2, -2.5.$

这 8 筐白菜一共多少千克？

10. 某地一周内每天的最高气温与最低气温记录如下表，哪天的温差最大？哪天的温差最小？

| 星　期 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 日 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 最高气温 | 10 ℃ | 12 ℃ | 11 ℃ | 9 ℃ | 7 ℃ | 5 ℃ | 7 ℃ |
| 最低气温 | 2 ℃ | 1 ℃ | 0 ℃ | $-1$ ℃ | $-4$ ℃ | $-5$ ℃ | $-5$ ℃ |

## 拓广探索

11. 填空：

(1) $\_\_\_\_+11=27$；　(2) $7+\_\_\_\_=4$；

(3) $(-9)+\_\_\_\_=9$；　(4) $12+\_\_\_\_=0$；

(5) $(-8)+\_\_\_\_=-15$；　(6) $\_\_\_\_+(-13)=-6$.

12. 计算下列各式的值：

$(-2)+(-2)$，　$(-2)+(-2)+(-2)$，

$(-2)+(-2)+(-2)+(-2)$，　$(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)$.

猜想下列各式的值：

$(-2)\times 2$，$(-2)\times 3$，$(-2)\times 4$，$(-2)\times 5$.

你能进一步猜出负数乘正数的法则吗？

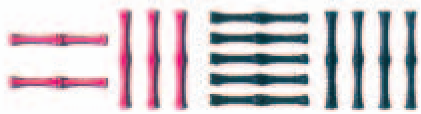
13. 一种股票第一天的最高价比开盘价高 0.3 元，最低价比开盘价低 0.2 元；第二天的最高价比开盘价高 0.2 元，最低价比开盘价低 0.1 元；第三天的最高价等于开盘价，最低价比开盘价低 0.13 元. 计算每天最高价与最低价的差，以及这些差的平均值.

股票交易是市场经济中的一种金融活动，它可以促进投资和资金流通.

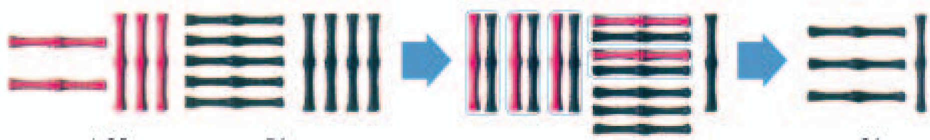
## 阅读与思考

# 中国人最先使用负数

中国人很早就开始使用负数．著名的中国古代数学著作《九章算术》的“方程”一章，在世界数学史上首次正式引入负数及其加减法运算法则，并给出名为“正负术”的算法．魏晋时期的数学家刘徽在其著作《九章算术注》中用不同颜色的算筹（小棍形状的记数工具）分别表示正数和负数（红色为正，黑色为负）．



+23　　　　−54



+23　　　　−54　　　　　　　　　　−31

“正负术”是正负数加减法则．其中有一段话是“同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之．”你知道它的意思吗？其实它就是减法法则，以现代算式为例，可以将这段话解释如下：

“同名相除”，即同号两数相减时，括号前为被减数的符号，括号内为被减数的绝对值减去减数的绝对值．例如

$$(+5)-(+3)=+(5-3),$$
$$(-5)-(-3)=-(5-3).$$

“异名相益”，即异号两数相减时，括号前为被减数的符号，括号内为被减数的绝对值加减数的绝对值．例如

$$(+5)-(-3)=+(5+3),$$
$$(-5)-(+3)=-(5+3).$$

“正无入负之，负无入正之”，即 0 减正得负，0 减负得正．例如

$$0-(+3)=-3,$$
$$0-(-3)=+3.$$

史料证明：追溯到两千多年前，中国人已经开始使用负数，并应用到生产和生活中．例如，在古代商业活动中，以收入为正，支出为负；以盈余为正，亏欠为负．在古代农业活动中，以增产为正，减产为负．中国人使用负数在世界上是首创．

# 1.4 有理数的乘除法

## 1.4.1 有理数的乘法

我们已经熟悉正数及 0 的乘法运算. 与加法类似，引入负数后，将出现 $3\times(-3)$，$(-3)\times3$，$(-3)\times(-3)$这样的乘法. 该怎样进行这一类的运算呢?

**思考**

观察下面的乘法算式，你能发现什么规律吗?

$3\times3=9$，

$3\times2=6$，

$3\times1=3$，

$3\times0=0$.

可以发现，上述算式有如下规律：随着后一乘数逐次递减 1，积逐次递减 3.

要使这个规律在引入负数后仍然成立，那么应有：

$3\times(-1)=-3$，

$3\times(-2)=$____，

$3\times(-3)=$____.

**思考**

观察下面的算式，你又能发现什么规律?

$3\times3=9$，

$2\times3=6$，

$1\times3=3$，

$0\times3=0$.

可以发现，上述算式有如下规律：随着前一乘数逐次递减 1，积逐次递减 3.

要使上述规律在引入负数后仍然成立，那么你认为下面的空格应填写什么数？

$(-1)\times3=\underline{\qquad}$，

$(-2)\times3=\underline{\qquad}$，

$(-3)\times3=\underline{\qquad}$.

从符号和绝对值两个角度观察上述所有算式，可以归纳如下：

正数乘正数，积为正数；正数乘负数，积是负数；负数乘正数，积也是负数．积的绝对值等于各乘数绝对值的积.

**思考**

利用上面归纳的结论计算下面的算式，你发现有什么规律？

$(-3)\times3=\underline{\qquad\quad}$，

$(-3)\times2=\underline{\qquad\quad}$，

$(-3)\times1=\underline{\qquad\quad}$，

$(-3)\times0=\underline{\qquad\quad}$.

可以发现，上述算式有如下规律：随着后一乘数逐次递减 1，积逐次增加 3.

按照上述规律，下面的空格可以各填什么数？从中可以归纳出什么结论？

$(-3)\times(-1)=\underline{\qquad}$，

$(-3)\times(-2)=\underline{\qquad}$，

$(-3)\times(-3)=\underline{\qquad}$.

可归纳出如下结论：

负数乘负数，积为正数，乘积的绝对值等于各乘数绝对值的积.

一般地，我们有有理数乘法法则：

**两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘.**

**任何数与 0 相乘，都得 0.**

例如，　$(-5)\times(-3)$，……………………………… 同号两数相乘

$(-5)\times(-3)=+(\quad)$，……………………………… 得正

$5\times3=15$，……………………………… 把绝对值相乘

所以　$(-5)\times(-3)=15$.

又如，　$(-7)\times 4$，……………………………… ________

$(-7)\times 4=-(\quad)$，……………………… ________

$7\times 4=28$，……………………………… ________

所以　$(-7)\times 4=$________.

也就是：有理数相乘，可以先确定积的符号，再确定积的绝对值.

**例 1**　计算：

(1) $(-3)\times 9$；　(2) $8\times(-1)$；　(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)$.

**解：**(1) $(-3)\times 9=-27$；

(2) $8\times(-1)=-8$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)=1$.

要得到一个数的相反数，只要将它乘 $-1$.

例 1 (3) 中，$\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)=1$，我们说 $-\frac{1}{2}$ 和 $-2$ 互为倒数. 一般地，在有理数中仍然有：

**乘积是 1 的两个数互为倒数.**

**例 2**　用正负数表示气温的变化量，上升为正，下降为负. 登山队攀登一座山峰，每登高 1 km 气温的变化量为 $-6$ ℃，攀登 3 km 后，气温有什么变化？

**解：**$(-6)\times 3=-18$.

**答：**气温下降 18 ℃.

**练习**

1. 计算：

(1) $6\times(-9)$；　(2) $(-4)\times 6$；　(3) $(-6)\times(-1)$；

(4) $(-6)\times 0$；　(5) $\frac{2}{3}\times\left(-\frac{9}{4}\right)$；　(6) $\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}$.

2. 商店降价销售某种商品，每件降 5 元，售出 60 件后，与按原价销售同样数量的商品相比，销售额有什么变化？

3. 写出下列各数的倒数：

$1$，$-1$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$5$，$-5$，$\frac{2}{3}$，$-\frac{2}{3}$.

多个有理数相乘，可以把它们按顺序依次相乘.

**思考**

观察下列各式，它们的积是正的还是负的？

$2\times3\times4\times(-5)$,

$2\times3\times(-4)\times(-5)$,

$2\times(-3)\times(-4)\times(-5)$,

$(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)$.

几个不是 0 的数相乘，积的符号与负因数的个数之间有什么关系？

**归纳**

几个不是 0 的数相乘，负因数的个数是偶数时，积是正数；负因数的个数是奇数时，积是负数.

**例 3** 计算：

(1) $(-3)\times\frac{5}{6}\times\left(-\frac{9}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$;

(2) $(-5)\times6\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{4}$.

**解：**(1) $(-3)\times\frac{5}{6}\times\left(-\frac{9}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=-3\times\frac{5}{6}\times\frac{9}{5}\times\frac{1}{4}=-\frac{9}{8}$;

多个不是 0 的数相乘，先做哪一步，再做哪一步？

(2) $(-5)\times6\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{4}$

$=5\times6\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=6$.

**思考**

你能看出下式的结果吗？如果能，请说明理由.

$$7.8\times(-8.1)\times0\times(-19.6).$$

几个数相乘，如果其中有因数为 0，那么积等于 0.

**练习**

1. 口算：

(1) $(-2)\times3\times4\times(-1)$；　　(2) $(-5)\times(-3)\times4\times(-2)$；

(3) $(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)$；　　(4) $(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$.

2. 计算：

(1) $(-5)\times8\times(-7)\times(-0.25)$；

(2) $\left(-\frac{5}{12}\right)\times\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)$；

(3) $(-1)\times\left(-\frac{5}{4}\right)\times\frac{8}{15}\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times0\times(-1)$.

像前面那样规定有理数乘法法则后，就可以使交换律、结合律与分配律在有理数乘法中仍然成立.

例如，

$$5\times(-6)=-30,$$
$$(-6)\times5=-30,$$

即

$$5\times(-6)=(-6)\times5.$$

一般地，有理数乘法中，**两个数相乘，交换因数的位置，积相等.**

$$\boxed{\text{乘法交换律：}ab=ba.}$$

> $a\times b$ 也可以写为 $a\cdot b$ 或 $ab$. 当用字母表示乘数时，“×”号可以写为“·”或省略.

又如，　　$[3\times(-4)]\times(-5)=(-12)\times(-5)=60,$

$3\times[(-4)\times(-5)]=3\times20=60,$

即

$$[3\times(-4)]\times(-5)=3\times[(-4)\times(-5)].$$

一般地，有理数乘法中，**三个数相乘，先把前两个数相乘，或者先把后两个数相乘，积相等.**

$$\boxed{\text{乘法结合律：}(ab)c=a(bc).}$$

再如，

$$5\times[3+(-7)]=5\times(-4)=-20,$$
$$5\times3+5\times(-7)=15-35=-20,$$

即

$$5\times[3+(-7)]=5\times3+5\times(-7).$$

一般地，有理数乘法中，**一个数同两个数的和相乘，等于把这个数分别同这两个数相乘，再把积相加.**

| 分配律：$a(b+c)=ab+ac$. |
| --- |

运算律在运算中有重要作用，它是解决许多数学问题的基础.

**例 4** 用两种方法计算 $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times12$.

**解法 1：**

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times12\\=&\left(\frac{3}{12}+\frac{2}{12}-\frac{6}{12}\right)\times12\\=&-\frac{1}{12}\times12=-1.\end{aligned}$$

**解法 2：**

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times12\\=&\frac{1}{4}\times12+\frac{1}{6}\times12-\frac{1}{2}\times12\\=&3+2-6=-1.\end{aligned}$$

**思考**

比较上面两种解法，它们在运算顺序上有什么区别？解法 2 用了什么运算律？哪种解法运算量小？

**练习**

计算：

(1) $(-85)\times(-25)\times(-4)$；　　(2) $\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{15}\right)\times30$；

(3) $\left(-\frac{7}{8}\right)\times15\times\left(-1\frac{1}{7}\right)$；　　(4) $\left(-\frac{6}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{6}{5}\right)\times\left(+\frac{17}{3}\right)$.

## 1.4.2 有理数的除法

怎样计算 $8\div(-4)$ 呢？

根据除法是乘法的逆运算，就是要求一个数，使它与 $-4$ 相乘得 8.

因为 $$(-2)\times(-4)=8,$$

所以 $$8\div(-4)=-2. \quad ①$$

另一方面，我们有

$$8\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-2. \quad ②$$

于是有

$$8\div(-4)=8\times\left(-\frac{1}{4}\right). \quad ③$$

换其他数的除法进行类似讨论，是否仍有除以 $a$ $(a\neq0)$ 可以转化为乘 $\frac{1}{a}$？

③式表明，一个数除以 $-4$ 可以转化为乘 $-\frac{1}{4}$ 来进行，即一个数除以 $-4$，等于乘 $-4$ 的倒数 $-\frac{1}{4}$.

与小学学过的除法一样，对于有理数除法，我们有如下法则：

**除以一个不等于 0 的数，等于乘这个数的倒数.**

这个法则也可以表示成

$$\boxed{a\div b=a\cdot\frac{1}{b}\ (b\neq0).}$$

从有理数除法法则，容易得出：

**两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除. 0 除以任何一个不等于 0 的数，都得 0.**

这是有理数除法法则的另一种说法.

**例 5** 计算：

(1) $(-36)\div9$； (2) $\left(-\frac{12}{25}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)$.

**解：** (1) $(-36)\div9=-(36\div9)=-4$；

(2) $\left(-\frac{12}{25}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{12}{25}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{5}$.

**练习**

计算：

(1) $(-18)\div 6$；　(2) $(-63)\div(-7)$；　(3) $1\div(-9)$；

(4) $0\div(-8)$；　(5) $(-6.5)\div 0.13$；　(6) $\left(-\frac{6}{5}\right)\div\left(-\frac{2}{5}\right)$.

**例 6**　化简下列分数：

(1) $\frac{-12}{3}$；　(2) $\frac{-45}{-12}$.

> 分数可以理解为分子除以分母.

**解：**(1) $\frac{-12}{3}=(-12)\div 3=-4$；

(2) $\frac{-45}{-12}=(-45)\div(-12)=45\div 12=\frac{15}{4}$.

因为有理数的除法可以化为乘法，所以可以利用乘法的运算性质简化运算. 乘除混合运算往往先将除法化成乘法，然后确定积的符号，最后求出结果.

**例 7**　计算：

(1) $\left(-125\frac{5}{7}\right)\div(-5)$；　(2) $-2.5\div\frac{5}{8}\times\left(-\frac{1}{4}\right)$.

**解：**(1)
$$\begin{aligned}&\left(-125\frac{5}{7}\right)\div(-5)\\=&\left(125+\frac{5}{7}\right)\times\frac{1}{5}\\=&125\times\frac{1}{5}+\frac{5}{7}\times\frac{1}{5}\\=&25+\frac{1}{7}\\=&25\frac{1}{7};\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&-2.5\div\frac{5}{8}\times\left(-\frac{1}{4}\right)\\=&\frac{5}{2}\times\frac{8}{5}\times\frac{1}{4}\\=&1.\end{aligned}$$

**练习**

1. 化简：

(1) $\frac{-72}{9}$；　(2) $\frac{-30}{-45}$；　(3) $\frac{0}{-75}$.

2. 计算：

(1) $\left(-36\frac{9}{11}\right)\div 9$；　(2) $(-12)\div(-4)\div\left(-1\frac{1}{5}\right)$；

(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{8}{5}\right)\div(-0.25)$.

有理数的加减乘除混合运算，如无括号指出先做什么运算，则与小学所学的混合运算一样，按照“**先乘除，后加减**”的顺序进行.

**例 8**　计算：

(1) $-8+4\div(-2)$；　(2) $(-7)\times(-5)-90\div(-15)$.

**解：**(1)
$$\begin{aligned}&-8+4\div(-2)\\=&-8+(-2)\\=&-10;\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(-7)\times(-5)-90\div(-15)\\=&35-(-6)\\=&35+6\\=&41.\end{aligned}$$

**练习**

计算：

(1) $6-(-12)\div(-3)$；　(2) $3\times(-4)+(-28)\div 7$；

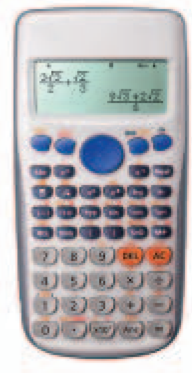
(3) $(-48)\div 8-(-25)\times(-6)$；　(4) $42\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)\div(-0.25)$.

**例 9**　某公司去年 1～3 月平均每月亏损 1.5 万元，4～6 月平均每月盈利 2 万元，7～10 月平均每月盈利 1.7 万元，11～12 月平均每月亏损 2.3 万元. 这个公司去年总的盈亏情况如何？

**解：** 记盈利额为正数，亏损额为负数. 公司去年全年盈亏额（单位：万元）为

$$
\begin{aligned}
&(-1.5)\times 3+2\times 3+1.7\times 4+(-2.3)\times 2\\
=&-4.5+6+6.8-4.6=3.7.
\end{aligned}
$$

**答：** 这个公司去年全年盈利 3.7 万元.



计算器是一种方便实用的计算工具，用计算器进行比较复杂的数的计算，比笔算要快捷得多.

例如，可以用计算器计算例 9 中的

$(-1.5)\times 3+2\times 3+1.7\times 4+(-2.3)\times 2$.

如果计算器带符号键 $\boxed{(-)}$，只需按键

$\boxed{(-)}\boxed{1}\boxed{\cdot}\boxed{5}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{\cdot}\boxed{7}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{+}\boxed{(-)}\boxed{2}\boxed{\cdot}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{2}$，

就可以得到答案 3.7.

不同品牌的计算器的操作方法可能有所不同，具体参见计算器的使用说明.

**练习**

用计算器计算：

(1) $357+(-154)+26+(-212)$；　(2) $-5.13+4.62+(-8.47)-(-2.3)$；

(3) $26\times(-41)+(-35)\times(-17)$；　(4) $1.252\div(-44)-(-356)\div(-0.196)$.

## 习题 1.4

### 复习巩固

1. 计算：

(1) $(-8)\times(-7)$；　(2) $12\times(-5)$；

(3) $2.9\times(-0.4)$；　(4) $-30.5\times 0.2$；

(5) $100\times(-0.001)$；　(6) $-4.8\times(-1.25)$.

2. 计算：

(1) $\frac{1}{4}\times\left(-\frac{8}{9}\right)$；　(2) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)$；

(3) $-\frac{34}{15}\times 25$；　(4) $(-0.3)\times\left(-\frac{10}{7}\right)$.

3. 写出下列各数的倒数：

(1) $-15$；　(2) $-\frac{5}{9}$；　(3) $-0.25$；

(4) $0.17$；　(5) $4\frac{1}{4}$；　(6) $-5\frac{2}{5}$.

4. 计算：

(1) $-91\div13$；　(2) $-56\div(-14)$；

(3) $16\div(-3)$；　(4) $(-48)\div(-16)$；

(5) $\frac{4}{5}\div(-1)$；　(6) $-0.25\div\frac{3}{8}$.

5. 填空：

$1\times(-5)=$____；　$1\div(-5)=$____；

$1+(-5)=$____；　$1-(-5)=$____；

$-1\times(-5)=$____；　$-1\div(-5)=$____；

$-1+(-5)=$____；　$-1-(-5)=$____.

6. 化简下列分数：

(1) $\frac{-21}{7}$；　(2) $\frac{3}{-36}$；

(3) $\frac{-54}{-8}$；　(4) $\frac{-6}{-0.3}$.

7. 计算：

(1) $-2\times3\times(-4)$；　(2) $-6\times(-5)\times(-7)$；

(3) $\left(-\frac{8}{25}\right)\times1.25\times(-8)$；　(4) $0.1\div(-0.001)\div(-1)$；

(5) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-1\frac{1}{2}\right)\div\left(-2\frac{1}{4}\right)$；　(6) $-6\times(-0.25)\times\frac{11}{14}$；

(7) $(-7)\times(-56)\times0\div(-13)$；　(8) $-9\times(-11)\div3\div(-3)$.

## 综合运用

8. 计算：

(1) $23\times(-5)-(-3)\div\frac{3}{128}$；

(2) $-7\times(-3)\times(-0.5)+(-12)\times(-2.6)$；

(3) $\left(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)\div\left(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)$；

(4) $-\left|-\frac{2}{3}\right|-\left|-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right|-\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right|-|-3|$.

9. 用计算器计算（结果保留两位小数）：

(1) $(-36)\times128\div(-74)$；

(2) $-6.23\div(-0.25)\times940$；

(3) $-4.325\times(-0.012)-2.31\div(-5.315)$；

(4) $180.65-(-32)\times47.8\div(-15.5)$.

10. 用正数或负数填空：

(1) 小商店平均每天可盈利 250 元，一个月（按 30 天计算）的利润是______元；

(2) 小商店每天亏损 20 元，一周的利润是______元；

(3) 小商店一周的利润是 1 400 元，平均每天的利润是______元；

(4) 小商店一周共亏损 840 元，平均每天的利润是______元.

11. 一架直升机从高度为 450 m 的位置开始，先以 20 m/s 的速度上升 60 s，后以 12 m/s的速度下降 120 s，这时直升机所在高度是多少？

## 拓广探索

12. 用“>”“<”或“=”号填空：

(1) 如果 $a<0$，$b>0$，那么 $a\cdot b$ ____ 0，$\frac{a}{b}$ ____ 0；

(2) 如果 $a>0$，$b<0$，那么 $a\cdot b$ ____ 0，$\frac{a}{b}$ ____ 0；

(3) 如果 $a<0$，$b<0$，那么 $a\cdot b$ ____ 0，$\frac{a}{b}$ ____ 0；

(4) 如果 $a=0$，$b\neq0$，那么 $a\cdot b$ ____ 0，那么$\frac{a}{b}$ ____ 0.

13. 计算 $2\times1$，$2\times\frac{1}{2}$，$2\times(-1)$，$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$.

联系这类具体的数的乘法，你认为一个非 0 有理数一定小于它的 2 倍吗？为什么？

14. 利用分配律可以得到 $-2\times6+3\times6=(-2+3)\times6$. 如果用 $a$ 表示任意一个数，那么利用分配律可以得到 $-2a+3a$ 等于什么？

15. 计算 $(-4)\div2$，$4\div(-2)$，$(-4)\div(-2)$.

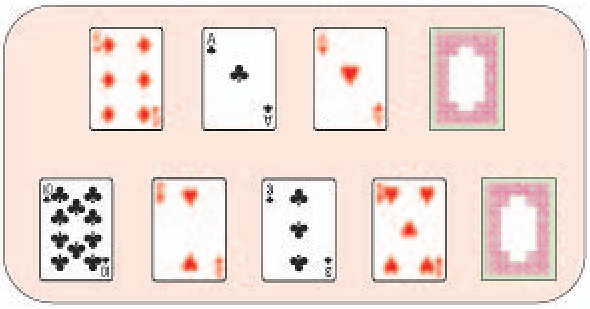
联系这类具体的数的除法，你认为下列式子是否成立（$a$，$b$ 是有理数，$b\neq0$）？从它们可以总结什么规律？

(1) $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$；　　(2) $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

## 观察与猜想

### 翻牌游戏中的数学道理

桌上有 9 张正面向上的扑克牌，每次翻动其中任意 2 张（包括已翻过的牌），使它们从一面向上变为另一面向上，这样一直做下去，观察能否使所有的牌都反面向上？



你不妨动手试一试，看看会不会出现所有牌都反面向上.

事实上，不论你翻多少次，都不能使 9 张牌都反面向上. 从这个结果，你能想到其中的数学道理吗？

如果在每张牌的正面都写 1，反面都写 $-1$，考虑所有牌朝上一面的数的积. 开始 9 张牌都正面向上，上面的数的积是 1. 每次翻动 2 张，就是说有 2 张牌同时改变符号，这能改变朝上一面的数的积是 1 这一结果吗？9 张牌都反面向上时，上面的数的积是什么数？这种现象为什么不能出现？

你能解释为什么不会使 9 张牌都反面向上了吗？

如果桌上有任意奇数张牌，猜想结果会是怎样？

# 1.5 有理数的乘方

## 1.5.1 乘方

前面学了有理数的乘法，下面研究各个乘数都相同时的乘法运算.

我们知道，边长为 2 cm 的正方形的面积是 $2\times2=4$（$cm^2$）；棱长为 2 cm 的正方体的体积是 $2\times2\times2=8$（$cm^3$）.

$2\times2$，$2\times2\times2$ 都是相同因数的乘法.

为了简便，我们将它们分别记作 $2^2$，$2^3$. $2^2$ 读作“2 的平方”（或“2 的二次方”），$2^3$ 读作“2 的立方”（或“2 的三次方”）.

同样：

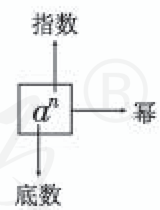
$(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)$记作$(-2)^4$，读作“$-2$的四次方”；

$\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)$记作$\left(-\frac{2}{5}\right)^5$，读作“$-\frac{2}{5}$的五次方”.

$(-2)^4$ 与 $-2^4$ 一样吗？为什么？

一般地，$n$ 个相同的因数 $a$ 相乘，即 $\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}$，记作 $a^n$，读作“$a$ 的 $n$ 次方”.

求 $n$ 个相同因数的积的运算，叫做**乘方**，乘方的结果叫做**幂**（power）. 在 $a^n$ 中，$a$ 叫做**底数**（base number），$n$ 叫做**指数**（exponent），当 $a^n$ 看作 $a$ 的 $n$ 次方的结果时，也可读作“$a$ 的 $n$ 次幂”.




例如，在 $9^4$ 中，底数是 9，指数是 4，$9^4$ 读作“9 的 4 次方”，或“9 的 4 次幂”.

一个数可以看作这个数本身的一次方. 例如，5 就是 $5^1$. 指数 1 通常省略不写.

因为 $a^n$ 就是 $n$ 个 $a$ 相乘，所以可以利用有理数的乘法运算来进行有理数的乘方运算.

**例 1** 计算：

(1) $(-4)^3$；　　(2) $(-2)^4$；　　(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

**解**：(1) $(-4)^3=(-4)\times(-4)\times(-4)=-64$；

(2) $(-2)^4=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=16$；

(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}$.

**思考**

从例 1，你发现负数的幂的正负有什么规律?

当指数是____数时，负数的幂是____数；

当指数是____数时，负数的幂是____数.

根据有理数的乘法法则可以得出：

**负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数.**

显然，**正数的任何次幂都是正数，0 的任何正整数次幂都是 0.**

**例 2** 用计算器计算$(-8)^5$ 和$(-3)^6$.

**解**：用带符号键$\boxed{(-)}$的计算器.

$$\boxed{(}\ \boxed{(-)}\ 8\ \boxed{)}\ \boxed{\wedge}\ 5\ \boxed{=}$$

显示：(−8)^5

$$-32768.$$

$$\boxed{(}\ \boxed{(-)}\ 3\ \boxed{)}\ \boxed{\wedge}\ 6\ \boxed{=}$$

显示：(−3)^6

$$729.$$

所以　$(-8)^5=-32\,768$，$(-3)^6=729$.

**练习**

1. (1) $(-7)^8$ 中，底数、指数各是什么？

   (2) $(-10)^8$ 中$-10$ 叫做什么数？8 叫做什么数？$(-10)^8$ 是正数还是负数？

2. 计算：

   (1) $(-1)^{10}$；　(2) $(-1)^7$；　(3) $8^3$；　(4) $(-5)^3$；

(5) $0.1^3$； (6) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$； (7) $(-10)^4$； (8) $(-10)^5$.

3. 用计算器计算：

(1) $(-11)^6$； (2) $16^7$； (3) $8.4^3$； (4) $(-5.6)^3$.

做有理数的混合运算时，应注意以下运算顺序：

**1. 先乘方，再乘除，最后加减；**

**2. 同级运算，从左到右进行；**

**3. 如有括号，先做括号内的运算，按小括号、中括号、大括号依次进行.**

**例 3** 计算：

(1) $2\times(-3)^3-4\times(-3)+15$；

(2) $(-2)^3+(-3)\times[(-4)^2+2]-(-3)^2\div(-2)$.

**解：**(1) 原式 $=2\times(-27)-(-12)+15$

$=-54+12+15$

$=-27$；

(2) 原式 $=-8+(-3)\times(16+2)-9\div(-2)$

$=-8+(-3)\times18-(-4.5)$

$=-8-54+4.5$

$=-57.5$.

**例 4** 观察下面三行数：

$-2$， 4，$-8$，16，$-32$，64，…； ①

0， 6，$-6$，18，$-30$，66，…； ②

$-1$， 2，$-4$， 8，$-16$，32，…. ③

(1) 第①行数按什么规律排列？

(2) 第②③行数与第①行数分别有什么关系？

(3) 取每行数的第 10 个数，计算这三个数的和.

**分析：**观察①，发现各数均为 2 的倍数. 联系数的乘方，从符号和绝对值两方面考虑，可发现排列的规律.

**解：**(1) 第①行数是

$$-2,\ (-2)^2,\ (-2)^3,\ (-2)^4,\ \cdots.$$

(2) 对比①②两行中位置对应的数，可以发现：

第②行数是第①行相应的数加 2，即

$$-2+2,\ (-2)^2+2,\ (-2)^3+2,\ (-2)^4+2,\ \cdots;$$

对比①③两行中位置对应的数，可以发现：

第③行数是第①行相应的数的 0.5 倍，即

$$-2\times0.5,\ (-2)^2\times0.5,\ (-2)^3\times0.5,\ (-2)^4\times0.5,\ \cdots.$$

（3）每行数中的第 10 个数的和是

$$\begin{aligned}&(-2)^{10}+[(-2)^{10}+2]+(-2)^{10}\times0.5\\=&1\ 024+(1\ 024+2)+1\ 024\times0.5\\=&1\ 024+1\ 026+512\\=&2\ 562.\end{aligned}$$

**练习**

计算：

（1）$(-1)^{10}\times2+(-2)^3\div4$；　（2）$(-5)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4$；

（3）$\frac{11}{5}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{11}\div\frac{5}{4}$；　（4）$(-10)^4+[(-4)^2-(3+3^2)\times2]$.

## 1.5.2　科学记数法

现实中，我们会遇到一些比较大的数．例如，太阳的半径、光的速度、目前世界人口（图 1.5-1）等．读、写这样大的数有一定困难．

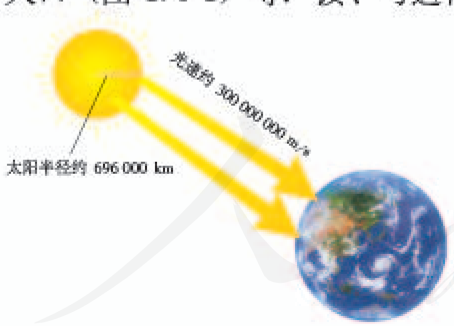




图 1.5-1

观察 10 的乘方有如下的特点：

$$10^2=100,\ 10^3=1\ 000,\ 10^4=10\ 000,\ \cdots.$$

一般地，10 的 $n$ 次幂等于 $10\cdots0$（在 1 的后面有 $n$ 个 0），所以可以利用 10 的乘方表示一些大数，例如

$$567\ 000\ 000 = 5.67 \times 100\ 000\ 000 = 5.67 \times 10^8,$$

读作“5.67 乘 10 的 8 次方（幂）”.

这样不仅可以使书写简短，同时还便于读数.

像上面这样，把一个大于 10 的数表示成 $a \times 10^n$ 的形式（其中 $a$ 大于或等于 1 且小于 10，$n$ 是正整数），使用的是**科学记数法**.

对于小于 $-10$ 的数也可以类似表示．例如

$$-567\ 000\ 000 = -5.67 \times 10^8.$$

**例 5** 用科学记数法表示下列各数：

$$1\ 000\ 000,\ 57\ 000\ 000,\ -123\ 000\ 000\ 000.$$

**解：** $1\ 000\ 000 = 10^6$,

$57\ 000\ 000 = 5.7 \times 10^7$,

$-123\ 000\ 000\ 000 = -1.23 \times 10^{11}$.

**思考**

上面的式子中，等号左边整数的位数与右边 10 的指数有什么关系？用科学记数法表示一个 $n$ 位整数，其中 10 的指数是______.

**练习**

1. 用科学记数法写出下列各数：

   10 000，800 000，56 000 000，$-7\ 400\ 000$.

2. 下列用科学记数法写出的数，原来分别是什么数？

   $1 \times 10^7$，$4 \times 10^3$，$8.5 \times 10^6$，$7.04 \times 10^5$，$-3.96 \times 10^4$.

3. 中国的陆地面积约为 9 600 000 $km^2$，领水面积约为 370 000 $km^2$，用科学记数法表示上述两个数字.

## 1.5.3 近似数

先看一个例子．对于参加同一个会议的人数，有两个报道．一个报道说：“会议秘书处宣布，参加今天会议的有 513 人.”这里数字 513 确切地反映了实际人数，它是一个准确数．另一报道说：

“约有五百人参加了今天的会议.”五百这个数只是接近实际人数，但与实际人数还有差别，它是一个**近似数**（approximate number）.

在许多情况下，很难取得准确数，或者不必使用准确数，而可以使用近似数. 例如，宇宙现在的年龄约为 200 亿年，长江长约 6 300 km，圆周率 $\pi$ 约为 3.14，这里的数都是近似数.

近似数与准确数的接近程度，可以用精确度表示. 例如，前面的五百是精确到百位的近似数，它与准确数 513 的误差为 13.

按四舍五入法对圆周率 $\pi$ 取近似数时，有

$\pi\approx3$（精确到个位），

$\pi\approx3.1$（精确到 0.1，或叫做精确到十分位），

$\pi\approx3.14$（精确到 0.01，或叫做精确到百分位），

$\pi\approx3.142$（精确到________，或叫做精确到__________），

$\pi\approx3.141\,6$（精确到________，或叫做精确到__________），

……

**例 6** 按括号内的要求，用四舍五入法对下列各数取近似数：

(1) 0.015 8（精确到 0.001）；

(2) 304.35（精确到个位）；

(3) 1.804（精确到 0.1）；

(4) 1.804（精确到 0.01）.

**解**：(1) $0.015\,8\approx0.016$；

(2) $304.35\approx304$；

(3) $1.804\approx1.8$；

(4) $1.804\approx1.80$.

这里的 1.8 和 1.80 的精确度相同吗？表示近似数时，能简单地把 1.80 后面的 0 去掉吗？



**练习**

用四舍五入法对下列各数取近似数：

(1) 0.003 56（精确到万分位）；

(2) 61.235（精确到个位）；

(3) 1.893 5（精确到 0.001）；

(4) 0.057 1（精确到 0.1）.

## 习题 1.5

### 复习巩固

1. 计算：

(1) $(-3)^3$；  (2) $(-2)^4$；

(3) $(-1.7)^2$；  (4) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$；

(5) $-(-2)^3$；  (6) $(-2)^2\times(-3)^2$.

2. 用计算器计算：

(1) $(-12)^8$；  (2) $103^4$；

(3) $7.12^3$；  (4) $(-45.7)^3$.

3. 计算：

(1) $(-1)^{100}\times5+(-2)^4\div4$；

(2) $(-3)^3-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^4$；

(3) $\frac{7}{6}\times\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{14}\div\frac{3}{5}$；

(4) $(-10)^3+[(-4)^2-(1-3^2)\times2]$；

(5) $-2^3\div\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2$；

(6) $4+(-2)^3\times5-(-0.28)\div4$.

4. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 235 000 000；  (2) 188 520 000；

(3) 701 000 000 000；  (4) −38 000 000.

5. 下列用科学记数法表示的数，原来各是什么数？

$$3\times10^7,\ 1.3\times10^3,\ 8.05\times10^6,\ 2.004\times10^5,\ -1.96\times10^4.$$

6. 用四舍五入法对下列各数取近似数：

(1) 0.003 56（精确到 0.000 1）；

(2) 566.123 5（精确到个位）；

(3) 3.896 3（精确到 0.01）；

(4) 0.057 1（精确到千分位）.

### 综合运用

7. 平方等于 9 的数是几？立方等于 27 的数是几？

8. 一个长方体的长、宽都是 $a$，高是 $b$，它的体积和表面积怎样计算？当 $a=2$ cm，$b=5$ cm时，它的体积和表面积是多少？

9. 地球绕太阳公转的速度约是 $1.1\times10^5$ km/h，声音在空气中的传播速度约是 340 m/s，试比较两个速度的大小.

10. 一天有 $8.64\times10^4$ s，一年按 365 天计算，一年有多少秒（用科学记数法表示）?

### 拓广探索

11. (1) 计算 $0.1^2$，$1^2$，$10^2$，$100^2$. 观察这些结果，底数的小数点向左（右）移动一位时，平方数小数点有什么移动规律?

    (2) 计算 $0.1^3$，$1^3$，$10^3$，$100^3$. 观察这些结果，底数的小数点向左（右）移动一位时，立方数小数点有什么移动规律?

    (3) 计算 $0.1^4$，$1^4$，$10^4$，$100^4$. 观察这些结果，底数的小数点向左（右）移动一位时，四次方数小数点有什么移动规律?

12. 计算 $(-2)^2$，$2^2$，$(-2)^3$，$2^3$. 联系这类具体的数的乘方，你认为当 $a<0$ 时下列各式是否成立?

    (1) $a^2>0$；　　(2) $a^2=(-a)^2$；

    (3) $a^2=-a^2$；　　(4) $a^3=-a^3$.

# 数学活动

## 活动1

帮助家庭记录一个月（或一周）的生活收支账目，收入记为正数，支出记为负数，计算当月（周）的总收入、总支出、总结余以及每日平均支出等数据.

安善保存账目，作为日后家庭理财的参考资料.

## 活动2

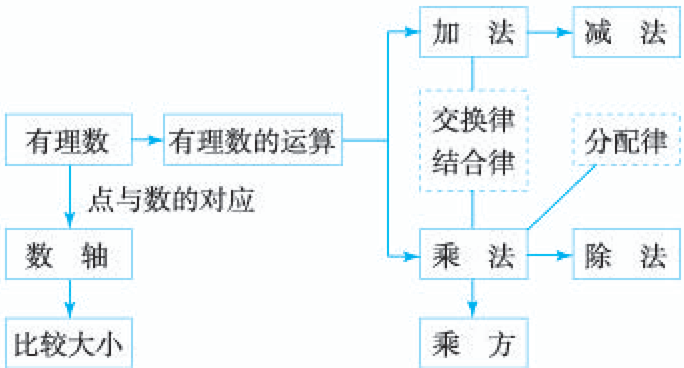
熟悉你所用的计算器有关有理数运算的功能和操作方法，对于包含乘方、乘除与加减运算的算式，考虑怎样操作计算器最简便，实习这样的操作，并与同学进行交流.

## 活动3

收集现实生活中你认为非常大的数据的实例，体会科学记数法和近似数等在实际中的应用.

# 小　结

## 一、本章知识结构图




## 二、回顾与思考

本章我们在小学学习的基础上，进一步认识了负数，使数的范围扩充到有理数．引入负数不仅可以表示具有相反意义的量，而且还拓展了减法运算的范围．由此，类似于 $x+2=1$ 的方程就可以解了．

我们知道，有理数是整数与分数的统称．由于整数可以看成是分母为 1 的分数，因此有理数可以写成 $\frac{p}{q}$（$p$，$q$ 是整数，$q\neq0$）的形式；另一方面，形如 $\frac{p}{q}$（$p$，$q$ 是整数，$q\neq0$）的数都是有理数．所以，有理数可用 $\frac{p}{q}$（$p$，$q$ 是整数，$q\neq0$）表示．

本章我们研究了有理数的加、减、乘、除和乘方运算．实际上，与负数有关的运算，我们都借助绝对值，将它们转化为正数之间的运算．数轴不仅能直观表示数，而且还能帮助我们理解数的运算．在运算的过程中，数形结合、转化是很重要的思想方法．

我们从具体数的加法和乘法中，归纳出了交换律、结合律和分配律等运算律．运算律不仅能给数的运算带来方便，而且还是今后研究代数问题（如解方程、不等式等）的基础．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．你能举出一些实例，说明正数、负数在表示相反意义的量时的作用吗？

2．你能用一个图表示有理数的分类吗？引入负数后，减法中哪些原来不能进行的运算可以进行了？

3．怎样用数轴表示有理数？数轴与普通直线有什么不同？怎样利用数轴

解释一个数的绝对值和相反数？

4. 有理数的加法与减法、乘法与除法各有什么关系？有理数的混合运算都能转化为加法与乘法运算吗？

5. 有理数有哪些运算律？结合例子说明运算律在有理数运算中的作用.

## 复习题 1

### 复习巩固

1. 在数轴上表示下列各数，并按从小到大的顺序用“<”号把这些数连接起来：

$$3.5,\ -3.5,\ 0,\ 2,\ -2,\ -1.6,\ -\frac{1}{3},\ 0.5.$$

2. 已知 $x$ 是整数，并且 $-3<x<4$，在数轴上表示 $x$ 可能取的所有数值.

3. 设 $a=-2$，$b=-\frac{2}{3}$，$c=5.5$，分别写出 $a$，$b$，$c$ 的绝对值、相反数和倒数.

4. 互为相反数的两数的和是多少？互为倒数的两数的积是多少？

5. 计算：

(1) $-150+250$；　　(2) $-15+(-23)$；

(3) $-5-65$；　　(4) $-26-(-15)$；

(5) $-6\times(-16)$；　　(6) $-\frac{1}{3}\times27$；

(7) $8\div(-16)$；　　(8) $-25\div\left(-\frac{2}{3}\right)$；

(9) $(-0.02)\times(-20)\times(-5)\times4.5$；

(10) $(-6.5)\times(-2)\div\left(-\frac{1}{3}\right)\div(-5)$；

(11) $6+\left(-\frac{1}{5}\right)-2-(-1.5)$；　　(12) $-66\times4-(-2.5)\div(-0.1)$；

(13) $(-2)^2\times5-(-2)^3\div4$；　　(14) $-(3-5)+3^2\times(1-3)$.

6. 用四舍五入法，按括号内的要求，对下列各数取近似值：

(1) 245.635（精确到 0.1）；　　(2) 175.65（精确到个位）；

(3) 12.004（精确到百分位）；　　(4) 6.537 8（精确到 0.01）.

7. 把下列各数用科学记数法表示：

(1) 100 000 000；　　(2) $-4\ 500\ 000$；　　(3) 692 400 000 000.

8. 计算：

(1) $-2-|-3|$；　　(2) $|-2-(-3)|$.

## 综合运用

9. 下列各数是10名学生的数学考试成绩：

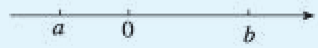
82，83，78，66，95，75，56，93，82，81.

先估算他们的平均成绩，然后在此基础上计算平均成绩，由此检验你的估值能力.

10. $a$，$b$是有理数，它们在数轴上的对应点的位置如图所示．把$a$，$-a$，$b$，$-b$按照从小到大的顺序排列，正确的是（　　）.

(A) $-b<-a<a<b$　　(B) $-a<-b<a<b$

(C) $-b<a<-a<b$　　(D) $-b<b<-a<a$



（第10题）

11. 某文具店在一周的销售中，盈亏情况如下表（盈余为正，单位：元）：

| 星期一 | 星期二 | 星期三 | 星期四 | 星期五 | 星期六 | 星期日 | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-27.8$ | $-70.3$ | 200 | 138.1 | $-8$ | [redacted] | 188 | 458 |

表中星期六的盈亏数被墨水涂污了，请你算出星期六的盈亏数，并说明星期六是盈还是亏？盈亏是多少？

12. 当温度每上升1 ℃时，某种金属丝伸长0.002 mm．反之，当温度每下降1 ℃时，金属丝缩短0.002 mm．把15 ℃的这种金属丝加热到60 ℃，再使它冷却降温到5 ℃，金属丝的长度经历了怎样的变化？最后的长度比原长度伸长多少？

13. 一年之中地球与太阳之间的距离随时间而变化，1个天文单位是地球与太阳之间的平均距离，即1.496 0亿km．试用科学记数法表示1个天文单位是多少千米.

## 拓广探索

14. 结合具体的数的运算，归纳有关特例，然后比较下列数的大小：

(1) 小于1的正数$a$，$a$的平方，$a$的立方；

(2) 大于$-1$的负数$b$，$b$的平方，$b$的立方.

15. 结合具体的数，通过特例进行归纳，然后判断下列说法的对错．认为对，说明理由；认为错，举出反例.

(1) 任何数都不等于它的相反数；

(2) 互为相反数的两个数的同一偶数次方相等；

(3) 如果$a$大于$b$，那么$a$的倒数小于$b$的倒数.

16. 用计算器计算下列各式，将结果写在横线上：

$1\times1=$________；　　$11\times11=$____________；

$111\times111=$__________；　　$1\ 111\times1\ 111=$____________.

(1) 你发现了什么？

(2) 不用计算器，你能直接写出$111\ 111\ 111\times111\ 111\ 111$的结果吗？

# 第二章　整式的加减

青藏铁路线上，在格尔木到拉萨之间有一段很长的冻土地段. 列车在冻土地段、非冻土地段的行驶速度分别是 100 km/h 和 120 km/h，请根据这些数据回答下列问题：

(1) 列车在冻土地段行驶时，2 h 行驶的路程是多少？3 h 呢？$t$ h 呢？

(2) 在西宁到拉萨路段，列车通过非冻土地段所需时间是通过冻土地段所需时间的 2.1 倍，如果通过冻土地段需要 $t$ h，能用含 $t$ 的式子表示这段铁路的全长吗？

(3) 在格尔木到拉萨路段，列车通过冻土地段比通过非冻土地段多用 0.5 h，如果通过冻土地段需要 $u$ h，则这段铁路的全长可以怎样表示？冻土地段与非冻土地段相差多少千米？

在小学，我们学过用字母表示数，知道可以用字母或含有字母的式子表示数和数量关系，这样的式子在数学中有重要作用. 在本章，我们将学习整式及其加减运算，进一步认识含有字母的数学式子，并为一元一次方程等后续内容的学习打下基础.

# 2.1 整式

我们来看本章引言中的问题（1）.

列车在冻土地段的行驶速度是 100 km/h，根据速度、时间和路程之间的关系

$$路程=速度\times时间,$$

列车 2 h 行驶的路程（单位：km）是

$$100\times2=200,$$

3 h 行驶的路程（单位：km）是

$$100\times3=300,$$

$t$ h 行驶的路程（单位：km）是

$$100\times t=100t. \quad ①$$

在式子①中，我们用字母 $t$ 表示时间，用含有字母 $t$ 的式子 $100t$ 表示路程.

下面，我们再来看几个用含有字母的式子表示数量关系的问题.

在含有字母的式子中如果出现乘号，通常将乘号写作“·”或省略不写. 例如，$100\times t$ 可以写成 $100\cdot t$ 或 $100t$.

**例 1** （1）苹果原价是每千克 $p$ 元，按 8 折优惠出售，用式子表示现价；

（2）某产品前年的产量是 $n$ 件，去年的产量是前年产量的 $m$ 倍，用式子表示去年的产量；

（3）一个长方体包装盒的长和宽都是 $a$ cm，高是 $h$ cm，用式子表示它的体积；

（4）用式子表示数 $n$ 的相反数.

**解：**（1）现价是每千克 $0.8p$ 元；

（2）去年的产量是 $mn$ 件；

（3）由长方体的体积＝长×宽×高，得这个长方体包装盒的体积是 $a\cdot a\cdot h$ cm³，即 $a^2h$ cm³；

（4）数 $n$ 的相反数是 $-n$.

**例 2** （1）一条河的水流速度是 2.5 km/h，船在静水中的速度是 $v$ km/h，用式子表示船在这条河中顺水行驶和逆水行驶时的速度；

（2）买一个篮球需要 $x$ 元，买一个排球需要 $y$ 元，买一个足球需要 $z$ 元，用式子表示买 3 个篮球、5 个排球、2 个足球共需要的钱数；

（3）如图 2.1-1（图中长度单位：cm），用式子表示三角尺的面积；

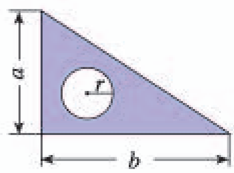



图 2.1-1

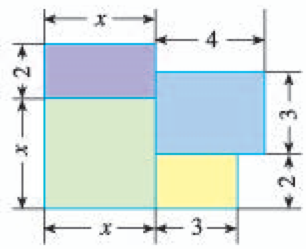



图 2.1-2

（4）图 2.1-2 是一所住宅的建筑平面图（图中长度单位：m），用式子表示这所住宅的建筑面积.

**分析：**（1）船在河流中行驶时，船的速度需要分两种情况讨论：

顺水行驶时，船的速度＝船在静水中的速度＋水流速度；

逆水行驶时，船的速度＝船在静水中的速度－水流速度.

**解：**（1）船在这条河中顺水行驶的速度是（$v+2.5$）km/h，逆水行驶的速度是（$v-2.5$）km/h.

（2）买 3 个篮球、5 个排球、2 个足球共需要（$3x+5y+2z$）元.

（3）三角尺的面积等于三角形的面积减去圆的面积. 根据图中的数据，得三角形的面积是 $\frac{1}{2}ab$ cm$^2$，圆的面积是 $\pi r^2$ cm$^2$. 因此三角尺的面积（单位：cm$^2$）是 $\frac{1}{2}ab-\pi r^2$.

（4）住宅的建筑面积等于四个长方形面积的和. 根据图中标出的尺寸，可得这所住宅的建筑面积（单位：m$^2$）是 $x^2+2x+18$.

从上面的例子可以看出，用字母表示数，字母和数一样可以参与运算，可以用式子把数量关系简明地表示出来.

## 练习

1. 某种商品每袋 4.8 元，在一个月内的销售量是 $m$ 袋，用式子表示在这个月内销售这种商品的收入.
2. 圆柱体的底面半径、高分别是 $r$，$h$，用式子表示圆柱体的体积.
3. 有两片棉田，一片有 $m$ $\mathrm{hm}^2$（公顷，$1\ \mathrm{hm}^2=10^4\ \mathrm{m}^2$），平均每公顷产棉花 $a$ kg；另一片有 $n$ $\mathrm{hm}^2$，平均每公顷产棉花 $b$ kg，用式子表示两片棉田上棉花的总产量.
4. 在一个大正方形铁片中挖去一个小正方形铁片，大正方形的边长是 $a$ mm，小正方形的边长是 $b$ mm，用式子表示剩余部分的面积.

### 思考

我们来看引言与例 1 中的式子

$$100t，0.8p，mn，a^2h，-n，$$

这些式子有什么特点？

这些式子都是数或字母的积，像这样的式子叫做**单项式**（monomial）. 单独的一个数或一个字母也是单项式.

单项式中的数字因数叫做这个单项式的**系数**（coefficient）. 例如，单项式 $100t$，$a^2h$，$-n$ 的系数分别是 100，1，$-1$. 单项式表示数与字母相乘时，通常把数写在前面.

一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个**单项式的次数**（degree of a monomial）. 例如，在单项式 $100t$ 中，字母 $t$ 的指数是 1，$100t$ 的次数是 1；在单项式 $a^2h$ 中，字母 $a$ 与 $h$ 的指数的和是 3，$a^2h$ 的次数是 3.

对于单独一个非零的数，规定它的次数为 0.

**例 3** 用单项式填空，并指出它们的系数和次数：

（1）每包书有 12 册，$n$ 包书有______册；

（2）底边长为 $a$ cm，高为 $h$ cm 的三角形的面积是______$\mathrm{cm}^2$；

（3）棱长为 $a$ cm 的正方体的体积是______$\mathrm{cm}^3$；

（4）一台电视机原价 $b$ 元，现按原价的 9 折出售，这台电视机现在的售价是______元；

（5）一个长方形的长是 0.9 m，宽是 $b$ m，这个长方形的面积是______$\text{m}^2$.

**解：**（1）$12n$，它的系数是 12，次数是 1；

（2）$\frac{1}{2}ah$，它的系数是$\frac{1}{2}$，次数是 2；

（3）$a^3$，它的系数是 1，次数是 3；

（4）$0.9b$，它的系数是 0.9，次数是 1；

（5）$0.9b$，它的系数是 0.9，次数是 1.

用字母表示数后，同一个式子可以表示不同的含义．例如，在例 3 的第（4）（5）小题中，$0.9b$ 既可以表示电视机的售价，又可以表示长方形的面积，当然它还可以表示更多的含义，你能赋予 $0.9b$ 一个含义吗？

## 练习

1. 填表：

| 单项式 | $2a^2$ | $-1.2h$ | $xy^2$ | $-t^2$ | $-\frac{2vt}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 系数 | | | | | |
| 次数 | | | | | |

2. 填空：

（1）全校学生总数是 $x$，其中女生人数占总数的 48%，则女生人数是______，男生人数是______；

（2）一辆长途汽车从杨柳村出发，3 h 后到达距出发地 $s$ km 的溪河镇，这辆长途汽车的平均速度是________ km/h；

（3）产量由 $m$ kg 增长 10%，就达到______ kg.

**思考**

我们来看例 2 中的式子

$$v+2.5，v-2.5，3x+5y+2z，\frac{1}{2}ab-\pi r^2，x^2+2x+18，$$

这些式子有什么特点？

这些式子都可以看作几个单项式的和．例如，$v-2.5$ 可以看作单项式 $v$ 与 $-2.5$ 的和；$x^2+2x+18$ 可以看作单项式 $x^2$，$2x$ 与 18 的和．

像这样，几个单项式的和叫做**多项式**（polynomial）．其中，每个单项式叫做多项式的**项**（term），不含字母的项叫做**常数项**（constant term）．例如，多项式 $v-2.5$ 的项是 $v$ 与 $-2.5$，其中 $-2.5$ 是常数项；多项式 $x^2+2x+18$ 的项是 $x^2$，$2x$ 与 18，其中 18 是常数项．

多项式里，次数最高项的次数，叫做这个**多项式的次数**（degree of a polynomial）．例如，多项式 $v-2.5$ 中次数最高项是一次项 $v$，这个多项式的次数是 1；多项式 $x^2+2x+18$ 中次数最高项是二次项 $x^2$，这个多项式的次数是 2．

$v+2.5$，$3x+5y+2z$，$\frac{1}{2}ab-\pi r^2$ 的项分别是什么？次数分别是多少？

单项式与多项式统称**整式**（integral expression）．例如，上面见到的单项式 $100t$，$0.8p$，$mn$，$a^2h$，$-n$，以及多项式 $v+2.5$，$v-2.5$，$3x+5y+2z$，$\frac{1}{2}ab-\pi r^2$，$x^2+2x+18$ 等都是整式．

**例 4** 如图 2.1-3，用式子表示圆环的面积．当 $R=15$ cm，$r=10$ cm 时，求圆环的面积（$\pi$ 取 3.14）．

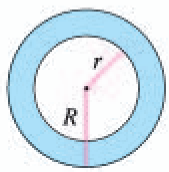


图 2.1-3

**解：** 外圆的面积减去内圆的面积就是圆环的面积，所以圆环的面积是 $\pi R^2-\pi r^2$．

当 $R=15$ cm，$r=10$ cm 时，圆环的面积（单位：cm²）是

$$\begin{aligned}\pi R^2-\pi r^2 &=3.14\times15^2-3.14\times10^2\\ &=392.5.\end{aligned}$$

这个圆环的面积是 392.5 cm²．

**练习**

1. 填空：

（1）$a$，$b$ 分别表示长方形的长和宽，则长方形的周长 $l=$________，面积 $S=$________，当 $a=2$ cm，$b=3$ cm 时，$l=$________ cm，$S=$________ cm²；

（2）$a$，$b$ 分别表示梯形的上底和下底，$h$ 表示梯形的高，则梯形的面积 $S=$

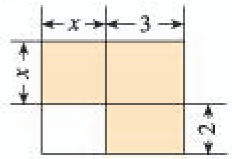
__________，当 $a=2$ cm，$b=4$ cm，$h=5$ cm 时，$S=$______ $\text{cm}^2$.

2. 用整式填空，指出单项式的次数以及多项式的次数和项：

(1) 每袋大米 5 kg，$x$ 袋大米（　　）kg；

(2) 如图（图中长度单位：m），阴影部分的面积是（　　）$\text{m}^2$；

(3) 体重由 $x$ kg 增加 2 kg 后是（　　）kg.



（第 2(2)题）

## 习题 2.1

### 复习巩固

1. 列式表示：

(1) 棱长为 $a$ cm 的正方体的表面积.

(2) 每件 $a$ 元的上衣，降价 20%后的售价是多少元?

(3) 一辆汽车的行驶速度是 $v$ km/h，$t$ h 行驶多少千米?

(4) 长方形绿地的长、宽分别是 $a$ m，$b$ m，如果长增加 $x$ m，新增加的绿地面积是多少平方米?

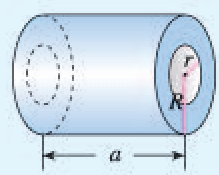
2. 列式表示：

(1) 温度由 $t$ ℃上升 5 ℃后是多少?

(2) 两车同时、同地、同向出发，快车行驶速度是 $x$ km/h，慢车行驶速度是 $y$ km/h，3 h 后两车相距多少千米?

(3) 某种苹果的售价是每千克 $x$ 元（$x<10$），用 50 元买 5 kg 这种苹果，应找回多少钱?

(4) 如图（图中长度单位：cm），钢管的体积是多少?



（第 2(4)题）

3. 填表：

| 整式 | $-15ab$ | $4a^2b^2$ | $\frac{3x^2y}{5}$ | $4x^2-3$ | $a^4-2a^2b^2+b^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 系数 | | | | | |
| 次数 | | | | | |
| 项 | | | | | |

### 综合运用

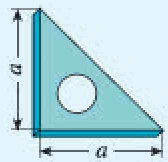
4. 测得一种树苗的高度与树苗生长的年数的有关数据如下页表（树苗原高 100 cm）：

| 年数 | 高度/cm |
|---|---|
| 1 | 100+5 |
| 2 | 100+10 |
| 3 | 100+15 |
| 4 | 100+20 |
| …… | …… |

前四年树苗高度的变化与年数有什么关系？假设以后各年树苗高度的变化与年数保持上述关系，用式子表示生长了 $n$ 年的树苗的高度.

5. 礼堂第 1 排有 $a$ 个座位，后面每排都比前一排多一个座位. 第 2 排有多少个座位？第 3 排呢？用式子表示第 $n$ 排的座位数. 如果第 1 排有 20 个座位，计算第 19 排的座位数.

6. 一块三角尺的形状和尺寸如图所示. 如果圆孔的半径是 $r$，三角尺的厚度是 $h$，用式子表示这块三角尺的体积 $V$. 若 $a=6$ cm，$r=0.5$ cm，$h=0.2$ cm，求 $V$ 的值（$\pi$ 取 3）.



（第 6 题）

## 拓广探索

7. 设 $n$ 表示任意一个整数，用含 $n$ 的式子表示：

（1）任意一个偶数；　　（2）任意一个奇数.

8. 3 个球队进行单循环比赛（参加比赛的每一个队都与其他所有的队各赛一场），总的比赛场数是多少？4 个队呢？5 个队呢？$n$ 个队呢？

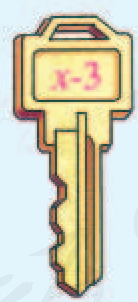
9. 对于密码 L dp d vwxghqw，你能看出它代表什么意思吗？如果给你一把破译它的"钥匙" $x-3$，联想英语字母表中字母的顺序，你再试试能不能解读它.

英语字母表中字母是按以下顺序排列的：

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

如果规定 a 又接在 z 的后面，使 26 个字母排成圈，并能想到 $x-3$ 可以代表"把一个字母换成字母表中从它向前移动 3 位的字母"，按这个规律就有

L dp d vwxghqw ⟶ I am a student.

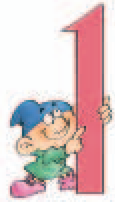


（第 9 题）

这样你就能解读它的意思了.

为了保密，许多情况下都要采用密码，这时就需要有破译密码的"钥匙". 上面的例子中，如果写和读密码的双方事先约定了作为"钥匙"的式子 $x-3$ 的含义，那么他们就可以用一种保密方式通信了. 你和同伴不妨也利用数学式子来制定一种类似的"钥匙"，并互相合作，通过游戏试试如何进行保密通信.

## 阅读与思考



### 数字 1 与字母 X 的对话

1：数学是由数产生的，数才是数学王国的真正主人.

X：我是字母，我虽然不是具体的数，但是可以表示各种各样的数，我可以代表你 1，也可以代表其他数.

1：由我们数组成的式子有确切的大小. 例如，人们一见到 $1+2$ 就知道是 1 与 2 的和，即 3. 你们字母能这样做吗？

X：有我们字母的式子进行运算和推理时具有一般性. 例如，$x+y$ 可以表示任何两个数的和，包括 $1+2$. $x+y=y+x$ 能表示任何两数相加时都可以交换顺序，即加法交换律.

1：人们解决实际问题时，必须根据已知的具体数字进行计算. 而字母有什么用呢？

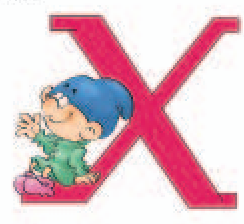
X：在解决实际问题时，用字母表示未知数，把字母列入算式（方程），能更方便地表示数量关系. 数和字母一起运算会使问题的解法更简单.

1：数是人们经过长期实践创造出来的，并建立了专门研究数及其运算的学科——算术，你们字母行吗？

X：随着实践的发展，人们发现只有算术还不够，用字母表示数会起到更大的作用，于是产生了代数这门学科. 它首要研究的就是用字母表示的式子的运算法则和方程的解法. 从算术发展到代数是数学的一大进步.

1：算术几乎是伴随着人类社会活动的产生和发展而逐渐形成的，它有着非常悠久的历史，代数有怎样的历史呢？

X：代数的历史可以追溯到约 3 800 年前的古埃及和古巴比伦时期，那时就有了代数的萌芽. 到了公元 3 世纪，代数在希腊获得显著的发展，其代表人物是被誉为代数学鼻祖的丢番图. 之后，印度的代数发展很快. 同时，阿拉伯地区的代数研究取得很大进展，其中著名的代表作是数学家阿尔-花拉子米于公元 820 年左右发表的《代数学》（这本书的拉丁文译本取名为《对消与还原》），这本书第一次提出了这门学科的名称.



## 2.2 整式的加减

我们来看本章引言中的问题（2）.

在西宁到拉萨路段，如果列车通过冻土地段的时间是 $t$ h，那么它通过非冻土地段的时间是 $2.1t$ h，这段铁路的全长（单位：km）是

$$100t+120\times2.1t,$$

即

$$100t+252t.$$

类比数的运算，我们应如何化简式子 $100t+252t$ 呢？

**探究**

（1）运用运算律计算：

$100\times2+252\times2=$____________，

$100\times(-2)+252\times(-2)=$____________；

（2）根据（1）中的方法完成下面的运算，并说明其中的道理：

$100t+252t=$____________.

在(1)中，我们知道，根据分配律可得

$$100\times2+252\times2=(100+252)\times2=352\times2,$$

$$100\times(-2)+252\times(-2)=(100+252)\times(-2)=352\times(-2).$$

在(2)中，式子 $100t+252t$ 表示 $100t$ 与 $252t$ 两项的和. 式子

$$100t+252t$$

与(1)中的式子

$$100\times2+252\times2$$

和

$$100\times(-2)+252\times(-2)$$

有相同的结构，并且字母 $t$ 代表的是一个因（乘）数，因此根据分配律也应该有

$$100t+252t=(100+252)t=352t.$$

## 探究

填空：

(1) $100t-252t=(\qquad)t$；

(2) $3x^2+2x^2=(\qquad)x^2$；

(3) $3ab^2-4ab^2=(\qquad)ab^2$.

上述运算有什么共同特点，你能从中得出什么规律？

对于上面的 (1)(2)(3)，利用分配律可得

$100t-252t=(100-252)t=-152t$，

$3x^2+2x^2=(3+2)x^2=5x^2$，

$3ab^2-4ab^2=(3-4)ab^2=-ab^2$.

观察(1)中的多项式的项 $100t$ 和 $-252t$，它们含有相同的字母 $t$，并且 $t$ 的指数都是 1；(2)中的多项式的项 $3x^2$ 和 $2x^2$，含有相同的字母 $x$，并且 $x$ 的指数都是 2；(3)中的多项式的项 $3ab^2$ 与 $-4ab^2$，都含有字母 $a$，$b$，并且 $a$ 的指数都是1，$b$ 的指数都是 2. 像 $100t$ 与 $-252t$，$3x^2$ 与 $2x^2$，$3ab^2$ 与 $-4ab^2$ 这样，所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的项叫做**同类项**. 几个常数项也是同类项.

注意分配律的使用：

$100t-252t$

$=[100+(-252)]t$

$=(100-252)t$.

因为多项式中的字母表示的是数，所以我们也可以运用交换律、结合律、分配律把多项式中的同类项进行合并. 例如，

$4x^2+2x+7+3x-8x^2-2$

$=4x^2-8x^2+2x+3x+7-2$ （交换律）

$=(4x^2-8x^2)+(2x+3x)+(7-2)$ （结合律）

$=(4-8)x^2+(2+3)x+(7-2)$ （分配律）

$=-4x^2+5x+5$.

通常我们把一个多项式的各项按照某个字母的指数从大到小（降幂）或者从小到大（升幂）的顺序排列，如 $-4x^2+5x+5$ 也可以写成 $5+5x-4x^2$.

把多项式中的同类项合并成一项，叫做**合并同类项**.

**合并同类项后，所得项的系数是合并前各同类项的系数的和，且字母连同它的指数不变.**

**例 1** 合并下列各式的同类项：

(1) $xy^2-\frac{1}{5}xy^2$；

(2) $-3x^2y+2x^2y+3xy^2-2xy^2$；

(3) $4a^2+3b^2+2ab-4a^2-4b^2$.

**解：**(1) $xy^2-\frac{1}{5}xy^2=\left(1-\frac{1}{5}\right)xy^2=\frac{4}{5}xy^2$；

(2) $$\begin{aligned}&-3x^2y+2x^2y+3xy^2-2xy^2\\=&(-3+2)x^2y+(3-2)xy^2\\=&-x^2y+xy^2;\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}&4a^2+3b^2+2ab-4a^2-4b^2\\=&(4a^2-4a^2)+(3b^2-4b^2)+2ab\\=&(4-4)a^2+(3-4)b^2+2ab\\=&-b^2+2ab.\end{aligned}$$

**例 2** (1) 求多项式 $2x^2-5x+x^2+4x-3x^2-2$ 的值，其中 $x=\frac{1}{2}$；

(2) 求多项式 $3a+abc-\frac{1}{3}c^2-3a+\frac{1}{3}c^2$ 的值，其中 $a=-\frac{1}{6}$，$b=2$，$c=-3$.

**分析：**在求多项式的值时，可以先将多项式中的同类项合并，然后再求值，这样做往往可以简化计算.

**解：**(1) $$\begin{aligned}&2x^2-5x+x^2+4x-3x^2-2\\=&(2+1-3)x^2+(-5+4)x-2\\=&-x-2.\end{aligned}$$

当 $x=\frac{1}{2}$时，原式$=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$.

(2) $$\begin{aligned}&3a+abc-\frac{1}{3}c^2-3a+\frac{1}{3}c^2\\=&(3-3)a+abc+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)c^2\\=&abc.\end{aligned}$$

当 $a=-\frac{1}{6}$，$b=2$，$c=-3$ 时，原式$=\left(-\frac{1}{6}\right)\times2\times(-3)=1$.

请你把字母的值直接代入原式求值. 与例 2 的运算过程比较，哪种方法更简便?

**例 3** （1）水库水位第一天连续下降了 $a$ h，每小时平均下降 2 cm；第二天连续上升了 $a$ h，每小时平均上升 0.5 cm，这两天水位总的变化情况如何？

（2）某商店原有 5 袋大米，每袋大米为 $x$ kg．上午卖出 3 袋，下午又购进同样包装的大米 4 袋．进货后这个商店有大米多少千克？

**解：**（1）把下降的水位变化量记为负，上升的水位变化量记为正．第一天水位的变化量是 $-2a$ cm，第二天水位的变化量是 $0.5a$ cm．

两天水位的总变化量（单位：cm）是

$$-2a+0.5a=(-2+0.5)a=-1.5a.$$

这两天水位总的变化情况为下降了 $1.5a$ cm．

（2）把进货的数量记为正，售出的数量记为负．

进货后这个商店共有大米（单位：kg）

$$5x-3x+4x=(5-3+4)x=6x.$$

**练习**

1. 计算：

（1）$12x-20x$；（2）$x+7x-5x$；

（3）$-5a+0.3a-2.7a$；（4）$\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}y+2y$；

（5）$-6ab+ba+8ab$；（6）$10y^2-0.5y^2$．

2. 求下列各式的值：

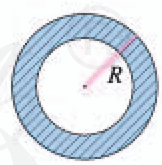
（1）$3a+2b-5a-b$，其中 $a=-2$，$b=1$；

（2）$3x-4x^2+7-3x+2x^2+1$，其中 $x=-3$．

3. （1）$x$ 的 4 倍与 $x$ 的 5 倍的和是多少？

（2）$x$ 的 3 倍比 $x$ 的一半大多少？

4. 如图，大圆的半径是 $R$，小圆的面积是大圆面积的 $\frac{4}{9}$，求阴影部分的面积．




（第 4 题）

现在我们来看本章引言中的问题(3)．

在格尔木到拉萨路段，如果列车通过冻土地段需要 $u$ h，那么它通过非冻土地段的时间是 $(u-0.5)$h．于是，冻土地段的路程是 $100u$ km，非冻土地段的路程是 $120(u-0.5)$km．因此，这段铁路的全长（单位：km）是

$$100u+120(u-0.5), \quad ①$$

冻土地段与非冻土地段相差（单位：km）

$$100u-120(u-0.5). \quad ②$$

上面的式子①②都带有括号. 类比数的运算，它们应如何化简？

利用分配律，可以去括号，再合并同类项，得

$$100u+120(u-0.5)=100u+120u-60=220u-60,$$
$$100u-120(u-0.5)=100u-120u+60=-20u+60.$$

上面两式中

$$+120(u-0.5)=+120u-60, \quad ③$$
$$-120(u-0.5)=-120u+60. \quad ④$$

比较上面③④两式，你能发现去括号时符号变化的规律吗？

**如果括号外的因数是正数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相同；**

**如果括号外的因数是负数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相反.**

特别地，$+(x-3)$ 与 $-(x-3)$ 可以分别看作 1 与 $-1$ 分别乘 $(x-3)$. 利用分配律，可以将式子中的括号去掉，得

$$+(x-3)=x-3,$$
$$-(x-3)=-x+3.$$

这也符合以上发现的去括号规律.

我们可以利用上面的去括号规律进行整式化简.

**例 4** 化简下列各式：

(1) $8a+2b+(5a-b)$； (2) $(5a-3b)-3(a^2-2b)$.

**解：**(1) $8a+2b+(5a-b)$

$=8a+2b+5a-b$

$=13a+b$；

(2) $(5a-3b)-3(a^2-2b)$

$=5a-3b-(3a^2-6b)$

$=5a-3b-3a^2+6b$

$=-3a^2+5a+3b$.

**例 5** 两船从同一港口同时出发反向而行，甲船顺水，乙船逆水，两船在静水中的速度都是 50 km/h，水流速度是 $a$ km/h.

(1) 2 h 后两船相距多远？

(2) 2 h 后甲船比乙船多航行多少千米？

**解：** 顺水航速＝船速＋水速＝$(50+a)$ km/h，

逆水航速＝船速－水速＝$(50-a)$ km/h.

(1) 2 h 后两船相距（单位：km）

$$2(50+a)+2(50-a)=100+2a+100-2a=200.$$

(2) 2 h 后甲船比乙船多航行（单位：km）

$$2(50+a)-2(50-a)=100+2a-100+2a=4a.$$

**练习**

1. 化简：

(1) $12(x-0.5)$； (2) $-5\left(1-\frac{1}{5}x\right)$；

(3) $-5a+(3a-2)-(3a-7)$； (4) $\frac{1}{3}(9y-3)+2(y+1)$.

2. 飞机的无风航速为 $a$ km/h，风速为 20 km/h. 飞机顺风飞行 4 h 的行程是多少？飞机逆风飞行 3 h 的行程是多少？两个行程相差多少？

上面研究了合并同类项、去括号等内容，它们是进行整式加减运算的基础.

**例 6** 计算：

(1) $(2x-3y)+(5x+4y)$； (2) $(8a-7b)-(4a-5b)$.

**分析：** 第 (1) 题是计算多项式 $2x-3y$ 和 $5x+4y$ 的和；第 (2) 题是计算多项式 $8a-7b$ 和 $4a-5b$ 的差.

**解：** (1)

$$\begin{aligned}&(2x-3y)+(5x+4y)\\=&2x-3y+5x+4y\\=&7x+y;\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(8a-7b)-(4a-5b)\\=&8a-7b-4a+5b\\=&4a-2b.\end{aligned}$$

**例 7** 笔记本的单价是 $x$ 元，圆珠笔的单价是 $y$ 元. 小红买 3 本笔记本，2 支圆珠笔；小明买 4 本笔记本，3 支圆珠笔. 买这些笔记本和圆珠笔，小红和小明一共花费多少钱？

**解法 1：** 小红买笔记本和圆珠笔共花费 $(3x+2y)$ 元，小明买笔记本和圆珠笔共花费 $(4x+3y)$ 元.

小红和小明一共花费（单位：元）

$$
\begin{aligned}
&(3x+2y)+(4x+3y)\\
=&3x+2y+4x+3y\\
=&7x+5y.
\end{aligned}
$$

**解法 2：** 小红和小明买笔记本共花费 $(3x+4x)$ 元，买圆珠笔共花费 $(2y+3y)$ 元.

小红和小明一共花费（单位：元）

$$
\begin{aligned}
&(3x+4x)+(2y+3y)\\
=&7x+5y.
\end{aligned}
$$

**例 8** 做大小两个长方体纸盒，尺寸如下（单位：cm）：

| | 长 | 宽 | 高 |
|---|---|---|---|
| 小纸盒 | $a$ | $b$ | $c$ |
| 大纸盒 | $1.5a$ | $2b$ | $2c$ |

(1) 做这两个纸盒共用料多少平方厘米？

(2) 做大纸盒比做小纸盒多用料多少平方厘米？

**解：** 小纸盒的表面积是 $(2ab+2bc+2ca)\text{cm}^2$，

大纸盒的表面积是 $(6ab+8bc+6ca)\text{cm}^2$.

(1) 做这两个纸盒共用料（单位：$\text{cm}^2$）

$$
\begin{aligned}
&(2ab+2bc+2ca)+(6ab+8bc+6ca)\\
=&2ab+2bc+2ca+6ab+8bc+6ca\\
=&8ab+10bc+8ca.
\end{aligned}
$$

(2) 做大纸盒比做小纸盒多用料（单位：$\text{cm}^2$）

$$
\begin{aligned}
&(6ab+8bc+6ca)-(2ab+2bc+2ca)\\
=&6ab+8bc+6ca-2ab-2bc-2ca\\
=&4ab+6bc+4ca.
\end{aligned}
$$

通过上面的学习，我们可以得到整式加减的运算法则：

**一般地，几个整式相加减，如果有括号就先去括号，然后再合并同类项.**

**例 9** 求$\frac{1}{2}x-2\left(x-\frac{1}{3}y^2\right)+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\right)$的值，其中$x=-2$，$y=\frac{2}{3}$.

**解：** $\frac{1}{2}x-2\left(x-\frac{1}{3}y^2\right)+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\right)$

$=\frac{1}{2}x-2x+\frac{2}{3}y^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2$

$=-3x+y^2$.

当$x=-2$，$y=\frac{2}{3}$时，

原式$=(-3)\times(-2)+\left(\frac{2}{3}\right)^2=6+\frac{4}{9}=6\frac{4}{9}$.

先将式子化简，再代入数值进行计算比较简便.

**练习**

1. 计算：

(1) $3xy-4xy-(-2xy)$；　(2) $-\frac{1}{3}ab-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}a^2-\left(-\frac{2}{3}ab\right)$.

2. 计算：

(1) $(-x+2x^2+5)+(4x^2-3-6x)$；　(2) $(3a^2-ab+7)-(-4a^2+2ab+7)$.

3. 先化简下式，再求值：

$$5(3a^2b-ab^2)-(ab^2+3a^2b),$$

其中$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$.

## 习题 2.2

### 复习巩固

1. 计算：

(1) $2x-10.3x$；　(2) $3x-x-5x$；

(3) $-b+0.6b-2.6b$；　(4) $m-n^2+m-n^2$.

2. 计算：

(1) $2(4x-0.5)$；　　　　(2) $-3\left(1-\frac{1}{6}x\right)$；

(3) $-x+(2x-2)-(3x+5)$；　　　　(4) $3a^2+a^2-(2a^2-2a)+(3a-a^2)$.

3. 计算：

(1) $(5a+4c+7b)+(5c-3b-6a)$；　　　　(2) $(8xy-x^2+y^2)-(x^2-y^2+8xy)$；

(3) $\left(2x^2-\frac{1}{2}+3x\right)-4\left(x-x^2+\frac{1}{2}\right)$；　　　　(4) $3x^2-[7x-(4x-3)-2x^2]$.

4. 先化简下式，再求值：

$$(-x^2+5+4x)+(5x-4+2x^2),$$

其中 $x=-2$.

5. (1) 列式表示比 $a$ 的 5 倍大 4 的数与比 $a$ 的 2 倍小 3 的数，计算这两个数的和；

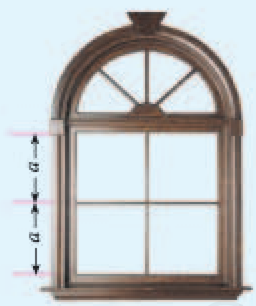
(2) 列式表示比 $x$ 的 7 倍大 3 的数与比 $x$ 的 6 倍小 5 的数，计算这两个数的差.

6. 某村小麦种植面积是 $a$ hm²，水稻种植面积是小麦种植面积的 3 倍，玉米种植面积比小麦种植面积少 5 hm²，列式表示水稻种植面积、玉米种植面积，并计算水稻种植面积比玉米种植面积大多少.

## 综合运用

7. 窗户的形状如图所示（图中长度单位：cm），其上部是半圆形，下部是边长相同的四个小正方形. 已知下部小正方形的边长是 $a$ cm，计算：

(1) 窗户的面积；　　　　(2) 窗户的外框的总长.

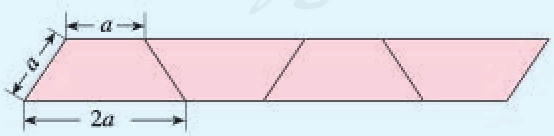



（第 7 题）

8. 某轮船顺水航行 3 h，逆水航行 1.5 h，已知轮船在静水中的速度是 $a$ km/h，水流速度是 $y$ km/h，轮船共航行多少千米？

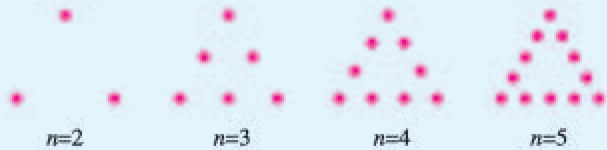
9. 观察下图并填表（单位：cm）：

| 梯形个数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 图形周长 | $5a$ | $8a$ | $11a$ | $14a$ | | | | |



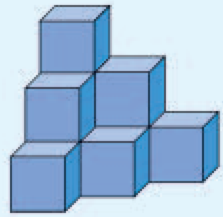

（第 9 题）

10. 如下页图所示，由一些点组成形如三角形的图形，每条“边”（包括两个顶点）有 $n(n>1)$ 个点，每个图形总的点数 $S$ 是多少？当 $n=5$，7，11 时，$S$ 是多少？




（第 10 题）

## 拓广探索



（第 12 题）

11. （1）一个两位数的个位上的数是 $a$，十位上的数是 $b$，列式表示这个两位数；

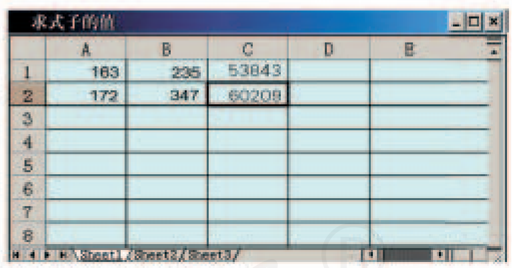
（2）列式表示上面的两位数与 10 的乘积；

（3）列式表示（1）中的两位数与它的 10 倍的和，这个和是 11 的倍数吗？为什么？

12. 10 个棱长为 $a$ cm 的正方体摆放成如图的形状，这个图形的表面积是多少？

## 信息技术应用

### 电子表格与数据计算




用计算机可以制作电子表格（spreadsheet）. 电子表格（如右图）通常由一些行和列组成，行用数字 1，2，3，…表示，列用字母 A，B，C，…表示. 行和列相交的部分叫做单元格. 单元格用列号和行号表示，如 A2 表示 A 列第 2 行，列号在前，行号在后. 单元格是电子表格的基本元素，是进行整体操作的最小单位.

利用电子表格可以进行数据计算. 例如，计算当 $x=163$，$y=235$ 时式子 $2x^2+3y$ 的值，我们可以在上面的电子表格中，分别在单元格 A1 和 B1 中输入 163 和 235（即 $x$ 和 $y$ 的值），然后在 C1 中输入“=A1^2 * 2+B1 * 3”（“^”表示乘方，“*”表示乘号），计算机就会算出 $2x^2+3y$ 的值，并自动填入 C1. 类似地，在上面的电子表格中，在单元格 A2 和 B2 分别输入 172 和 347，在 C2 输入“=A2^2 * 2+B2 * 3”，计算机就会算出当 $x=172$，$y=347$ 时式子 $2x^2+3y$ 的值，并放入 C2 中.

电子表格操作简单、功能强大，可以有效地进行数据计算和数据处理. 在复杂的统计问题中，电子表格的作用可以得到充分的发挥.

# 数学活动

## 活动1

（1）如图1所示，用火柴棍拼成一排由三角形组成的图形，如果图形中含有2，3或4个三角形，分别需要多少根火柴棍？如果图形中含有$n$个三角形，需要多少根火柴棍？

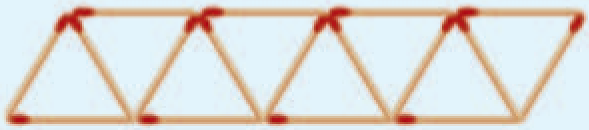


图1

（2）如图2所示，用大小相等的小正方形拼大正方形，拼第1个正方形需要4个小正方形，拼第2个正方形需要9个小正方形……拼一拼，想一想，按照这样的方法拼成的第$n$个正方形比第$(n-1)$个正方形多几个小正方形？

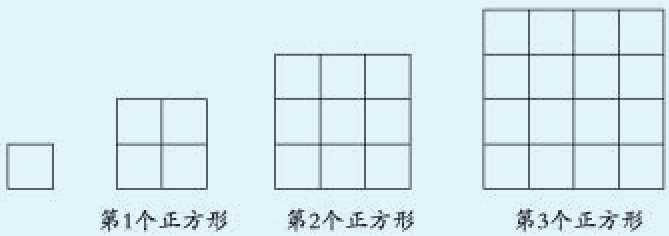



图2

## 活动2

一种笔记本售价是2.3元/本，如果一次买100本以上（不含100本），售价是2.2元/本．列式表示买$n$本笔记本所需钱数（注意对$n$的大小要有所考虑）．请同学们讨论下面的问题：

（1）按照这种售价规定，会不会出现多买比少买反而付钱少的情况？

（2）如果需要100本笔记本，怎样购买能省钱？

（3）了解实际生活中类似问题，并举出几个具体例子．

## 活动3

图 3 是某月的月历.

(1) 带阴影的方框中的 9 个数的和与方框正中心的数有什么关系?

(2) 如果将带阴影的方框移至图 4 的位置, (1) 中的关系还成立吗?

(3) 不改变带阴影的方框的大小, 将方框移动几个位置试一试, 你能得出什么结论? 你能证明这个结论吗?

(4) 这个结论对于任何一个月的月历都成立吗?

(5) 如图 5, 如果带阴影的方框里的数是 4 个, 你能得出什么结论?

(6) 如图 6, 对于带阴影的框中的 4 个数, 又能得出什么结论?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 | | | |

图 3

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 | | | |

图 4

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 | | | |

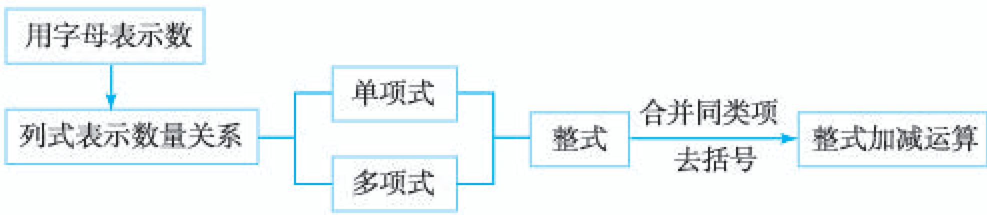
图 5

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 | | | |

图 6

# 小　结

## 一、本章知识结构图




## 二、回顾与思考

本章学习了整式的有关概念与整式的加减运算．由具体的数到用字母表示数，可以简明地表达一些一般的数量和数量关系，给研究问题和计算带来方便，这是数学上的一个重大发展．

从数到式，字母参与运算，得到了各种式子．其中表示数或字母的积的式子叫做单项式，几个单项式的和叫做多项式．因此，整式可以看作包含乘法或包含乘法与加法的式子．

整式中的每个字母都表示数，因此，数的一些运算规律也适用于整式．例如，利用分配律可以合并同类项，去括号，从而可以进行整式的加减运算．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．举出一些用单项式、多项式表示数量关系的实际例子．

2．合并同类项和去括号是整式加减的基础，举例说明合并同类项和去括号的依据．

3．举例说明整式加减的运算法则．

## 复习题 2

### 复习巩固

1．列式表示：

(1) 某地冬季一天的温差是 15 ℃，这天最低气温是 $t$ ℃，最高气温是多少？

(2) 买单价 $c$ 元的商品 $n$ 件要花多少钱？支付 100 元，应找回多少元？

(3) 某种商品原价每件 $b$ 元，第一次降价打“八折”，第二次降价每件又减 10 元，第一次降价后的售价是多少？第二次降价后的售价是多少？

(4) 30 天中，小张长跑路程累计达到 45 000 m，小李跑了 $a$ m（$a>45\ 000$），平均每天小李和小张各跑多少米？平均每天小李比小张多跑多少米？

2. 下列整式中哪些是单项式？哪些是多项式？是单项式的指出系数和次数，是多项式的指出项和次数：

$$-\frac{1}{2}a^2b，\ \frac{m^4n^2}{7}，\ x^2+y^2-1，\ x，\ 3x^2-y+3xy^3+x^4-1，\ 32t^3，\ 2x-y.$$

3. 计算：

(1) $x^2y-3x^2y$；　(2) $10y^2+0.5y^2$；

(3) $-\frac{1}{2}a^2bc+\frac{1}{2}cba^2$；　(4) $\frac{1}{4}mn-\frac{1}{3}mn+7$；

(5) $7ab-3a^2b^2+7+8ab^2+3a^2b^2-3-7ab$；

(6) $3x^3-3x^2-y^2+5y+x^2-5y+y^2$.

4. 计算：

(1) $(4a^3b-10b^3)+(-3a^2b^2+10b^3)$；

(2) $(4x^2y-5xy^2)-(3x^2y-4xy^2)$；

(3) $5a^2-[a^2+(5a^2-2a)-2(a^2-3a)]$；

(4) $15+3(1-a)-(1-a-a^2)+(1-a+a^2-a^3)$；

(5) $(4a^2b-3ab)+(-5a^2b+2ab)$；

(6) $(6m^2-4m-3)+(2m^2-4m+1)$；

(7) $(5a^2+2a-1)-4(3-8a+2a^2)$；

(8) $3x^2-\left[5x-\left(\frac{1}{2}x-3\right)+2x^2\right]$.

5. 先化简下式，再求值：

$$5x^2+4-3x^2-5x-2x^2-5+6x，$$

其中，$x=-3$.

## 综合运用

6. (1) 体校里男生人数占学生总数的 60%，女生的人数是 $a$，学生总数是多少？

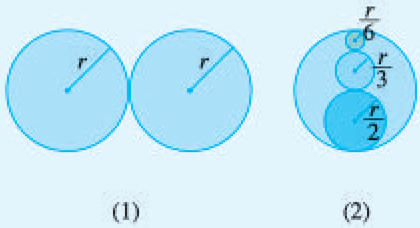
(2) 体校里男生人数是 $x$，女生人数是 $y$，教练人数和学生人数的比是 1∶10，教练人数是多少？

7. 甲地的海拔是 $h$ m，乙地比甲地高 20 m，丙地比甲地低 30 m，列式表示乙、丙两地的海拔，并计算这两地的高度差.

8. 长方形的长是 $2x$ cm，宽是 4 cm. 梯形的上底长是 $x$ cm，下底长是上底长的 3 倍，高是 5 cm. 哪个图形的面积大？大多少？

9. 某公园计划砌一个形状如图（1）的喷水池（图中长度单位：m），后来有人建议

改为图（2）的形状，且外圆的直径不变，请你比较两种方案，确定哪一种方案砌各圆形水池的周边需要的材料多．（提示：比较两种方案中各圆形水池周长的和．）




（第 9 题）

10. 一种商品每件成本 $a$ 元，原来按成本增加 22%定出价格，每件售价多少元？现在由于库存积压减价，按原价的 85%出售，现售价多少元？每件还能盈利多少元？

## 拓广探索

11. 用式子表示十位上的数是 $a$、个位上的数是 $b$ 的两位数，再把这个两位数的十位上的数与个位上的数交换位置，计算所得数与原数的和．这个和能被 11 整除吗？

12. 把 $(a+b)$ 和 $(x+y)$ 各看成一个整体，对下列各式进行化简：

(1) $4(a+b)+2(a+b)-(a+b)$；

(2) $3(x+y)^2-7(x+y)+8(x+y)^2+6(x+y)$．

# 第三章　一元一次方程

在小学，我们已经见过像 $2x=50$，$3x+1=4$，$5x-7=8$ 这样的简单方程，其中字母 $x$ 表示未知数.

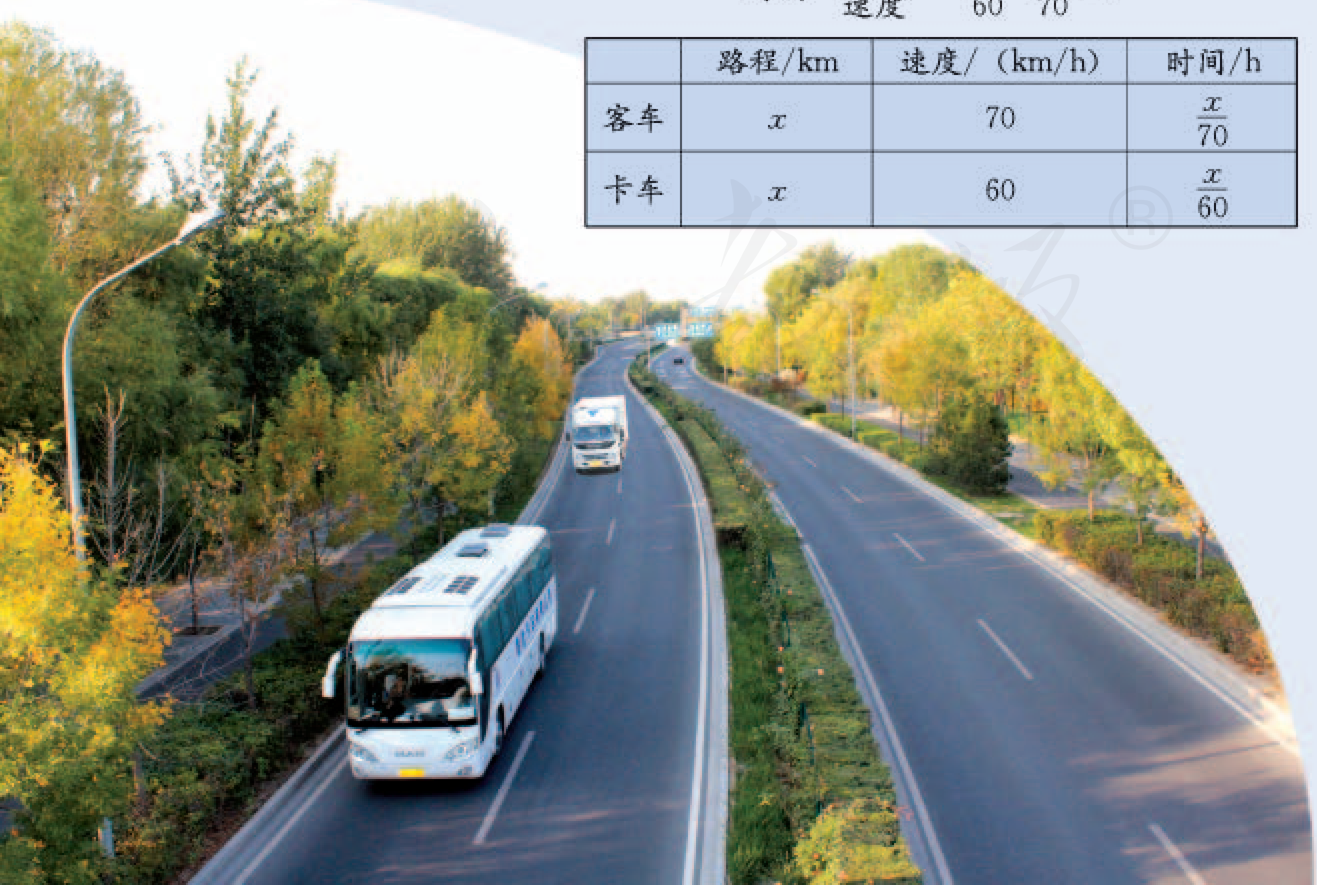
方程是含有未知数的等式，它是应用广泛的数学工具. 研究许多问题时，人们经常用字母表示其中的未知数，通过分析数量关系，列出方程表示相等关系，然后解方程求出未知数.

怎样根据问题中的数量关系列方程？怎样解方程？这是本章研究的主要问题.

通过学习本章中丰富多彩的问题，你将进一步感受到方程的作用，并学习利用一元一次方程解决问题的方法.

时间$=\dfrac{\text{路程}}{\text{速度}}$　　$\dfrac{x}{60}-\dfrac{x}{70}=1$

| | 路程/km | 速度/（km/h） | 时间/h |
|---|---|---|---|
| 客车 | $x$ | 70 | $\dfrac{x}{70}$ |
| 卡车 | $x$ | 60 | $\dfrac{x}{60}$ |



# 3.1 从算式到方程

## 3.1.1 一元一次方程

**问题** 一辆客车和一辆卡车同时从 A 地出发沿同一公路同方向行驶，客车的行驶速度是 70 km/h，卡车的行驶速度是 60 km/h，客车比卡车早 1 h 经过 B 地．A，B 两地间的路程是多少？

你会用算术方法解决这个问题吗？列算式试试．

如果设 A，B 两地相距 $x$ km，你能分别列式表示客车和卡车从 A 地到 B 地的行驶时间吗？

匀速运动中，时间 $=\dfrac{路程}{速度}$．根据问题的条件，客车和卡车从 A 地到 B 地的行驶时间，可以分别表示为 $\dfrac{x}{70}$ h 和 $\dfrac{x}{60}$ h．

> 想一想，如何用式子表示两车的行驶时间之间的关系？

因为客车比卡车早 1 h 经过 B 地，所以 $\dfrac{x}{70}$ 比 $\dfrac{x}{60}$ 小 1，即

$$\frac{x}{60}-\frac{x}{70}=1. \qquad ①$$

我们已经知道，方程是含有未知数的等式．等式①中的 $x$ 是未知数，这个等式是一个方程．

通过本章的学习，我们将能够从方程①解出未知数的值 $x=420$，从而求出 A，B 两地间的路程为 420 km．

> 通常用 $x$，$y$，$z$ 等字母表示未知数，法国数学家笛卡儿是最早这样做的人．我国古代用“天元、地元、人元、物元”等表示未知数．

用算术方法解题时，列出的算式表示用算术方法解题的计算过程，其中只含有已知数；而方程是根据问题中的相等关系列出的等式，其中既含有已知数，又含有用字母表示的未知数．方程

为我们解决许多问题带来方便．通过今后的学习，你会逐步认识：从算式到方程是数学的进步．

**思考**

对于上面的问题，你还能列出其他方程吗？如果能，你依据的是哪个相等关系？

列方程时，要先设字母表示未知数，然后根据问题中的相等关系，写出含有未知数的等式——**方程**(equation)．

**例 1** 根据下列问题，设未知数并列出方程：

(1) 用一根长 24 cm 的铁丝围成一个正方形，正方形的边长是多少？

(2) 一台计算机已使用 1 700 h，预计每月再使用 150 h，经过多少月这台计算机的使用时间达到规定的检修时间 2 450 h？

(3) 某校女生占全体学生数的 52%，比男生多 80 人，这个学校有多少学生？

**解：**(1) 设正方形的边长为 $x$ cm.

列方程

$$4x=24.$$

(2) 设 $x$ 月后这台计算机的使用时间达到 2 450 h，那么在 $x$ 月里这台计算机使用了 $150x$ h.

列方程

$$1\ 700+150x=2\ 450.$$

(3) 设这个学校的学生数为 $x$，那么女生数为 $0.52x$，男生数为 $(1-0.52)x$.

列方程

$$0.52x-(1-0.52)x=80.$$

你能解释这些方程中等号两边各表示什么意思吗？体会列方程所依据的相等关系．

上面各方程都只含有一个未知数（元），未知数的次数都是 1，等号两边都是整式，这样的方程叫做**一元一次方程**（linear equation in one unknown）．

## 归纳

上面的分析过程可以表示如下：

$$\boxed{\text{实际问题}} \xrightarrow{\text{设未知数}\quad\text{列方程}} \boxed{\text{一元一次方程}}$$

分析实际问题中的数量关系，利用其中的相等关系列出方程，是用数学解决实际问题的一种方法.

列方程是解决问题的重要方法，利用方程可以求出未知数.

可以发现，当 $x=6$ 时，$4x$ 的值是 24，这时方程 $4x=24$ 等号左右两边相等. $x=6$ 叫做方程 $4x=24$ 的解. 这就是说，方程 $4x=24$ 中未知数 $x$ 的值应是 6. 同样地，当 $x=5$ 时，$1\ 700+150x$ 的值是2 450，这时方程

$$1\ 700+150x=2\ 450$$

等号左右两边相等. $x=5$ 叫做方程 $1\ 700+150x=2\ 450$ 的解. 这就是说，方程

$$1\ 700+150x=2\ 450$$

中未知数 $x$ 的值应是 5.

解方程就是求出使方程中等号左右两边相等的未知数的值，这个值就是方程的**解**(solution).

## 思考

$x=1\ 000$ 和 $x=2\ 000$ 中哪一个是方程 $0.52x-(1-0.52)x=80$ 的解?

## 练习

根据下列问题，设未知数，列出方程：

1. 环形跑道一周长 400 m，沿跑道跑多少周，可以跑 3 000 m?
2. 甲种铅笔每支 0.3 元，乙种铅笔每支 0.6 元，用 9 元钱买了两种铅笔共 20 支，两种铅笔各买了多少支?
3. 一个梯形的下底比上底多 2 cm，高是 5 cm，面积是 40 cm$^2$，求上底.
4. 用买 10 个大水杯的钱，可以买 15 个小水杯，大水杯比小水杯的单价多 5 元，两种水杯的单价各是多少元?

## 3.1.2　等式的性质

我们可以直接看出像 $4x=24$，$x+1=3$ 这样的简单方程的解，但是仅靠观察来解比较复杂的方程是困难的．因此，我们还要讨论怎样解方程．方程是含有未知数的等式，为了讨论解方程，我们先来看看等式有什么性质．

像 $m+n=n+m$，$x+2x=3x$，$3\times3+1=5\times2$，$3x+1=5y$ 这样的式子，都是等式．我们可以用 $a=b$ 表示一般的等式．

请看图 3.1-1，由它你能发现什么规律？

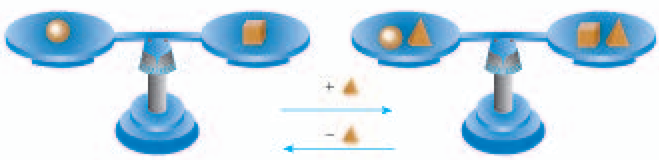


图 3.1-1

我们可以发现，如果在平衡的天平的两边都加（或减）同样的量，天平还保持平衡．

等式就像平衡的天平，它具有与上面的事实同样的性质．

**等式的性质 1**　**等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等．**

| |
|---|
| 如果 $a=b$，那么 $a\pm c=b\pm c$． |

请看图 3.1-2，由它你能发现什么规律？

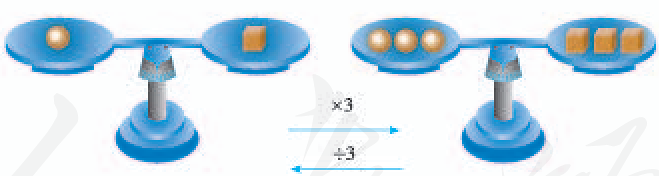



图 3.1-2

**等式的性质 2**　**等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等．**

| |
|---|
| 如果 $a=b$，那么 $ac=bc$； |
| 如果 $a=b$ $(c\neq0)$，那么 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$． |

**例 2** 利用等式的性质解下列方程：

（1）$x+7=26$；（2）$-5x=20$；（3）$-\frac{1}{3}x-5=4$.

**分析**：要使方程 $x+7=26$ 转化为 $x=a$（常数）的形式，需去掉方程左边的 7，利用等式的性质 1，方程两边减 7 就得出 $x$ 的值．你可以类似地考虑另两个方程如何转化为 $x=a$ 的形式．

**解**：（1）两边减 7，得

$$x+7-7=26-7.$$

于是

$$x=19.$$

（2）两边除以 $-5$，得

$$\frac{-5x}{-5}=\frac{20}{-5}.$$

于是

$$x=-4.$$

（3）两边加 5，得

$$-\frac{1}{3}x-5+5=4+5.$$

化简，得

$$-\frac{1}{3}x=9.$$

两边乘 $-3$，得

$$x=-27.$$

解以 $x$ 为未知数的方程，就是把方程逐步转化为 $x=a$（常数）的形式，等式的性质是转化的重要依据．

一般地，从方程解出未知数的值以后，可以代入原方程检验，看这个值能否使方程的两边相等．例如，

将 $x=-27$ 代入方程 $-\frac{1}{3}x-5=4$ 的左边，得

$$-\frac{1}{3}\times(-27)-5$$
$$=9-5=4.$$

方程的左右两边相等，所以 $x=-27$ 是方程 $-\frac{1}{3}x-5=4$ 的解．

## 练习

利用等式的性质解下列方程并检验：

(1) $x-5=6$；　(2) $0.3x=45$；

(3) $5x+4=0$；　(4) $2-\frac{1}{4}x=3$.

## 习题 3.1

### 复习巩固

1. 列等式表示：

(1) 比 $a$ 大 5 的数等于 8；

(2) $b$ 的三分之一等于 9；

(3) $x$ 的 2 倍与 10 的和等于 18；

(4) $x$ 的三分之一减 $y$ 的差等于 6；

(5) 比 $a$ 的 3 倍大 5 的数等于 $a$ 的 4 倍；

(6) 比 $b$ 的一半小 7 的数等于 $a$ 与 $b$ 的和.

第 1 题是把文字语言“翻译”成等式.

2. 列等式表示：

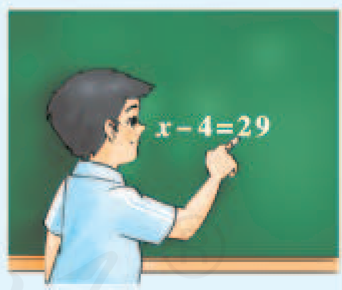
(1) 加法交换律；　(2) 乘法交换律；

(3) 分配律；　(4) 加法结合律.

3. $x=3$，$x=0$，$x=-2$，各是下列哪个方程的解？

(1) $5x+7=7-2x$；　(2) $6x-8=8x-4$；

(3) $3x-2=4+x$.




4. 用等式的性质解下列方程：

(1) $x-4=29$；　(2) $\frac{1}{2}x+2=6$；

(3) $3x+1=4$；　(4) $4x-2=2$.

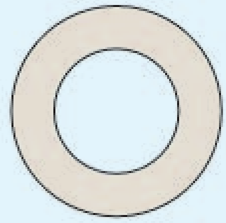
### 综合运用

列方程(第 5~10 题)：

5. 某校七年级 1 班共有学生 48 人，其中女生人数比男生人数的 $\frac{4}{5}$ 多 3 人，这个班有男生多少人？

6. 把 1 400 元奖学金按照两种奖项奖给 22 名学生，其中一等奖每人 200 元，二等奖每人 50 元. 获得一等奖的学生有多少人？

7. 今年上半年某镇居民人均可支配收入为5 109元，比去年同期增长了8.3%，去年同期这项收入为多少元？
8. 一辆汽车已行驶了12 000 km，计划每月再行驶800 km，几个月后这辆汽车将行驶20 800 km？
9. 圆环形状如图所示，它的面积是200 $cm^2$，外沿大圆的半径是10 cm，内沿小圆的半径是多少？


（第9题）

10. 七年级1班全体学生为地震灾区共捐款428元，七年级2班每个学生捐款10元，七年级1班所捐款数比七年级2班少22元．两班学生人数相同，每班有多少学生？

**拓广探索**

11. 一个两位数个位上的数是1，十位上的数是$x$．把1与$x$对调，新两位数比原两位数小18，$x$应是哪个方程的解？你能想出$x$是几吗？

## 阅读与思考

### “方程”史话

我们研究许多数学问题时，可以发现其中的未知数不是孤立的，它们与一些已知数之间有确定的联系，这种联系常常表现为一定的相等关系，把这种关系用数学形式写出来就是含有未知数的等式，这种等式的数学专有名称是方程．

人们对方程的研究可以上溯到很早以前．公元820年左右，中亚细亚的数学家阿尔-花拉子米曾写过一本名叫《对消与还原》的书，重点讨论方程的解法，这本书对后来数学的发展产生了很大影响．

在很长时期内，方程没有专门的表达形式，而是使用一般的语言文字来叙述它们．17世纪时，法国数学家笛卡儿最早提出用$x$，$y$，$z$这样的字母表示未知数，把这些字母与普通数字同样看待，用运算符号和等号将字母与数字连接起来，就形成含有未知数的等式．后来经过不断的简化改进，方程逐渐演变成现在的表达形式，例如$5x+7=16$，$x^2-4=0$，$3x+4y=5$等．

中国人对方程的研究有悠久的历史．汉语中“方程”一词最初源于讨论含多个未知数的问题．著名中国古代数学著作《九章算术》大约成书于公元前200～前50年，其中有专门以“方程”命名的一章，其中以一些实际应用问题为例，给出了列由几个方程组成的方程组的解题方法．中国古代数学家表示方程时，只用算筹表示各未知数的系数，而没有

使用专门的记法来表示未知数．按照这样的表示法，方程组被排列成长方形的数字阵，这与现在代数学中的矩阵非常接近．宋元时期，中国数学家创立了“天元术”，用“天元”表示未知数进而建立方程．这种方法的代表作是数学家李冶写的《测圆海镜》（1248 年），书中所说的“立天元一”相当于现在的“设未知数 $x$”．1859 年，中国清代数学家李善兰翻译外国数学著作时，开始将 equation（指含有未知数的等式）一词译为“方程”，即将含有未知数的一个等式称为方程，而将含有未知数的多个等式的组合称为方程组，至今一直这样沿用．

李善兰
(1811—1882)

随着数学的研究范围不断扩充，方程被普遍使用，它的作用越来越重要．从初等数学中的简单代数方程，到高等数学中的微分方程、积分方程，方程的类型由简单到复杂不断地发展．但是，无论方程的类型如何变化，形形色色的方程都是含有未知数的等式，都表达涉及未知数的相等关系；解方程的基本思想都是依据相等关系使未知数逐步化归为用已知数表达的形式．这正是方程的本质所在．

# 3.2 解一元一次方程（一）
## ——合并同类项与移项

我们已经知道，直接利用等式的基本性质可以解简单的方程，本节重点讨论如何利用“合并同类项”和“移项”解一元一次方程.

约公元 820 年，中亚细亚数学家阿尔-花拉子米写了一本代数书，重点论述怎样解方程．这本书的拉丁文译本取名为《对消与还原》．“对消”与“还原”是什么意思呢？我们先讨论下面的内容，然后再回答这个问题.

**问题 1**　某校三年共购买计算机 140 台，去年购买数量是前年的 2 倍，今年购买数量又是去年的 2 倍．前年这个学校购买了多少台计算机？

设前年购买计算机 $x$ 台．可以表示出：去年购买计算机 $2x$ 台，今年购买计算机 $4x$ 台．根据问题中的相等关系：前年购买量＋去年购买量＋今年购买量＝140 台，列得方程

$$x+2x+4x=140.$$

把含有 $x$ 的项合并同类项，得

$$7x=140.$$

下面的框图表示了解这个方程的流程：

$$\boxed{x+2x+4x=140}$$
$$\Big\downarrow\ \text{合并同类项}$$
$$\boxed{7x=140}$$
$$\Big\downarrow\ \text{系数化为 1}$$
$$\boxed{x=20}$$

回顾本题列方程的过程，可以发现：“总量＝各部分量的和”是一个基本的相等关系.

由上可知，前年这个学校购买了 20 台计算机.

**思考**

上面解方程中“合并同类项”起了什么作用？

**例 1** 解下列方程：

(1) $2x-\frac{5}{2}x=6-8$； (2) $7x-2.5x+3x-1.5x=-15\times 4-6\times 3$.

**解：**(1) 合并同类项，得

$$-\frac{1}{2}x=-2.$$

系数化为 1，得

$$x=4.$$

(2) 合并同类项，得

$$6x=-78.$$

系数化为 1，得

$$x=-13.$$

**例 2** 有一列数，按一定规律排列成 1，−3，9，−27，81，−243，…. 其中某三个相邻数的和是−1 701，这三个数各是多少？

**分析：**从符号和绝对值两方面观察，可发现这列数的排列规律：后面的数是它前面的数与−3 的乘积. 如果三个相邻数中的第 1 个记为 $x$，则后两个数分别是 $-3x$，$9x$.

**解：**设所求三个数分别是 $x$，$-3x$，$9x$.

由三个数的和是−1 701，得

$$x-3x+9x=-1\ 701.$$

合并同类项，得

$$7x=-1\ 701.$$

系数化为 1，得

$$x=-243.$$

所以

$$-3x=729,$$

$$9x=-2\ 187.$$

**答：**这三个数是−243，729，−2 187.

知道三个数中的某个，就能知道另两个吗？

## 练习

1. 解下列方程：

(1) $5x-2x=9$；　　(2) $\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}=7$；

(3) $-3x+0.5x=10$；　　(4) $7x-4.5x=2.5\times3-5$.

2. 某工厂的产值连续增长，去年是前年的 1.5 倍，今年是去年的 2 倍，这三年的总产值为 550 万元. 前年的产值是多少？

**问题 2** 把一些图书分给某班学生阅读，如果每人分 3 本，则剩余 20 本；如果每人分 4 本，则还缺 25 本. 这个班有多少学生？

这批书的总数有几种表示法？它们之间有什么关系？本题哪个相等关系可作为列方程的依据呢？

设这个班有 $x$ 名学生.

每人分 3 本，共分出 $3x$ 本，加上剩余的 20 本，这批书共 $(3x+20)$ 本.

每人分 4 本，需要 $4x$ 本，减去缺的 25 本，这批书共 $(4x-25)$ 本.

这批书的总数是一个定值，表示它的两个式子应相等，根据这一相等关系列得方程

$$3x+20=4x-25.$$

### 思考

方程 $3x+20=4x-25$ 的两边都有含 $x$ 的项($3x$ 与 $4x$)和不含字母的常数项(20 与 $-25$)，怎样才能使它向 $x=a$(常数)的形式转化呢？

为了使方程的右边没有含 $x$ 的项，等号两边减 $4x$；为了使左边没有常数项，等号两边减 20. 利用等式的性质 1，得

$$3x-4x=-25-20.$$

上面方程的变形，相当于把原方程左边的 20 变为 $-20$ 移到右边，把右边的 $4x$ 变为 $-4x$ 移到左边. 把某项从等式一边移到另一边时有什么变化？

像上面那样把等式一边的某项变号后移到另一边，叫做**移项**.

下面的框图表示了解这个方程的流程.

$$\boxed{3x+20=4x-25}$$

$$\downarrow \text{移项}$$

$$\boxed{3x-4x=-25-20}$$

$$\downarrow \text{合并同类项}$$

$$\boxed{-x=-45}$$

$$\downarrow \text{系数化为 1}$$

$$\boxed{x=45}$$

回顾本题列方程的过程，可以发现："表示同一个量的两个不同的式子相等"是一个基本的相等关系.

由上可知，这个班有 45 名学生.

**思考**

上面解方程中"移项"起了什么作用？

解方程时经常要"合并同类项"和"移项"，前面提到的古老的代数书中的"对消"和"还原"，指的就是"合并同类项"和"移项". 早在一千多年前，数学家阿尔-花拉子米就已经对"合并同类项"和"移项"非常重视了.

**例 3** 解下列方程：

(1) $3x+7=32-2x$；  (2) $x-3=\frac{3}{2}x+1$.

**解：**(1) 移项，得

$$3x+2x=32-7.$$

合并同类项，得

$$5x=25.$$

系数化为 1，得

$$x=5.$$

(2) 移项，得

$$x-\frac{3}{2}x=1+3.$$

合并同类项，得

$$-\frac{1}{2}x=4.$$

系数化为 1，得

$$x=-8.$$

**例 4** 某制药厂制造一批药品，如用旧工艺，则废水排量要比环保限制的最大量还多 200 t；如用新工艺，则废水排量比环保限制的最大量少 100 t. 新、旧工艺的废水排量之比为 2∶5，两种工艺的废水排量各是多少？

**分析**：因为新、旧工艺的废水排量之比为 2∶5，所以可设它们分别为 $2x$ t 和 $5x$ t，再根据它们与环保限制的最大量之间的关系列方程.

**解**：设新、旧工艺的废水排量分别为 $2x$ t 和 $5x$ t.

等号两边代表哪个数量？

根据废水排量与环保限制最大量之间的关系，得

$$5x-200=2x+100.$$

移项，得

$$5x-2x=100+200.$$

合并同类项，得

$$3x=300.$$

系数化为 1，得

$$x=100.$$

所以

$$2x=200,$$

$$5x=500.$$

**答**：新、旧工艺产生的废水排量分别为 200 t 和 500 t.



**练习**

1. 解下列方程：
   (1) $6x-7=4x-5$；
   (2) $\frac{1}{2}x-6=\frac{3}{4}x$.
2. 王芳和李丽同时采摘樱桃，王芳平均每小时采摘 8 kg，李丽平均每小时采摘 7 kg. 采摘结束后王芳从她采摘的樱桃中取出 0.25 kg 给了李丽，这时两人的樱桃一样多. 她们采摘用了多少时间？

## 习题 3.2

### 复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $2x+3x+4x=18$；　　(2) $13x-15x+x=-3$；

(3) $2.5y+10y-6y=15-21.5$；　　(4) $\frac{1}{2}b-\frac{2}{3}b+b=\frac{2}{3}\times6-1$.

2. 举例说明解方程时怎样“移项”，你知道这样做的根据吗？

3. 解下列方程：

(1) $x+3x=-16$；　　(2) $16y-2.5y-7.5y=5$；

(3) $3x+5=4x+1$；　　(4) $9-3y=5y+5$.

4. 用方程解答下列问题：

(1) $x$ 的 5 倍与 2 的和等于 $x$ 的 3 倍与 4 的差，求 $x$；

(2) $y$ 与 $-5$ 的积等于 $y$ 与 5 的和，求 $y$.

5. 小新出生时父亲 28 岁，现在父亲的年龄是小新年龄的 3 倍，求现在小新的年龄.

6. 洗衣机厂今年计划生产洗衣机 25 500 台，其中Ⅰ型、Ⅱ型、Ⅲ型三种洗衣机的数量比为 1∶2∶14，计划生产这三种洗衣机各多少台？

7. 用一根长 60 m 的绳子围出一个长方形，使它的长是宽的 1.5 倍，长和宽各应是多少？

### 综合运用

8. 随着农业技术的现代化，节水型灌溉得到逐步推广．喷灌和滴灌是比漫灌节水的灌溉方式．灌溉三块同样大的实验田，第一块用漫灌方式，第二块用喷灌方式，第三块用滴灌方式．后两种方式用水量分别是漫灌的 25% 和 15%.

(1) 设第一块实验田用水 $x$ t，则另两块实验田的用水量各如何表示？

(2) 如果三块实验田共用水 420 t，每块实验田各用水多少吨？

9. 某造纸厂为节约木材，大力扩大再生纸的生产．它去年 10 月生产再生纸 2 050 t，这比它前年 10 月再生纸产量的 2 倍还多 150 t．它前年 10 月生产再生纸多少吨？

10. 把一根长 100 cm 的木棍锯成两段，要使其中一段长比另一段长的 2 倍少 5 cm，应该在木棍的哪个位置锯开？

11. 几个人共同种一批树苗，如果每人种 10 棵，则剩下 6 棵树苗未种；如果每人种 12 棵，则缺 6 棵树苗．求参与种树的人数.

**拓广探索**

12. 在一张普通的月历中，相邻三行里同一列的三个日期数之和能否为 30？如果能，这三个数分别是多少？

13. 一个两位数的个位上的数的 3 倍加 1 是十位上的数，个位上的数与十位上的数的和等于 9，这个两位数是多少？

## 实验与探究

### 无限循环小数化分数

我们知道分数 $\frac{1}{3}$ 写为小数形式即 $0.\dot{3}$，反过来，无限循环小数 $0.\dot{3}$ 写为分数形式即 $\frac{1}{3}$. 一般地，任何一个无限循环小数都可以写为分数形式吗？如果可以，应怎样写呢？

先以无限循环小数 $0.\dot{7}$ 为例进行讨论.

设 $0.\dot{7}=x$，由 $0.\dot{7}=0.777\cdots$ 可知，$10x=7.777\cdots$，所以 $10x-x=7$. 解方程，得 $x=\frac{7}{9}$. 于是，得 $0.\dot{7}=\frac{7}{9}$.

想一想：如何把像 $0.\dot{1}$，$0.\dot{2}$，…，$0.\dot{9}$ 这样的无限循环小数化为分数形式？动手试一试.

再以无限循环小数 $0.\dot{7}\dot{3}$ 为例，做进一步的讨论.

无限循环小数 $0.\dot{7}\dot{3}=0.737\ 373\cdots$，它的循环节有两位，类比上面的讨论可以想到如下的做法.

设 $0.\dot{7}\dot{3}=x$，由 $0.\dot{7}\dot{3}=0.737\ 373\cdots$ 可知，$100x=73.737\ 3\cdots$，所以 $100x-x=73$. 解方程，得 $x=\frac{73}{99}$. 于是，得 $0.\dot{7}\dot{3}=\frac{73}{99}$.

想一想：如何把像 $0.\dot{1}\dot{0}$，$0.\dot{1}\dot{2}$，…，$0.\dot{9}\dot{8}$ 这样的无限循环小数化为分数形式？动手试一试.

想一想：如何把无限循环小数 $0.\dot{7}3\dot{5}$，$0.\dot{8}23\dot{1}$ 化为分数形式？动手试一试，并总结把无限循环小数化为分数形式的一般规律.

# 3.3 解一元一次方程（二）
## ——去括号与去分母

当方程的形式较复杂时，解方程的步骤也相应更多些．本节重点讨论如何利用“去括号”和“去分母”解一元一次方程．

**问题 1** 某工厂加强节能措施，去年下半年与上半年相比，月平均用电量减少 2 000 kW·h（千瓦·时），全年用电 15 万 kW·h．这个工厂去年上半年每月平均用电是多少？

设上半年每月平均用电 $x$ kW·h，则下半年每月平均用电（$x-2\ 000$）kW·h；上半年共用电 $6x$ kW·h，下半年共用电 $6(x-2\ 000)$ kW·h．

根据全年用电 15 万 kW·h，列得方程

$$6x+6(x-2\ 000)=150\ 000.$$

如果去括号，就能简化方程的形式．

下面的框图表示了解这个方程的流程．

> 1 kW·h 的电量即 1 kW 的电器 1 h 的用电量．

$$\boxed{6x+6(x-2\ 000)=150\ 000}$$
$$\downarrow \text{去括号}$$
$$\boxed{6x+6x-12\ 000=150\ 000}$$
$$\downarrow \text{移项}$$
$$\boxed{6x+6x=150\ 000+12\ 000}$$
$$\downarrow \text{合并同类项}$$
$$\boxed{12x=162\ 000}$$
$$\downarrow \text{系数化为 1}$$
$$\boxed{x=13\ 500}$$

由上可知，这个工厂去年上半年每月平均用电 13 500 kW·h．

**思考**

本题还有其他列方程的方法吗？用其他方法列出的方程应怎样解？

方程中有带括号的式子时，去括号是常用的化简步骤.

**例 1** 解下列方程：

(1) $2x-(x+10)=5x+2(x-1)$;

(2) $3x-7(x-1)=3-2(x+3)$.

**解**：(1) 去括号，得

$$2x-x-10=5x+2x-2.$$

移项，得

$$2x-x-5x-2x=-2+10.$$

合并同类项，得

$$-6x=8.$$

系数化为 1，得

$$x=-\frac{4}{3}.$$

(2) 去括号，得

$$3x-7x+7=3-2x-6.$$

移项，得

$$3x-7x+2x=3-6-7.$$

合并同类项，得

$$-2x=-10.$$

系数化为 1，得

$$x=5.$$

**例 2** 一艘船从甲码头到乙码头顺流而行，用了 2 h；从乙码头返回甲码头逆流而行，用了 2.5 h. 已知水流的速度是 3 km/h，求船在静水中的平均速度.

**分析**：一般情况下可以认为这艘船往返的路程相等，由此填空：

顺流速度_____顺流时间_____逆流速度_____逆流时间.

**解**：设船在静水中的平均速度为 $x$ km/h，则顺流速度为 $(x+3)$ km/h，逆流速度为 $(x-3)$ km/h.

根据往返路程相等，列得

$$2(x+3)=2.5(x-3).$$

去括号，得

$$2x+6=2.5x-7.5.$$

移项及合并同类项，得

$$0.5x=13.5.$$

系数化为 1，得

$$x=27.$$

**答：**船在静水中的平均速度为 27 km/h.

**练习**

解下列方程：

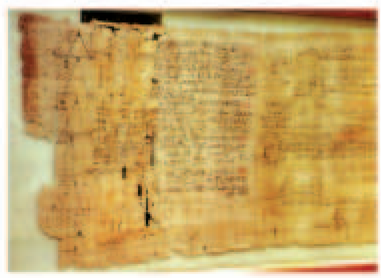
(1) $2(x+3)=5x$；

(2) $4x+3(2x-3)=12-(x+4)$；

(3) $6\left(\frac{1}{2}x-4\right)+2x=7-\left(\frac{1}{3}x-1\right)$；

(4) $2-3(x+1)=1-2(1+0.5x)$.

英国伦敦博物馆保存着一部极其珍贵的文物——纸草书．这是古代埃及人用象形文字写在一种用纸莎草压制成的草片上的著作，它于公元前 1700 年左右写成．这部书中记载了许多有关数学的问题，下面的问题 2 就是书中一道著名的求未知数的问题．



**问题 2**　一个数，它的三分之二，它的一半，它的七分之一，它的全部，加起来总共是 33.

这个问题可以用现在的数学符号表示．设这个数是 $x$，根据题意得方程

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=33.$$

当时的埃及人如果采用了这种形式，它一定是“最早”的方程.

这样的方程中有些系数是分数，如果能化去分母，把系数化成整数，则可以使解方程中的计算更简便些.

我们知道，等式两边乘同一个数，结果仍相等．这个方程中各分母的最小公倍数是 42，方程两边乘 42，得

$$42\times\frac{2}{3}x+42\times\frac{1}{2}x+42\times\frac{1}{7}x+42x=42\times33,$$

即

$$28x+21x+6x+42x=1\ 386.$$

合并同类项，得

$$97x=1\ 386.$$

系数化为 1，得

$$x=\frac{1\ 386}{97}.$$

为更全面地讨论问题，我们再以方程 $\frac{3x+1}{2}-2=\frac{3x-2}{10}-\frac{2x+3}{5}$ 为例，看看解有分数系数的一元一次方程的步骤.

这个方程中各分母的最小公倍数是 10，方程两边乘 10，于是方程左边变为

$$10\times\left(\frac{3x+1}{2}-2\right)=10\times\frac{3x+1}{2}-10\times2=5(3x+1)-10\times2,$$

去了分母，方程右边变为什么？你具体算算.

下面的框图表示了解这个方程的流程.

$$\boxed{\frac{3x+1}{2}-2=\frac{3x-2}{10}-\frac{2x+3}{5}}$$

↓ 去分母（方程两边乘各分母的最小公倍数）

$$\boxed{5(3x+1)-10\times2=(3x-2)-2(2x+3)}$$

↓ 去括号

$$\boxed{15x+5-20=3x-2-4x-6}$$

↓ 移项

$$\boxed{15x-3x+4x=-2-6-5+20}$$

↓ 合并同类项

$$\boxed{16x=7}$$

↓ 系数化为 1

$$\boxed{x=\frac{7}{16}}$$

方程两边的每一项都要乘 10.

## 归纳

解一元一次方程的一般步骤包括：去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 等. 通过这些步骤可以使以 $x$ 为未知数的方程逐步向着 $x=a$ 的形式转化，这个过程主要依据等式的基本性质和运算律等.

**例 3** 解下列方程：

(1) $\frac{x+1}{2}-1=2+\frac{2-x}{4}$；　　(2) $3x+\frac{x-1}{2}=3-\frac{2x-1}{3}$.

**解：**(1) 去分母（方程两边乘 4），得

$$2(x+1)-4=8+(2-x).$$

去括号，得

$$2x+2-4=8+2-x.$$

移项，得

$$2x+x=8+2-2+4.$$

合并同类项，得

$$3x=12.$$

系数化为 1，得

$$x=4.$$

(2) 去分母（方程两边乘 6），得

$$18x+3(x-1)=18-2(2x-1).$$

去括号，得

$$18x+3x-3=18-4x+2.$$

移项，得

$$18x+3x+4x=18+2+3.$$

合并同类项，得

$$25x=23.$$

系数化为 1，得

$$x=\frac{23}{25}.$$

在本章第一个问题中，我们根据路程、速度和时间三者的关系，列出方程 $\frac{x}{60}-\frac{x}{70}=1$. 现在你一定会解它了．去分母（方程两边乘 420），得 $7x-6x=420$，$x=420$. 于是得出两地间的路程为 420 km.

**练习**

解下列方程：

(1) $\frac{19}{100}x=\frac{21}{100}(x-2)$；

(2) $\frac{x+1}{2}-2=\frac{x}{4}$；

(3) $\frac{5x-1}{4}=\frac{3x+1}{2}-\frac{2-x}{3}$；

(4) $\frac{3x+2}{2}-1=\frac{2x-1}{4}-\frac{2x+1}{5}$.

## 习题 3.3

### 复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $5a+(2-4a)=0$；

(2) $25b-(b-5)=29$；

(3) $7x+2(3x-3)=20$；

(4) $8y-3(3y+2)=6$.

2. 解下列方程：

(1) $2(x+8)=3(x-1)$；

(2) $8x=-2(x+4)$；

(3) $2x-\frac{2}{3}(x+3)=-x+3$；

(4) $2(10-0.5y)=-(1.5y+2)$.

3. 解下列方程：

(1) $\frac{3x+5}{2}=\frac{2x-1}{3}$；

(2) $\frac{x-3}{-5}=\frac{3x+4}{15}$；

(3) $\frac{3y-1}{4}-1=\frac{5y-7}{6}$；

(4) $\frac{5y+4}{3}+\frac{y-1}{4}=2-\frac{5y-5}{12}$.

4. 用方程解答下列问题：

(1) $x$ 与 4 之和的 1.2 倍等于 $x$ 与 14 之差的 3.6 倍，求 $x$；

(2) $y$ 的 3 倍与 1.5 之和的二分之一等于 $y$ 与 1 之差的四分之一，求 $y$.

### 综合运用

5. 张华和李明登一座山，张华每分登高 10 m，并且先出发 30 min（分），李明每分登高 15 m，两人同时登上山顶．设张华登山用了 $x$ min，如何用含 $x$ 的式子表示李明登山所用时间？试用方程求 $x$ 的值，由 $x$ 的值能求出山高吗？如果能，山高多少米？

6. 两辆汽车从相距 84 km 的两地同时出发相向而行，甲车的速度比乙车的速度快 20 km/h，半小时后两车相遇，两车的速度各是多少？

7. 在风速为 24 km/h 的条件下，一架飞机顺风从 A 机场飞到 B 机场要用 2.8 h，它逆风飞行同样的航线要用 3 h. 求：(1) 无风时这架飞机在这一航线的平均航速；(2) 两机场之间的航程.

8. 买两种布料共 138 m，花了 540 元. 其中蓝布料每米 3 元，黑布料每米 5 元，两种布料各买了多少米？

## 拓广探索

9. 有一些相同的房间需要粉刷墙面. 一天 3 名一级技工去粉刷 8 个房间，结果其中有 50 $m^2$ 墙面未来得及粉刷；同样时间内 5 名二级技工粉刷了 10 个房间之外，还多粉刷了另外的 40 $m^2$ 墙面. 每名一级技工比二级技工一天多粉刷 10 $m^2$ 墙面，求每个房间需要粉刷的墙面面积.

10. 王力骑自行车从 A 地到 B 地，陈平骑自行车从 B 地到 A 地，两人都沿同一公路匀速前进，已知两人在上午 8 时同时出发，到上午 10 时，两人还相距 36 km，到中午 12 时，两人又相距 36 km. 求 A，B 两地间的路程.

11. 一列火车匀速行驶，经过一条长 300 m 的隧道需要 20 s 的时间. 隧道的顶上有一盏灯，垂直向下发光，灯光照在火车上的时间是 10 s.
    (1) 设火车的长度为 $x$ m，用含 $x$ 的式子表示：从车头经过灯下到车尾经过灯下火车所走的路程和这段时间内火车的平均速度；
    (2) 设火车的长度为 $x$ m，用含 $x$ 的式子表示：从车头进入隧道到车尾离开隧道火车所走的路程和这段时间内火车的平均速度；
    (3) 上述问题中火车的平均速度发生了变化吗？
    (4) 求这列火车的长度.

# 3.4 实际问题与一元一次方程

从前面的讨论中已经可以看出，方程是分析和解决问题的一种很有用的数学工具．本节我们重点讨论如何用一元一次方程解决实际问题．

**例 1** 某车间有 22 名工人，每人每天可以生产 1 200 个螺柱或 2 000 个螺母．1 个螺柱需要配 2 个螺母，为使每天生产的螺柱和螺母刚好配套，应安排生产螺柱和螺母的工人各多少名？

**分析：** 每天生产的螺母数量是螺柱数量的 2 倍时，它们刚好配套．

**解：** 设应安排 $x$ 名工人生产螺柱，$(22-x)$ 名工人生产螺母．

根据螺母数量应是螺柱数量的 2 倍，列出方程

$$2\,000(22-x)=2\times1\,200x.$$

解方程，得

$$5(22-x)=6x,$$
$$110-5x=6x,$$
$$11x=110,$$
$$x=10.$$
$$22-x=12.$$

**答：** 应安排 10 名工人生产螺柱，12 名工人生产螺母．

如果设 $x$ 名工人生产螺母，怎样列方程？

这类问题中配套的物品之间具有一定的数量关系，这可以作为列方程的依据．

**例 2** 整理一批图书，由一个人做要 40 h 完成．现计划由一部分人先做 4 h，然后增加 2 人与他们一起做 8 h，完成这项工作．假设这些人的工作效率相同，具体应先安排多少人工作？

**分析：** 如果把总工作量设为 1，则人均效率（一个人 1 h 完成的工作量）为$\frac{1}{40}$，$x$ 人先做 4 h 完成的工作量为$\frac{4x}{40}$，增加 2 人后再做 8 h 完成的工作量为$\frac{8(x+2)}{40}$，这两个工作量之和应等于总工作量．

**解：** 设安排 $x$ 人先做 4 h.

根据先后两个时段的工作量之和应等于总工作量，列出方程

$$\frac{4x}{40}+\frac{8(x+2)}{40}=1.$$

解方程，得

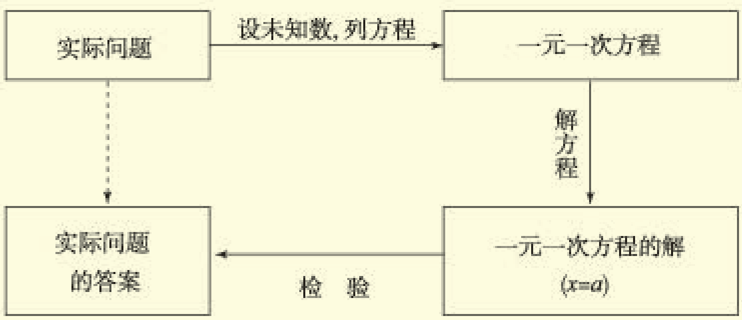
$$4x+8(x+2)=40,$$
$$4x+8x+16=40,$$
$$12x=24,$$
$$x=2.$$

**答：** 应安排 2 人先做 4 h.

> 这类问题中常常把总工作量看作 1，并利用“工作量＝人均效率×人数×时间”的关系考虑问题.

## 归纳

用一元一次方程解决实际问题的基本过程如下：




这一过程一般包括设、列、解、检、答等步骤，即设未知数，列方程，解方程，检验所得结果，确定答案. 正确分析问题中的相等关系是列方程的基础.

## 练习

1. 一套仪器由一个 A 部件和三个 B 部件构成. 用 1 $m^3$ 钢材可做 40 个 A 部件或 240 个 B 部件. 现要用 6 $m^3$ 钢材制作这种仪器，应用多少钢材做 A 部件，多少钢材做 B 部件，恰好配成这种仪器多少套？
2. 一条地下管线由甲工程队单独铺设需要 12 天，由乙工程队单独铺设需要 24 天. 如果由这两个工程队从两端同时施工，要多少天可以铺好这条管线？

有些实际问题中，数量关系比较隐蔽，需要仔细分析才能列出方程．下面我们进一步探究几个这样的问题．

**探究1**

**销售中的盈亏**

一商店在某一时间以每件 60 元的价格卖出两件衣服，其中一件盈利 25%，另一件亏损 25%，卖这两件衣服总的是盈利还是亏损，或是不盈不亏？


**分析：**两件衣服共卖了 120(=60×2)元，是盈是亏要看这家商店买进这两件衣服时花了多少钱．如果进价大于售价就亏损，反之就盈利．

先大体估算盈亏，再通过准确计算检验你的判断．

假设一件商品的进价是 40 元，如果卖出后盈利 25%，那么商品利润是40×25%元；如果卖出后亏损 25%，商品利润是 40×(−25%)元．

本问题中，设盈利 25%的那件衣服的进价是 $x$ 元，它的商品利润就是 $0.25x$ 元．根据进价与利润的和等于售价，列出方程

$$x+0.25x=60.$$

由此得

$$x=48.$$

类似地，可以设另一件衣服的进价为 $y$ 元，它的商品利润是 $-0.25y$ 元，列出方程

$$y-0.25y=60.$$

由此得

$$y=80.$$

两件衣服的进价是 $x+y=128$ 元，而两件衣服的售价是 60+60=120 元，进价大于售价，由此可知卖这两件衣服总共亏损 8 元．

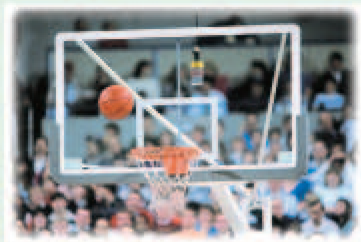
列、解方程后得出的结论与你先前的估算一致吗？通过对本题的探究，你对方程在实际问题中的应用有什么新的认识？

**探究2**

**球赛积分表问题**

某次篮球联赛积分榜

| 队　名 | 比赛场次 | 胜场 | 负场 | 积分 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 前进 | 14 | 10 | 4 | 24 |
| 东方 | 14 | 10 | 4 | 24 |
| 光明 | 14 | 9 | 5 | 23 |
| 蓝天 | 14 | 9 | 5 | 23 |
| 雄鹰 | 14 | 7 | 7 | 21 |
| 远大 | 14 | 7 | 7 | 21 |
| 卫星 | 14 | 4 | 10 | 18 |
| 钢铁 | 14 | 0 | 14 | 14 |



(1) 用式子表示总积分与胜、负场数之间的数量关系；

(2) 某队的胜场总积分能等于它的负场总积分吗？

**分析**：观察积分榜，从最下面一行数据可以看出：负一场积 1 分.

通过观察积分表，你能选择出其中哪一行最能说明负一场积几分吗？

设胜一场积 $x$ 分，从表中其他任何一行可以列方程，求出 $x$ 的值. 例如，从第一行得方程

$$10x+1\times4=24.$$

由此得

$$x=2.$$

用积分榜中其他行可以验证，得出结论：负一场积1 分，胜一场积 2 分.

(1) 如果一个队胜 $m$ 场，则负$(14-m)$场，胜场积分为 $2m$，负场积分为 $14-m$，总积分为

$$2m+(14-m)=m+14.$$

(2) 设一个队胜了 $x$ 场，则负了$(14-x)$场. 如果这个队的胜场总积分等于负场总积分，则得方程

$$2x=14-x.$$

由此得

$$x=\frac{14}{3}.$$

想一想，$x$ 表示什么量？它可以是分数吗？由此你能得出什么结论？

解决实际问题时，要考虑得到的结果是不是符合实际. $x$（所胜的场数）的值必须是整数，所以 $x=\frac{14}{3}$ 不符合实际，由此可以判定没有哪个队的胜场总积分等于负场总积分.

这个问题说明：利用方程不仅能求具体数值，而且可以进行推理判断.

上面的问题说明，用方程解决实际问题时，不仅要注意解方程的过程是否正确，还要检验方程的解是否符合问题的实际意义.

**探究3**

**电话计费问题**

下表中有两种移动电话计费方式.

| | 月使用费/元 | 主叫限定时间/min | 主叫超时费/(元/min) | 被叫 |
|---|---|---|---|---|
| 方式一 | 58 | 150 | 0.25 | 免费 |
| 方式二 | 88 | 350 | 0.19 | 免费 |

考虑下列问题：

(1) 设一个月内用移动电话主叫为 $t$ min（$t$ 是正整数）. 根据上表，列表说明：当 $t$ 在不同时间范围内取值时，按方式一和方式二如何计费.

(2) 观察你的列表，你能从中发现如何根据主叫时间选择省钱的计费方式吗？通过计算验证你的看法.

月使用费固定收；主叫不超限定时间不再收费，主叫超时部分加收超时费；被叫免费.

**分析：**(1) 由上表可知，计费与主叫时间相关，计费时首先要看主叫是否超过限定时间. 因此，考虑 $t$ 的取值时，两个主叫限定时间 150 min 和350 min 是不同时间范围的划分点.

当 $t$ 在不同时间范围内取值时，方式一和方式二的计费如下页表：

| 主叫时间 $t$/min | 方式一计费/元 | 方式二计费/元 |
|---|---|---|
| $t$ 小于 150 | 58 | 88 |
| $t=150$ | 58 | 88 |
| $t$ 大于 150 且小于 350 | $58+0.25(t-150)$ | 88 |
| $t=350$ | $58+0.25(350-150)=108$ | 88 |
| $t$ 大于 350 | $58+0.25(t-150)$ | $88+0.19(t-350)$ |

（2）观察（1）中的表，可以发现：主叫时间超出限定时间越长，计费越多，并且随着主叫时间的变化，按哪种方式的计费少也会变化．下面比较不同时间范围内方式一和方式二的计费情况．

①当 $t$ 小于或等于 150 时，按方式一的计费少．

②当 $t$ 从 150 增加到 350 时，按方式一的计费由 58 元增加到 108 元，而按方式二的计费一直是 88 元．因此，当 $t$ 大于 150 并且小于 350 时，可能在某主叫时间按方式一和方式二的计费相等．列方程

$$58+0.25(t-150)=88,$$

解得

$$t=270.$$

因此，如果主叫时间恰是 270 min，按两种方式的计费相等，都是 88 元；如果主叫时间大于 150 min 且小于 270 min，按方式一的计费少于按方式二的计费（88 元）；如果主叫时间大于 270 min 且小于 350 min，按方式一的计费多于按方式二的计费（88 元）．

③当 $t=350$ 时，按方式二的计费少．

④当 $t$ 大于 350 时，可以看出，按方式一的计费为 108 元加上超过 350 min 部分的超时费（$0.25(t-350)$），按方式二的计费为 88 元加上超过 350 min 部分的超时费（$0.19(t-350)$），按方式二的计费少．

当 $t$ 大于 350 时，按方式一的计费 $58+0.25(t-150)$ 可变形为 $108+0.25(t-350)$．对比按方式二的计费，你能说明此时按哪种方式的计费少吗？

综合以上的分析，可以发现：

________________时，选择方案一省钱；

________________时，选择方案二省钱．

选一些具体数字，通过计算验证你的发现是否正确．

练习

1. 某商店有两种书包，每个小书包比大书包的进价少 10 元，而它们的售后利润额相同．其中，每个小书包的盈利率为 30%，每个大书包的盈利率为 20%，试求两种书包的进价．
2. 用 A4 纸在某誊印社复印文件，复印页数不超过 20 时，每页收费 0.12 元；复印页数超过 20 时，超过部分每页收费降为 0.09 元．在某图书馆复印同样的文件，不论复印多少页，每页收费 0.1 元．复印张数为多少时，两处的收费相同？
3. 下表是某校七～九年级某月课外兴趣小组活动时间统计表，其中各年级同一兴趣小组每次活动时间相同．

| | 课外小组活动总时间/h | 文艺小组活动次数 | 科技小组活动次数 |
| --- | --- | --- | --- |
| 七年级 | 12.5 | 4 | 3 |
| 八年级 | 10.5 | 3 | 3 |
| 九年级 | 7 | | |

请将九年级课外兴趣小组活动次数填入上表．

## 习题 3.4

### 复习巩固

1. 结合本节内容体会例 2 后归纳的框图．
2. 制作一张桌子要用一个桌面和 4 条桌腿，1 $m^3$ 木材可制作 20 个桌面，或者制作 400 条桌腿，现有 12 $m^3$ 木材，应怎样计划用料才能制作尽可能多的桌子？
3. 某车间每天能制作甲种零件 500 只，或者制作乙种零件 250 只，甲、乙两种零件各一只配成一套产品，现要在 30 天内制作最多的成套产品，则甲、乙两种零件各应制作多少天？
4. 某中学的学生自己动手整修操场，如果让七年级学生单独工作，需要 7.5 h 完成；如果让八年级学生单独工作，需要 5 h 完成．如果让七、八年级学生一起工作 1 h，再由八年级学生单独完成剩余部分，共需多少时间完成？
5. 整理一批数据，由一人做需 80 h 完成．现在计划先由一些人做 2 h，再增加 5 人

做 8 h，完成这项工作的$\frac{3}{4}$. 怎样安排参与整理数据的具体人数？

## 综合运用

6. (古代问题)某人工作一年的报酬是年终给他一件衣服和 10 枚银币，但他干满 7 个月就决定不再继续干了，结账时，给了他一件衣服和 2 枚银币. 这件衣服值多少枚银币？

7. 用 A 型和 B 型机器生产同样的产品，已知 5 台 A 型机器一天的产品装满 8 箱后还剩 4 个，7 台 B 型机器一天的产品装满 11 箱后还剩 1 个，每台 A 型机器比 B 型机器一天多生产 1 个产品，求每箱装多少个产品.

8. 下表中记录了一次试验中时间和温度的数据.

| 时间/min | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 温度/℃ | 10 | 25 | 40 | 55 | 70 | 85 |

(1) 如果温度的变化是均匀的，21 min 时的温度是多少？

(2) 什么时间的温度是 34 ℃？

9. 某糕点厂中秋节前要制作一批盒装月饼，每盒中装 2 块大月饼和 4 块小月饼. 制作 1 块大月饼要用 0.05 kg 面粉，1 块小月饼要用 0.02 kg 面粉. 现共有面粉 4 500 kg，制作两种月饼应各用多少面粉，才能生产最多的盒装月饼？

10. 小刚和小强从 A，B 两地同时出发，小刚骑自行车，小强步行，沿同一条路线相向匀速而行. 出发后 2 h 两人相遇. 相遇时小刚比小强多行进 24 km，相遇后 0.5 h 小刚到达 B 地. 两人的行进速度分别是多少？相遇后经过多少时间小强到达 A 地？

## 拓广探索

11. 现对某商品降价 20%促销，为了使销售总金额不变，销售量要比按原价销售时增加百分之几？

12. 甲组的 4 名工人 3 月份完成的总工作量比此月人均定额的 4 倍多 20 件，乙组的 5 名工人 3 月份完成的总工作量比此月人均定额的 6 倍少 20 件.

(1) 如果两组工人实际完成的此月人均工作量相等，那么此月人均定额是多少件？

(2) 如果甲组工人实际完成的此月人均工作量比乙组的多 2 件，那么此月人均定额是多少件？

(3) 如果甲组工人实际完成的此月人均工作量比乙组的少 2 件，那么此月人均定额是多少件？

13. (古代问题)希腊数学家丢番图(公元3—4世纪)的墓碑上记载着：

“他生命的六分之一是幸福的童年；

再活了他生命的十二分之一，两颊长起了细细的胡须；

他结了婚，又度过了一生的七分之一；

再过五年，他有了儿子，感到很幸福；

可是儿子只活了他父亲全部年龄的一半；

儿子死后，他在极度悲痛中度过了四年，也与世长辞了.”

根据以上信息，请你算出：

(1) 丢番图的寿命；

(2) 丢番图开始当爸爸时的年龄；

(3) 儿子死时丢番图的年龄.

丢番图

# 数学活动

## 活动1

统计资料表明，山水市去年居民的人均可支配收入为 11 664 元，与前年相比增长 8%，扣除价格因素，实际增长 6.5%.

你理解资料中有关数据的含义吗？如果不明白，请通过查阅资料或请教他人弄懂它们. 根据上面的数据，你能用一元一次方程解决下面的问题吗？

（1）山水市前年居民的人均收入为多少元？

（2）在山水市，如果去年售价为 1 000 元的商品价格上涨率与居民消费价格上涨率一致，那么该商品在前年的售价为多少元？

再收集一些数据，利用它们之间的关系再计算出一些新数据.

## 活动2

用一根质地均匀的木杆和一些等重的小物体，做下列实验：

（1）在木杆中间处拴绳，将木杆吊起并使其左右平衡，吊绳处为木杆的支点；

（2）在木杆两端各悬挂一重物，看看左右是否保持平衡；

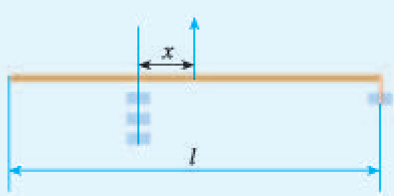
（3）在木杆左端小物体下加挂一重物，然后把这两个重物一起向右移动，直至左右平衡，记录此时支点到木杆左右两边挂重物处的距离；

（4）在木杆左端两小物体下再加挂一重物，然后把这三个重物一起向右移动，直至左右平衡，记录此时支点到木杆左右两边挂重物处的距离；

（5）在木杆左边继续加挂重物，并重复以上操作和记录.

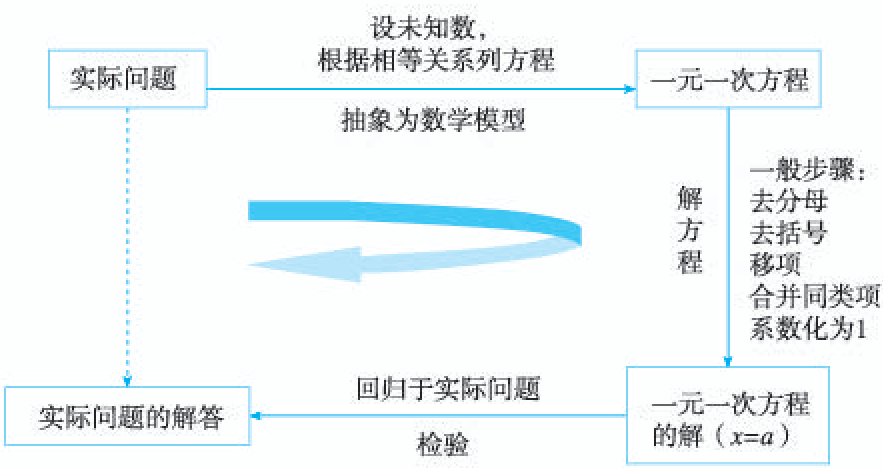
根据记录你能发现什么规律？

如图，在木杆右端挂一重物，支点左边挂 $n$ 个重物，并使左右平衡. 设木杆长为 $l$ cm，支点在木杆中点处，支点到木杆左边挂重物处的距离为 $x$ cm，把 $n$，$l$ 作为已知数，列出关于 $x$ 的一元一次方程.



# 小　结

## 一、本章知识结构图




## 二、回顾与思考

方程是一种重要的描述现实世界的数学模型．本章中，通过一些实际问题，我们学习了最基本的方程——一元一次方程，为进一步学习方程打下了基础．

方程是含有未知数的等式，解方程就是求出方程中的未知数．解方程的过程是使方程形式逐步化简，最终得出未知数的值（如 $x=a$（已知数））．在此过程中，化归的思想方法起了重要作用，而等式的性质及运算律是化归的根据．

利用方程解决实际问题，应认真分析其中的数量关系，关键是要找出相等关系，由此设未知数、列方程，从而把实际问题转化为数学问题；然后通过解方程获得数学结论；最后用数学结论解释实际问题．这是一个“实际问题——数学问题——实际问题”的过程，今后，我们将在不断经历这一过程中，提高应用数学解决实际问题的能力．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．举例说明方程与等式的关系以及一元一次方程的特征．

2．回顾解一元一次方程的一般步骤，结合例子体会：解关于 $x$ 的方程，就是运用等式性质和运算律，根据方程的具体特点，通过灵活变形将方程逐步化简，最后变为 $x=a$（已知数）而得解．

3．你能举例说明用字母表示数、列含字母的算式和列方程的区别和联

系吗？

4. 用方程解决实际问题，是把实际问题转化为数学问题（方程）的过程，其中要特别关注从实际问题中分析出关键性的相等关系. 你能举例对此加以解释吗？

5. 请收集一些重要问题（例如气候、节能、经济等）的有关数据，经过分析后编出可以利用一元一次方程解决的问题，并正确地表述问题及其解决过程.

## 复习题 3

### 复习巩固

1. 列方程表示下列语句所表示的相等关系：

(1) 某地 2011 年 9 月 6 日的温差是 10 ℃，这天最高气温是 $t$ ℃，最低气温是 $\frac{2}{3}t$ ℃；

(2) 七年级学生人数为 $n$，其中男生占 45%，女生有 110 人；

(3) 一种商品每件的进价为 $a$ 元，售价为进价的 1.1 倍，现每件又降价 10 元，现售价为每件 210 元；

(4) 在 5 天中，小华共植树 60 棵，小明共植树 $x(x<60)$ 棵，平均每天小华比小明多种 2 棵树.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{4}{3}-8x=3-\frac{11}{2}x$；　　(2) $0.5x-0.7=6.5-1.3x$；

(3) $\frac{1}{6}(3x-6)=\frac{2}{5}x-3$；　　(4) $\frac{1-2x}{3}=\frac{3x+1}{7}-3$.

3. 当 $x$ 为何值时，下列各组中两个式子的值相等？

(1) $x-\frac{x-1}{3}$ 和 $7-\frac{x+3}{5}$；

(2) $\frac{2}{5}x+\frac{x-1}{2}$ 和 $\frac{3(x-1)}{2}-\frac{8}{5}x$.

4. 在梯形面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ 中，

(1) 已知 $S=30$，$a=6$，$h=4$，求 $b$；

(2) 已知 $S=60$，$b=4$，$h=12$，求 $a$；

(3) 已知 $S=50$，$a=6$，$b=\frac{5}{3}a$，求 $h$.

### 综合运用

5. (我国古代问题)❶跑得快的马每天走 240 里，跑得慢的马每天走 150 里．慢马先走 12 天，快马几天可以追上慢马？
6. 运动场的跑道一圈长 400 m．小健练习骑自行车，平均每分骑 350 m；小康练习跑步，平均每分跑 250 m．两人从同一处同时反向出发，经过多少时间首次相遇？又经过多少时间再次相遇？
7. 有一群鸽子和一些鸽笼，如果每个鸽笼住 6 只鸽子，则剩余 3 只鸽子无鸽笼可住；如果再飞来 5 只鸽子，连同原来的鸽子，每个鸽笼刚好住 8 只鸽子．原有多少只鸽子和多少个鸽笼？
8. 父亲和女儿的年龄之和是 91，当父亲的年龄是女儿现在年龄的 2 倍的时候，女儿的年龄是父亲现在年龄的 $\frac{1}{3}$，求女儿现在的年龄．

### 拓广探索

9. 某电视台组织知识竞赛，共设 20 道选择题，各题分值相同，每题必答．右表记录了 5 个参赛者的得分情况．
   (1) 参赛者 F 得 76 分，他答对了几道题？
   (2) 参赛者 G 说他得 80 分，你认为可能吗？为什么？

| 参赛者 | 答对题数 | 答错题数 | 得分 |
|---|---|---|---|
| A | 20 | 0 | 100 |
| B | 19 | 1 | 94 |
| C | 18 | 2 | 88 |
| D | 14 | 6 | 64 |
| E | 10 | 10 | 40 |

10. 一家游泳馆每年 6~8 月出售夏季会员证，每张会员证 80 元，只限本人使用，凭证购入场券每张 1 元，不凭证购入场券每张 3 元．试讨论并回答：
    (1) 什么情况下，购会员证与不购证付一样的钱？
    (2) 什么情况下，购会员证比不购证更合算？
    (3) 什么情况下，不购会员证比购证更合算？
11. “丰收 1 号”油菜籽的平均每公顷产量为 2 400 kg，含油率为 40%．“丰收 2 号”油菜籽比“丰收 1 号”的平均每公顷产量提高了 300 kg，含油率提高了 10 个百分点．某村去年种植“丰收 1 号”油菜，今年改种“丰收 2 号”油菜，虽然种植面积比去年减少 3 $hm^2$，但是所产油菜籽的总产油量比去年提高 3 750 kg．这个村去年和今年种植油菜的面积各是多少公顷？

❶ 这道题选自我国元朝朱世杰所著的《算学启蒙》(1299 年)．原题是：“良马日行二百四十里，驽马日行一百五十里．驽马先行一十二日，问良马几何追及之．答曰：二十日．”题中的“里”是我国市制长度单位，1 里=500 m.

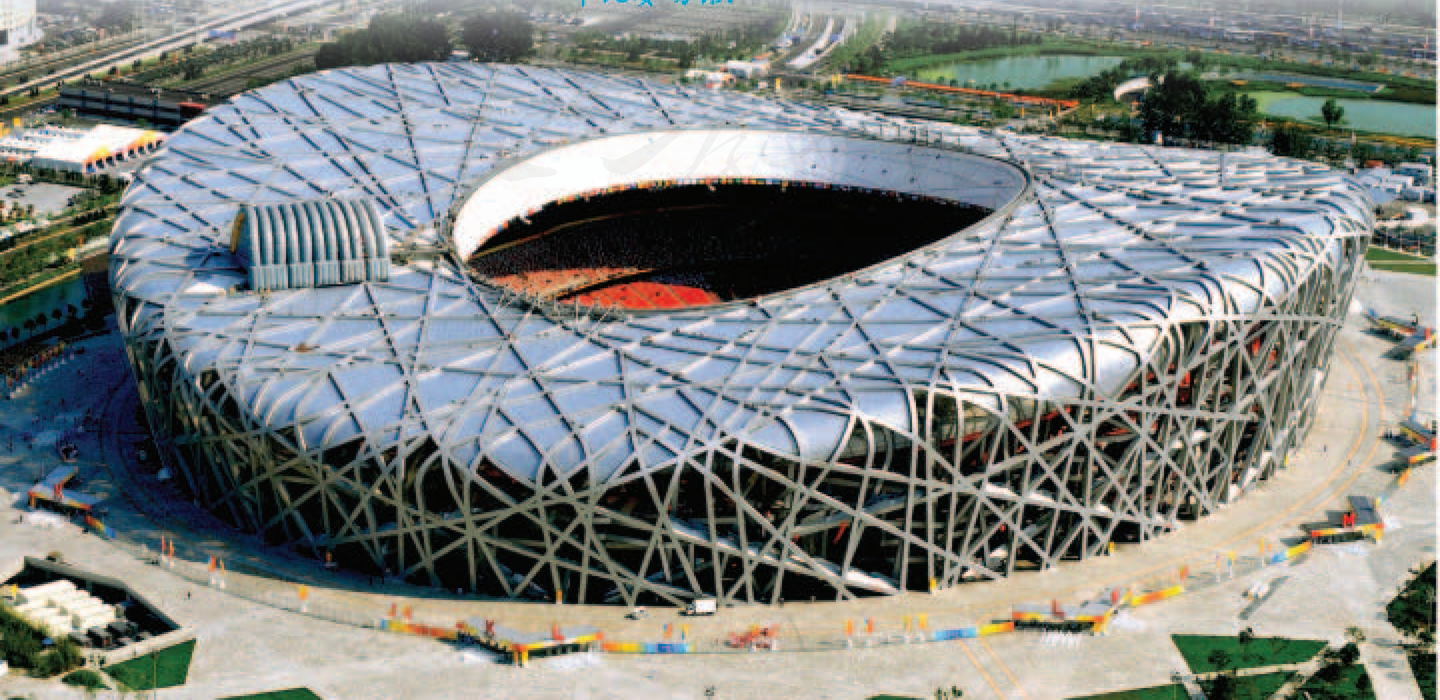
# 第四章　几何图形初步

现实世界中有形态各异、丰富多彩的图形. 在小学我们学过许多关于图形的知识，在章前图的建筑中，你能找到一些熟悉的图形吗？

千姿百态的图形美化了我们的生活空间，也给我们带来了很多问题：怎样画出一个五角星？怎样设计一个产品包装盒？怎样绘制一张校园布局平面图？不同的图形各有什么特点和性质？所有这些，都需要我们知道更多的图形知识.

几何就是研究图形的形状、大小和位置关系的一门学科. 本章我们将认识更多的几何图形，进一步探索直线、线段、角等最基本的几何图形的性质，了解它们的广泛应用，为今后进一步学习各种更复杂的几何图形及其性质作好准备.

北京奥林匹克公园占地约 1 135 $hm^2$，总建筑面积约 200 万 $m^2$，内有可容纳 9 万观众的国家体育场（鸟巢）、国家游泳中心（水立方）、国家体育馆等 14 个比赛场馆.



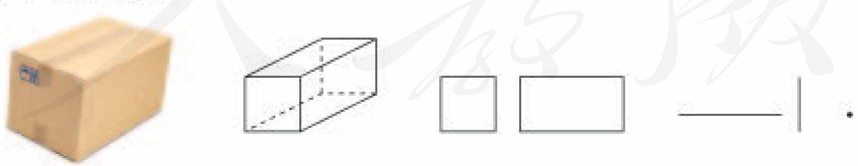
# 4.1 几何图形

从城市宏伟的建筑到乡村简朴的住宅，从四通八达的立交桥到街头巷尾的交通标志，从古老的剪纸艺术到现代的城市雕塑，从自然界形态各异的动物到北京的申奥标志（图 4.1-1）……图形世界是多姿多彩的！

图 4.1-1

各种各样的物体除了具有颜色、质量、材质等性质外，还具有形状（如方的、圆的等）、大小（如长度、面积、体积等）和位置关系（如相交、垂直、平行等），物体的形状、大小和位置关系是几何中研究的内容.

图 4.1-2（1）是一个纸盒，它有两个面是正方形，其余各面是长方形. 观察纸盒的外形，从整体上看，它的形状是长方体（图 4.1-2（2））；看不同侧面，得到的是正方形或长方形（图 4.1-2（3））；只看棱、顶点等局部，得到的是线段、点（图 4.1-2（4））等. 类似地观察罐头、乒乓球的外形，可以得到圆柱、球、圆等.



纸盒 长方体 正方形 长方形 线段 点

（1） （2） （3） （4）

图 4.1-2

长方体、圆柱、球、长（正）方形、圆、线段、点等，以及小学学习过的三角形、四边形等，都是从形形色色的物体外形中得出的，它们都是**几何图形**

(geometric figure). 几何图形是数学研究的主要对象之一.

### 4.1.1　立体图形与平面图形

有些几何图形（如长方体、正方体、圆柱、圆锥、球等）的各部分不都在同一平面内，它们是**立体图形**（solid figure）. 棱柱、棱锥也是常见的立体图形. 图 4.1-3(1)中的帐篷、茶叶盒等都给我们以棱柱的形象，图 4.1-3(2)中的金字塔则给我们以棱锥的形象. 你能再找出一些棱柱、棱锥的实例吗？

> 请再举出一些立体图形的例子.

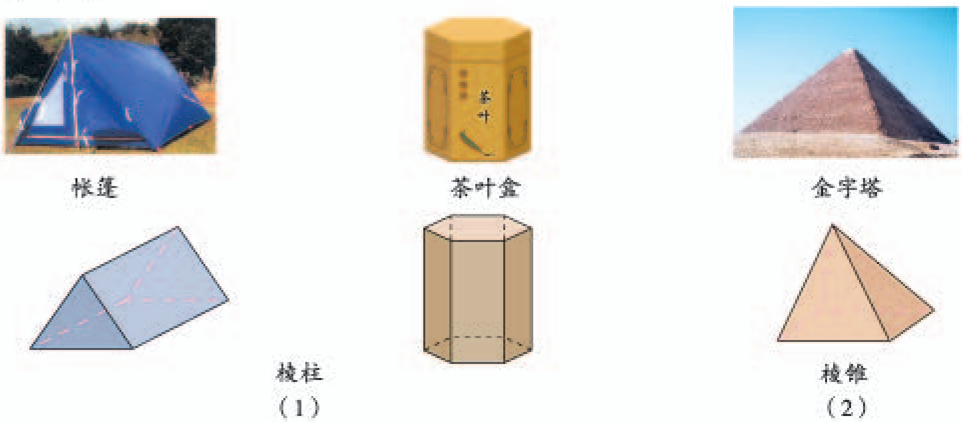



图 4.1-3

**思考**

图 4.1-4 中实物的形状对应哪些立体图形？把相应的实物与图形用线连起来.

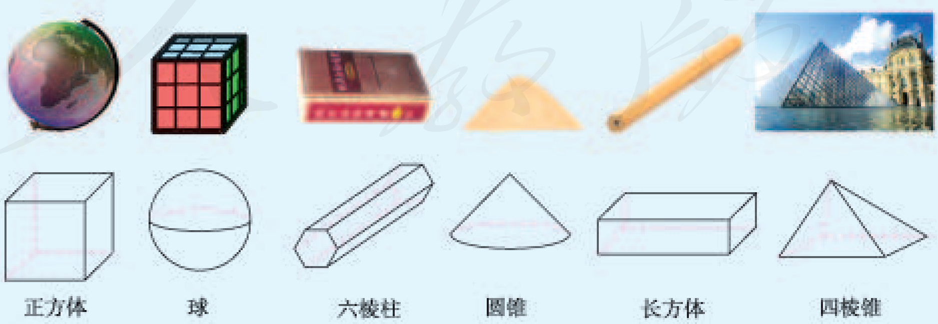



图 4.1-4

有些几何图形（如线段、角、三角形、长方形、圆等）的各部分都在同一平面内，它们是**平面图形**（plane figure）.

**思考**

图 4.1-5 的各图中包含哪些简单平面图形？请再举出一些平面图形的例子.

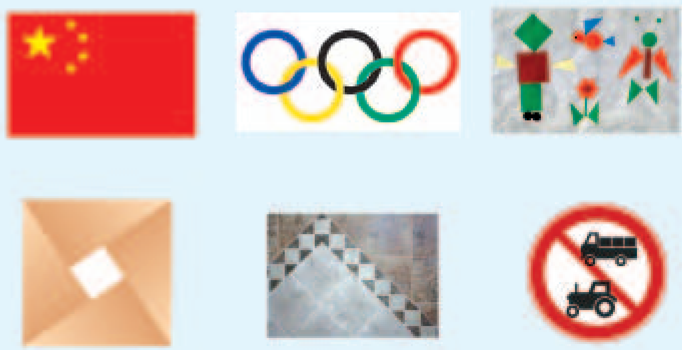


图 4.1-5

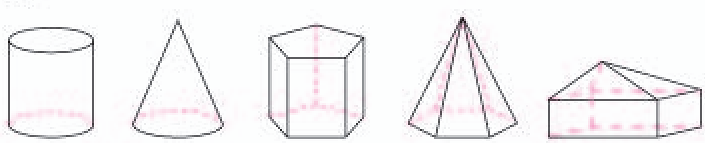
虽然立体图形与平面图形是两类不同的几何图形，但它们是互相联系的．立体图形中某些部分是平面图形，例如长方体的侧面是长方形.

**练习**

1. 如图，说出下图中的一些物体的形状所对应的立体图形.

（第 1 题）

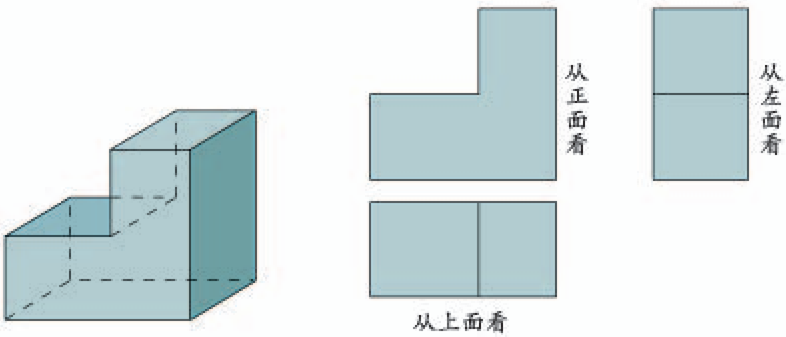
2. 图中的各立体图形的表面中包含哪些平面图形？试指出这些平面图形在立体图形中的位置.



（第 2 题）

对于一些立体图形的问题，常把它们转化为平面图形来研究和处理．从不同方向看立体图形，往往会得到不同形状的平面图形．在建筑、工程等设计中，也常常用从不同方向看到的平面图形来表示立体图形．如图 4.1-6（1），这是一个工件的立体图，设计师们常常画出从不同方向看它得到的平面图形来表示它（图 4.1-6(2)）．

利用计算机，可以将设计图合成立体图形．




(1)　　　　(2)

图 4.1-6

## 探究

图 4.1-7 是一个由 9 个正方体组成的立体图形，分别从正面、左面、上面观察这个图形，各能得到什么平面图形？

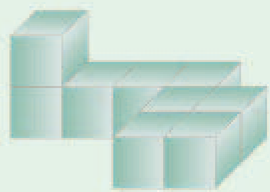


图 4.1-7

有些立体图形是由一些平面图形围成的，将它们的表面适当剪开，可以展开成平面图形．这样的平面图形称为相应立体图形的**展开图**（developing drawing）．如图 4.1-8，要设计、制作一个长方体形状的墨水瓶包装盒，除了美术设计以外，还要了解它展开后的形状，根据它的展开图来裁剪纸张．自己动手把一个包装盒剪开铺平，看看它的展开图由哪些平面图形组成；再把展开的纸板复原为包装盒，体会包装盒与它的展开图的关系．

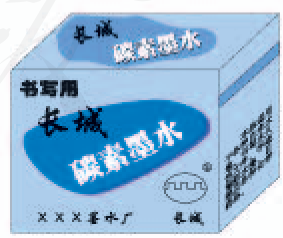



图 4.1-8

## 探究

你还记得长方体和圆柱的展开图吗？图 4.1-9是一些立体图形的展开图，用它们能围成什么样的立体图形？把它们画在一张硬纸片上，剪下来，折叠、粘贴，看看得到的图形和你想象的是否相同.

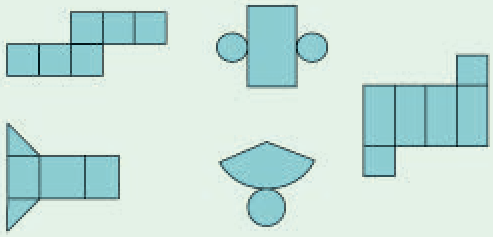
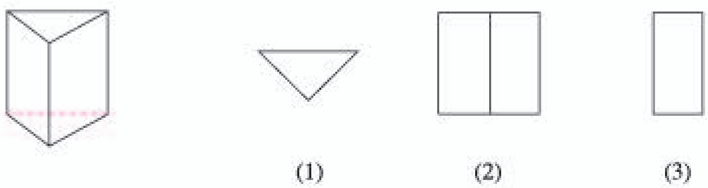


图 4.1-9

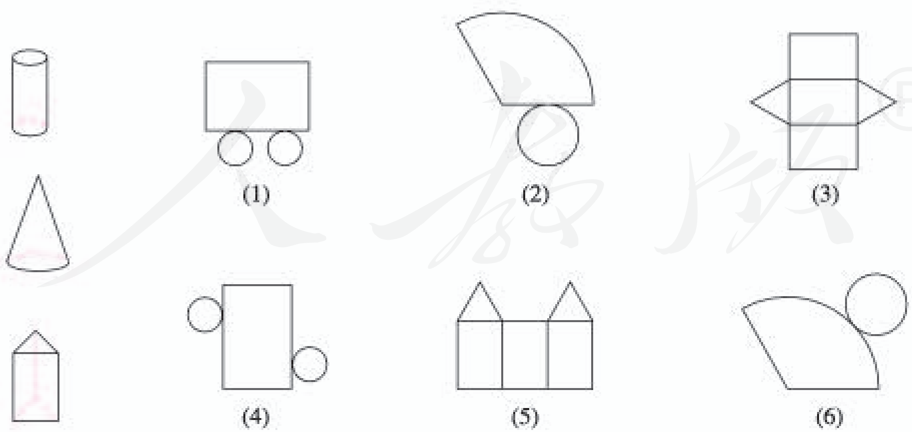
## 练习

1. 如图，右面三幅图分别是从哪个方向看这个棱柱得到的？



（第 1 题）

2. 如图，把相应的立体图形与它的展开图用线连起来.




（第 2 题）

3. 下列图形中可以作为一个正方体的展开图的是（    ）.



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

（第 3 题）

## 4.1.2　点、线、面、体

**思考**

图 4.1-10 是一个长方体，它有几个面？面和面相交的地方形成了几条棱？棱和棱相交成几个顶点？

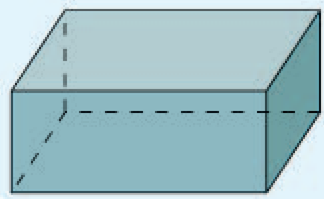


图 4.1-10

长方体、正方体、圆柱、圆锥、球、棱柱、棱锥等都是几何体. 几何体也简称**体**（solid）.

包围着体的是**面**（surface）. 面有平的面和曲的面两种. 平静的水面给我们以平面的形象，而一些建筑物的屋顶（图 4.1-11）则给我们以曲面的形象. 你能再举出一些平面与曲面的例子吗？

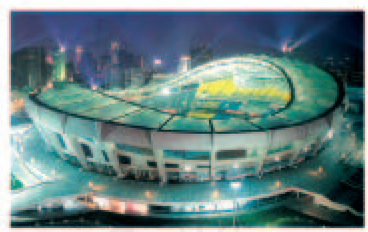


图 4.1-11

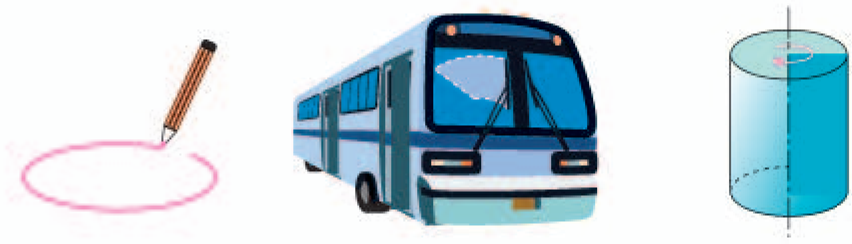
夜晚流星划过天空时留下一道明亮的光线，节日的焰火画出的曲线组成优美的图案（图 4.1-12），这些都给我们以**线**（line）的形象. 面和面相交的地方形成线. 长方体 6 个面相交成的 12 条棱（线）是直的，圆柱的侧面与底面相交得到的圆是曲的.

图 4.1-12

天上的星星、世界地图上的城市等都给我们以**点**（point）的形象. 线和线相交的地方是点.

笔尖可以看作一个点，这个点在纸上运动时，就形成线（图 4.1-13（1）），节日的焰火也可以看

成由点运动形成的，这可以说点动成线．汽车的雨刷在挡风玻璃上画出一个扇面（图 4.1-13（2）），这可以说线动成面．长方形硬纸片绕它的一边旋转，形成一个圆柱体（图 4.1-13（3）），这可以说面动成体．



（1）　　（2）　　（3）

图 4.1-13

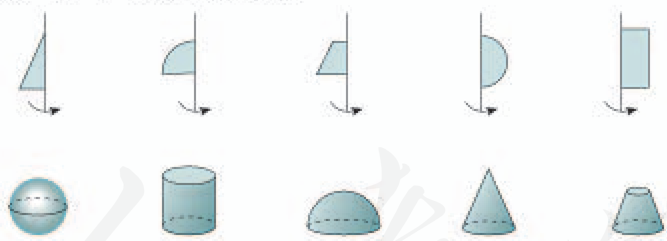
**练习**

1．围成下面这些立体图形的各个面中，哪些面是平的？哪些面是曲的？

（1）　（2）　（3）　（4）　（5）

（第 1 题）

2．如图，上面的平面图形绕轴旋转一周，可以得出下面的立体图形，把有对应关系的平面图形与立体图形连接起来．



（第 2 题）

几何图形都是由点、线、面、体组成的，点是构成图形的基本元素．电视屏幕上的画面（图 4.1-14）、大型团体操的背景图案（图 4.1-15）也可以看作由点组成．

点、线、面、体经过运动变化，就能组合成各种各样的几何图形，形成多姿多彩的图形世界．

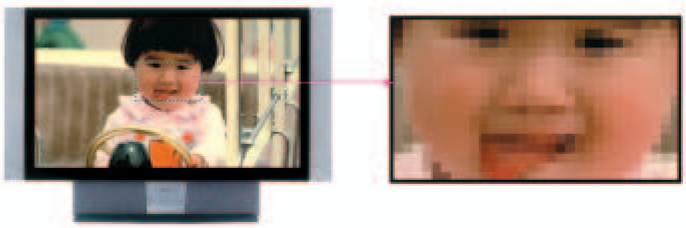


图 4.1-14

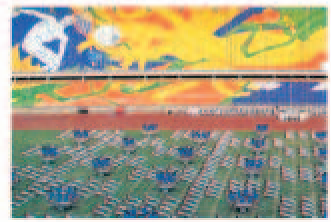
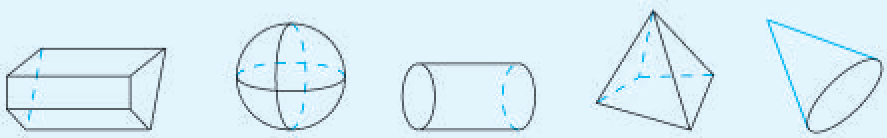


图 4.1-15

## 习题 4.1

### 复习巩固

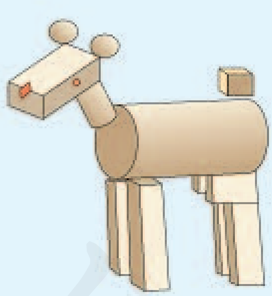
1. 把图中的几何图形与它们相应的名称连接起来.



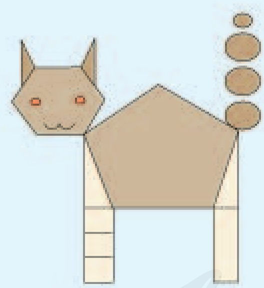
圆锥　　圆柱　　棱柱　　棱锥　　球

（第 1 题）

2. 如图，你能看到哪些立体图形？



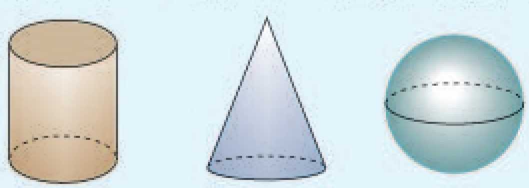
（第 2 题）



（第 3 题）

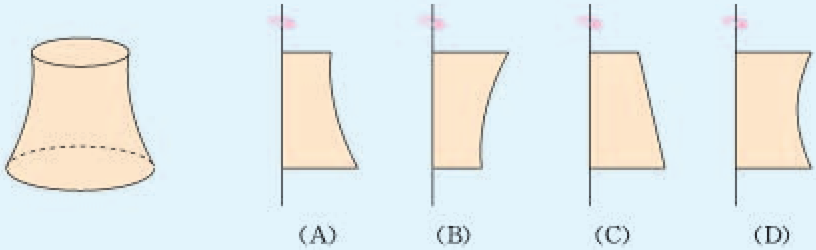
3. 如图，你能看到哪些平面图形？

4. 如图，分别从正面、左面、上面观察这些立体图形，各能得到什么平面图形？



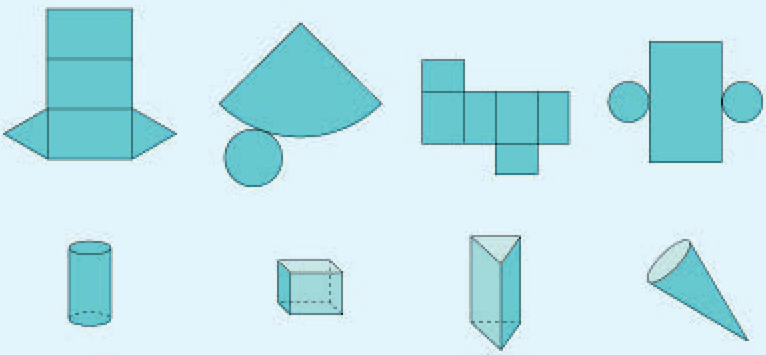
（第 4 题）

5. 将下列平面图形绕轴旋转一周，可得到图中所示的立体图形的是（　　）.



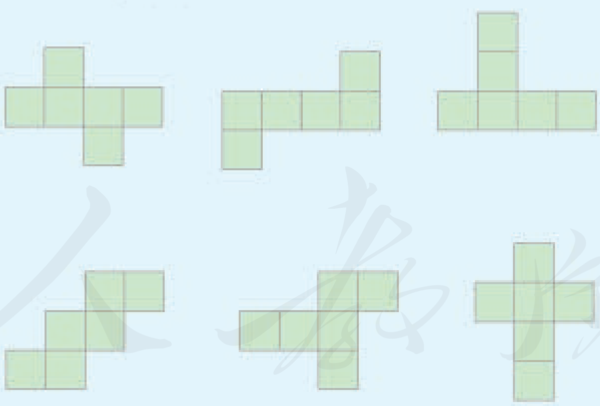

（第 5 题）

6. 如图，上面的图形分别是下面哪个立体图形展开的形状？把它们用线连起来.



（第 6 题）

7. 如图，这些图形都是正方体的展开图吗？如果不能确定，折一折，试一试. 你还能再画出一些正方体的展开图吗？



（第 7 题）

## 综合运用

8. 如图，说出下列物体中含有的一些立体图形.

（第 8 题）

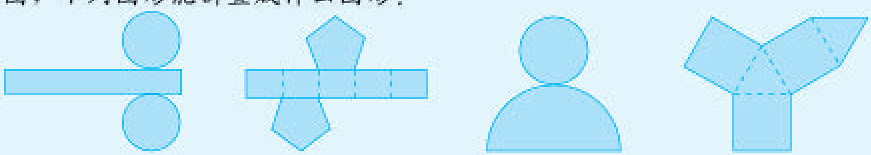
9．“横看成岭侧成峰，远近高低各不同．不识庐山真面目，只缘身在此山中．”这是宋代诗人苏轼的著名诗句（《题西林壁》）．你能说出“横看成岭侧成峰”中蕴含的数学道理吗？

10．如图是一个小正方体的展开图，把展开图折叠成小正方体后，有“建”字一面的相对面上的字是（　　）．

(A) 和　　(B) 谐　　(C) 社　　(D) 会


（第 10 题）

11．如图，下列图形能折叠成什么图形？

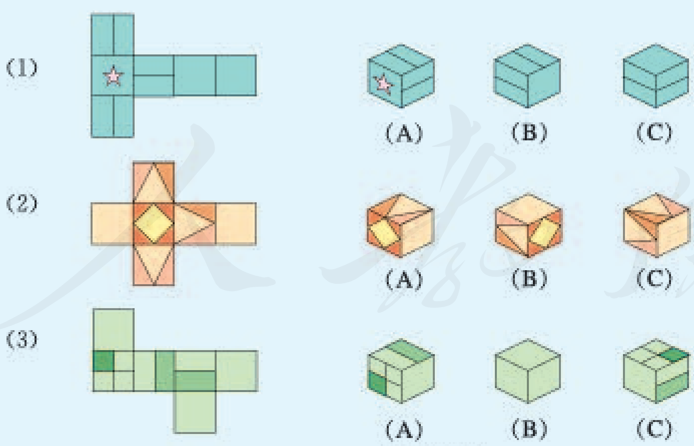


（第 11 题）

## 拓广探索

12．你能把一个正方形纸片折叠成一个三棱锥吗？动手试一试．

13．如图，左面的图形可能是右面哪些图形的展开图？




（第 13 题）

14．通过图书或互联网等途径，收集能够反映几何知识实际应用的图片等材料，并和同学们交流．

阅读与思考

## 几何学的起源

我们生活的世界处处存在着关于数量和空间的问题，数学中以空间形式（简称形）为研究对象的分支，叫做几何学，它有着悠久的历史.

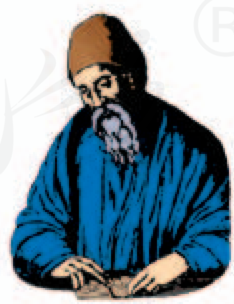
在古埃及，由于尼罗河经常泛滥而需要不断整修土地，由此测量土地的方法引起人们的重视. 几何学的英文单词 geometry 就是由 geo（土地）和 metry（测量）组成的. 我国古代对形的研究也与测量关系密切，夏禹治水时期就已有规、矩、准、绳等测量工具. 约公元前 11 世纪的西周初期，人们已经知道了直角三角形的“勾三，股四，弦五”（即如果直角三角形的两条直角边的长分别是 3 和 4，那么斜边的长是 5）的知识. 大量事实说明，测量活动是几何学形成的直接原因.

从古埃及金字塔可以发现，当时人们已掌握精度很高的几何测量和计算方法.

人类从开始制作和使用工具起，就开始研究工具的造型、体积、外表装饰等，这也对几何学的产生起了促进作用. 从现存的旧石器时代的一些工具，可以看出当时的人们已能磨制出具有较复杂的几何造型的器皿. 在新石器时代制作的陶器上，已出现圆、三角形、正方形等基本图形，以及更复杂的对称几何图案、等分圆周花纹等.

斜方格纹彩陶罐
（1973 年甘肃出土）

随着时间的推移，人们在大量的实践中不断扩大和加深对形的认识，得到了许多关于形的知识和研究形的方法. 约公元前 300 年，古希腊数学家欧几里得（Euclid）广泛收集和研究前人的成果，将已有的关于形和数的知识作了系统编排，写成了《原本》一书. 这是数学发展史上的一个里程碑. 1607 年，意大利传教士利玛窦和我国学者徐光启把此书的前一部分翻译成中文，以《几何原本》为名成书，这对于介绍西方数学和科学起了积极的推动作用，在中国数学发展史上具有重要影响.



欧几里得

# 4.2 直线、射线、线段

我们在小学已经学过线段、射线和直线，你能说说它们的联系与区别吗？下面我们进一步对它们进行研究.

**思考**

经过一个点能画几条直线？经过两个点呢？动手试一试.

经过思考和画图，我们可以得到一个基本事实：

**经过两点有一条直线，并且只有一条直线.**

简单说成：**两点确定一条直线.**

在日常生活和生产中常常用到这个基本事实. 例如，建筑工人砌墙时，经常在两个墙脚的位置分别插一根木桩，然后拉一条直的参照线（图 4.2-1）；植树时，只要定出两个树坑的位置，就能使同一行树坑在一条直线上；等等.

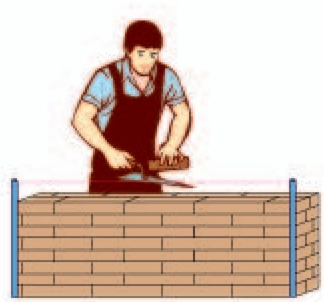
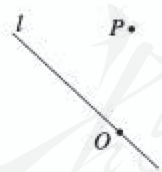


图 4.2-1

因为两点确定一条直线，所以除了用一个小写字母表示直线（如直线 $l$）外，我们经常用一条直线上的两点来表示这条直线（图 4.2-2）. 一个点在一条直线上，也可以说这条直线经过这个点；一个点在直线外，也可以说直线不经过这个点（图 4.2-3）.


直线 $AB$ 或直线 $l$

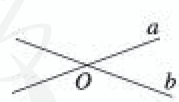
图 4.2-2




点 $O$ 在直线 $l$ 上（直线 $l$ 经过点 $O$）

点 $P$ 在直线 $l$ 外（直线 $l$ 不经过点 $P$）

图 4.2-3




直线 $a$ 和 $b$ 相交于点 $O$

图 4.2-4

如图 4.2-4，当两条不同的直线有一个公共点时，我们就称这两条直线**相交**（intersection），这个公共点叫做它们的**交点**（point of intersection）.

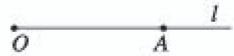
射线和线段都是直线的一部分. 类似于直线的表示，我们可以用图 4.2-5

的方式来表示线段 $AB$（或线段 $BA$），其中点 $A$、点 $B$ 是线段的端点．用图 4.2-6 的方式来表示射线 $OA$，其中点 $O$ 是射线的端点．

怎样由一条线段得到一条射线或一条直线？


线段 $AB$ 或线段 $a$

图 4.2-5




射线 $OA$ 或射线 $l$

图 4.2-6

## 练习

1. 判断下列说法是否正确：
   (1) 线段 $AB$ 和射线 $AB$ 都是直线 $AB$ 的一部分；
   (2) 直线 $AB$ 和直线 $BA$ 是同一条直线；
   (3) 射线 $AB$ 和射线 $BA$ 是同一条射线；
   (4) 把线段向一个方向无限延伸可得到射线，向两个方向无限延伸可得到直线．
2. 按下列语句画出图形：
   (1) 直线 $EF$ 经过点 $C$；　　(2) 点 $A$ 在直线 $l$ 外；
   (3) 经过点 $O$ 的三条线段 $a$，$b$，$c$；　　(4) 线段 $AB$，$CD$ 相交于点 $B$．
3. 用适当的语句表述图中点与直线的关系：


(1)　　(2)

（第 3 题）

画一条线段等于已知线段 $a$，可以先量出线段 $a$ 的长度，再画一条等于这个长度的线段．在数学中，我们常限定用无刻度的直尺和圆规作图，这就是**尺规作图**．如图 4.2-7，我们可以用直尺画射线 $AC$，再用圆规在射线 $AC$ 上截取 $AB=a$．这就是“作一条线段等于已知线段”的尺规作图．

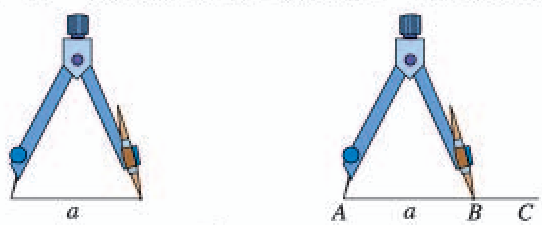



图 4.2-7

**思考**

怎样比较两条线段的长短呢？你能从比身高上受到一些启发吗（图 4.2-8）？

你能再举出一些比较线段长短的实例吗？

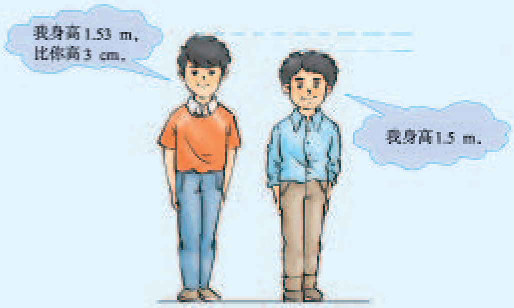



图 4.2-8

比较两条线段的长短，我们可用刻度尺分别测量出它们的长度来比较，或者把其中的一条线段移到另一条上作比较（图 4.2-9）.

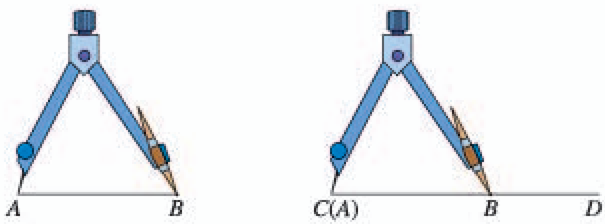



图 4.2-9

图 4.2-9 中，点 $A$ 与点 $C$ 重合，点 $B$ 落在 $C$，$D$ 之间，这时我们说线段 $AB$ 小于线段 $CD$，记作 $AB<CD$. 想一想，什么情况下线段 $AB$ 大于线段 $CD$，线段 $AB$ 等于线段 $CD$ 呢？

在直线上作线段 $AB=a$，再在 $AB$ 的延长线上作线段 $BC=b$，线段 $AC$ 就是 $a$ 与 $b$ 的和，记作 $AC=a+b$. 设线段 $a>b$（图 4.2-10），如果在线段 $AB$ 上作线段 $BD=b$，那么线段 $AD$ 就是 $a$ 与 $b$ 的差，记作 $AD=a-b$.

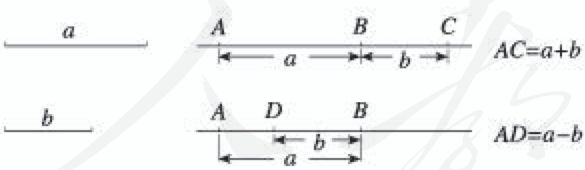



图 4.2-10

如图 4.2-11（1），点 $M$ 把线段 $AB$ 分成相等的两条线段 $AM$ 与 $MB$，点 $M$ 叫做线段 $AB$ 的**中点**（midpoint）. 类似地，还有线段的三等分点、四等分点等（图 4.2-11（2）（3））.

在一张透明的纸上画一条线段，折叠纸片，使线段的端点重合，折痕与线段的交点就是线段的中点. 动手试一试.

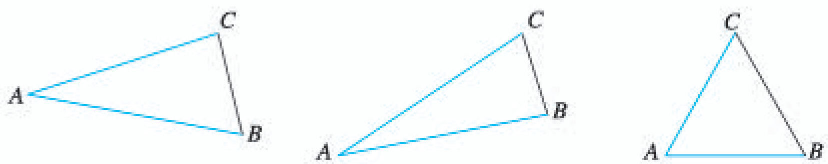

$AM=MB=\frac{1}{2}AB$　　$AM=MN=NB=\frac{1}{3}AB$　　$AM=MN=NP=PB=\frac{1}{4}AB$

(1)　　(2)　　(3)

图 4.2-11

## 练习

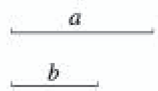
1. 估计下列图中线段 $AB$ 与线段 $AC$ 的大小关系，再用刻度尺或用圆规来检验你的估计.




(1)　　(2)　　(3)

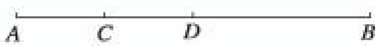
(第 1 题)

2. 如图，已知线段 $a$，$b$，作一条线段，使它等于 $2a-b$.




(第 2 题)

3. 如图，点 $D$ 是线段 $AB$ 的中点，$C$ 是线段 $AD$ 的中点，若 $AB=4$ cm，求线段 $CD$ 的长度.




(第 3 题)

## 思考

如图 4.2-12，从 $A$ 地到 $B$ 地有四条道路，除它们外能否再修一条从 $A$ 地到 $B$ 地的最短道路？如果能，请你联系以前所学的知识，在图上画出最短路线.

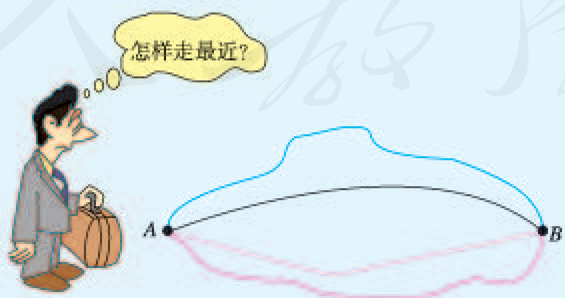



图 4.2-12

经过比较，我们可以得到一个关于线段的基本事实：**两点的所有连线中，线段最短.** 简单说成：**两点之间，线段最短.**

你能举出这条性质在生活中的一些应用吗？

连接两点间的线段的长度，叫做这两点的**距离**（distance）.

> 这里最后一句话说明了什么是“两点的距离”，它是两点的距离的**定义**（definition）.

## 习题 4.2

### 复习巩固

1. 举出生活中一些可以看成直线、射线、线段的例子.

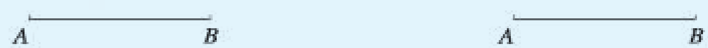
2. 如图，已知三点 $A$，$B$，$C$，

   （1）画直线 $AB$；　　（2）画射线 $AC$；

   （3）连接 $BC$.


（第 2 题）

3. 延长线段 $AB$ 是指按从端点 $A$ 到 $B$ 的方向延长；延长线段 $BA$ 是指按从端点 $B$ 到 $A$ 的方向延长，这时也可以说反向延长线段 $AB$. 如图，分别画出线段 $AB$ 的延长线和反向延长线.




（第 3 题）

4. 读下列语句，并分别画出图形：

   （1）直线 $l$ 经过 $A$，$B$，$C$ 三点，并且点 $C$ 在点 $A$ 与 $B$ 之间；

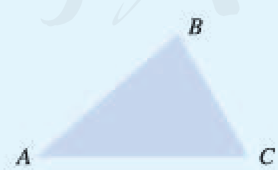
   （2）两条线段 $m$ 与 $n$ 相交于点 $P$；

   （3）$P$ 是直线 $a$ 外一点，过点 $P$ 有一条直线 $b$ 与直线 $a$ 相交于点 $Q$；

   （4）直线 $l$，$m$，$n$ 相交于点 $Q$.

5. 画一个正方形，使它的面积是图中正方形面积的 4 倍.

（第 5 题）

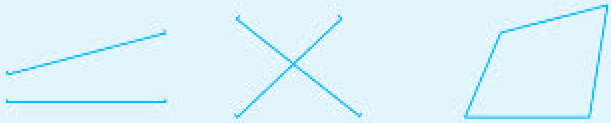



（第 6 题）

6. 如图，有一张三角形的纸片，用折纸的方法比较边 $AB$ 与 $AC$ 的长短.

## 综合运用

7. 估计图中各组线段的长短，并用刻度尺或圆规验证你的结论.

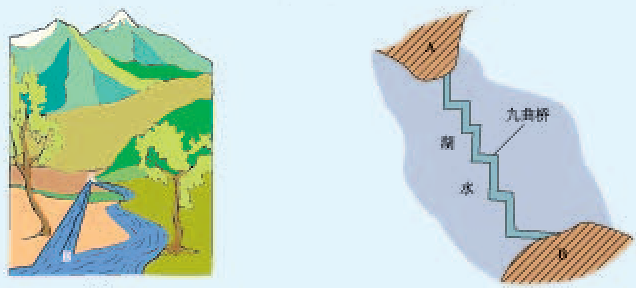


(1)　　(2)　　(3)

（第 7 题）

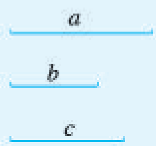
8. (1) 如图，把原来弯曲的河道改直，A，B 两地间的河道长度有什么变化？

   (2) 如图，公园里修建了曲折迂回的桥，这与修一座直的桥相比，对游人观赏湖面风光能起什么作用？用你所学数学知识说明其中的道理.




(1)　　(2)

（第 8 题）




（第 9 题）

9. 如图，已知线段 $a$，$b$，$c$，用圆规和直尺作线段，使它等于 $a+2b-c$.

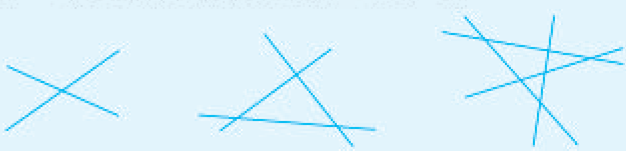
10. 点 $A$，$B$，$C$ 在同一条直线上，$AB=3$ cm，$BC=1$ cm. 求 $AC$ 的长.

## 拓广探索

11. 如图，一只蚂蚁要从正方体的一个顶点 $A$ 沿表面爬行到顶点 $B$，怎样爬行路线最短？如果要爬行到顶点 $C$ 呢？说出你的理由.


（第 11 题）

12. 两条直线相交，有一个交点. 三条直线相交，最多有多少个交点？四条直线呢？你能发现什么规律吗？

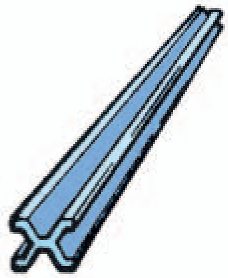


（第 12 题）

阅读与思考

## 长度的测量

在日常生活和生产中，人们经常要进行长度的测量.

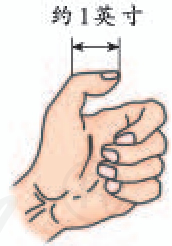


保存在国际度量衡局中的米的标准尺

测量离不开测量单位. 在国际单位制中，长度的基本单位是米（m），1 m 最早是由地球球面上经过巴黎经线的二千万分之一$\left(\frac{1}{20\ 000\ 000}\right)$定出的. 常用的单位还有千米（km）、分米（dm）、厘米（cm）、毫米（mm）、微米（$\mu$m）等.

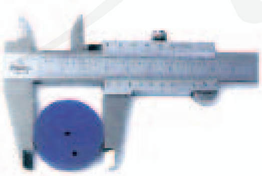
科研中还经常用到更小和更大的长度单位. 现在开始广泛应用的纳米科学，就是在纳米（nm）尺度上研究物质的特性和相互作用，1 nm 等于十亿分之一米，人的头发的直径就相当于7 万nm！在天文学上，经常用天文单位和光年计算星体间的距离. 1 天文单位是地球到太阳的平均距离，约等于 $1.5\times10^{8}$ km，1 光年是光 1 年走过的距离，约等于 $9.46\times10^{12}$ km.

除了国际单位制的长度单位外，有时还用到其他一些长度单位. 例如，海上航行经常使用的长度单位海里（n mile，1 n mile=1 852 m）；人们经常提及的“××英寸彩电”使用的是英制长度单位等.

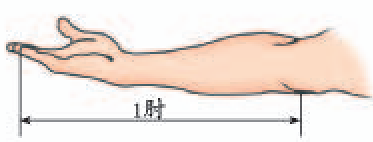


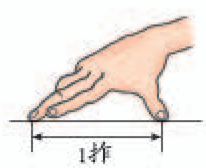

查一查资料，英制长度单位包括哪些单位？它们和国际单位制的长度单位是如何换算的？你知道 25 英寸、29 英寸彩电的屏幕对角线长度是多少厘米吗？

测量长度的工具有很多种，常用的工具有木尺、塑料尺、卷尺、钢卡尺、游标卡尺等. 如果测量精度要求不高，也可以用肘、拃、步长等来估计距离.



游标卡尺




随着科技的发展，人们已经发明了许多测量精度很高的测距仪，例如用于测量人造卫星的激光测距仪，测量 8 000 km 远的卫星时，误差不超过 2 cm.

# 4.3 角

## 4.3.1 角

**角**（angle）也是一种基本的几何图形，钟面上的时针与分针，棱锥相交的两条棱，三角尺两条相交的边线（图 4.3-1），都给我们以角的形象.

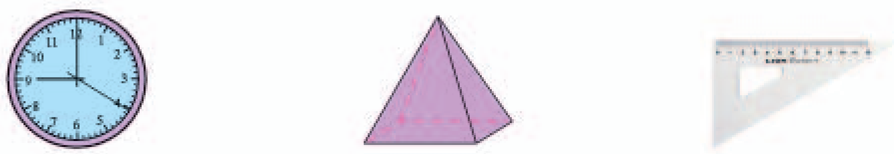
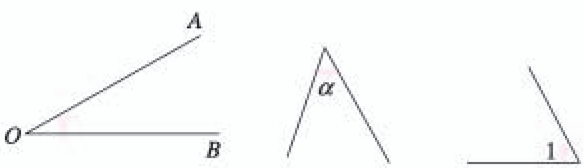


图 4.3-1

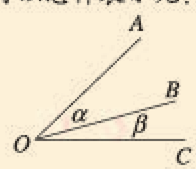
我们知道，有公共端点的两条射线组成的图形叫做角，这个公共端点是角的顶点，这两条射线是角的两条边．角通常用如图 4.3-2 的方法来表示.




∠AOB 或∠O　　∠α　　∠1

图 4.3-2

如图，能把∠α记作∠O 吗？为什么？∠α还可以怎样表示呢？




### 思考

角也可以看作由一条射线绕着它的端点旋转而形成的图形．如图 4.3-3，射线 OA 绕点 O 旋转，当终止位置 OB 和起始位置 OA 成一条直线时，形成什么角？继续旋转，OB 和 OA 重合时，又形成什么角？

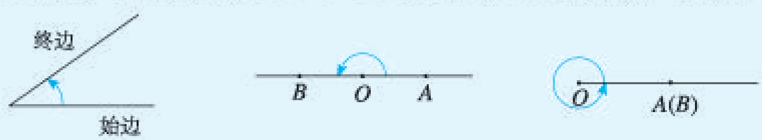



图 4.3-3

我们常用量角器量角，度、分、秒是常用的角的度量单位．把一个周角 360 等分，每一份就是 1 **度**（degree）的角，记作 $1^\circ$；把 1 度的角 60 等分，每一份叫做 1 **分**的角，记作 $1'$；把 1 分的角 60 等分，每一份叫做 1 **秒**的角，记作 $1''$.

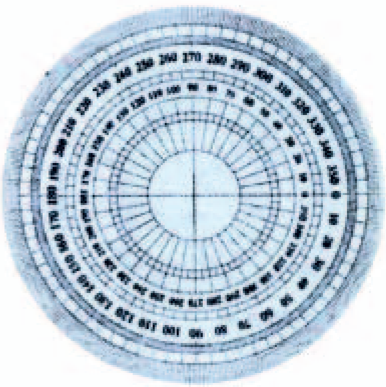


图 4.3-4

角度制起源于四大文明古国之一的古代巴比伦．为什么选择 60 这个数作为进制的基数呢？据说是由于 60 这个数是许多常用的数 2，3，4，5，6，10，12，15，20，30 的倍数，$60=12\times5$，12 是一年中的月数，5 是一只手的手指数，所以古代巴比伦人认为 60 是一个特别而又重要的数．

1 周角＝______°，1 平角＝______°，

$1^\circ=$______′，$1'=$______″.

$\angle\alpha$ 的度数是 48 度 56 分 37 秒，记作

$$\angle\alpha=48^\circ56'37''.$$

角的度、分、秒是 60 进制的，这和计量时间的时、分、秒是一样的．

以度、分、秒为单位的角的度量制，叫做角度制．此外，还有其他度量角的单位制．例如，我们以后将要学到的以弧度为基本度量单位的弧度制，在军事上经常使用的角的密位制等．

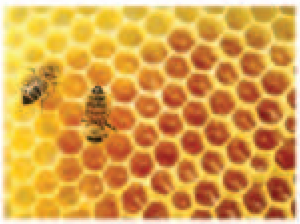
除量角器外，工程测量中，还常用经纬仪（图 4.3-5）来测量角的大小．你还见过其他的度量角的工具吗？

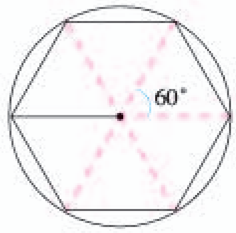
图 4.3-5

借助三角尺，我们可以画出 $30^\circ$，$45^\circ$，$60^\circ$，$90^\circ$等特殊角，借助量角器，可以画出任何给定度数（如 $36^\circ$，$108^\circ$）的角．

## 练习

1. 6 时整，钟表的时针和分针构成多少度的角？8 时呢？8 时 30 分呢？
2. (1) 35°等于多少分？等于多少秒？
   (2) 38°15′和 38.15°相等吗？如不相等，哪一个大？
3. 从蜂巢的入口处看，蜂巢由许多正六边形（六条边相等，六个角也相等）构成，按图示的方法，利用三角尺和圆规画出一个正六边形.






（第 3 题）

### 4.3.2　角的比较与运算

你已经知道了比较两条线段长短的方法，怎样比较两个角的大小呢？

与线段长短的比较类似，我们可以用量角器量出角的度数，然后比较它们的大小；也可以把它们的一条边叠合在一起，通过观察另一条边的位置来比较两个角的大小（图 4.3-6）.

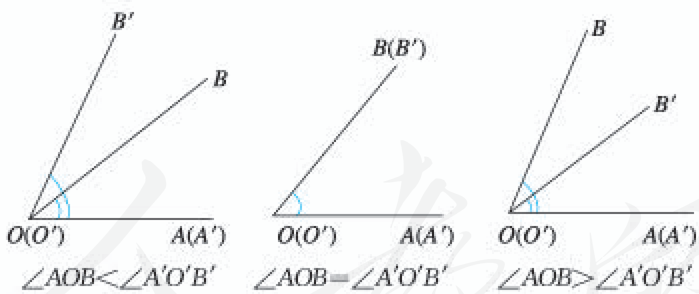



图 4.3-6

**思考**

如图 4.3-7，图中共有几个角？它们之间有什么关系？

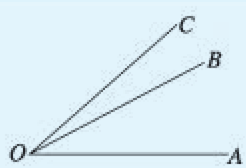



图 4.3-7

图 4.3-7 中，$\angle AOC$ 是 $\angle AOB$ 与 $\angle BOC$ 的和，记作 $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$. $\angle AOB$ 是 $\angle AOC$ 与 $\angle BOC$ 的差，记作 $\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC$. 类似地，$\angle AOC-\angle AOB=$__________.

**探究**

如图 4.3-8，借助三角尺画出 15°，75° 的角. 用一副三角尺，你还能画出哪些度数的角？试一试.

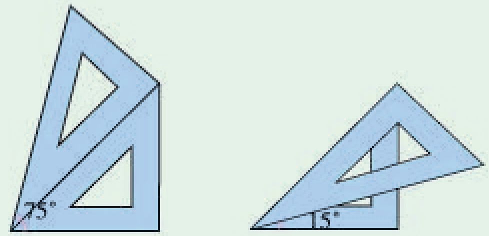
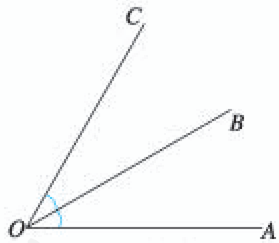



图 4.3-8

我们知道，线段的中点把线段分成相等的两条线段. 类似地，图 4.3-9 中，如果 $\angle AOB=\angle BOC$，那么射线 $OB$ 把 $\angle AOC$ 分成两个相等的角，这时有

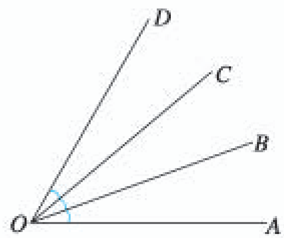
$$\angle AOC=2\angle AOB=2\_\_\_\_\_\_,\ \angle AOB=\angle BOC=\frac{1}{2}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

一般地，从一个角的顶点出发，把这个角分成两个相等的角的射线，叫做这个**角的平分线**（angular bisector）. 类似地，还有角的三等分线等（图 4.3-10）.




$OB$ 是 $\angle AOC$ 的平分线

图 4.3-9




$OB$，$OC$ 是 $\angle AOD$ 的三等分线

图 4.3-10

**探究**

仿照图 4.3-11，通过折纸作角平分线.

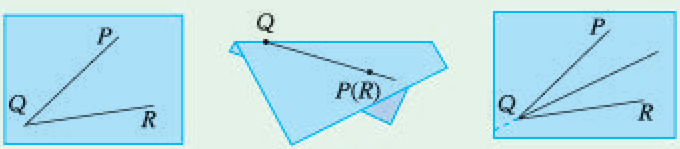



图 4.3-11

**例 1** 如图 4.3-12，$O$ 是直线 $AB$ 上一点，$\angle AOC=53°17'$，求$\angle BOC$ 的度数.

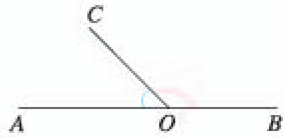


图 4.3-12

**分析：** $AB$ 是直线，$\angle AOB$ 是平角. $\angle BOC$ 与$\angle AOC$ 的和是$\angle AOB$.

**解：** 由题意可知，$\angle AOB$ 是平角，$\angle AOB=\angle AOC+\angle BOC$.

所以$\angle BOC=\angle AOB-\angle AOC$

$=180°-53°17'$

$=126°43'$.

> 这里的加与减，要将度与度、分与分、秒与秒分别相加、减，分秒相加时逢 60 要进位，相减时要借 1 作 60. 本题中应借 1°，化为 60′.

**例 2** 把一个周角 7 等分，每一份是多少度的角（精确到分）？

**解：** $360°\div 7=51°+3°\div 7$

$=51°+180'\div 7$

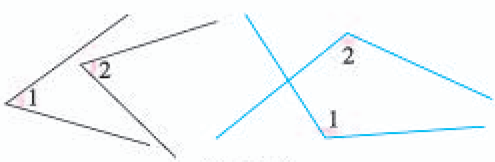
$\approx 51°26'$.

**答：** 每份是 51°26′的角.

> 注意度、分、秒是 60 进制的，要把剩余的度数化成分.

**练习**

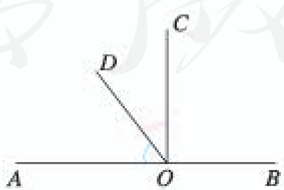
1. 估计图中$\angle 1$ 与$\angle 2$ 的大小关系，并用适当的方法检验.



（第 1 题）

2. 如图，把一个蛋糕等分成 8 份，每份中的角是多少度？如果要使每份中的角是 15°，这个蛋糕应等分成多少份？


（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$O$ 是直线 $AB$ 上一点，$OC$ 是$\angle AOB$ 的平分线，$\angle COD=31°28'$，求$\angle AOD$ 的度数.

### 4.3.3　余角和补角

在一副三角尺中，每块都有一个角是 $90°$，而其他两个角的和是 $90°$（$30°+60°=90°$，$45°+45°=90°$）. 一般地，如图 4.3-13，如果两个角的和等于 $90°$（直角），就说这两个角互为**余角**（complementary angle），即其中每一个角是另一个角的余角.

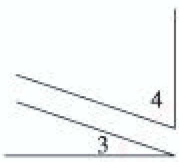


图 4.3-13

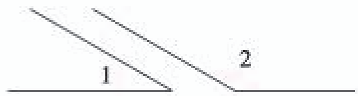


图 4.3-14

> 两个角互为余角简称为两个角互余，两个角互为补角简称为两个角互补.

类似地，如图 4.3-14，如果两个角的和等于 $180°$（平角），就说这两个角互为**补角**（supplementary angle），即其中一个角是另一个角的补角.

**思考**

$\angle 1$ 与 $\angle 2$，$\angle 3$ 都互为补角，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 的大小有什么关系？

$\angle 1$ 与 $\angle 2$，$\angle 3$ 都互为补角，那么 $\angle 2=180°-\angle 1$，$\angle 3=180°-\angle 1$，所以 $\angle 2=\angle 3$. 由此，我们得到关于补角的一个性质：

**同角（等角）的补角相等.**

对于余角也有类似的性质：

**同角（等角）的余角相等.**

**例 3**　如图 4.3-15，点 $A$，$O$，$B$ 在同一条直线上，射线 $OD$ 和射线 $OE$ 分别平分 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$，图中哪些角互为余角？

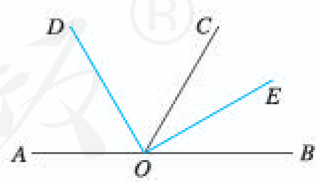


图 4.3-15

**解：** 因为点 $A$，$O$，$B$ 在同一条直线上，所以 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$ 互为补角.

又因为射线 $OD$ 和射线 $OE$ 分别平分 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$，所以

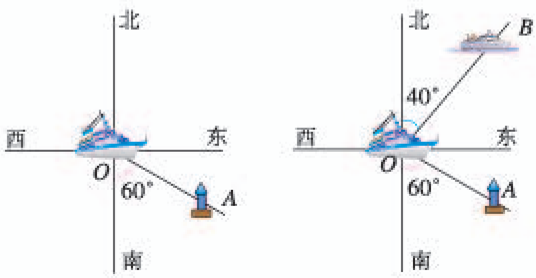
$$\begin{aligned}\angle COD+\angle COE &= \frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)\\ &=90°.\end{aligned}$$

所以，$\angle COD$ 和 $\angle COE$ 互为余角.

同理，$\angle AOD$ 和 $\angle BOE$，$\angle AOD$ 和 $\angle COE$，$\angle COD$ 和 $\angle BOE$ 也互为余角.

**例 4** 如图 4.3-16（1），货轮 $O$ 在航行过程中，发现灯塔 $A$ 在它南偏东 60°的方向上. 同时，在它北偏东 40°、南偏西 10°、西北（即北偏西 45°）方向上又分别发现了客轮 $B$、货轮 $C$ 和海岛 $D$. 仿照表示灯塔方位的方法，画出表示客轮 $B$、货轮 $C$ 和海岛 $D$ 方向的射线.

> 有时以正北、正南方向为基准，描述物体运动的方向，如“北偏东 30°”“南偏东 25°”.
>
> 表示方向的角在航行、测绘等工作中经常用到.




（1）　（2）

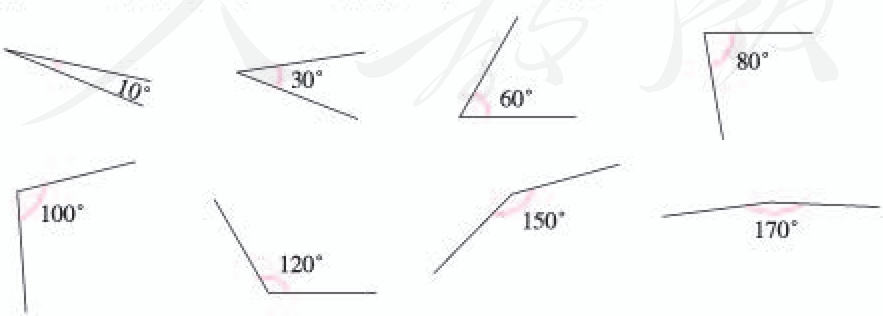
图 4.3-16

**画法：** 以点 $O$ 为顶点，表示正北方向的射线为角的一边，画 40°的角，使它的另一边 $OB$ 落在东与北之间. 射线 $OB$ 的方向就是北偏东 40°（图 4.3-16（2）），即客轮 $B$ 所在的方向.

请你在图 4.3-16（2）上画出表示货轮 $C$ 和海岛 $D$ 方向的射线.

## 练习

1. 图中给出的各角中，哪些互为余角？哪些互为补角？




（第 1 题）

2. 一个角是 $70°39'$，求它的余角和补角.

3. $\angle\alpha$ 的补角是它的 3 倍，$\angle\alpha$ 是多少度？

4. 一个角是钝角，它的一半是什么角？

## 习题 4.3

### 复习巩固

1. 如果把钟表的时针在任一时刻所在的位置作为起始位置，那么时针旋转出一个平角及一个周角，至少各需要多长时间？

2. 凭你的感觉画出 $30°$，$45°$，$90°$，$120°$，$135°$的角，再用量角器量一量，你画的准确度如何？

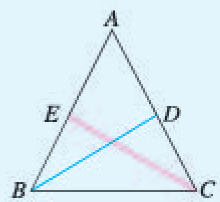
3. 计算：

   (1) $48°39'+67°31'$；　　(2) $21°17'\times5$.

4. 如果$\angle1=\angle2$，$\angle2=\angle3$，则$\angle1$ ______ $\angle3$；

   如果$\angle1>\angle2$，$\angle2>\angle3$，则$\angle1$ ______ $\angle3$.

5. 如图，$BD$ 和 $CE$ 分别是$\angle ABC$ 和$\angle ACB$ 的平分线，且$\angle DBC=\angle ECB=31°$，求$\angle ABC$ 和$\angle ACB$ 的度数，它们相等吗？

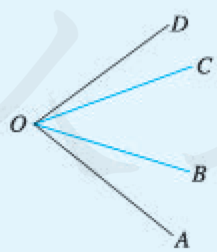



（第 5 题）

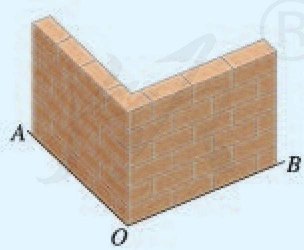
6. 按图填空：

   (1) $\angle AOB+\angle BOC=$ ________；　　(2) $\angle AOC+\angle COD=$ ________；

   (3) $\angle BOD-\angle COD=$ ________；　　(4) $\angle AOD-$ ________ $=\angle AOB$.




（第 6 题）




（第 7 题）

7. 如图，要测量两堵围墙所形成的$\angle AOB$ 的度数，但人不能进入围墙，如何测量？

8. 按照上北下南，左西右东的规定画出表示东南西北的十字线，然后在图上画出表示下列方向的射线：

（1）北偏西 30°；　　　　（2）南偏东 60°；

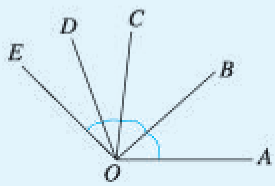
（3）北偏东 15°；　　　　（4）西南方向（南偏西 45°）.

## 综合运用

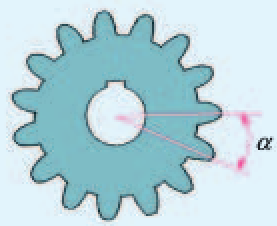
9. 如图，$OB$ 是 $\angle AOC$ 的平分线，$OD$ 是 $\angle COE$ 的平分线.

（1）如果 $\angle AOB=40°$，$\angle DOE=30°$，那么 $\angle BOD$ 是多少度？

（2）如果 $\angle AOE=140°$，$\angle COD=30°$，那么 $\angle AOB$ 是多少度？



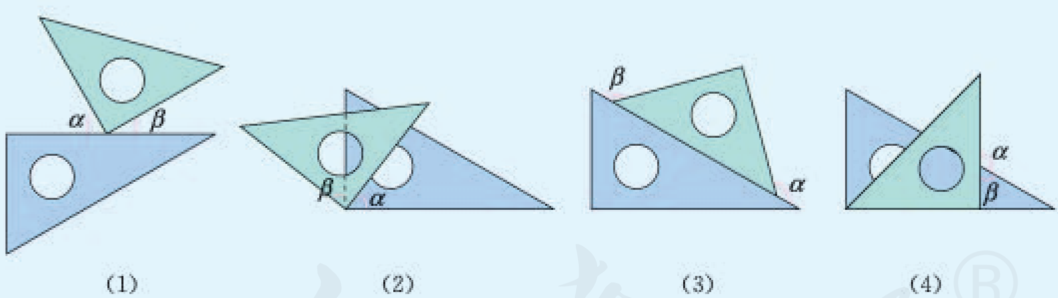

（第 9 题）




（第 10 题）

10. 如图，一个齿轮有 15 个齿，每相邻两齿中心线间的夹角都相等，这个夹角是多少度？如果是 22 个齿的齿轮，这个夹角又是多少度（精确到分）？

11. 如图，将一副三角尺按不同位置摆放，在哪种摆放方式中 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互余？在哪种摆放方式中 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互补？在哪种摆放方式中 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 相等？

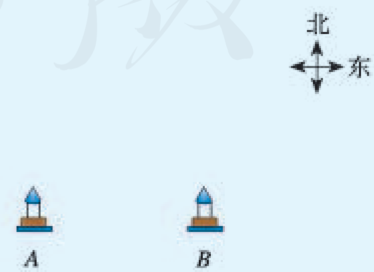



（第 11 题）

12. 如图，$A$ 地和 $B$ 地都是海上观测站，从 $A$ 地发现它的北偏东 60°方向有一艘船，同时，从 $B$ 地发现这艘船在它北偏东 30°方向. 试在图中确定这艘船的位置.

13.（1）互余且相等的两个角，各是多少度？

（2）一个锐角的补角比这个角的余角大多少度？

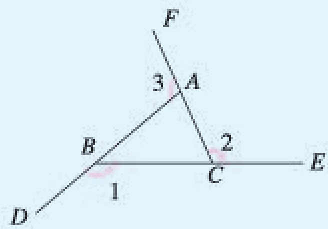



（第 12 题）

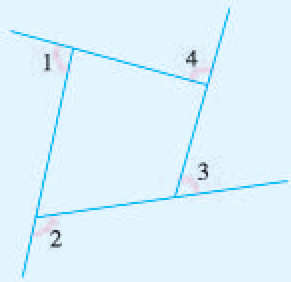
## 拓广探索

14. 画几个不同的四边形，使每个四边形中都有 30°，90°，105°的角，量一量这些四边形中另一个角的度数，你能发现什么规律？

15. (1) 图 (1) 中，射线 $AD$，$BE$，$CF$ 构成$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，量出$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，并计算$\angle 1+\angle 2+\angle 3$. 画出几个类似的图，计算相应的三个角的和，你有什么发现？




(1)




(2)

(第 15 题)

(2) 类似地，量出图 (2) 中$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$，计算$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$. 再换几个类似的图试试，你有什么发现？

综合 (1) (2) 的发现，你还能进一步得到什么猜想？

# 4.4 课题学习
# 设计制作长方体形状的包装纸盒

日常生活中，我们经常可以看到各种各样的长（正）方体形状的包装盒，如粉笔盒、文具盒、牙膏盒等（图 4.4-1）.

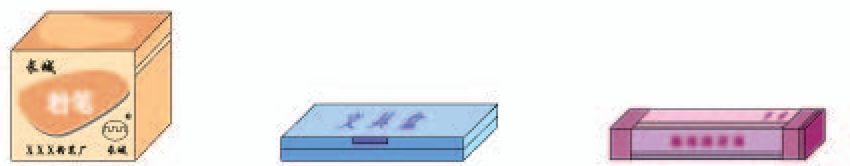


图 4.4-1

设计这类包装盒时，要先绘制长方体的展开图，再把它剪出并折叠成长方体. 此外，还会用到美术知识（图案、视觉效果、美术字）、语言知识（文字设计、广告语言、汉语拼音或英语词组）、生产常识（材料、生产成本）等. 本节中，我们将通过下面的设计和制作长方体纸盒的实践活动，进一步体会立体图形与平面图形之间的相互转化.

**活动名称**：设计制作长方体形状的包装纸盒

**方　　法**：观察、讨论、动手设计制作

**材　　料**：厚（硬）纸板、直尺、裁纸刀、剪刀、胶水、彩笔等

**准　　备**：收集一些长方体形状的包装盒，如墨水瓶盒、粉笔盒、饼干盒、牛奶包装盒、牙膏盒等，作为参考物.

**活动步骤**：

1. 观察、讨论

以 5～6 人为一组，各组确定所要设计制作的包装盒的类别（这里以长城牌墨水瓶纸盒为例），明确分工.

（1）观察作为参考物的包装盒，分析其各面、各棱的大小与位置关系.

（2）拆开盒子，把它铺平，得到展开图；观察它的形状，找出对应长方体各面的相应部分；度量各部分的尺寸，找出其中的相等关系.

（3）把展开图复原为包装盒，观察它是如何折叠并粘到一起的.

（4）多拆、装几个包装盒，注意它们的共同特征.

（5）经过讨论，确定本组的设计方案（包括包装盒的形状、尺寸、外表图案、文字等）.

2. 设计、制作

（1）先在一张软纸上画出包装盒展开图的草图，简单设计一下，裁纸、折叠，观察效果．如果发生问题，应调整原来的设计，直至达到满意的初步设计．

（2）在硬纸板上，按照初步设计，画好包装盒的展开图（如图 4.4-2，单位：mm）．注意要预留出黏合处，并要适当剪去棱角．在展开图上进行图案与文字的美术设计．

（3）裁下展开图，折叠并粘好黏合处，得到长方体包装盒（图 4.4-3）．

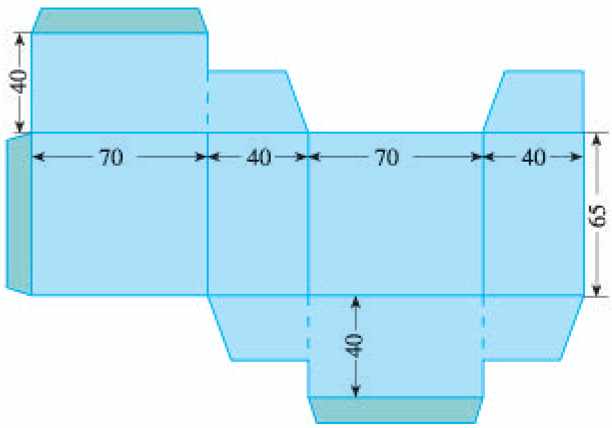



图 4.4-2

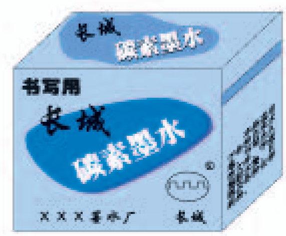



图 4.4-3

3. 交流、比较

各组展示本组的作品，并介绍设计思想和制作过程．

讨论各组的作品，重点探究以下几个问题：

（1）制成的包装盒是否是长方体？如果不是，是哪个地方出了问题？如何改进？

（2）从实用性上看，包装盒形状、尺寸是否合理？用料是否节省？是否需要改进？

（3）包装盒的外观设计是否美观？

（4）对平面图形与立体图形的联系有哪些新认识？

4. 评价、小结

评价各组的活动情况，小结活动的主要收获．

5. 巩固、提高

（1）自己设计制作一个正六棱柱形状（底面是 6 条边都相等、6 个角都相等的六边形，6 个侧面都是长方形）的包装纸盒；

（2）自己设计制作一个圆柱形状的包装纸盒．

# 数学活动

## 活动1

图 1 是一些火车车厢的模型，它们对应着什么样的立体图形？选择适当的比例，在一张硬纸板上分别画出它们的展开图，折叠起来，得到火车车厢的模型．你还可以给它们加上窗子，或是装上货物，加上车轮……

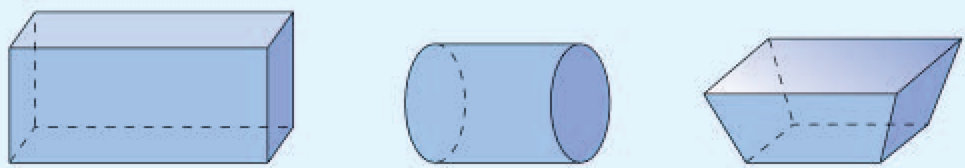


图 1

你还见过其他形状的火车车厢吗？类似地制作出它们的模型．

## 活动2

仿照下面的步骤画一个五角星（图 2）：

（1）任意画一个圆；

（2）以圆心为顶点，连续画 72°(即 360°÷5)的角，与圆相交于 5 点；

（3）连接每隔一点的两个点；

（4）擦去多余的线，就得到五角星．

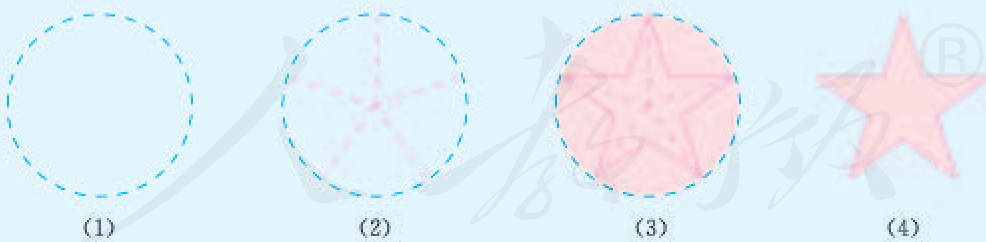



图 2

你能说出这种画法的道理吗？你还有其他的画法吗？类似地，你能画出一个六角星吗？

通过折纸（图 3），你能制作一个五角星吗？沿不同的角 $\alpha$ 剪开，得到的五角星形状相同吗？哪一种更美观？变换不同的角 $\alpha$ 试一试！

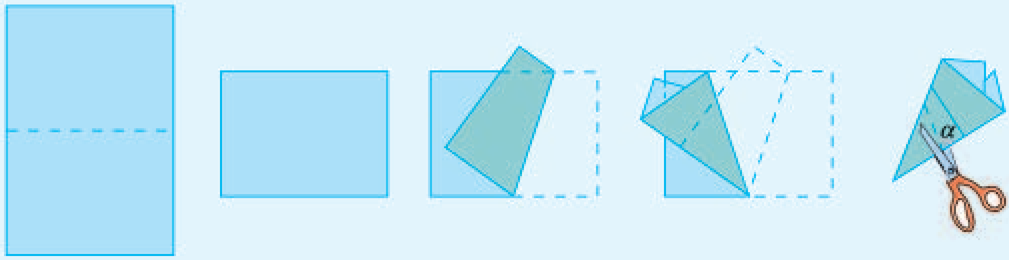



图 3

许多艺术设计和图案设计都与星形有关，在你画出的五角星和六角星上着色，可得到如图 4 的艺术图案，你能在此基础上再设计一些图案吗？

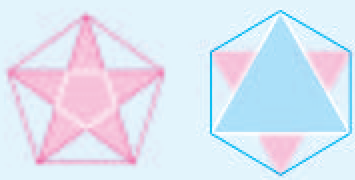
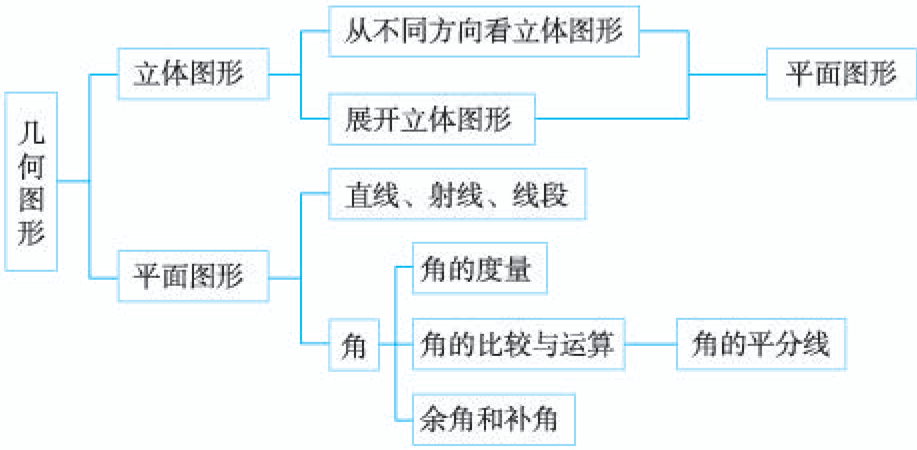


图 4

# 小　结

## 一、本章知识结构图




## 二、回顾与思考

几何是研究图形的形状、大小和位置关系的学科．本章我们学习了图形与几何的一些最基本的知识，如几何图形、立体图形、平面图形；点、线、面、体等．我们还学习了确定直线的基本事实，直线、射线、线段和角的表示，以及线段和角的度量和大小比较等．这些知识都是进一步学习图形与几何知识的基础．

几何图形是从各种物体中抽象出来的，是更一般的“形”．另外，我们还要注意几何图形之间的联系，如点动成线、线动成面、面动成体，这种联系有助于我们理解和掌握知识．

在研究几何图形的过程中，我们常常采用类比的方法．例如，类比线段的大小比较、线段中点研究角的大小比较、角平分线等．类比的方法既引导我们发现问题，也帮助我们找到解决问题的途径．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 下面是本章学到的一些数学名词，你能简短地描述这些数学名词吗？你能画出图形来表示它们吗？

立体图形　平面图形　展开图　两点的距离　余角　补角

2. 你能举出几个立体图形和平面图形的实例吗？

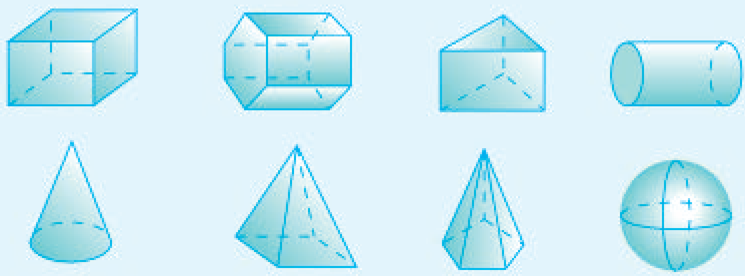
3. 找几个简单的立体图形，分别画出它们的展开图和从不同方向看得到的平面图形．你能由此说说立体图形与平面图形的联系吗？

4. 在本章中，关于直线和线段有哪些重要结论？
5. 本章学习了有关角的哪些知识？有哪些重要结论？

## 复习题 4

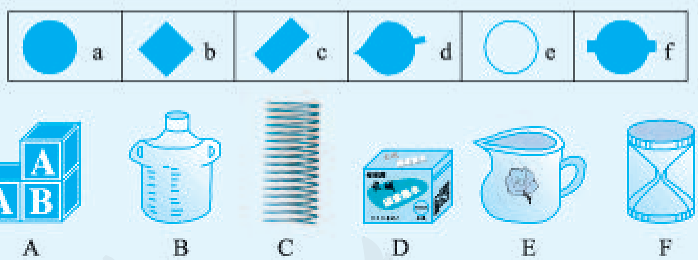
### 复习巩固

1. 说出下列图形的名称.



（第 1 题）

2. 如图，从上往下看 A，B，C，D，E，F 六个物体，分别能得到 a，b，c，d，e，f 哪个图形？把上下两行中对应的图形与物体连接起来.

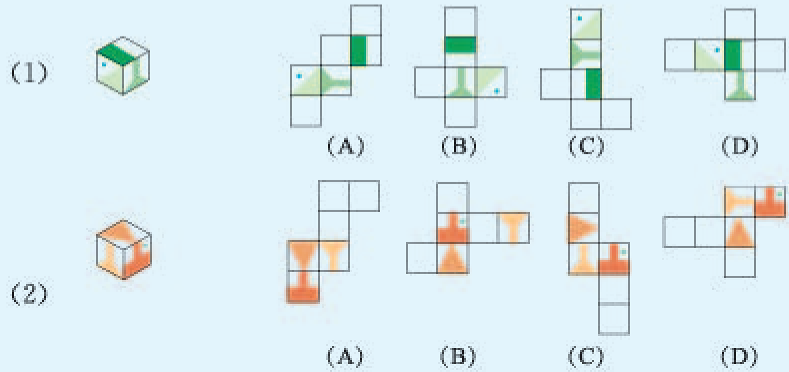



（第 2 题）

3. 如图，分别从正面、左面、上面观察这些立体图形，各能得到什么平面图形？

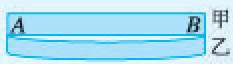
（第 3 题）

4. 如下页图，右面哪一个图形是左面正方体的展开图？

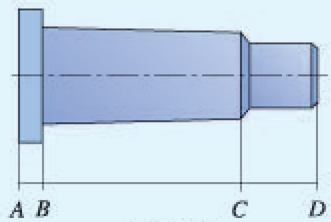



（第 4 题）

5. 如图，将甲、乙两个尺子拼在一起，两端重合. 如果甲尺经校订是直的，那么乙尺是直的吗？为什么？




（第 5 题）




（第 6 题）

6. 在一张零件图中，已知 $AD=76$ mm，$BD=70$ mm，$CD=19$ mm，求 $AB$ 和 $BC$ 的长.

7. 判断题：

(1) 锐角的补角一定是钝角； （ ）

(2) 一个角的补角一定大于这个角； （ ）

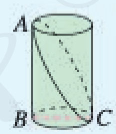
(3) 如果两个角是同一个角的补角，那么它们相等； （ ）

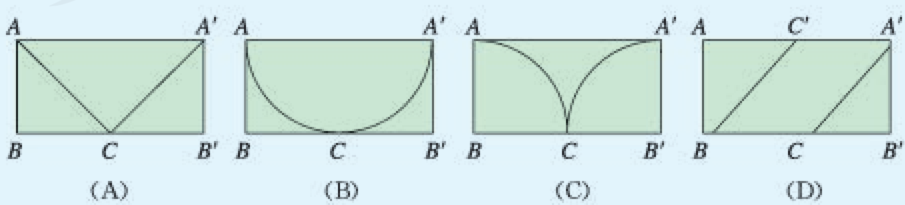
(4) 锐角和钝角互补. （ ）

8. 已知 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 互为补角，并且 $\angle\beta$ 的一半比 $\angle\alpha$ 小 30°，求 $\angle\alpha$，$\angle\beta$.

## 综合运用

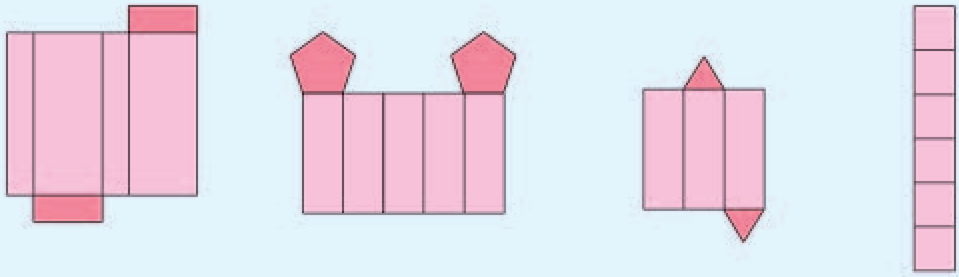
9. 如图，已知 $BC$ 是圆柱底面的直径，$AB$ 是圆柱的高，在圆柱的侧面上，过点 $A$，$C$ 嵌有一圈路径最短的金属丝，现将圆柱侧面沿 $AB$ 剪开，所得的圆柱侧面展开图是（ ）.



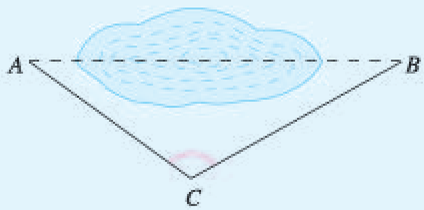

（第 9 题）

10. 图中的几个图形能否折叠成为棱柱？先想一想，再折一折.



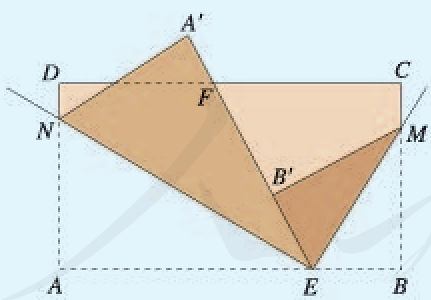
（第 10 题）

11. 如图，$A$，$B$ 两地隔着池塘，从 $C$ 地测得 $CA=50$ m，$CB=60$ m，$\angle ACB=115°$，用1 cm 代表 10 m，画出类似的图形，量出 $AB$ 的长（精确到 1 mm），再换算出 $A$，$B$ 两地的实际距离.

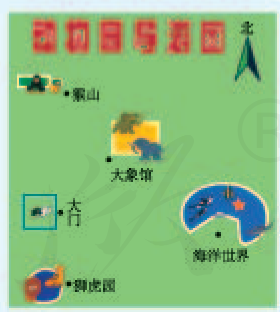



（第 11 题）

12. 如图，长方形纸片 $ABCD$，点 $E$，$F$ 分别在边 $AB$，$CD$ 上，连接 $EF$. 将$\angle BEF$ 对折，点 $B$ 落在直线 $EF$ 上的点 $B'$ 处，得折痕 $EM$；将$\angle AEF$ 对折，点 $A$ 落在直线 $EF$ 上的点 $A'$ 处，得折痕 $EN$，求$\angle NEM$ 的度数.




（第 12 题）

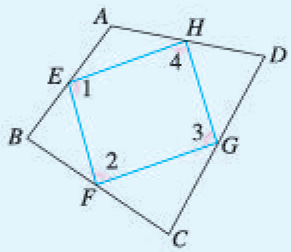



（第 13 题）

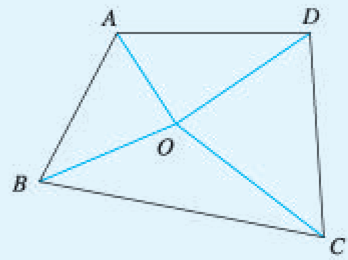
13. 如图，这是一幅动物园某一景区的示意图，海洋世界、狮虎园、猴山、大象馆分别在大门的什么方向？

### 拓广探索

14. 任意画一个四边形 $ABCD$，四边形的四边中点分别为 $E$，$F$，$G$，$H$，连接 $EF$，$FG$，$GH$，$HE$，并量出它们的长，你发现了什么？量出图中 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数，你又发现了什么？多画几个四边形试试．你能得到什么猜想？




（第 14 题）




（第 15 题）

15. 如图，在四边形 $ABCD$ 内找一点 $O$，使它到四边形四个顶点的距离的和 $OA+OB+OC+OD$ 最小，并说出你的理由．由本题你得到什么数学结论？举例说明它在实际中的应用．

# 部分中英文词汇索引

# 后　记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《义务教育数学课程标准（2011年版）》编写的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2012年审查通过。

本册教科书集中反映了基础教育教科书研究与实验的成果，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教研人员以及一线教师的集体智慧。我们感谢所有对教科书的编写、出版提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友，感谢整体设计艺术指导吕敬人等。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。对此，我们表示衷心的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请入选作品的作者与我们联系，以便支付稿酬。

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们。让我们携起手来，共同完成义务教育教材建设工作！

联系方式
电　　话：010-58758333
电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2012年5月