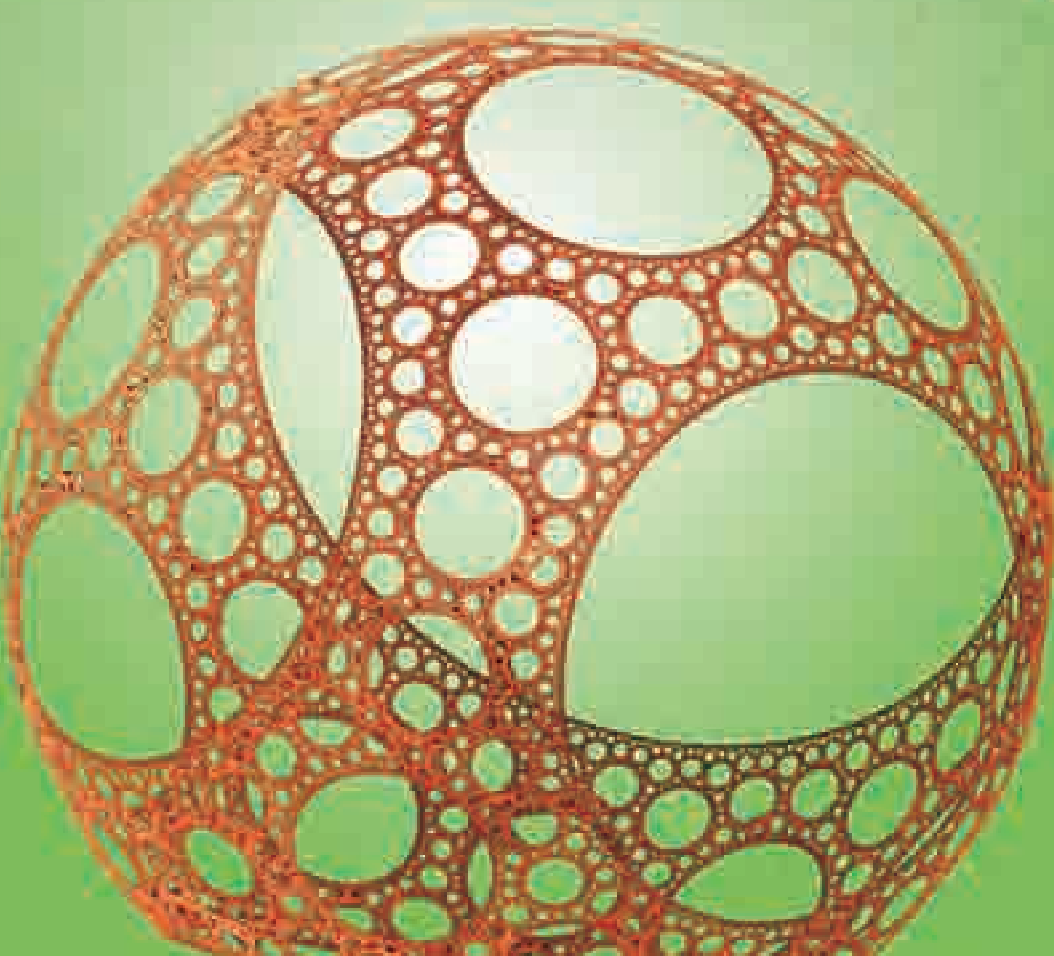
教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

九年级 上册



北 京 出 版 社

教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

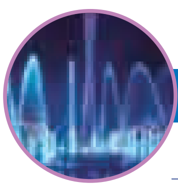
SHUXUE

九年级 上册

北京教育科学研究院 编

北京出版社

目　录

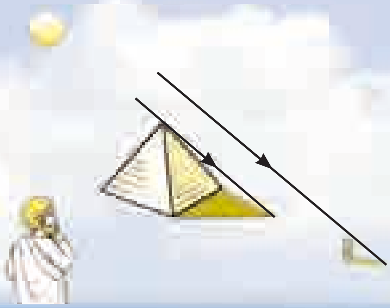


第十八章 相似形

你知道古埃及的金字塔有多高吗?

据史料记载，古希腊数学家、天文学家泰勒斯游历古埃及时，只利用一根木棒和一把尺子就测量并计算出了金字塔的高度，使古埃及法老阿美西斯钦羡不已.

学习本章的有关知识以后，你就会明白泰勒斯是怎样测算金字塔高度的，并会解决许多类似的问题.



一 比例线段

18.1 比例线段

实践

图 18－1 是两幅大小不同的北京市地图，在大地图中有 A，B，C 三个地点，在小地图中相对应的三个地点分别记作 A'，B'，C'.

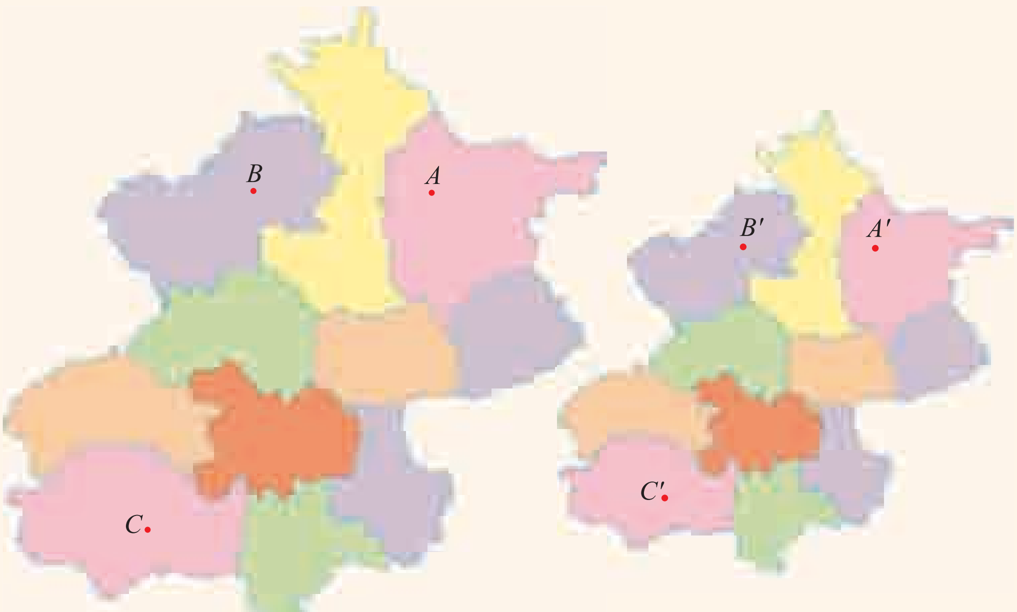


图 18－1

(1) 请你用刻度尺量出图中 A 与 B、A' 与 B' 之间的距离，B 与 C、B' 与 C' 之间的距离，并把它们填在下面的横线处：

$AB=$ ＿＿＿＿＿＿ cm，$A'B'=$ ＿＿＿＿＿＿ cm；

$BC=$ ＿＿＿＿＿＿ cm，$B'C'=$ ＿＿＿＿＿＿ cm.

(2) 算一算 $\dfrac{AB}{A'B'}$，$\dfrac{BC}{B'C'}$ 的值，你能发现它们在数量上有什么关系吗？

在四条线段中，如果其中两条线段的比等于另外两条线段的比，那么这四条线段叫做成比例线段，简称**比例线段**．

图 18－1 中的线段 AB，$A'B'$，BC，$B'C'$ 就是成比例线段．

例 1 线段 $m = 1$ cm，$n = 2$ cm，$p = 3$ cm，$q = 6$ cm. 请判断这四条线段成比例吗？并说明理由．

解：线段 m，n，p，q 成比例．理由如下：

$\because \quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2}，\quad \dfrac{p}{q} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}，$

$\therefore \quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}．$

$\therefore$ 线段 m，n，p，q 成比例．

还有其他的判断方法吗？

思考

1. 对于线段 a，b，c，d，如果 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$，那么 $ad = bc$ 成立吗？为什么？

2. 如果 $ad = bc$，其中 $bd \neq 0$，那么 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ 成立吗？为什么？

根据等式的性质可以得到比例的基本性质：

- 如果 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$，那么 $ad = bc$．
- 如果 $ad = bc$，且 $bd \neq 0$，那么 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$．

由 $ad = bc$ 还可以得到哪些比例式？

例 2 如图 18－2，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 上的点，且 $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$．由此还可以得到哪些比例式？并对其中一个比例式简述成立的理由．

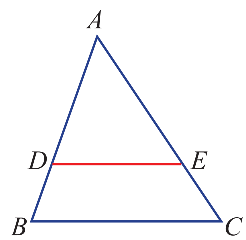


图 18－2

解：还可以得到 $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$，$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$，…

其中 $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$ 成立的理由如下：

$$\because \quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},$$

$$\therefore \quad \frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}.$$

即 $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$.

练习

1. 在如图所示的三个矩形中，哪两个矩形的长和宽是成比例线段？

（第 1 题）

2. 证明：如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，那么 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$，$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$.

3. 已知：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}$，求：

（1）$\dfrac{a+b}{b}$ 的值；（2）$\dfrac{a-b}{b}$ 的值.

18.2 黄金分割

探索

五角星是我们常见的图形．在图 18－3 中，分别量出点 C 到点 A，B 的距离，并计算 $\dfrac{AC}{AB}$ 的值.

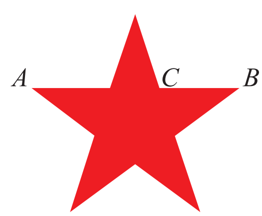


图 18－3

图 18－4 是古希腊的著名雕塑——爱与美之神维纳斯．请你量出维纳斯的肚脐到脚底的长度，再量出她的身长，并计算它们的比值，你发现了什么？将这个比值与五角星问题中 $\frac{AC}{AB}$ 的值比较一下，又能有什么发现？

肚脐到脚底的长度＝__________；

身长＝__________；

$\frac{\text{肚脐到脚底的长度}}{\text{身长}}=$__________．

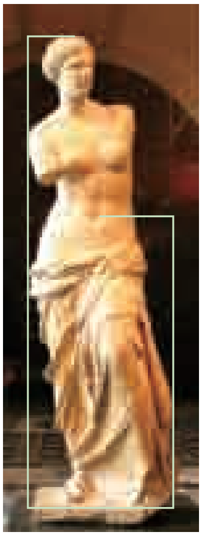


图 18－4

古希腊数学家在公元前 4 世纪，研究了这样一个问题：如何在线段 AB 上确定一个点 C，使 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$（如图 18－5）．

图 18－5

设 $AB=1$，$AC=x$，那么 $BC=1-x$．

$\because \quad \frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，

$\therefore \quad \frac{x}{1}=\frac{1-x}{x}$．

$\therefore \quad x^2=1\times(1-x)$．

即 $\quad x^2+x-1=0$．

解这个方程，得

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$（不合题意，舍去）．

所以，$\frac{AC}{AB}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618$．

即在线段 AB 上截取这条线段长的 0.618 倍，得到点 C．

点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC，如果 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，那么称线段 AB 被点 C **黄金分割**，点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点，AC 与 AB 的比叫做**黄金比**.

我们还可以用几何作图的方法确定点 C.

已知线段 AB，求作线段 AB 的黄金分割点 C.

作法：(1) 过点 B 作 $BD\perp AB$，使 $BD=\frac{1}{2}AB$.

(2) 连接 AD，在 AD 上截取 $DE=DB$.

(3) 在 AB 上截取 $AC=AE$.

如图 18－6，所以点 C 就是所求的黄金分割点.

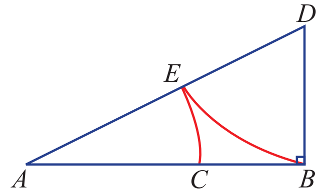


图 18－6

交流

你能说出上述作法的道理吗？

练习

已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点，求 $\frac{BC}{AC}$ 的近似值（结果精确到 0.001）. 你发现了什么规律？用式子怎样表示？

探索

如果一个矩形的宽与长的比值正好是黄金比，人们就称它为“黄金矩形”. 黄金矩形曾一度统治着西方的建筑美学，法国巴黎圣母院是它的一个杰出代表作（图 18－7），它的整个结构就是按照黄金矩形建造的.

请你画出一个黄金矩形.

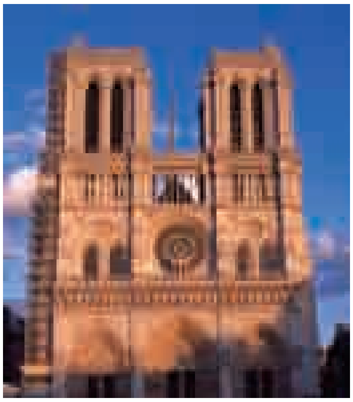


图 18－7

阅读理解

不仅仅是美

令人惊奇的是，自然界也偏爱黄金分割．有人研究过小麦和水稻的茎节，发现其相邻两节长度之比也为 0.618. 另外，许多植物的叶片和花瓣，其相邻两片错开的角度，也是按照黄金比来排列的．从上往下看时，第一层和第二层两叶之间的角度约为 137.5°，依次二层到三层、三层到四层、四层到五层……两叶之间都成这个角度．生物学家经过研究后发现，这个角度对叶的通风和采光最为有利．137.5° 与黄金比有什么联系呢？我们知道，周角是 360°，那么，$137.5°:(360°-137.5°)=137.5°:222.5°\approx 0.618$（图 18－8）．像蓟草、梨树枝和玫瑰花瓣的生长就符合这个规律．

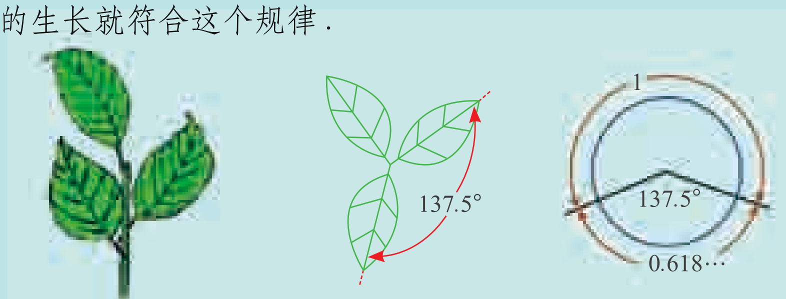


图 18－8

如图 18－9，作一个黄金矩形，在这个黄金矩形的内部再作一个正方形，剩下的部分是一个稍小的黄金矩形……照此方法作下去，可以得到一个比一个更小的一系列黄金矩形．依次用弧线连接图中正方形一条对角线的两个端点，可以得到一条光滑的曲线，这条曲线叫做“黄金螺线”．黄金螺线还有一些别的名字，如叫“生长螺线”等，这说明它有许多重要的性质．有一种叫梭尾法螺的海螺，它上面就有一条黄金螺线，鹦鹉螺的外壳也是黄金螺线形的（图 18－10）．

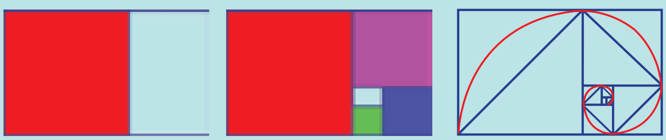


图 18－9

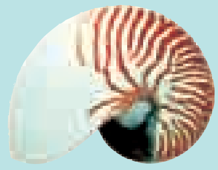


图 18－10

人体感到舒适的温度约为 23 ℃，也是人体正常体温 37 ℃的黄金分割点，因为 $23 \approx 37 \times 0.618$. 科学家还发现，人在精神愉快时，脑电波频率的下限为 8 Hz，上限为 12.9 Hz，两者之比约为 0.618 .

看来，黄金比不仅仅给人以视觉上美的享受，也是生物自身生长的需要 .

近几十年，数学上出现了一个新的分支——最优化方法，它给黄金比找到了新的用武之地 . 从 1970 年开始，我国著名数学家华罗庚教授推广的优选法，就是最优化方法的一种 . 优选法是一种快捷、实用的方法，在生产和生活中有着广泛的应用 .

18.3 平行线分三角形两边成比例

实践

如图 18－11，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$. 直线 l_4 被 l_1，l_2，l_3 所截，其中截得的两条线段分别为 AB，BC . l_5 是另外任一条被 l_1，l_2，l_3 所截的直线，其中截得的两条线段分别为 DE，EF .

(1) 度量线段 AB，BC，DE，EF 的长，并计算 $\frac{AB}{BC}$，$\frac{DE}{EF}$，你有什么发现?

(2) 移动直线 l_1，l_2，l_3，并保持 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，前面发现的结论是否仍然成立?

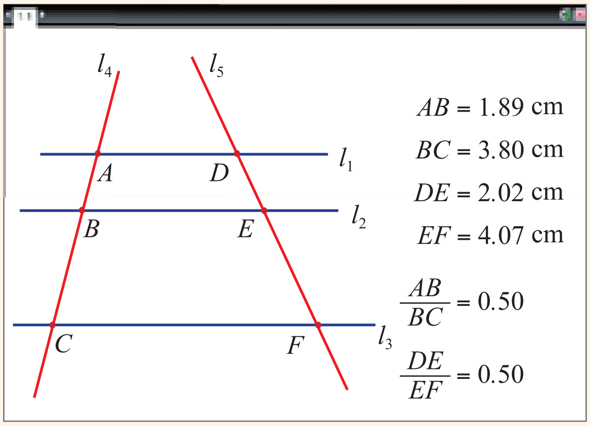


图 18－11

我们发现，当 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ 时，都可得到 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

一组平行线的条数可以多于 3 条吗?

应用比例性质和等式性质，还可得到 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$，$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{DF}{DE}$ 等.

由此得到：

基本事实　两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

由以上基本事实可得：

推论　平行于三角形一边的直线截其他两边，所得的对应线段成比例.

例 1　已知：如图 18－12，在△ABC 中，$DE // BC$，$AD=4$，$DB=3$，$AC=10$. 求 AE，EC 的长.

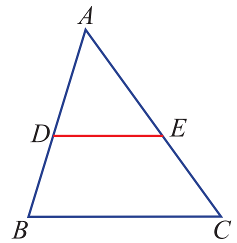


图 18－12

解：在△ABC 中，

∵　$DE // BC$，

∴　$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

设 $AE=x$，那么 $EC=10-x$，

∴　$\dfrac{4}{3}=\dfrac{x}{10-x}$.

解得　$x=\dfrac{40}{7}$.

∴　$10-x=10-\dfrac{40}{7}=\dfrac{30}{7}$.

即　$AE=\dfrac{40}{7}$，$EC=\dfrac{30}{7}$.

例 2　已知：如图 18－13，在△ABC 中，$DE // BC$，$EF // AB$. 试问 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{BF}{FC}$ 成立吗？为什么？

解：$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{BF}{FC}$ 成立. 理由如下：

在△ABC 中，

∵　$DE // BC$，

∴　$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

又∵　$EF // AB$，

∴　$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BF}{FC}$.

∴　$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{BF}{FC}$.

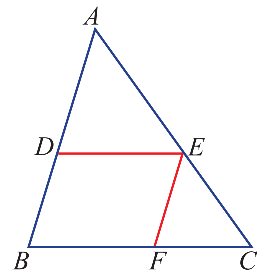


图 18－13

交流

如图 18－14，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，E 是 AC 上任一点，BE 交 AD 于点 O. 数学兴趣小组的同学在研究这一图形时，得到如下结论：

(1) 当 $\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{3}$；

(2) 当 $\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{1}{3}$ 时，$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{5}$；

(3) 当 $\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{1}{4}$ 时，$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{7}$.

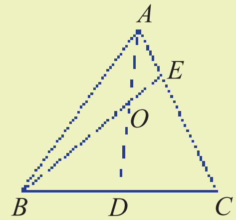
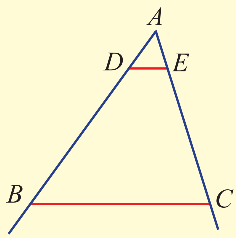


图 18－14

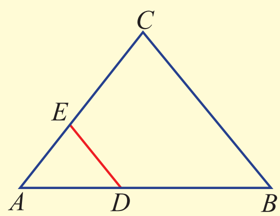
请根据上述结论，猜想当 $\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{1}{n+1}$ 时（n 是正整数），$\dfrac{AE}{AC}$ 的一般性结论，并说明理由.

练习

1. 如图，点 B，D 在 $\angle A$ 的一条边上，点 C，E 在 $\angle A$ 的另一条边上，且 $DE\parallel BC$，写出图中能够成立的比例式.
2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，$AD=3$，$DB=5$，$AE=2$. 求 AC 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

习　题　18－1

★基础★

1. 选择题：

(1) 线段 a，b，c，d 的长度如下：

① $a=12\text{ cm}$，$b=8\text{ cm}$，$c=15\text{ cm}$，$d=10\text{ cm}$；

② $a=7\text{ cm}$，$b=14\text{ cm}$，$c=19.6\text{ cm}$，$d=5\text{ cm}$；

③ $a=12\text{ cm}$，$b=4\text{ cm}$，$c=9\text{ dm}$，$d=0.3\text{ m}$.

以上 3 组数据中，能使 a，b，c，d 构成比例线段的有（　　）.

A. 1 组　　B. 2 组　　C. 3 组　　D. 0 组

（2）已知 $2x=3y\ (y\neq 0)$，那么下列比例式中成立的是（　　）.

A. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$　　B. $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$　　C. $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$　　D. $\frac{x}{2}=\frac{3}{y}$

2. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

（1）用 b，c，d 表示 a；

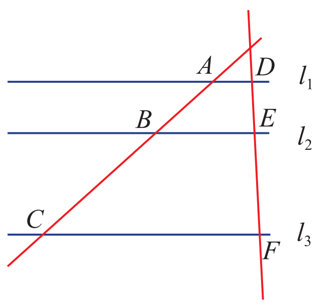
（2）用 a，c，d 表示 b.

3. 已知 $\frac{7}{x}=\frac{4}{y}$，求 $\frac{x}{y}$ 的值.

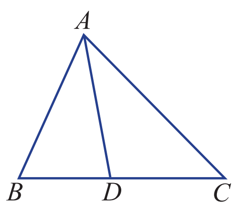
4. 已知 $\frac{m-n}{n}=\frac{3}{5}$，求 $\frac{n}{m}$ 的值.

5. 由 $ab=cd\neq 0$，写出三个比例式.

6. 已知：如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$AB=3$，$DE=2$，$EF=4$，求 BC 的长.



（第 6 题）



（第 7 题）

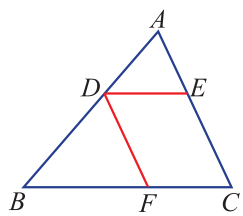
7. 已知：如图，$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，$AB=2.8\text{ cm}$，$BC=3.6\text{ cm}$，$AC=3.5\text{ cm}$，求 BD，DC 的长.

8. 把长为 8 cm 的线段进行黄金分割，求较长线段的长.

★★提升★★

1. 已知 $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$，求 $\frac{x+y}{y}$，$\frac{x-y}{y}$，$\frac{x-y}{x+y}$ 的值.

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$DF /\!/ AC$，$AE=3\text{ cm}$，$AC=8\text{ cm}$，$BC=10\text{ cm}$，求 DF 和 CF 的长.

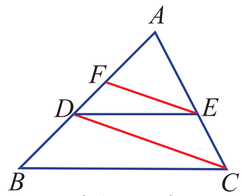


（第 2 题）

★★★ 拓展 ★★★

1. 在平面直角坐标系中，点 O，A，B，C，D 的坐标分别是 $O(0,0)$，$A(3,4)$，$B(3,0)$，$C(0,-6)$，$D(-8,-6)$，那么在线段 OB，OA，AB，OC，OD，CD 中，有哪几组是成比例线段？请写出来.

*2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$EF \parallel CD$，$AF=2$，$AB=6$. 求 AD 的长.



（第 2 题）

二、相似三角形

18.4 相似多边形

观察图 18－15，你会发现，同一底片洗出的不同尺寸的照片，尽管人物的大小不同，但是形状相同.

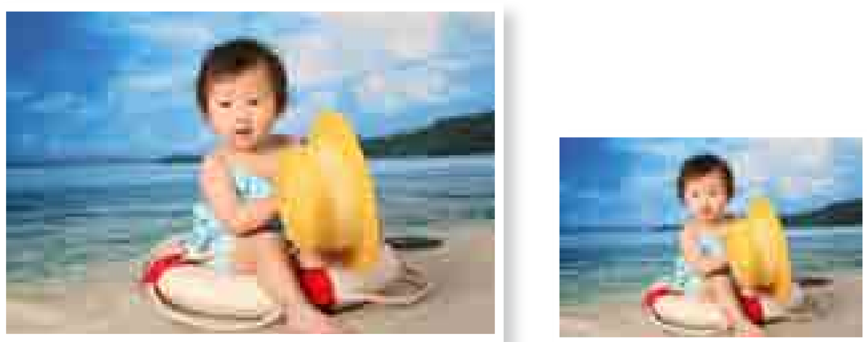


图 18－15

思考

在实际生活和数学学习中，我们常常会看到许多形状相同、大小不一定相同的图形，你能再举一些实例吗？

交流

图 18－16 中的两个四边形形状相同吗？它们是否有相等的内角？相等内角的两边是否成比例？请设法验证你的结论.

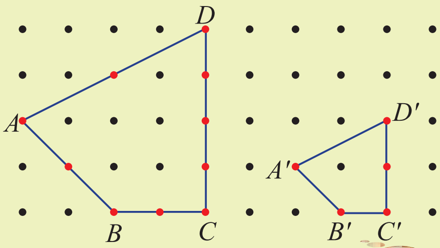


图 18－16

用刻度尺和量角器量量看.

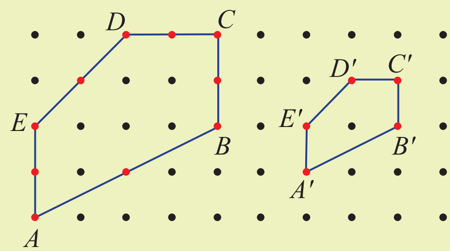


图 18－17

再观察图 18－17 中的两个五边形，是否能得出同样的结论？

在图 18－17 中，五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 是形状相同的图形，其中 $\angle A$ 与 $\angle A'$、$\angle B$ 与 $\angle B'$、$\angle C$ 与 $\angle C'$、$\angle D$ 与 $\angle D'$、$\angle E$ 与 $\angle E'$ 分别对应相等，称它们为对应角；AB 与 $A'B'$、BC 与 $B'C'$、CD 与 $C'D'$、DE 与 $D'E'$、EA 与 $E'A'$ 的比都相等，称它们为对应边.

像这样，对应角相等、对应边成比例的两个多边形叫做**相似多边形**，相似多边形对应边的比叫做**相似比**.

五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 相似，记作“五边形 $ABCDE \backsim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$”，读作“五边形 $ABCDE$ 相似于五边形 $A'B'C'D'E'$”，其中 $AB:A'B'$ 称为相似比. 一般地，在记两个多边形相似时，要把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

思考

两个正方形一定相似吗？两个矩形一定相似吗？两个菱形一定相似吗？为什么？

例 1 已知：如图 18－18，四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$，求线段 a，b 的长度和 $\angle\alpha$ 的大小.

解：$\because$ 四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$，

$\because \quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}$.

$\therefore \quad \dfrac{18}{4}=\dfrac{b}{6}=\dfrac{a}{7}$.

解得　$a=31.5$，$b=27$.

$\because \quad \angle C'=\angle C=83°$，

$\therefore \quad \angle\alpha=360°-(77°+83°+117°)=83°$.

所以，线段a，b的长度分别是31.5，27，$\angle\alpha$为83°.

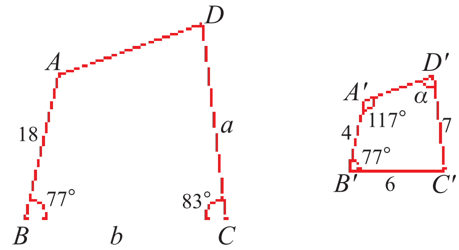


图 18－18

在相似多边形中，最简单的是**相似三角形**.

如图18－19，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果有$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$，那么$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似，记作“$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$”.

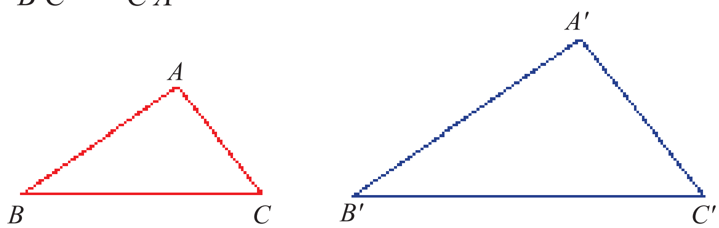


图 18－19

例 2　已知：如图18－20，$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，指出它们的对应顶点、对应边和对应角.

解： 对应顶点：A和A，D和C，E和B.

对应边：AD和AC，AE和AB，DE和CB.

对应角：$\angle A$和$\angle A$，$\angle ADE$和$\angle C$，$\angle AED$和$\angle B$.

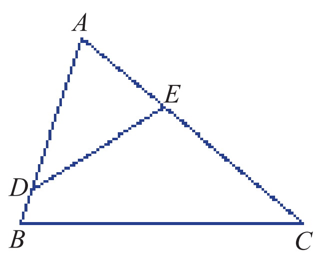


图 18－20

思考

1. 两个直角三角形一定相似吗？两个等腰直角三角形呢？为什么？

2. 两个等腰三角形一定相似吗？两个等边三角形呢？为什么？

例 3 已知：如图 18－21，$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，$AE=50\text{ cm}$，$EC=30\text{ cm}$，$\angle A=45°$.

(1) 如果 $\angle C=40°$，求 $\angle AED$ 和 $\angle ADE$ 的度数；

(2) 如果 $BC=70\text{ cm}$，求 DE 的长.

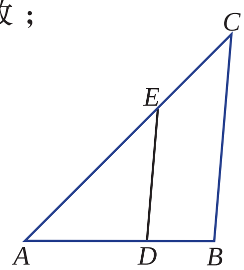


图 18－21

解：(1) ∵ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，

∴ $\angle AED=\angle C=40°$.

在 $\triangle ADE$ 中，

∵ $\angle AED+\angle ADE+\angle A=180°$，

即 $40°+\angle ADE+45°=180°$.

∴ $\angle ADE=95°$.

(2) ∵ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

∴ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$.

即 $\dfrac{50}{50+30}=\dfrac{DE}{70}$.

∴ $DE=\dfrac{50\times 70}{80}=43.75\text{ (cm)}$.

在例 3 的条件下，图 18－21 中的哪些线段成比例？图中有互相平行的线段吗？

思考

交流

1. 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 k，$\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 k'，那么 k 和 k' 有什么关系？

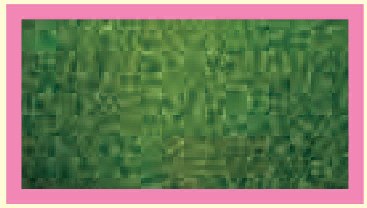
2. 当两个三角形的相似比等于 1 时，这两个三角形有什么关系？

3. 全等三角形和相似三角形之间有什么关系？

练习

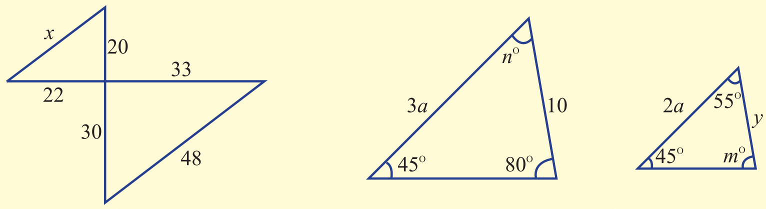
1. 正方形的边长 $a=10$，菱形的边长 $b=5$，它们相似吗？请说明理由.

2. 如图，矩形草坪长 20 m、宽 10 m，沿草坪四周有 1 m 宽的小路 . 小路的内、外边缘所围成的矩形相似吗？请说明理由 .



（第 2 题）

3. 在下面的两组图形中，各有两个相似三角形，试确定 x，y，m，n 的值 .



（1）　　　（2）

（第 3 题）

4. 判断题：

（1）相似三角形是全等三角形；（　　）

（2）全等三角形是相似三角形；（　　）

（3）全等三角形的相似比等于 1；（　　）

（4）相似三角形的相似比一定不等于 1.（　　）

5. 如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 相似吗？请说明理由 .

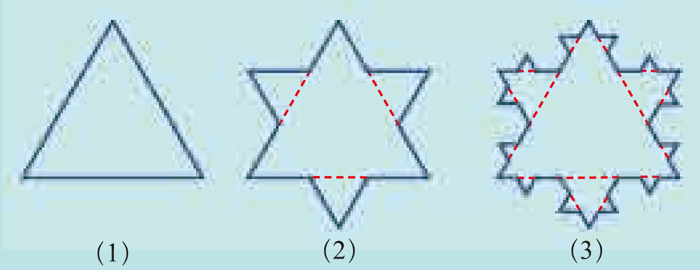
阅读理解

从“雪花曲线”谈起

你见过美丽的雪花图案吗（图 18－22）？瑞典数学家科克创造了数学中的雪花图案——雪花曲线 . 它是怎样构成的呢？

雪花曲线是由图 18－23（1）那样的等边三角形开始，然后把它的每条边三等分，以每条边三等分后的中段为边向外作新的等边三角形，新、旧三角形正好相似，如图 18－23（2）. 然后对每个等边三角形“尖出”的部分继续上述过程，即在每条边三等分之后的中段，

图 18－22



(1) (2) (3)

图 18－23

如图 18－23 (3) 那样继续向外作出新的等边三角形……不断重复这样的过程，便产生了雪花曲线.

我们看到，雪花曲线是由无数个相似三角形组成的.

许多人对这样的雪花曲线感到十分奇怪，把它称为“数学怪物”. 后来，人们发现像雪花曲线这样的“数学怪物”还真不少. 让我们再来欣赏“希尔宾斯基三角形”，它是波兰数学家希尔宾斯基最先作出的. 图 18－24 (1) 是一个正三角形，找到三条边的中点，连接成一个红色的小正三角形 [图 18－24 (2)]，把红色的小正三角形挖掉. 按照这个规律，在图 18－24 (2) 中的白色小正三角形中继续找到这样的正三角形并把它们挖掉，得到图 18－24 (3) ……这样，就可以得到一个希尔宾斯基三角形.

(1) (2) (3) (4) (5)

图 18－24

无论是雪花曲线，还是希尔宾斯基三角形，它们都是从一个简单的正三角形出发，按照一定的规律，最后得出很复杂、很漂亮的图形.

化复杂为简单，用简单去逼近复杂，这正是科学家经常使用的思维方法.

18.5 相似三角形的判定

交流

如图 18－25，在△ABC 中，$DE\parallel BC$，并交 AB，AC 于点 D，E，那么△ADE 与△ABC 相似吗？为什么？

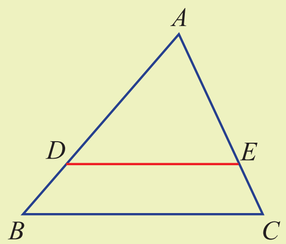


图 18－25

已知：如图18－26，在△ABC中，$DE\parallel BC$，并交AB，AC 于点D，E.

求证：$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

分析： 由$DE\parallel BC$，容易证得两个三角形的对应角相等.

由$DE\parallel BC$ 还可以得到$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，那么$\dfrac{DE}{BC}$ 与 $\dfrac{AD}{AB}$ 有什么关系呢？不难看出，除了 DE 以外，其他线段都在 △ABC 的边上，因此，我们只要将 DE 平移到 BC 边上去，得$CF=DE$，然后再证明 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CF}{BC}$ 就可以了. 这时只需要过点 D 作 $DF\parallel AC$，交 BC 于点 F，CF 就是平移 DE 所得的线段.

证明： $\because$ $DE\parallel BC$，

$\therefore$ $\angle ADE=\angle B$， $\angle AED=\angle C$.

$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

过点 D 作$DF\parallel AC$，交BC于点 F.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CF}{BC}$.

又$\because$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形，

$\therefore$ $DE=CF$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$.

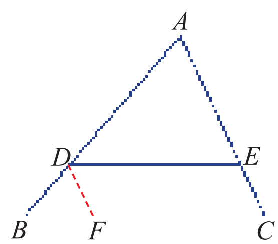


图 18－26

又∵ $\angle A=\angle A$，

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

由此可得：

平行于三角形一边的直线，截其他两边所得的三角形与原三角形相似.

交流

1. 我们知道，对应角相等、对应边也相等的两个三角形全等. 你还记得三角形全等的判定条件吗？

2. 你认为判定两个三角形相似至少需要哪些条件？

3. 两个三角形中，至少有几个角对应相等才能保证这两个三角形相似？

实践

如图 18－27，用计算机或图形计算器画$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，使得$\angle A$和$\angle A'$都等于给定的$\angle \alpha$，$\angle B$和$\angle B'$都等于给定的$\angle \beta$，那么$\angle C$和$\angle C'$相等吗？对应边的比$\dfrac{AC}{A'C'}$，$\dfrac{AB}{A'B'}$，$\dfrac{BC}{B'C'}$相等吗？这样的两个三角形相似吗？

改变$\angle \alpha$，$\angle \beta$的大小，再试一试.

你能由此得出什么结论？并证明你的发现.

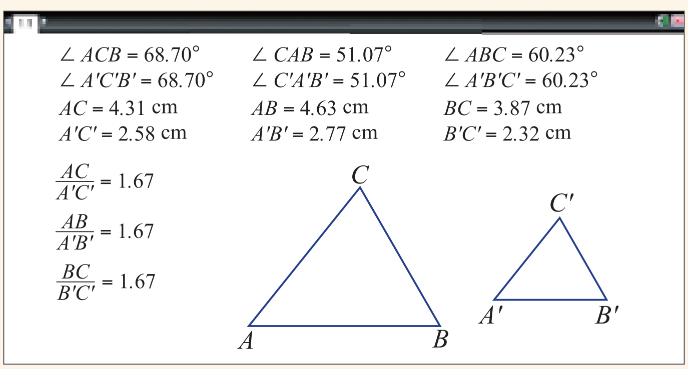


图 18－27

已知：如图18－28，在△ABC和△$A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

求证：△ABC ∽ △$A'B'C'$.

证明：在△ABC的边AB（或AB的延长线）上，截取$AD=A'B'$，过点D作$DE\parallel BC$交AC（或AC的延长线）于点E，那么有△ADE ∽ △ABC.

∵ $\angle ADE=\angle B$，$\angle B=\angle B'$，

∴ $\angle ADE=\angle B'$.

又∵ $\angle A=\angle A'$，$AD=A'B'$，

∴ △ADE ≌ △$A'B'C'$.

∴ △ABC ∽ △$A'B'C'$.

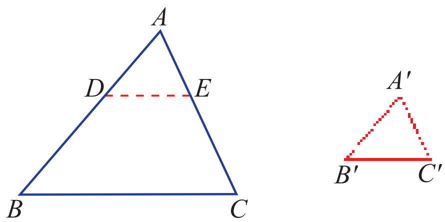


图 18－28

可以得到：

判定定理　如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角分别相等，那么这两个三角形相似（简记为“**两角分别相等，两三角形相似**”）.

思考

1. 如果两个三角形有一对角相等，它们一定相似吗？
2. 有一个锐角对应相等的两个直角三角形是否相似？为什么？
3. 顶角相等的两个等腰三角形是否相似？为什么？

例 1 已知：如图 18－29，在 Rt△ABC中，CD是斜边AB上的高，请找出图中的相似三角形，并说明理由.

解：△ABC ∽ △CBD ∽ △ACD. 理由如下：

∵ $\angle B=\angle B$，$\angle CDB=\angle ACB=90°$，

∴ △ABC ∽ △CBD.

同理 △ABC ∽ △ACD.

∴ △ABC ∽ △CBD ∽ △ACD.

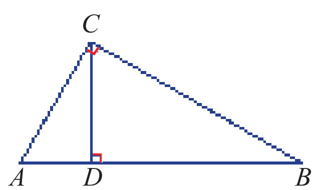


图 18－29

探索

你能由例 1 的结论得到下面的关系式吗？为什么？

（1）$AC^2=AD\cdot AB$；　（2）$BC^2=BD\cdot AB$；　（3）$CD^2=AD\cdot DB$.

例 2 已知：如图18－30，△ABC 和 △DEF 均为等边三角形，点D，E 分别在边AB，BC上. 请找出一个与 △DBE 相似的三角形，并说明理由.

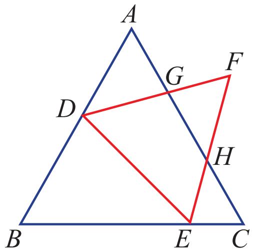


图 18－30

解： △ECH 和 △DBE 相似．理由如下：

在 △DBE 和 △ECH 中，$\angle B=\angle C=60°$.

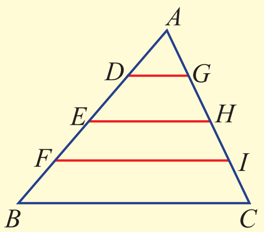
∵ $\angle BDE+\angle BED=120°$，$\angle BED+\angle CEH=120°$，

∴ $\angle BDE=\angle CEH$.

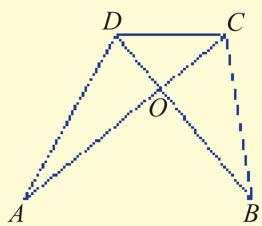
∴ $\triangle DBE \backsim \triangle ECH$.

练习

1. 已知：在△ABC 与 △$A'B'C'$ 中，$\angle B=\angle B'=75°$，$\angle C=50°$，$\angle A'=55°$，这两个三角形相似吗？为什么？
2. 如图，$DG // EH // FI // BC$，请找出图中所有的相似三角形，并说明理由.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，梯形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O. 找出图中的相似三角形，并说明理由.
4. 已知一个三角形的两个角分别为 70° 和 65°，请你画一个和这个三角形相似的三角形.

实践

如图 18－31，用计算机或图形计算器画△ABC 与△$A'B'C'$，使$\dfrac{AB}{A'B'}$，$\dfrac{BC}{B'C'}$和$\dfrac{AC}{A'C'}$都等于给定的值 k．设法比较∠A 与∠A'、∠B 与∠B'、∠C 与∠C'的大小．△ABC 与△$A'B'C'$相似吗？改变 k 值的大小，再试一试．

你能由此得出什么猜想？并证明你的猜想．

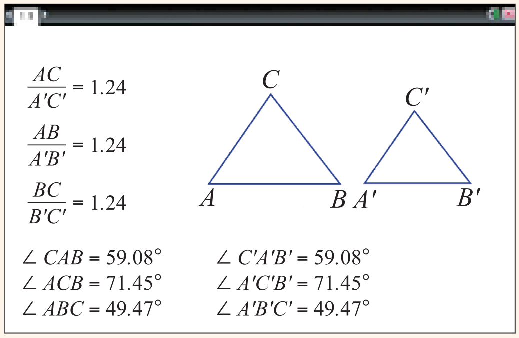


图 18－31

可以得到：

判定定理　如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似（简记为“三边对应成比例，两三角形相似”）．

实践

如图 18－32，用计算机或图形计算器画△ABC 与△$A'B'C'$，使∠A＝∠A'，$\dfrac{AB}{A'B'}$和$\dfrac{AC}{A'C'}$都等于给定的值 k．设法比较∠B 与∠B'的大小（或∠C 与∠C'的大小）．△ABC 与△$A'B'C'$相似吗？改变 k 值的大小，再试一试．

你能由此得出什么猜想？并证明你的猜想．

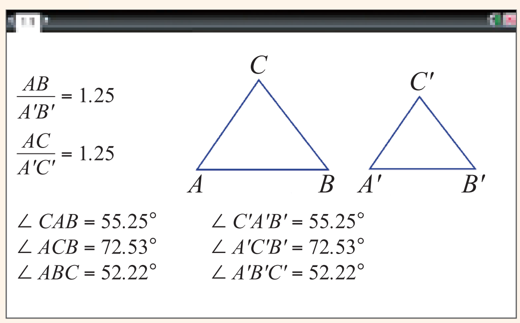


图 18－32

可以得到：

判定定理　如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似（简记为“**两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似**”）.

例 3　依据下列各组条件，判定$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是否相似，并说明理由.

（1）$AB=4\text{ cm}$，$BC=6\text{ cm}$，$AC=8\text{ cm}$；

$A'B'=12\text{ cm}$，$B'C'=18\text{ cm}$，$A'C'=24\text{ cm}$.

（2）$\angle A=120^\circ$，$AB=7\text{ cm}$，$AC=14\text{ cm}$；

$\angle A'=120^\circ$，$A'B'=3\text{ cm}$，$A'C'=6\text{ cm}$.

解：（1）$\because\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

（2）$\because\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{7}{3}$，$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$，

$\therefore\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

又 $\because\ \angle A=\angle A'$，

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

思考

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$一定相似吗？

例 4　已知$\triangle ABC$，P是边AB上的一点，连接CP.

（1）当$\angle ACP$满足什么条件时，$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$？

（2）当 $AC:AP$ 满足什么条件时，$\triangle ACP \backsim \triangle ABC$？

分析：从图 18－33 可以看出，在 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle A$，所以只要使 $\angle ACP=\angle B$，或使 $AC:AP=AB:AC$，都有 $\triangle ACP \backsim \triangle ABC$.

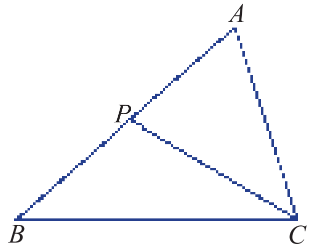


图 18－33

解：（1）$\because\ \angle A=\angle A$，

$\therefore$ 当 $\angle ACP=\angle B$ 时，$\triangle ACP \backsim \triangle ABC$.

（2）$\because\ \angle A=\angle A$，

$\therefore$ 当 $AC:AP=AB:AC$ 时，$\triangle ACP \backsim \triangle ABC$.

练习

1. 依据下列各组条件，判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，并说明理由：

（1）$\angle A=45^\circ$，$AB=12$ cm，$AC=15$ cm；

$\angle A'=45^\circ$，$A'B'=16$ cm，$A'C'=20$ cm.

（2）$AB=12$ cm，$BC=15$ cm，$AC=24$ cm；

$A'B'=20$ cm，$B'C'=25$ cm，$A'C'=40$ cm.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=47^\circ$，$AB=1.5$ cm，$AC=2$ cm；

在 $\triangle EFD$ 中，$\angle E=47^\circ$，$ED=2.8$ cm，$EF=2.1$ cm.

这两个三角形相似吗？为什么？

3. 一个直角三角形两条直角边的长分别为 6 cm，4 cm，另一个直角三角形两条直角边的长分别为 9 cm，6 cm，这两个直角三角形是否相似？为什么？

4. 要做两个形状相同的三角形框架，其中一个三角形框架的三边的长分别是 4 m，5 m，6 m，另一个三角形框架的一边长为 2 m. 怎样选料可使这两个三角形相似？

18.6 相似三角形的性质

两个三角形相似，它们的对应角相等、对应边成比例. 除此以外，我们还可以得到哪些性质呢？

交流

在图 18－34 中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是两个相似三角形，相似比为 k. 其中 AD, $A'D'$ 分别为 BC，$B'C'$ 边上的高，那么 AD 与 $A'D'$ 的比和相似比 k 有什么关系？

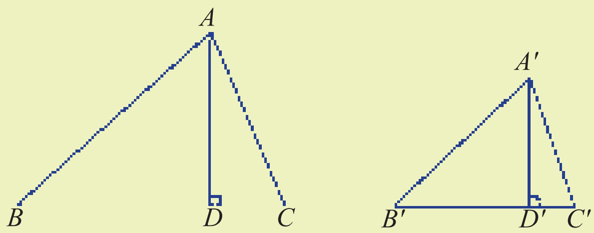


图 18－34

在图18－34 中，$\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 都是直角三角形，且 $\angle B = \angle B'$，因为有两个角对应相等，所以这两个三角形相似. 那么

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k.$$

于是得到：

性质定理　相似三角形对应高的比等于相似比.

交流

如图 18－35，有一块三角形的草坪，其中一边的长是 20 m. 在这个草坪的图纸上，这条边的长为 5 cm，其他两边的长都为 3.5 cm，你能求出这块草坪的实际周长与面积吗？

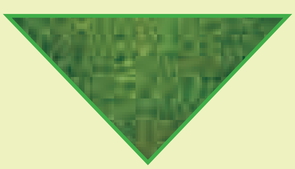


图 18－35

我们知道，如果说 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ 且它们的相似比为 k，那么 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$，进而得到

$$\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=k.$$

想一想，为什么？

如图18－36，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，分别作它们的对应高$AD$，$A'D'$，于是有

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

那么有 $$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AD}{A'D'}=\left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2=k^2.$$

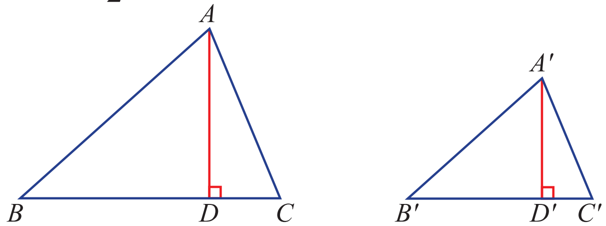


图 18－36

于是得到：

性质定理　相似三角形的周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方.

例　如图 18－37，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，它们的周长分别为 60 cm 和 72 cm，且 $AB=15$ cm，$B'C'=24$ cm. 求 BC，AC，$A'B'$，$A'C'$ 的长.

解：$\because\ \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

$\therefore\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{60}{72}=\dfrac{5}{6}$.

把 $AB=15$，$B'C'=24$ 代入上式，解得

$A'B'=18$ (cm)，$BC=20$ (cm).

$\therefore\ AC=60-15-20=25$ (cm)，

$A'C'=72-18-24=30$ (cm).

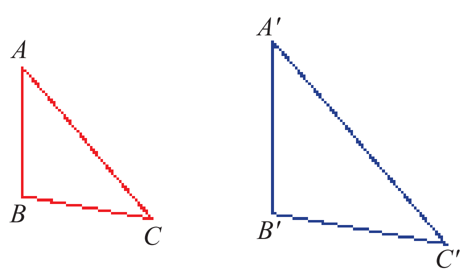


图 18－37

交流

如图 18 – 38，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似．

(1) 连接相应的对角线 AC，$A'C'$，所得的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似吗？$\triangle ACD$ 与 $\triangle A'C'D'$ 呢？如果相似，它们的相似比相等吗？为什么？

(2) 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 的周长比、面积比与相似比有什么关系？

如果两个五边形相似，还有相同的结论吗？

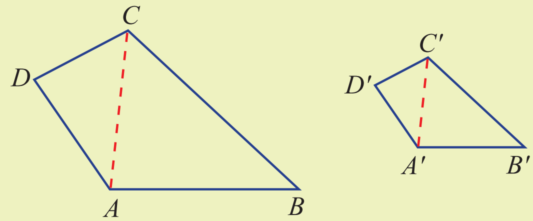
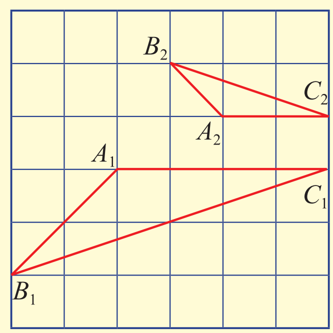


图 18 – 38

一般地，**相似多边形的周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方**．

练习

1. 两个相似三角形对应边的比为 0.4，那么这两个相似三角形周长的比为 ________，面积的比为 ________．
2. 如图，在正方形网格上有 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$，这两个三角形相似吗？如果相似，求出 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积比．
3. 两个相似三角形的面积比是 3 : 2，那么它们周长的比是多少？



（第 2 题）

探索

两个三角形相似时，它们对应角平分线的比、对应中线的比是否也等于相似比？

18.7 应用举例

交流

还记得章前页介绍的古希腊数学家泰勒斯测算金字塔高度的故事吗？学习相似三角形的有关知识之后，你能够解决这个问题吗？

如图 18－39，为了测算金字塔的高度 OB，先竖一根已知长度的木棍 $O'B'$，再测得木棍的影长 $A'B'$ 与金字塔的影长 AB，即可算出金字塔的近似高度 OB.

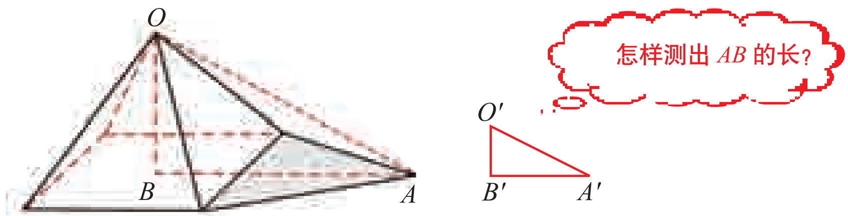


图 18－39

由于太阳光近似于平行光线，因此 $\angle OAB = \angle O'A'B'$. 又因为 $\angle ABO = \angle A'B'O' = 90°$，所以 $\triangle OAB \backsim \triangle O'A'B'$，$OB : O'B' = AB : A'B'$.

如果 $O'B' = 1$ m，测得 $A'B' = 2$ m，$AB = 274$ m，那么

$$OB = \frac{AB \times O'B'}{A'B'} = \frac{274 \times 1}{2} = 137\ (\text{m}).$$

即该金字塔高约为 137 m.

思考

地质勘探人员为了估算某条河的宽度，在河对岸选定一个目标点 O，再在他们所在的这一侧选点 A，B，D，使得 $AB \perp AO$，$DB \perp AB$，然后找出 DO 和 AB 的交点 C，如图 18－40 所示. 测得 $AC = 12$ m，$BC = 6$ m，$DB = 8$ m，你能算出这条河的宽 AO 吗？

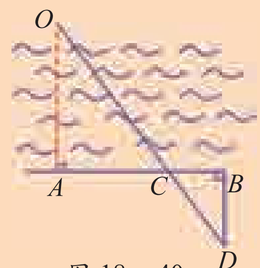


图 18－40

在图18－40中，

$\because \quad \angle OCA = \angle DCB,\ \angle A = \angle B = 90°,$

$\therefore \quad \triangle OAC \backsim \triangle DBC.$

$\therefore \quad \dfrac{OA}{DB} = \dfrac{AC}{BC}.$

解得 $\quad OA = \dfrac{DB \times AC}{BC} = \dfrac{8 \times 12}{6} = 16\ (\mathrm{m}).$

即这条河的宽 AO 为 16 m .

探索

在物理课中同学们曾学过小孔成像：在较暗的屋子里，把一支点燃的蜡烛放在一块半透明的塑料薄膜前面，在它们之间放一块钻有小孔的纸板，由于光沿直线传播，塑料薄膜上就出现了蜡烛火焰倒立的像（图18－41），这种现象就是小孔成像 .

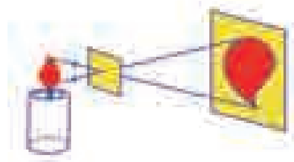


图 18－41

在图 18－42 中，如果蜡烛火焰 AB 的高度为 2 cm，倒立的像 $A'B'$ 的高度为 5 cm，蜡烛火焰根 B 到孔 O 的距离为 4 cm . 试求火焰根的像 B' 到孔 O 的距离，并说明理由 .

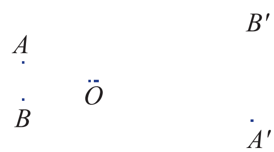
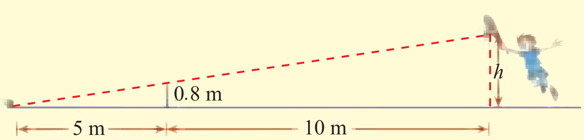


图 18－42

练习

1. 在某一时刻，有人测得一高为 1.8 m 的竹竿的影长为 3 m，某一楼的影长为 60 m，那么楼的高度是多少米？
2. 如图，小明在打网球时，使球恰好能打过网，而且落在离网 5 m 的位置上，其他条件如图，求球拍击球的高度 h（假设网球的运行路线是直线）.



（第 2 题）

综合与实践

测量旗杆的高度

利用相似三角形的有关知识与同学们一起测量自己学校旗杆的高度，并写出测量报告 .

习　题　18－2

★基础★

1. 选择题：

(1) 给出下列四个判断，其中正确的判断有（　　）.

① 全等三角形是相似三角形；

② 顶角相等的两个等腰三角形相似；

③ 所有的等边三角形都相似；

④ 所有的直角三角形都相似 .

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

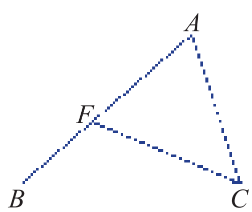
(2) 如图，F 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点，那么下面四个命题中错误的是（　　）.

A. 如果 $\angle AFC=\angle ACB$，那么 $\triangle ACF\backsim\triangle ABC$

B. 如果 $\angle ACF=\angle B$，那么 $\triangle ACF\backsim\triangle ABC$

C. 如果 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$，那么 $\triangle ACF\backsim\triangle ABC$

D. 如果 $\dfrac{AC}{AF}=\dfrac{AB}{BC}$，那么 $\triangle ACF\backsim\triangle ABC$

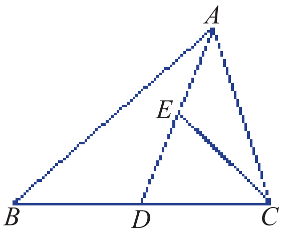


[第 1(2)题]

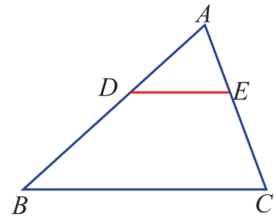
2. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$，2，$\triangle A'B'C'$ 的三边长分别为 1，$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似？请说明理由 .

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点，E 为 AD 上一点，如果 $\angle DAC=\angle B$，$CD=CE$，那么 $\triangle ACE$ 与 $\triangle BAD$ 是否相似？请说明理由 .

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $DE\parallel BC$，$AD=3$，$AE=2$，$BD=4$，求 $\dfrac{AE}{AC}$ 的值以及 AC，EC 的长 .



（第 3 题）

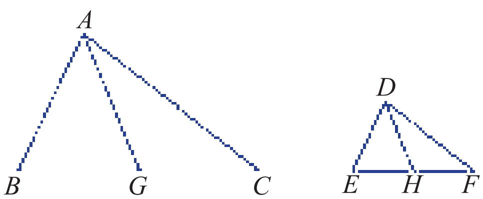


（第 4 题）

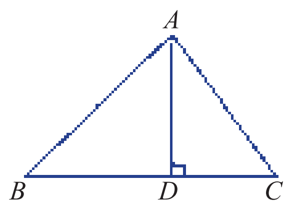
5. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，点 G，H 分别是边 BC，EF 的中点，已知 $AB=2DE$，$AC=2DF$，$\angle BAC=\angle EDF$.

（1）$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积比是多少？

（2）中线 AG 与 DH 的比是多少？



（第 5 题）

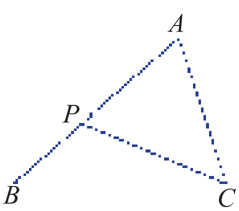


（第 6 题）

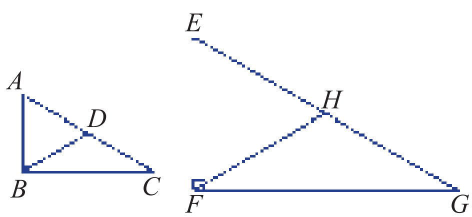
6. 如图，$\triangle ABC$ 是一块锐角三角形余料，边 $BC=120$ mm，高 $AD=80$ mm，要把它加工成正方形零件，使正方形的一边在 BC 上，其余的两个顶点分别在边 AB，AC 上，这个正方形零件的边长是多少？

★★ 提升 ★★

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，P 是边 AB 上的一点，连接 CP. 要使 $\triangle ACP \backsim \triangle ABC$，还需要补充的一个条件是 ____________________，或 ____________________.



（第 1 题）



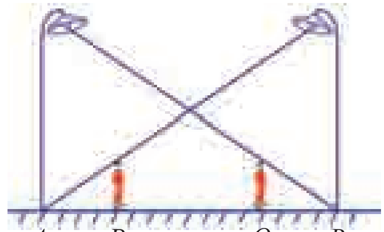
（第 2 题）

2. 如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle EFG$，$EF=2AB$，$BD$，$FH$ 是它们的中线，$\triangle BDC$ 与 $\triangle FHG$ 是否相似？如果相似，请确定其周长比和面积比.

3. 如图，王华晚上由路灯 A 走向路灯 B. 当他走到点 P 时，发现身后影子的顶部刚好落在路灯 A 的底部；当他再向前步行 12 m 到达点 Q 时，发现身前自己影子的顶部刚好落在路灯 B 的底部. 已知王华的身高是 1.6 m，两个路灯的高度都是 9.6 m，且 $AP = QB$.

(1) 求两个路灯之间的距离；

(2) 当王华走到路灯 B 时，他在路灯 A 下的影长是多少?



（第 3 题）

★★★ 拓展 ★★★

1. 已知 CD 是 Rt $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，且 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$CD = h$，$AD = q$，$DB = p$.

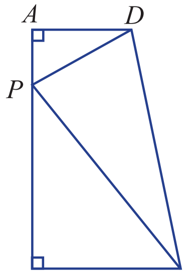
(1) 如果 $c = 29$，$p = 4$，求 h 和 b；

(2) 如果 $a = 5$，$h = 4$，求 p 和 q；

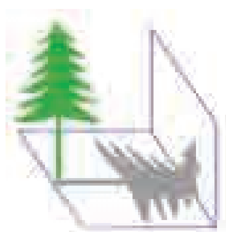
(3) 如果 $a = 10$，$p = 6$，求 q 和 b；

(4) 如果 $p = 4$，$h = 10$，求 a 和 b.

2. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB = 7$，$AD = 2$，$BC = 3$，如果边 AB 上的点 P 使得以 P，A，D 为顶点的三角形和以 P，B，C 为顶点的三角形相似，求 AP 的长.



（第 2 题）


（第 3 题）

3. 教学楼前边有一棵树，学习了相似三角形后，数学兴趣小组的同学们想利用树影测量树高. 课外活动时他们在阳光下测得一根长为 1 m 的竹竿的影长是 0.9 m，但当他们马上测量树高时，发现树的影子不全在地面上，有一部分影子落在了教学楼的墙壁上（如图），经过一番争论，小组同学认为继续测量也可以求出树高. 他们测得，落在地面上的影长是 2.7 m，落在墙壁上的影长是 1.2 m. 请你和他们一起算一下树高多少米.

回顾与整理

知识要点

1. 成比例线段.

在四条线段中，如果其中两条线段的比等于另外两条线段的比，那么这四条线段叫做成比例线段.

2. 比例的基本性质.

(1) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$；

(2) 如果 $ad=bc$，且 $bd\neq 0$，那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

3. 平行线分线段成比例.

(1) 基本事实：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

(2) 推论：平行于三角形一边的直线截其他两边，所得的对应线段成比例.

4. 相似三角形.

(1) 定义：对应角相等、对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形.

(2) 判定：

① 两角分别相等，两三角形相似；

② 三边对应成比例，两三角形相似；

③ 两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似.

(3) 性质：

① 对应高及周长的比都等于相似比；

② 面积比等于相似比的平方.

学习指导

1. 比例线段的知识是研究相似形的基础.

两个相似形的大小关系主要是通过对应线段的比来反映的.因此，不仅要掌握比例线段的知识，包括比例的性质、平行线分三角形两边成比例的性质，而且要理解这些知识所蕴含的数学方法，这些都是研究相似形的重要基础.

学习指导

2. 要认识三角形相似与全等的区别与联系．

全等三角形是相似比为 1 的特殊的相似三角形．判定两个三角形全等需要三个条件（其中至少有一个条件是一对边相等），而判定两个三角形相似需要两个条件．两个全等三角形的对应线段相等，而两个相似三角形的对应线段成比例．在学习时可用类比的方法去认识相似和全等的关系，弄清二者的区别和联系．

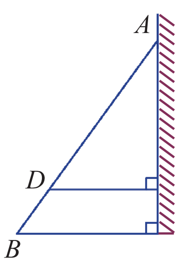
3. 要注意相似三角形的知识在实际中的应用．

相似三角形的知识在实际中应用很广，能直接应用相似三角形的判定和性质解决实际问题的例子很多，要注意联系实际，不断提高运用数学知识解决实际问题的意识和能力．

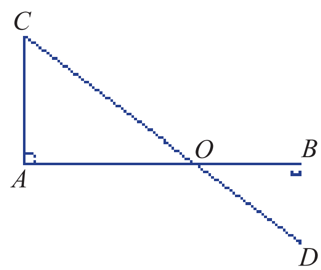
复习题

★基础★

1. 如图，AB 是斜靠在墙壁上的长梯，梯脚 B 距墙 80 cm，梯上点 D 距墙 70 cm，BD 长 55 cm，求梯子的长．



（第 1 题）

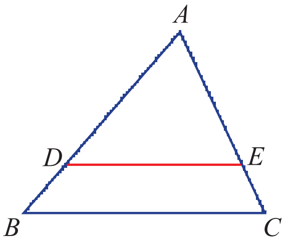


（第 2 题）

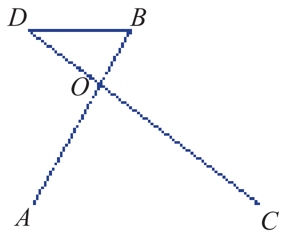
2. 已知，如图，$AC \perp AB$，$BD \perp AB$，$AO = 78$ cm，$BO = 42$ cm，$CD = 159$ cm，求 CO 和 DO 的长．

3. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$DE // BC$ 交 AB，AC 于点 D，E. 如果 $AD = 3$，$AE = 2$，$EC = 4$，$DE = 2.5$，求 DB，BC 的长．

4. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE // BC$，$AD = 3BD$，$S_{\triangle ABC} = 48$，求 $S_{\triangle ADE}$.



（第 4 题）

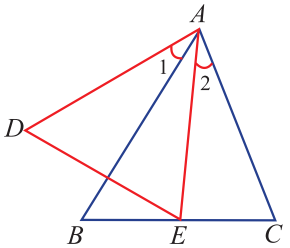


（第 5 题）

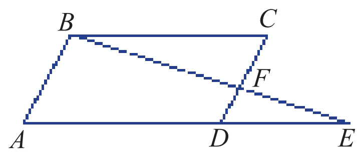
5. 如图，AB，CD 相交于点 O，且 $AC \parallel BD$，那么 $OA \cdot OD = OC \cdot OB$ 成立吗？为什么？

★★提升★★

1. 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$，如果再增加一个条件就能使结论 $AB \cdot DE = AD \cdot BC$ 成立，那么这个条件可以是____________________.



（第 1 题）

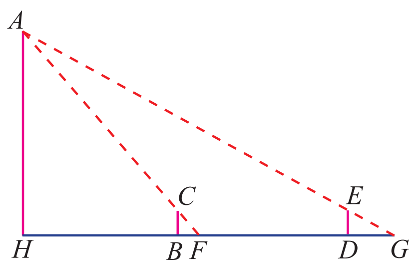


（第 2 题）

2. 如图，E 为平行四边形 $ABCD$ 的边 AD 延长线上的一点，且 D 为 AE 的黄金分割点，即 $AD = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AE$，$BE$ 交 DC 于点 F. 已知 $AB = \sqrt{5}-1$，求 CF 的长.

3. 三国魏人刘徽，自撰《海岛算经》，专论测算望远，其中有一题是数学史上有名的测量问题. 今译如下：

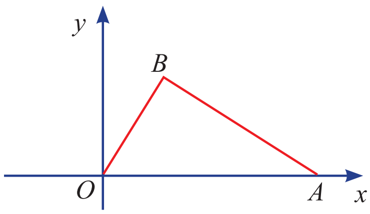
如图，要测量海岛上一座山峰 A 的高度 AH，立两根高三丈的标杆 BC 和 DE，两杆相距 $BD = 1\ 000$ 步，D，B，H 成一线，从 B 退行 123 步到 F，从 F 观察 A：A，C，F 三点共线；从 D 退行 127 步到 G，从 G 观察 A：A，E，G 三点也共线. 试算出山峰的高度 AH 及 HB 的长度.①



（第 3 题）

①题中的“丈”与“步”均为古代的长度计量单位. 古制1丈 = 10尺，1步 = 6尺；今1 尺 $= \frac{1}{3}$米.

4. 如图，在 $\triangle OAB$ 中，$\angle B=90°$，点 A 的坐标为$(10，0)$，$AB=8$，求点 B 的坐标及直线 AB 的函数表达式．



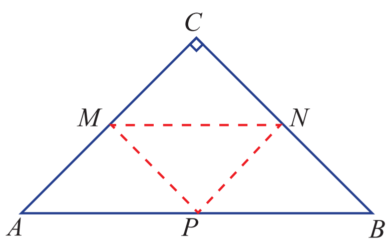
（第 4 题）

★★★ 拓展 ★★★

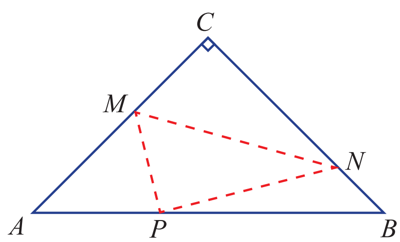
AB 是等腰直角三角形 ABC 的斜边，如果点 M 在边 AC 上，点 N 在边 BC 上，沿直线 MN 将 $\triangle MCN$ 翻折，使点 C 落在 AB 边上，记为点 P．

(1) 如图 (1)，当点 P 是 AB 的中点时，求证：$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{CM}{CN}$．

(2) 如图 (2)，当点 P 不是 AB 的中点时，结论 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{CM}{CN}$ 是否成立？若成立，请给出证明．



(1)



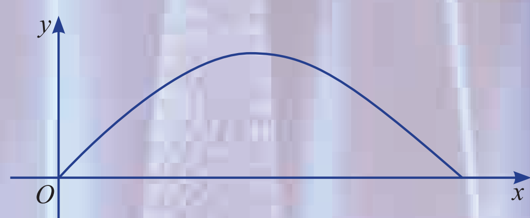
(2)

第十九章 二次函数和反比例函数

我们已经知道，很多曲线都可以看做是由点的运动形成的. 你知道投掷出去的铅球、飞溅的水珠、射出的炮弹……它们画出的是怎样的曲线吗？你知道热电厂冷却塔的外轮廓线又是由怎样的曲线组成的吗？它们可以分别看做是哪些函数的图象？

事实上，上面这些曲线可以看做是二次函数或反比例函数的图象.

在本章，我们将学习二次函数和反比例函数的知识，并学会运用这些知识解决实际生活中的一些简单问题.



一、二次函数

19.1 二次函数

实践

1. 列出下列函数的表达式：

(1) 圆的面积 A 是它的半径 r 的函数；

(2) 如图 19－1，利用成直角的墙角，用 20 m 长的栅栏围成一个矩形的小花园，花园的面积 S (m^2) 是它一边长 a (m) 的函数；

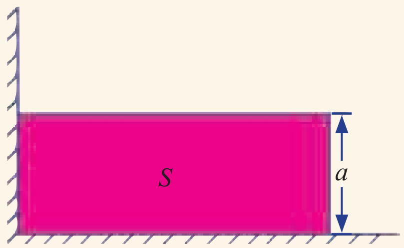


图 19－1

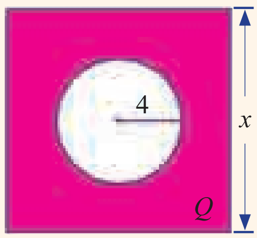


图 19－2

(3) 如图 19－2，正方形中圆的半径是 4 cm，红色部分的面积 Q (cm^2) 是正方形的边长 x (cm) 的函数；

(4) 某种药品现价每盒 26 元，计划两年内每年的降价率都为 p，那么，两年后这种药品每盒的价格 M (元) 是年降价率 p 的函数．

2. 观察所列出的表达式，它们有什么共同的特点？这些表达式可以用怎样的式子来概括？

根据所给的条件，上述四个函数的表达式分别为：

$A=\pi r^2$，　$S=a(20-a)$，　$Q=x^2-16\pi$，　$M=26(1-p)^2$.

由于我们通常用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以，经过整理，这些函数

的表达式可以分别写为：

$$y=\pi x^2,\qquad y=-x^2+20x,\qquad y=x^2-16\pi,\qquad y=26x^2-52x+26.$$

不难发现，它们的表达式都可以表示为 $y=ax^2+bx+c$ 的形式.

一般地，我们把形如 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的函数叫做**二次函数**，其中 a，b 分别是二次项、一次项的系数，c 是常数项.

为什么要有 $a\neq 0$ 的规定？

例 已知：如图 19－3，一个边长为 8 cm 的正方形，把它的边长延长 x cm 后得到一个新的正方形. 那么，周长增大的部分 y_1（cm）和面积增大的部分 y_2（cm^2）分别是 x（cm）的函数. 求出这两个函数的表达式，并判定它们的类型；如果是二次函数，写出表达式中 a，b，c 的值.

分析：周长增大的部分 y_1 和面积增大的部分 y_2，分别是两个正方形周长的差和面积的差.

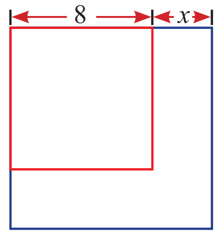


图 19－3

解：根据题意，得

$$y_1=4(x+8)-4\times 8.$$

整理，得

$$y_1=4x.$$

它是形如 $y=kx\ (k\neq 0)$ 的函数，所以它是正比例函数.

根据题意，得

$$y_2=(x+8)^2-8^2.$$

整理，得

$$y_2=x^2+16x.$$

它是形如 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的函数，所以它是二次函数. 其中 $a=1$，$b=16$，$c=0$.

练习

1. 下面各函数中，哪些是二次函数（口答）？写出每个二次函数中 a，b，c 的值.

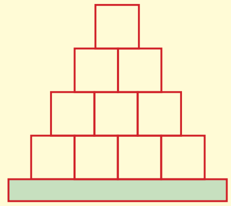
（1）$y=2x^2-3x$；　（2）$y=2x-3$；　（3）$y=-x^2+5$；

（4）$y=2x-3x^2+5$；　（5）$y=\dfrac{4}{3}x^2$；　（6）$y=2x(x^2-x+1)$.

2. 写出下列各函数的表达式，指出它是什么函数，并确定函数的自变量的取值范围.

(1) 矩形的周长为 20 cm，它的面积 S (cm^2) 是它的一边长 a (cm) 的函数.

(2) 如图，最下面是一个长方形，上面是 10 个小正方形. 如果长方形的长为 4 cm，宽为小正方形边长的一半，那么这个图形的总面积 S (cm^2) 是每个小正方形的边长 x (cm) 的函数.



[第 2 (2)题]

19.2 二次函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 的图象

我们首先研究最简单的二次函数 $y = x^2$ 的图象.

交流

1. 分析函数 $y = x^2$ 的表达式，回答下列问题：

(1) 它的图象是否通过原点？为什么？

(2) 它的图象分布在哪几个象限，为什么？

(3) 它的图象是轴对称图形吗？为什么？如果是，它的对称轴是什么？

2. 根据以上的分析，描述一下 $y = x^2$ 的图象在平面直角坐标系中的位置和大致形状.

根据函数 $y = x^2$ 的自变量的取值范围和自变量与因变量对应关系的特点，可以估计出它的图象是通过原点，分布在第一、第二象限，并且是以 y 轴为对称轴的一条曲线.

下面，我们画出函数 $y = x^2$ 的图象.

列表：

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
y	…	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	…

描点，并按从左到右的顺序用平滑曲线将这些点连接起来，就得到二次函数 $y=x^2$ 的图象，如图 19－4.

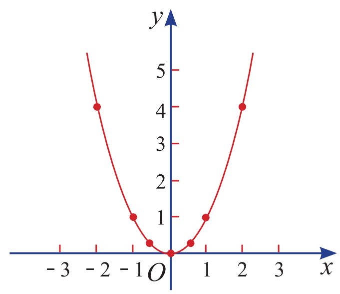


图 19－4

由此可知，二次函数 $y=x^2$ 的图象是通过原点，分布在第一、第二象限，且以 y 轴为对称轴的一条曲线，我们称这条曲线为**抛物线**. 它与对称轴的交点叫做抛物线的顶点.

我们先来研究当 $a \neq 1$ 时，二次函数 $y=ax^2$ $(a \neq 0)$ 的图象和二次函数 $y=x^2$ 的图象之间有怎样的关系.

例 1 在同一坐标系中，作出下列函数的图象：

(1) $y=-x^2$；　　(2) $y=\dfrac{3}{2}x^2$；　　(3) $y=-2x^2$.

解：列表（请补充完整）：

x	…	－3	－2	－1	0	1	2	3	…
$y=-x^2$									
$y=\dfrac{3}{2}x^2$									
$y=-2x^2$									

描点，连线，得到这些二次函数的图象，如图 19－5 所示.

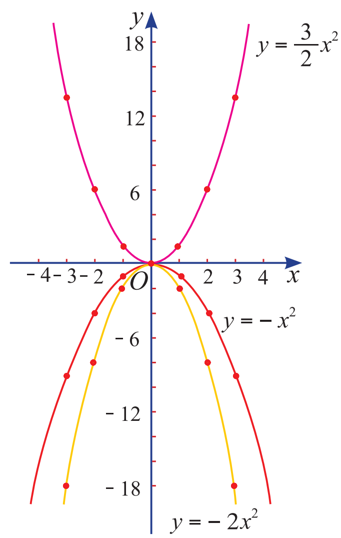


图 19－5

交流

1. 在函数 $y=ax^2$ $(a \neq 0)$ 中，当 a 取不同的值时，请你画出它的示意图. 这些曲线有什么共同的特征?

2. 利用计算机或图形计算器，连续改变函数 $y=ax^2$ $(a \neq 0)$ 中 a 的值，观察二次函数 $y=ax^2$ 的图象与 $y=x^2$ 的图象之间有怎样的关系（图 19－6）.

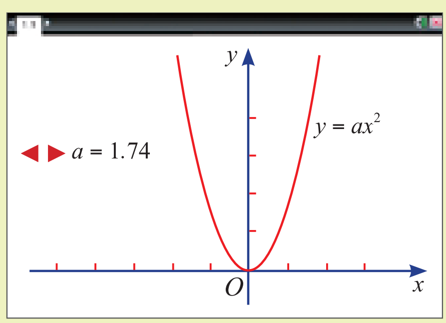


图 19－6

由此可知：a 取不同的值时，二次函数 $y=ax^2\ (a\neq 0)$ 的图象都是通过原点，以 y 轴为对称轴的抛物线，并且和抛物线 $y=x^2$ 比较，当 a 取不同的值时，能引起抛物线开口方向的改变：

当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下.

练习

1. 分别在同一坐标系内作出下列函数的图象.

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$；　　(2) $y=3x^2$，$y=-2x^2$，$y=\frac{1}{3}x^2$.

2. 指出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向.

(1) $y=\frac{5}{3}x^2$；　　(2) $y=-5x^2$；　　(3) $y=-\frac{2}{5}x^2$.

我们再来研究当 c 取不同的值时，二次函数 $y=ax^2+c\ (a\neq 0)$ 的图象和二次函数 $y=ax^2$ 的图象之间有怎样的关系.

实践

1. 在同一坐标系中，作出下列函数的图象，并观察 c 取不同的值时，二次函数 $y=ax^2+c\ (a\neq 0)$ 的图象和 $y=ax^2$ 的图象有怎样的关系：

(1) $y=-2x^2$；　　(2) $y=-2x^2+3$；　　(3) $y=-2x^2-3$.

2. 利用计算机或图形计算器，连续改变 c 的值，观察二次函数 $y=ax^2+c\ (a\neq 0)$ 和 $y=ax^2$ 的图象之间有怎样的关系，并概括出你的结论.

通过观察可知，函数 $y=-2x^2+3$ 的图象可以看做是把函数 $y=-2x^2$ 的图象向上平移 3 个单位而得到的，而函数 $y=-2x^2-3$ 的图象可以看做是把函数 $y=-2x^2$ 的图象向下平移 3 个单位而得到的，如图 19－7 所示.

一般地，二次函数 $y=ax^2+c\ (a\neq 0)$ 的图象可以看做是由二次函数 $y=ax^2$

的图象向上或向下平移而得到的，它的对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0,\ c)$，如图 19－8 所示．

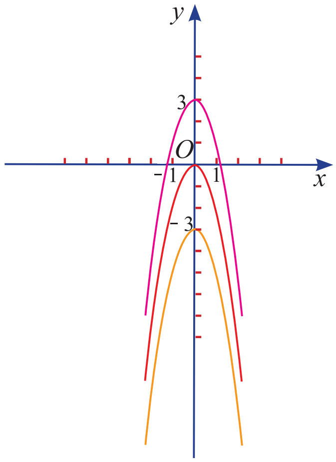


图 19－7

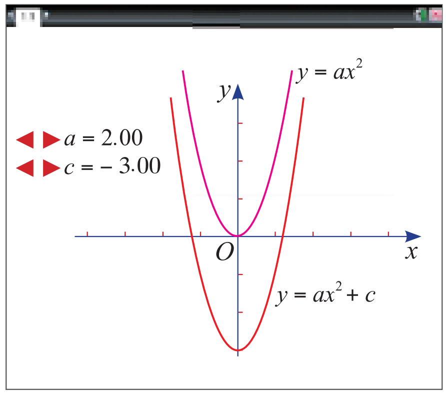


图 19－8

练习

1. 在同一坐标系中作出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2+5$ 的图象，并指出它们和函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象有怎样的位置关系．
2. 在同一坐标系中，作出下列两个函数的图象，并指出它们的图象和 $y=-3x^2$ 的图象之间有怎样的关系．

（1）$y=-3x^2+7$；　　（2）$y=-3x^2-7$.

我们再来研究二次函数 $y=(x-h)^2$ 在 h 取不同的值时的图象和二次函数 $y=x^2$ 的图象之间有怎样的关系．

实践

1. 在同一坐标系中，作出二次函数 $y=(x+2)^2$ 和 $y=(x-2)^2$ 的图象，比较它们和二次函数 $y=x^2$ 的图象之间有怎样的关系．

2. 当 h 取不同数值时，观察函数 $y=(x-h)^2$ 的图象与函数 $y=x^2$ 的图象之间有怎样的关系，概括出你的结论．

观察图 19－9 可知，二次函数 $y=(x-2)^2$ 的图象可以看做是把二次函数 $y=x^2$ 的图象向右平移 2 个单位而得到的；$y=(x+2)^2$ 的图象可以看做是把二次函数 $y=x^2$ 的图象向左平移 2 个单位而得到的.

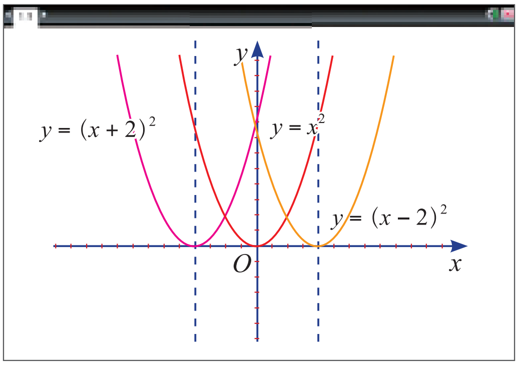


图 19－9

一般地，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 在 h 取不同的值时，它的图象可以看做是由函数 $y=ax^2$ 的图象向左或向右作平移而得到的，它的对称轴是 $x=h$，顶点坐标是 $(h, 0)$.

练习

1. 在同一坐标系中，作出下列二次函数的图象.

(1) $y=2(x+3)^2$；　(2) $y=2x^2$；　(3) $y=2(x-3)^2$.

2. 写出下列二次函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(1) $y=-\frac{1}{2}(x-5)^2$；　(2) $y=3(x-4)^2$；　(3) $y=5\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$.

我们再来研究 $y=a(x-h)^2+k$ 在 h 和 k 取不同的值时的图象和 $y=ax^2$ 的图象有怎样的关系.

实践

1. 二次函数 $y=2(x-3)^2+5$ 和 $y=2(x-3)^2-5$ 的图象与二次函数 $y=2(x-3)^2$ 的图象之间有怎样的关系？

2. 二次函数 $y=2(x-3)^2+5$ 和 $y=2(x+3)^2-5$ 的图象与二次函数 $y=2x^2$ 的图象之间又有怎样的关系？

可以看到，二次函数 $y=2(x-3)^2+5$ 的图象可以看做是由二次函数 $y=2x^2$ 的图象经过向右平移 3 个单位，再向上平移 5 个单位而得到的一条抛物线；二次函数 $y=2(x+3)^2-5$ 的图象是由二次函数 $y=2x^2$ 的图象经过向左平移 3 个单位，再向下平移 5 个单位而得到的一条抛物线．

如图 19－10，通过计算机或图形计算器可以看到：

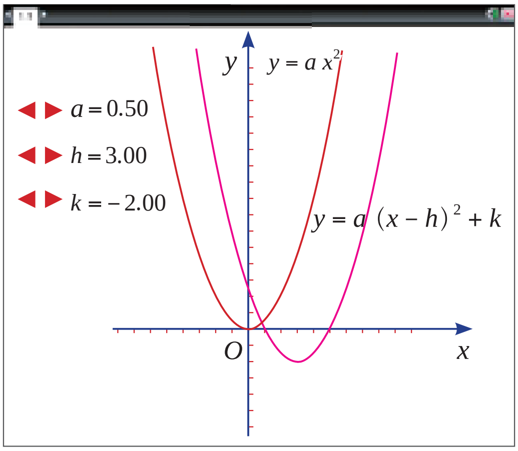


图 19－10

一般地，二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可以看做是由函数 $y=ax^2$ 的图象经过向左（或右）、向上（或下）平移而得到的一条抛物线，它有如下的特点：

1．当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下．

2．抛物线的对称轴是 $x=h$，顶点的坐标是 (h, k)．

例 2 已知二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+8$．

(1) 指出它的图象可以看做是函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象经过怎样的变换而得到的；

(2) 指出图象的开口方向、对称轴和顶点坐标；

(3) 求出图象与坐标轴的交点坐标，并画出它的示意图．

解：(1) 它可以看做是 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象向右平移 1 个单位，再向上平移 8 个单位而得到的．

(2) 抛物线的开口向下，对称轴为 $x=1$，顶点坐标为 $(1, 8)$．

(3) 在 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+8$ 中，令 $y=0$，得

$$-\frac{1}{2}(x-1)^2+8=0.$$

解得　$x_1=-3$，　$x_2=5$．

所以，抛物线与 x 轴的交点有两个，它们的坐标分别为 $(-3, 0)$ 和 $(5, 0)$．

在 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+8$ 中，令 $x=0$，得

$$y=-\frac{1}{2}(0-1)^2+8=\frac{15}{2}.$$

所以，抛物线与 y 轴交点的坐标为 $\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$，如图 19－11 所示.

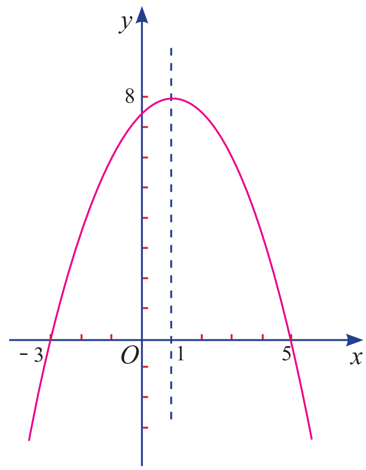


图 19－11

练习

1. 指出二次函数 $y=-2(x-3)^2+1$ 和 $y=-2(x+3)^2-1$ 的图象之间有怎样的关系，画出示意图.
2. 指出下列二次函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(1) $y=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2$；　(2) $y=\sqrt{3}(x+3)^2-5$；

(3) $y=-2(x-\sqrt{5})^2-4$.

下面，我们来研究二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 图象的对称轴和顶点坐标的计算公式.

思考

怎样求出二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 图象的顶点坐标和对称轴？以二次函数 $y=x^2-4x+6$ 为例，请你试一试.

事实上，只需把二次函数的表达式

$$y=x^2-4x+6$$

化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，就可以回答这些问题.

我们作它的配方变形，得

$$y=(x-2)^2+2.$$

于是可知，二次函数 $y=x^2-4x+6$ 的图象的对称轴是 $x=2$，顶点坐标

是（2，2）. 它的图象如图 19－12 所示.

一般地，通过配方把二次函数的表达式 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 变形为

$$y=a(x-h)^2+k$$

的形式，就能得到它的图象的对称轴和顶点坐标，也可以运用这个方法推导出求对称轴和顶点坐标的计算公式.

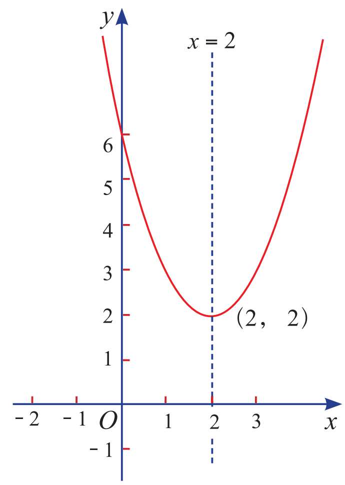


图 19－12

由配方，得

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

即

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

得到二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 图象的对称轴和顶点坐标.

对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$.　顶点坐标：$\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

由于二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图象是抛物线，通常把“二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$”称为“抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$”.

例 3 已知：抛物线 $y=-3x^2+12x-8$.（1）求出它的对称轴和顶点坐标；（2）求出图象与坐标轴的交点坐标，并画出示意图.

解：（1）因为 $y=-3x^2+12x-8$

$$=-3(x^2-4x)-8$$

$$=-3(x^2-4x+4)-8+12$$

$$=-3(x-2)^2+4.$$

所以，抛物线 $y=-3x^2+12x-8$ 的对称轴为 $x=2$，顶点坐标为（2，4）.

（2）在 $y=-3x^2+12x-8$ 中，令 $y=0$，得

$$x_1=\frac{6-2\sqrt{3}}{3},\quad x_2=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}.$$

所以抛物线与 x 轴的交点有两个，它们的坐标分别为 $\left(\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$.

在 $y=-3x^2+12x-8$ 中，令 $x=0$，得

$$y=-8.$$

所以抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0,\ -8)$.

它的示意图如图 19－13 所示.

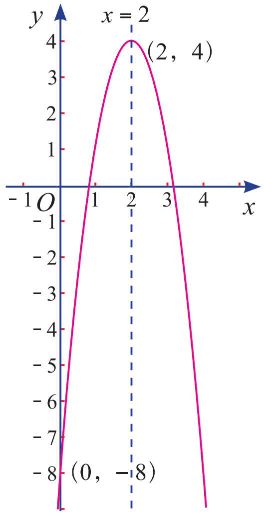


图 19－13

练习

1. 已知抛物线 $y=2x^2-4x+5$，利用配方法求出它的对称轴和顶点坐标.
2. 已知抛物线 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+2$.
   (1) 求出它的对称轴和顶点坐标；
   (2) 求它与 y 轴的交点 C 的坐标，以及与 x 轴的交点 A 和 B 的坐标.

在解决有关二次函数的问题时，往往要先确定二次函数的表达式. 确定二次函数的表达式的关键就是确定表达式中 a，b，c 的值.

例 4 已知二次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$ 的图象经过 $(2,\ 8)$ 和 $(4,\ 10)$ 两点，求这个二次函数的表达式.

解：由二次函数的图象经过 $(2,\ 8)$ 和 $(4,\ 10)$ 两点，得

$$\begin{cases}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 4+2b+c=8,\\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 16+4b+c=10.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}b=4,\\ c=2.\end{cases}$$

因此，二次函数的表达式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+4x+2$.

思考

当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象通过 (2，8)，(4，10)，(−2，−8) 三点时，你如何求这个二次函数的表达式？

练习

1. 分别根据下列条件，求二次函数 $y=-2x^2+bx+c$ 的表达式．

 (1) 图象通过 (−1，−8)，(3，0) 两点；

 (2) 图象的顶点坐标为 (2，−3)．

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上部分点的横坐标 x、纵坐标 y 的对应值如下表：

x	…	−3	−2	−1	0	1	…
y	…	−6	0	4	6	6	…

 求这个二次函数的表达式．

3. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 过 (1，0)，(2，9)，(−1，−6) 三点，求这个二次函数的表达式．

阅读理解

抛物线和最速降线

我们已经知道，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 的图象是一条抛物线．

通常，我们把一个点在运动的过程中所留下的“痕迹”叫做这个动点的轨迹．实际上还可以把动点的轨迹看做是满足某种条件的所有的点组成的图形．例如，我们可以把线段的垂直平分线看做是一个动点按照“到线段两端距离相等”的规律运动时留下的“痕迹”，也可以看做是“到线段两端距离相等”的所有的点组成的图形．所以我们可以说“线段的垂直平分线是到线段两端距离相等的点的轨迹”．请你想一想，角平分线可以看做是满足什么条件的点的轨迹．

实际上，炮弹沿着和水平方向成一定角度的方向被射出时，在不计空气阻力的情况下其运动形成的轨迹就是抛物线（图 19－14）.

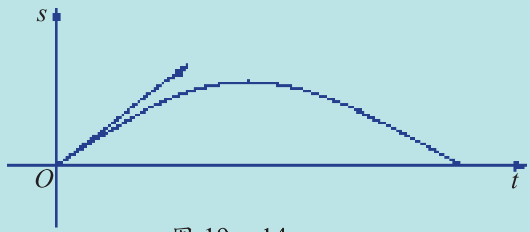


图 19－14

学习了物理学以后我们将知道，当抛出去的物体的运动方向和水平方向成 30°、抛出初速度的大小是 60 m/s 时，它的飞行高度 h 就是抛出去后的飞行时间 t 的二次函数，它的表达式是

$$h = 30t - 4.9t^2,$$

因此，我们把二次函数的图象叫做抛物线.

你能利用这个表达式求出一枚炮弹飞行的最高高度和它着地时距离原抛出点有多远吗?

在数学的发展史上，像这样既有形状美又有实际背景的美丽曲线还有很多很多!

例如，滑雪运动员在高处沿怎样的曲线滑下来所用的时间最短?建造什么形状的滑梯，才能让儿童从滑梯上滑下来所用的时间最短?这就是 17 世纪瑞士数学家约翰·贝努利（1667—1748）于 1696 年向当时的数学家们提出的一个至今仍脍炙人口的“最速降线”问题.

如图 19－15，A 和 B 是不在同一铅垂线上的两个点，点 A 高于点 B，动点 P 在自身的重力作用下，从点 A 开始，用最短的时间从 A 滑行到 B，它滑行的轨迹是什么曲线?

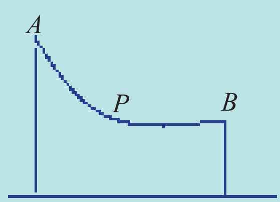



图 19－15

问题提出不到半年，伟大的英国物理学家牛顿（1642—1727）就找到了问题的解法，得到了问题的答案.奇妙的是，原来这条曲线就是车轮在平地上滚动时，车轮上的一个点的运动轨迹，这个轨迹叫旋轮线.旋轮线就是最速降线（图 19－16）.

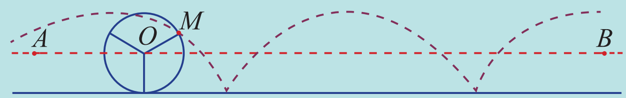


图 19 – 16

最速降线有着广泛的应用．某些古建筑屋顶上的琉璃瓦、办公楼的屋顶，都采用了最速降线的形状，它不仅使建筑充满一种和谐雄伟的壮美感，而且可以使雨水在屋顶上停留的时间最短，因而减小酸雨对屋顶的侵蚀，起到了保护建筑的作用．

习 题 19－1

★基础★

1. 根据下面的条件列出函数表达式，并判断列出的函数是否为二次函数：

(1) 如果两个数中，一个比另一个大 5，那么，这两个数的乘积 p 是较大的数 m 的函数；

(2) 在一个半径为 10 cm 的圆上，挖掉 4 个大小相同的正方形孔，剩余的面积 S（cm^2）是方孔边长 x (cm) 的函数；

(3) 有一块长为 60 m、宽为 40 m 的矩形绿化用地，计划在它的四周相同的宽度内种植阔叶草，中间种植郁金香，那么郁金香的种植面积 S (m^2) 是草坪宽度 a (m) 的函数．

2. 在同一坐标系中，画出下列每组函数图象的示意图，并指出前一个函数的图象经过怎样的变换就可以和后一个函数的图象重合：

(1) $y=3x^2$ 和 $y=-3x^2$；

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$；

(3) $y=-2(x-3)^2$ 和 $y=-2(x-5)^2$.

3. 作出函数 $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+3$ 的图象．

4. 写出下列抛物线的开口方向、顶点坐标、对称轴，并画出它们的示意图．

(1) $y=-2x^2+1$；　(2) $y=\frac{1}{2}(x+5)^2$；　(3) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2-7$；

(4) $y=5(x-3)^2+1$；　(5) $y=-2(x+1)^2-3$；　(6) $y=\frac{2}{3}(x-5)^2-2$.

5. 利用配方法求出下列抛物线的顶点坐标和对称轴.

(1) $y=2x^2-4x-1$；　(2) $y=-x^2-3x+5$；　(3) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$.

6. 把下列二次函数的表达式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，指出其图象的开口方向、对称轴和顶点坐标，并画出示意图.

(1) $y=-x^2+4x+1$；　(2) $y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.

★★提升★★

1. 根据下列条件，求二次函数的表达式.

(1) 图象通过点 (6，0)，顶点坐标为 (4，－8)；

(2) 图象通过点 (－1，－7)，对称轴为直线 $x=2$，与 x 轴相交的两点之间的距离为 $2\sqrt{2}$.

2. (1) 二次函数 $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2$ 的图象经过怎样的变换，可以得到函数 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$ 的图象?

(2) 把抛物线 $y=-3x^2$ 向右平移 4 个单位，再以 x 轴为折痕翻折，可以得到新的抛物线，写出它的表达式.

(3) 函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象经过怎样的变换，就能得到函数 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$ 的图象?

3. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，和 x 轴交于 A，B 两点，并且对称轴为 $x=-1$. 菱形 $ACBD$ 中的点 C 是抛物线的顶点，如果菱形的对角线的长分别是 $AB=6$ 和 $CD=8$，求这个二次函数的表达式.

★★★拓展★★★

已知函数 $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+3$.

(1) 函数 y_1 的图象和已知函数的图象关于 y 轴成轴对称，求出 y_1 的表达式.

(2) 函数 y_2 的图象和已知函数的图象关于原点成中心对称，求出 y_2 的表达式.

(3) 函数 y_1 和 y_2 的图象有怎样的位置关系？证明你的结论.

19.3 二次函数的性质

我们来考察在二次函数中，随着自变量的变化，它的函数值是怎样变化的，并总结出这种变化的规律.

实践

画出二次函数 $y=x^2-6x+2$ 的图象，观察图象回答：

(1) 当自变量 x 从小变大时，函数值 y 也总是由小变大吗？如果不是，自变量 x 在什么范围内变化时，函数值随自变量的增大而增大？自变量 x 在什么范围内变化时，函数值随自变量的增大而减小？

(2) 这个函数有一个最大的或最小的值吗？如果有，在什么时候取得这个值？

这个函数的图象是对称轴为 $x=3$、顶点坐标为 $(3,-7)$ 的抛物线，如图 19－17 所示.

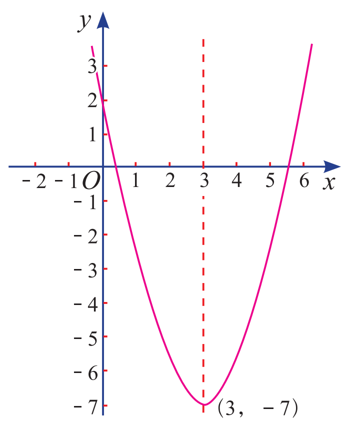


图 19－17

观察图象可知：

(1) 当 $x>3$ 时，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大；

(2) 当 $x<3$ 时，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小；

(3) 当 $x=3$ 时，函数有最小值，函数的最小值为 -7.

交流

观察二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在什么条件下有最大值或最小值？最大值或最小值是多少？在什么时候取得最大值或最小值？

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的开口方向是由 a 的符号决定的，当 $a>0$ 或 $a<0$ 时其图象如图 19－18 所示．

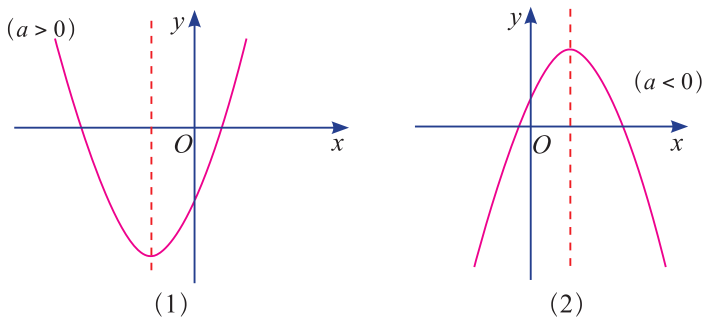


图 19－18

观察抛物线的开口方向和函数值的变化趋势，请你归纳出二次函数的性质，并填写在下表中：

	y 随 x 的增大而减小时 x 的取值范围	y 随 x 的增大而增大时 x 的取值范围	y 取得最大值或最小值时 x 的值
$a>0$			
$a<0$			

例 已知二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}$．

（1）当自变量 x 在什么范围内取值时，y 随 x 的增大而增大？ x 在什么范围内取值时，y 随 x 的增大而减小？

（2）这个二次函数有最大值还是最小值？如果有，当 x 为何值时，函数取得最大值或最小值？并求出最大值或最小值．

解：（1）因为
$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}\\ &=-\frac{1}{2}(x^2-2x)+\frac{5}{2}\\ &=-\frac{1}{2}(x^2-2x+1)+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\\ &=-\frac{1}{2}(x-1)^2+3. \end{aligned}$$

所以图象的顶点坐标为 $(1，3)$．

因为抛物线的开口向下，所以当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

(2) 因为抛物线的开口向下，顶点坐标为 (1，3)，所以当 $x=1$ 时，这个二次函数有最大值 3.

练习

1. 填表：

	$y=2x^2$	$y=\frac{1}{2}(x-3)^2$	$y=-2(x+1)^2+3$	$y=-2x^2+4x-5$
y 随 x 的增大而增大时 x 的取值范围				
y 随 x 的增大而减小时 x 的取值范围				

2. 判断下列二次函数何时取得最大（或最小）值，并求出这个值.

(1) $y=-2x^2+3$；

(2) $y=\frac{1}{3}(x+2)^2$；

(3) $y=-2(x+5)^2-3$；

(4) $y=-2x^2-8x+3$.

19.4 二次函数的应用

思考

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和 x 轴的交点坐标分别为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，那么 x_1 和 x_2 的值有什么特殊的意义？这种特殊意义可以有怎样的应用？

不难看出，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标是使二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值为零时自变量 x 的值. 也就是说，二次函数

$$y=ax^2+bx+c$$

的图象和 x 轴交点的横坐标就是一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的解.

这一事实说明，我们可以利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象来求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的近似解.

例 1 利用函数图象求一元二次方程 $\frac{1}{2}x^2-2x-2=0$ 的近似解（精确到 0.1）.

解：设有二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-2$，列表并作出它的图象（图 19－19）.

x	…	-1	0	1	2	3	4	5	…
y	…	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{7}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	…

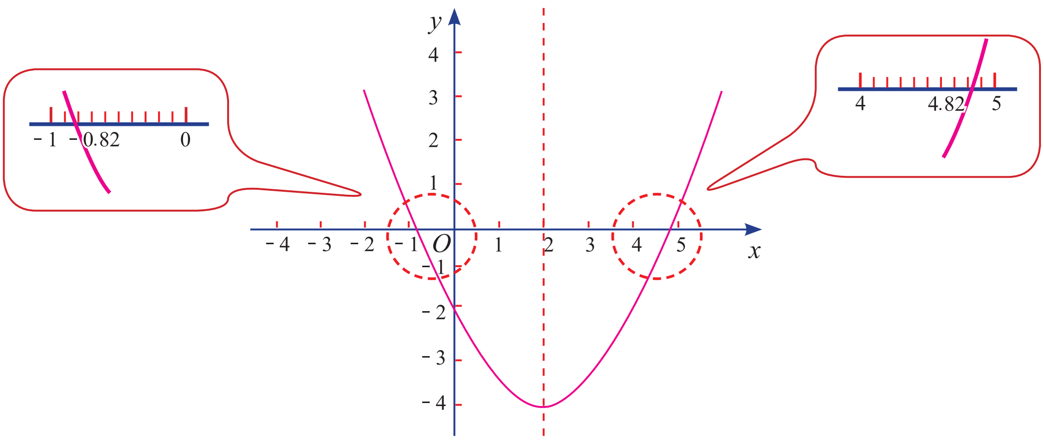


图 19－19

观察抛物线和 x 轴交点的位置，估计出交点的横坐标分别约为 -0.8 和 4.8，所以得出方程精确到 0.1 的近似解为

$$x_1\approx-0.8,\quad x_2\approx4.8.$$

利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象求出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的方法称为图象法，这种方法常用来求方程的近似解.

很多生活中的实际问题，都可以运用求二次函数的值来解决.

例 2 某超市按每袋 20 元的价格购进某种干果. 在销售过程中发现，该种干果每天的销售量 w（袋）与销售单价 x（元）满足 $w=-2x+80$（$20\leqslant x\leqslant 40$）. 如果销售这种干果每天的利润为 y（元），那么销售单价定为多少元时，每天的利润最大？最大利润是多少？

解：$y = w(x-20)$

$= (-2x+80)(x-20)$

$= -2x^2 + 120x - 1\,600$

$= -2(x-30)^2 + 200.$

因为 $20 \leqslant x \leqslant 40$，且 $a = -2 < 0$，

所以当 $x = 30$ 时，$y_{最大值} = 200$.

答：当干果销售单价定为每袋 30 元时，销售这种干果每天的利润最大，最大利润为 200 元.

例 3　图 19 – 20 是一个单向隧道的断面，隧道顶 MCN 是一条抛物线的一部分. 经测量，隧道顶的跨度 MN 为 4 m，最高处到地面的距离 CO 为 4 m，两侧墙高 AM 和 BN 均为 3 m. 今有宽为 2.4 m 的卡车在隧道中间行驶，如果卡车载物后最高点 E 到隧道顶面对应的点 D 的距离应在 0.6 m 左右，那么，卡车载物后限高应是多少米?

怎样建立平面直角坐标系可以使问题的解法简化?

解：建立平面直角坐标系，如图 19 – 20.

于是抛物线的表达式可以设为

$$y = ax^2 + c.$$

根据题意，得出 M，N，C 三点的坐标分别为 $M(-2, 3)$，$N(2, 3)$，$C(0, 4)$，点 F 的坐标为 $F(1.2, 0)$. 由于点 N，C 在抛物线上，所以有

$$\begin{cases} 4a + c = 3, \\ a \times 0 + c = 4. \end{cases}$$

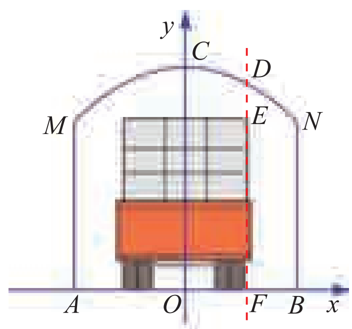


图 19 – 20

解得

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{4}, \\ c = 4. \end{cases}$$

所以，它的表达式为

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 4.$$

当点 F 的横坐标 $x = 1.2$ 时，设抛物线上和它对应的点 D 的纵坐标为 y_D，所以有

$$y_D = -\frac{1}{4}x^2 + 4$$

$$= -\frac{1}{4} \times 1.44 + 4$$

$$= 3.64\ (\text{m}).$$

也就是 $DF=3.64$ m，于是可知，卡车载物后限高 EF 应为

$$EF=DF-DE=3.64-0.6=3.04\ (\text{m}).$$

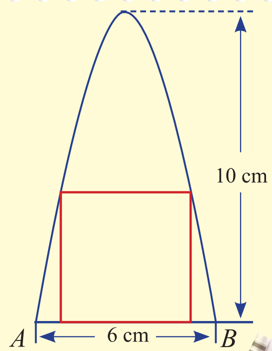
答：卡车载物后限高应为 3.04 m .

练习

1. 用图象法求出下列方程的近似解（精确到 0.1）.

(1) $x^2+2x-2=0$；　　(2) $\frac{1}{3}x^2-2x+1=0$.

2. 有一块如图所示的铁片下脚料，其中曲线是一条抛物线的一部分．要裁出一个最大的正方形时，把正方形的一边放在线段 AB 上，对边的端点放在抛物线上，求这个正方形的边长（精确到 0.01 cm）.



（第 2 题）

探究学习

一元二次不等式解法的探究

我们已经知道，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的根是使二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的值为零时，自变量 x 应取的值．可见一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 和二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 有密切的关系，我们常用二次函数的知识来研究一元二次方程的有关问题 .

那么，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0\ (a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0\ (a>0)$ 是否也和二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 有密切的关系呢？我们是否也能用有关二次函数的知识来研究一元二次不等式的解法呢？

下面我们以

$$x^2-2x-3>0 \text{ 和 } x^2+2x-8<0$$

为例，来探究一元二次不等式的解法．

我们先画出二次函数 $y=x^2-2x-3$ 和 $y=x^2+2x-8$ 的图象，通过观察图象的方法来寻求这些不等式的解，这两个函数的图象分别如图 19－21（1）、（2）所示．

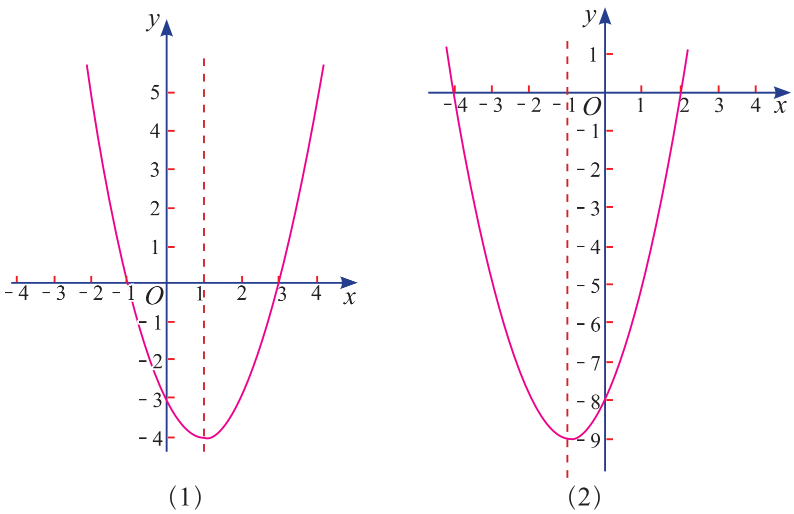


图 19－21

观察图象可知，当 x 的取值分别在方程 $x^2-2x-3=0$ 和 $x^2+2x-8=0$ 的两个实数根之间时，函数的值都小于 0；当 x 的取值分别在两个实数根之外时，函数的值都大于 0．所以不等式 $x^2-2x-3>0$ 的解为

$$x<-1 \text{ 或 } x>3,$$

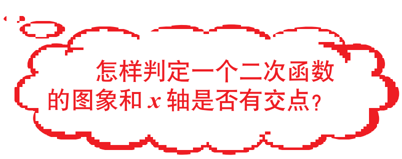
不等式 $x^2+2x-8<0$ 的解为

$$-4<x<2.$$

由此可见，一元二次不等式

$$ax^2+bx+c>0\ (a>0) \text{ 或 } ax^2+bx+c<0\ (a>0)$$

的解与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的图象和 x 轴的交点情况有关．



如图 19－22，我们利用计算机或图形计算器探究以下两个问题：

（1）如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象和 x 轴有交点，那么关于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$）或 $ax^2+bx+c<0$（$a>0$）的解，将有怎样的结论？

（2）如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象和 x 轴没有交点，那么关于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$）或 $ax^2+bx+c<0$（$a>0$）的解，将有怎样的结论？

综合以上探究，是否能由此概括出求一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$）或 $ax^2+bx+c<0$（$a>0$）的解的一般方法呢？

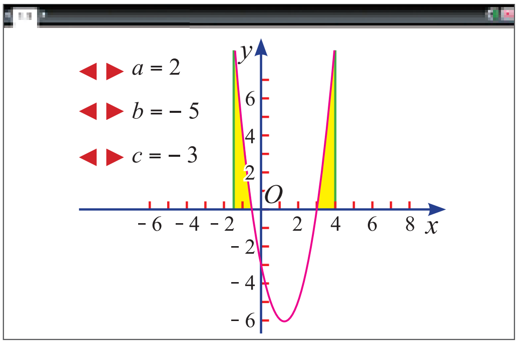


图 19－22

习　题　19－2

★基础★

1. 画出下列二次函数的图象，观察图象，估计出图象和 x 轴交点的横坐标的值．

（1）$y=2x^2-4x-8$；　　（2）$y=\dfrac{1}{2}x^2+2x-1$．

2. 用图象法求下列一元二次方程的近似解（精确到 0.1）．

（1）$x^2-x-10=0$；　　（2）$\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{3}{2}=0$．

3. 分别根据下列条件，求二次函数的表达式 .

(1) 图象过点 (1，0)，(−1，8) 和 (0，2)；

(2) 图象过点 (−2，2) 和 (−4，14)，对称轴为 $x=-2$；

(3) 图象过点 (−1，−7)，当 $x=2$ 时有最大值 2 .

4. 已知函数 $y=2x^2+12x+13$，回答下列问题：

(1) 写出它的图象的开口方向、对称轴与顶点坐标 .

(2) 它的图象有最高点还是最低点？如果有，写出这个点的坐标 .

5. 下列函数有最大值还是最小值？求出当 x 为何值时，y 取得最大值或最小值，并求出最大值或最小值 .

(1) $y=x^2+x-1$；　　(2) $y=-2x^2-3x+5$.

6. 已知圆 A 的半径为 10 m，当半径减小 x (m) 时，圆的面积就减小 $y(\mathrm{m}^2)$，y 是 x 的函数 . 写出函数的表达式和它的自变量的取值范围，并画出它的图象 .

7. 如果用 I 表示汽车经撞击后的损坏程度，经多次试验研究后知道，I 与撞击时的速度 v 的平方之比是常数 2，那么 I 是 v 的什么函数？说明理由 .

8. 某长方体木块的底面是正方形，它的高比底面边长还多 50 cm. 把这个长方体表面涂满油漆时，如果每平方米费用为 8 元，那么总费用 S (元) 是底面边长 a (cm) 的什么函数？写出它的表达式，并求出当底面边长分别为 70 cm 和 120 cm 时，所需费用相差多少元 .

★★ 提升 ★★

1. 画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，并观察图象回答下列问题：

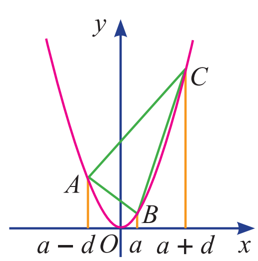
(1) x 取何值时，$y=0$，$y>0$，$y<0$？

(2) x 取何值时，y 随 x 的增大而增大？ x 取何值时，y 随 x 的增大而减小？

(3) 当 x 取何值时，y 的值最小？最小值是多少？

2. 如果二次函数 $y=(m-1)x^2+2mx+(m+3)$ 的最小值是正数，求 m 的取值范围 .

3. 如图，抛物线 $y=x^2$ 上的三点 A，B，C 的横坐标分别为 $a-d$，a，$a+d$. 试求 $\triangle ABC$ 的面积 (用含有 a，d 的代数式表示) .



（第 3 题）

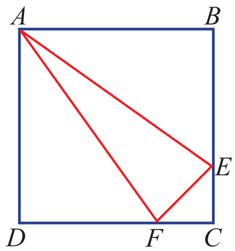
4. 已知抛物线 $y=x^2+ax+a-2$.

(1) 它与 x 轴一定有交点吗？说明你的理由 .

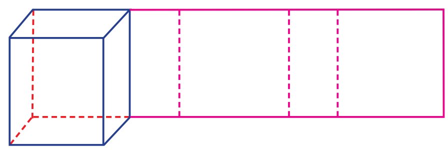
(2) 在有交点的情况下，求出它的交点坐标，并求出两交点间的距离 .

(3) 当两交点间的距离最短时，求出抛物线的表达式 .

5. 如图，已知 E，F 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 上的两点，且 $AE=AF$，那么，当 $AB=4$ 时，$\triangle AEF$ 的面积 S 是 CE 的长 x 的函数吗？如果是，写出它的表达式，并回答 x 取何值时，$\triangle AEF$ 的面积是最大的，求出此时 $\triangle AEF$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，某工厂有一批长为 24 cm、宽为 8 cm 的长方形硬纸板，要用它作为高是 8 cm 的长方体盒子的侧面，那么这个盒子的最大容积是多少立方厘米？

★★★ 拓展 ★★★

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实数根 x_1 和 x_2，那么，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，你能探求一个只用 x_1，x_2 和 a 表示这个函数的另一种表达式吗？求出这个表达式，并举一个二次函数的例子，写出它的各种不同形式的表达式.

二、反比例函数

19.5 反比例函数

实践

1. 列出下列函数的表达式：

(1) 当一个矩形的面积是 2 m^2 时，其长 a (m) 是宽 b (m) 的函数.

(2) 运输货物的费用是以“吨千米”（也就是 1 吨的货物运输 1 千米，不

足1吨或不足1千米时，都按1吨或1千米计算）为计算单位的．如果已缴纳5 000吨千米的运费，那么，运输货物的质量 m（吨）是运输路程 s（千米）的函数．

（3）一条铁路全长80 km，运行全程所需时间 t（h）是平均速度 v（km/h）的函数（列车的平均速度不得高于200 km/h）．

2. 上述函数的表达式有什么共同特点？可以用怎样形式的表达式来概括？

上述三个函数的表达式分别是：

（1）$a=\dfrac{2}{b}$（$b>0$）；

（2）$m=\dfrac{5\,000}{s}$（s 是正整数，且 $s\leqslant 5\,000$）；

（3）$t=\dfrac{80}{v}$（$0<v\leqslant 200$）．

如果我们仍用 x 表示自变量，y 表示因变量，可以看到，它们的表达式都是形如 $y=\dfrac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的式子．

一般地，我们把形如

$$y=\frac{k}{x}\ (k\text{ 是常数，}k\neq 0)$$

的函数叫做**反比例函数**．其中，k 叫做**反比例系数**．

例 压强的大小是由单位面积所受到的压力决定的，那么，当物体受到100 N的压力时，压强是受力面积的函数．试判断它是哪一类函数，并求当物体的受力面积是5 m^2 时，物体所受的压强．

解：设压强为 p（Pa），受力面积为 S（m^2），根据压强的意义，列出的表达式为

$$p=\frac{100}{S}\ (S>0).$$

由于它是形如 $y=\dfrac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的函数，所以它是反比例函数．

当 $S=5$ 时，$p=\dfrac{100}{5}=20$（Pa）．

练习

1. 判断下列函数是不是反比例函数：

(1) $y=-\frac{1}{x}$；　(2) $y=\frac{x^2}{2}$；　(3) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2x}$.

2. 列出下列函数的表达式，并判断它们是不是反比例函数，如果是，求出它们的自变量的取值范围：

(1) 三角形的面积为定值 S 时，它的底边长 a 是这条边上的高 h 的函数；

(2) 把体积为 800 cm^3 的钢锭浇铸成圆柱形钢材，它的底面积 S (cm^2) 是高 h (cm) 的函数.

19.6 反比例函数的图象、性质和应用

我们以 $y=\frac{6}{x}$ 为例，来研究反比例函数图象的画法.

思考

已知反比例函数 $y=\frac{6}{x}$，试问：

(1) 它的图象是否经过原点？分布在哪几个象限？为什么？

(2) 它的图象和 x 轴、y 轴有交点吗？为什么？

(3) 当 $x>0$ 时，随着 x 值的增大，y 的值是增大还是减小？当 $x<0$ 时，随着 x 值的增大，y 的值是增大还是减小？为什么？

由表达式 $y=\frac{6}{x}$，可以知道：

(1) 因为 $x\neq0$，所以它的图象不过原点；又因为 x 和 y 的符号相同，所以它的图象分布在第一、第三象限.

(2) 因为 $x\neq0$，所以图象和 y 轴没有交点；又因为无论 x 取怎样的值，必有 $y\neq0$，所以图象和 x 轴也没有交点.

(3) 当 $x>0$ 时，在第一象限内的图象，因为 x 增大时，y 的值减小，

所以，图象“向右、向下”延伸，且越来越靠近 x 轴而不与 x 轴相交 .

下面，作出反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象 .

当 $x<0$ 时的情况如何？你能描述一下吗？

列表：

x	…	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	…
y	…	-1	$-\dfrac{3}{2}$	-2	-3	-6	6	3	2	$\dfrac{3}{2}$	1	…

描点，连线，如图 19－23.

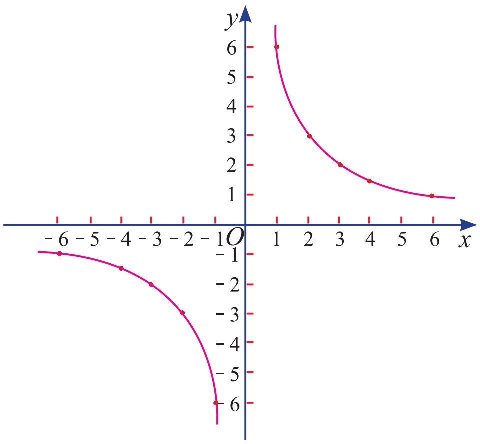


图 19－23

图 19－24

可以看到，反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象是分布在第一、第三象限的两支曲线，这样的两支曲线叫做**双曲线** .

由于双曲线有很多奇妙而独特的性质，所以有很多重要的应用 . 热电厂中的冷却塔的塔身都采用了双曲线的形状，如图 19－24 所示 .

练习

作出下列函数的图象：

(1) $y=\dfrac{2}{x}$；　　(2) $y=-\dfrac{2}{x}$；　　(3) $y=\dfrac{4}{x}$；　　(4) $y=-\dfrac{4}{x}$.

交流

1. 比较反比例函数 $y=\dfrac{4}{x}$ 和 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象在位置、变化趋势以及与坐标轴的关系等方面，有什么相同点和不同点.

2. 是否能从双曲线的位置和变化趋势，概括出反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的一般性质？

观察反比例函数的图象（图 19 – 25），可以看出反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的性质如下：

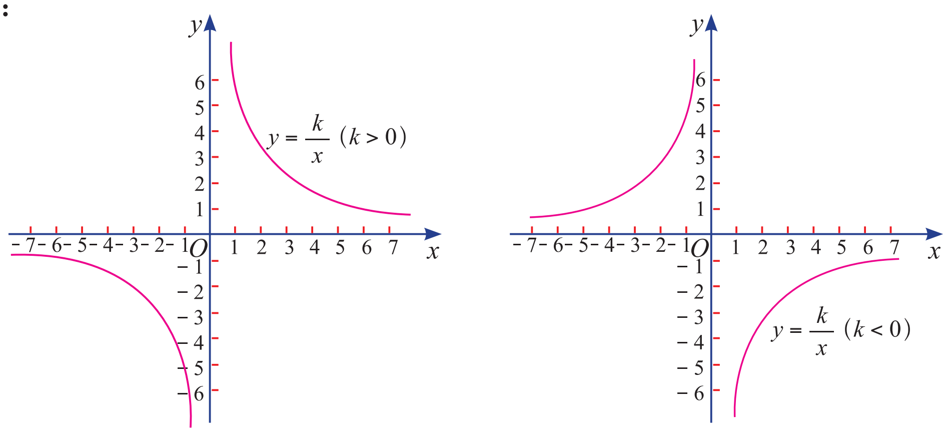


图 19 – 25

(1) 当 $k>0$ 时，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象是分布在第一、第三象限的双曲线；双曲线在各自象限内都向右、向下伸展，但不与坐标轴相交.

(2) 当 $k<0$ 时，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象是分布在第二、第四象限的双曲线；双曲线在各自象限内都向右、向上伸展，但不与坐标轴相交.

由此得到：

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的性质

1. 当 $k>0$ 时，在各自象限内，y 的值随 x 值的增大而减小；
2. 当 $k<0$ 时，在各自象限内，y 的值随 x 值的增大而增大.

例 1 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过点 $P(-6,\ -2)$.

(1) 求出它的表达式；

（2）画出它在第一象限内的图象；

（3）当自变量 x 从 3 增大到 9 时，函数值 y 是怎样变化的？

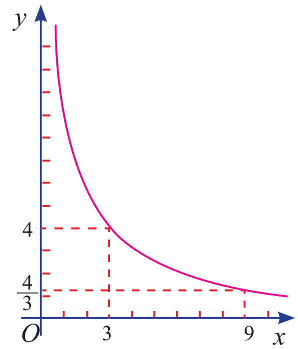


图 19－26

解：（1）由于点 $P(-6,-2)$ 在函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，所以有

$$-2=\frac{k}{-6}.$$

可得 $k=12$，函数的表达式为

$$y=\frac{12}{x}.$$

（2）函数 $y=\frac{12}{x}$ 在第一象限的图象如图 19－26 所示．

（3）在第一象限内，由于 $k=12>0$，所以 y 的值随 x 值的增大而减小．当 $x=3$ 时，$y=4$；当 $x=9$ 时，$y=\frac{4}{3}$，所以当 x 从 3 增大到 9 时，函数值 y 从 4 减小到 $\frac{4}{3}$．

例 2 某长途公共汽车线路全长 50 km，规定车的平均速度不得高于 70 km/h.

（1）运行全程所需时间 t（h）是平均车速 v（km/h）的什么函数？画出这个函数的图象．

（2）结合图象，求出采用平均速度为 40 km/h 或 60 km/h 时，运行全程所需时间相差多少分钟．

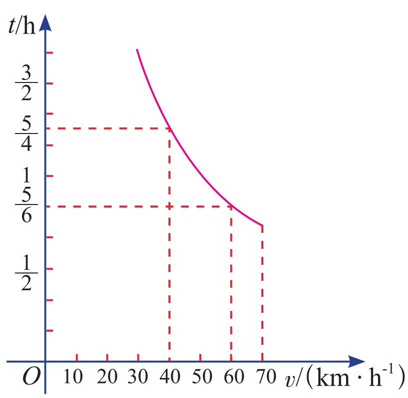


图 19－27

解：（1）据题意，函数是表达式为 $t=\frac{50}{v}$ 的反比例函数，自变量的取值范围是 $0<v\leqslant 70$，所以它的图象如图 19－27 所示．

（2）结合图象，可以计算出当平均速度为 40 km/h 时，运行全程所需时间为

$$t_1=\frac{50}{40}=\frac{5}{4}.$$

当平均速度为 60 km/h 时，运行全程所需时间为

$$t_2=\frac{50}{60}=\frac{5}{6}.$$

所以 $t_1 - t_2 = \frac{5}{4} - \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$（h）$= 25$（min）.

答：运行全程所需时间相差 25 分钟.

练习

1. 回答下列问题：

（1）函数 $y = \frac{2}{x}$，当 $x > 0$ 时，随着 x 的增大 y 如何变化？当 $x < 0$ 时，随着 x 的增大 y 如何变化？

（2）函数 $y = -\frac{2}{x}$，当 $x > 0$ 时，随着 x 的增大 y 如何变化？当 $x < 0$ 时，随着 x 的增大 y 如何变化？

2. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}(k \neq 0)$的图象经过点$(-1，2)$，那么，当 $x > 0$ 时，随着 x 的增大 y 如何变化？当 $x < 0$ 时，随着 x 的增大 y 如何变化？

习　题　19－3

★基础★

1. 根据下列函数关系，分别写出表达式.

（1）面积为 12 m^2 的矩形中，一边的长 a（m）是另一边长 b（m）的函数；

（2）汽车在相距 30 km 的 A，B 两地间匀速行驶，从 A 到 B 所需的时间 t（h）是它的速度 v（km/h）的函数；

（3）容积是 1 000 cm^3 的圆柱形罐头盒，它的高度 h（cm）是底面积 S（cm^2）的函数.

2. 画出下列函数的图象：

（1）$y = -\frac{3}{x}$；　　　　（2）$y = \frac{1}{3x}$.

3. 已知函数 $y = \frac{m-5}{x}$（$m \neq 5$）.

（1）在什么条件下，函数的图象分布在第一、第三象限？在什么条件下，函数的图象分布在第二、第四象限？

（2）在什么条件下，y 随 x 的增大而减小？在什么条件下，y 随 x 的增大而增大？

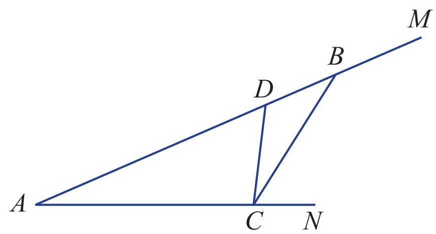
4. 已知反比例函数的图象经过点 $P(-2, 3)$，求它的表达式.

★★提升★★

1. 一次函数 $y=kx-5$ 和反比例函数 $y=\frac{2t-1}{x}$ 的图象相交于点 $(-3, 2)$，求出这两个函数的表达式.
2. 函数 y_1 是 x 的一次函数，y_2 是 y_1 的反比例函数，y_1 和 y_2 的图象相交于 $(1, 3)$ 和 $(4, -3)$ 两点，求这两个函数的表达式.

★★★拓展★★★

如图，B，C 和 D 三点是 $\angle MAN$ 的边 AM 和 AN 上的三个动点，且使 $\angle BDC$ 和 $\angle BCA$ 保持相等，$BC=3$. 如果 $AB=y$，$BD=x$，那么 y 是 x 的函数吗？如果是，求出它的表达式.



回顾与整理

知识要点

本章学习了二次函数和反比例函数以及它们的一些应用.

1. 二次函数和反比例函数的定义.

(1) 形如 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的函数叫做二次函数；

(2) 形如 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的函数叫做反比例函数.

2. 二次函数和反比例函数的图象.

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图象是以 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴，$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 为顶点的一条抛物线. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下.

知识要点

(2) 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq0$）的图象是双曲线．当 $k>0$ 时，图象分布在第一、第三象限；当 $k<0$ 时，图象分布在第二、第四象限．

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的性质．

(1) 如果 $a>0$，当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；如果 $a<0$，当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大．

(2) 如果 $a>0$，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；如果 $a<0$，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$．

4. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq0$）的性质．

(1) 当 $k>0$ 时，图象分布在第一、第三象限内，在各自象限内 y 随 x 的增大而减小；

(2) 当 $k<0$ 时，图象分布在第二、第四象限内，在各自象限内 y 随 x 的增大而增大．

学习指导

1. 要从实际生活的事例中，感受和理解二次函数和反比例函数的意义，注意进一步深化对函数的认识，努力运用函数观点观察、分析事物，从而学会把生活中的一些实际问题归结为二次函数或反比例函数问题来加以解决．

2. 确定函数的表达式是用函数解决问题的关键．既要不断提高用函数观点分析问题的能力，也要熟练掌握确定函数表达式的方法，特别是要掌握运用待定系数法求函数的表达式的方法．

3. 要会熟练地画出函数图象（包括画出函数图象的示意图）．会观察函数图象是掌握函数的性质和利用图象解决有关函数问题的基本技能，要重视根据二次函数（或反比例函数）的表达式画出二次函数（或反比例函数）图象的示意图的练习，以及观察图象并从图象中获取信息的练习．提高通过图象理解、记忆和运用二次函数和反比例函数性质的能力．

4. 伴随着二次函数和反比例函数的学习，要进一步发展对“数形结合”思想的理解和掌握，进一步增强主动运用“数形结合”的方法认识问题、解决问题的意识．

5. 二次函数和反比例函数在实际生活中有广泛的应用，应注意提高在实际生活中运用二次函数和反比例函数的意识，提高运用函数知识解决实际问题的能力，从而进一步感受学习数学的意义，领会学习数学和运用数学的过程和方法．

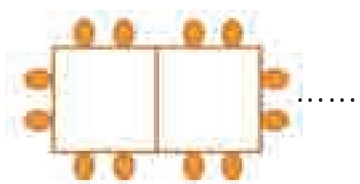
复习题

★基础★

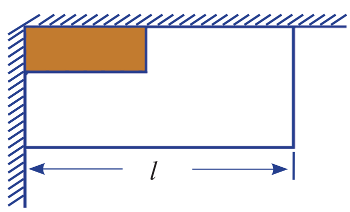
1. 列出下列函数的表达式，并判断出函数的类型．

(1) 某物流公司的运费单价是每吨每千米 a 元（a 为常数）．如果设运费总金额为 P（元），运输的物资的总量为 m（吨），运输路程为 s（千米），那么，当运输的物资的总量确定时，运费金额是运输路程的函数．

(2) 正方形的餐桌可供 8 人就餐，再拼一张同样的餐桌，就可供 12 人就餐（如图），如此拼接下去，就餐总人数 k 是餐桌的总张数 G 的函数．



［第 1(2)题］



［第 1(3)题］

(3) 如图，在成直角的墙角有一个长 1.2 m、宽 0.4 m 的矩形墙垛（棕色部分），现要用 16 m 长的栅栏围成一个矩形堆料场，那么，这个堆料场的面积 S（m^2）是它的长 l（m）的函数．

2. 试判定函数 $y=(a^2-4)x^2+(a+2)x-5$ 的类型．

3. 写出下列函数图象的顶点坐标和对称轴：

(1) $y=\frac{4}{5}x^2-2$；　　(2) $y=-\frac{4}{5}x^2+3$；

(3) $y=\frac{2}{3}(x+1)^2$；　　(4) $y=-5\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$；

(5) $y=-2(x+\sqrt{2})^2-\sqrt{3}$；　　(6) $y=(x-\sqrt{2}-1)^2+7$.

4. 在下列条件下，求反比例函数的表达式.

(1) 图象经过点 $(-4, 2)$；

(2) 图象经过点 $(3, -1)$.

5. 画出二次函数 $y=x^2-4x-12$ 的图象，并回答：

(1) 当 x 分别取 -2，$\sqrt{3}$，4 时，y 的值；

(2) 求图象和 x 轴交点的坐标及两交点间的距离；

(3) 当 $-5<x<1$ 时，判定 y 是随 x 的增大而增大还是随 x 的增大而减小；

(4) 当 x 的值由 5 增大到 8 时，y 的值增大了多少.

6. 已知直线 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 和两坐标轴的交点为 A，B，抛物线经过点 A，B，且点 $(1, 1)$ 在此抛物线上，求此抛物线的顶点坐标和对称轴.

7. 点 $A(3, b)$ 在直线 $y=x-1$ 上，求图象通过点 A 的反比例函数的表达式.

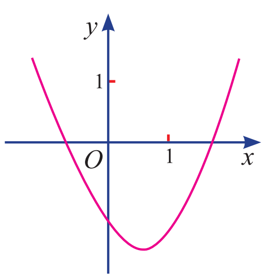
8. 如果函数 $y=mx^{m^2+m-1}$ 是反比例函数，求实数 m 的值.

9. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 和一次函数 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$ 的图象相交于点 $(1, m)$，求两曲线的交点.

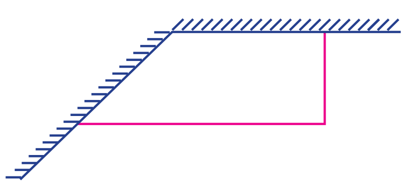
10. 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图象如图，$\Delta=b^2-4ac$，那么（　　）.

A. $b>0$，$c>0$，$\Delta>0$　　B. $b>0$，$c<0$，$\Delta>0$

C. $b<0$，$c<0$，$\Delta>0$　　D. $b<0$，$c>0$，$\Delta<0$



（第 10 题）


（第 11 题）

11. 如图所示，有一直角梯形的苗圃，它的两邻边借用了成 135° 的墙角，另外两边由总长为 30 m 的篱笆构成. 求两邻边各为多长时，围得的苗圃面积最大，最大的面积是多少.

★★提升★★

1. 根据下列条件，分别求二次函数的表达式：

（1）函数图象和抛物线 $y=2x^2-6x$ 关于 x 轴对称；

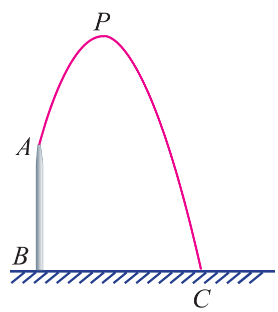
（2）函数图象和抛物线 $y=-2x^2+6x$ 关于 y 轴对称.

2. 已知抛物线 $y=x^2+px+q$ 经过点 $(1,\ -6)$ 和 $(-1,\ 2)$.

(1) 这个二次函数有最大值还是有最小值，最大值或最小值是多少？

(2) 这条抛物线和坐标轴是否有交点？如果有，求出以交点为顶点的三角形的面积.

3. 如图，人工喷泉有一个竖直的喷水枪 AB，喷水口 A 距地面 2 m，喷出水流的轨迹是抛物线. 如果水流的最高点 P 到喷水枪 AB 所在直线的距离为 1 m，且水流的落地点 C 距离喷水枪底部 B 的距离为 $\frac{5}{2}$ m，那么，水流的最高点距离地面是多少米？



（第 3 题）

4. 已知点 $A\ (1,\ y_1)$，$B\ (-\sqrt{2},\ y_2)$，$C\ (-2,\ y_3)$ 在函数 $y=-2x^2-4x+1$ 的图象上，试比较 y_1，y_2，y_3 的大小关系，并说明理由.

5. 已知二次函数的图象经过 $A\ (-1,\ 10)$，$B\ (1,\ 4)$，$C\ (2,\ 7)$ 三点，回答下列问题：

(1) 自变量 x 在什么范围内变化时，因变量 y 随自变量的增大而减小？

(2) 函数有最大值，还是有最小值？自变量 x 取什么值时，因变量 y 取得这个最大值或最小值？最大值或最小值是多少？

(3) 这个图象经过怎样的平移运动，就能得到以原点为顶点的一条抛物线？

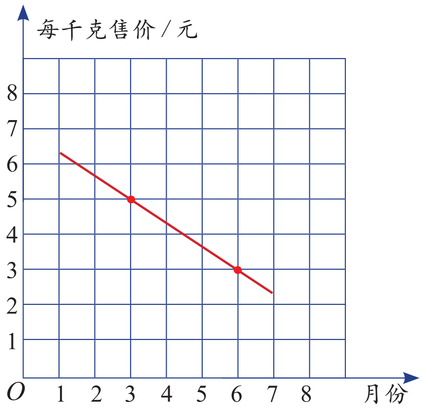
★★★拓展★★★

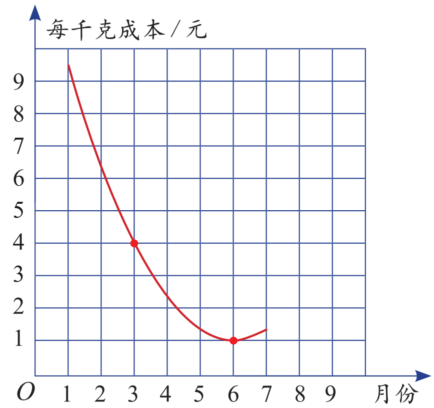
1. 某商店以每把 8 元的价格购进一批雨伞. 如果以每把 14 元的零售价格销售时，月销售量为 100 把；而零售价格每降低 0.1 元，月销售量就可以增加 5 把. 现批发商为了促销，规定商店进货超过 100 把时，超过部分批发价降低 5%，但规定零售价格不得低于 10 元. 试问每把雨伞以多少元出售时，能使所获得利润最大？最大利润是多少元？

2. 某地的蔬菜批发市场指导菜农生产和销售某种蔬菜，并向他们提供了两张图表（如图），试问：

（1）如果在 3 月份出售这种蔬菜，每千克可获利多少元？

（2）哪个月出售这种蔬菜获利最大？请说明理由．





（第 2 题）

3. 我市某文具厂生产一种签字笔，已知这种笔的生产成本为每支 6 元．经市场调研发现，批发这种签字笔每天的销售量 y（支）与售价 x（元／支）之间存在着如下表所示的一次函数关系：

售价 x/(元／支)	…	7	8	…
销售量 y/支	…	300	240	…

(1) 求销售量 y（支）与售价 x（元／支）之间的函数关系式．

(2) 求销售利润 W（元）与售价 x（元／支）之间的函数关系式．

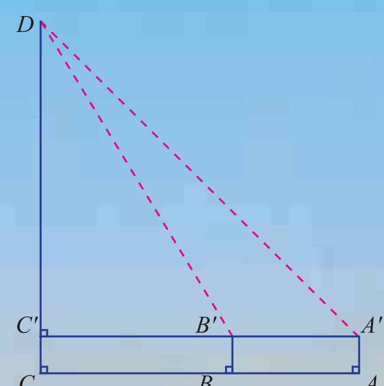
(3) 当每支签字笔以多少元出售时，才能使每天所获得的利润最大？最大利润是多少元？

第二十章
解直角三角形

怎样测量和计算高大建筑物的高度呢?

九年级 (1) 班的同学们来到天安门广场，测量人民英雄纪念碑的高度．方法如下：如图，CD 表示人民英雄纪念碑的高度，首先用 1.5 m 高的测角仪 AA'，BB' 确定点 A 和点 B 的位置，使得 A，B，C 三点在一条直线上，连接 $A'B'$ 并延长交 DC 于点 C'，测得 $\angle DA'C' = 45°$，$\angle DB'C' = 64.7°$，然后测量出 AB 的长为 20 m．根据这些数据，他们就计算出了 CD 的长．你知道他们是怎样计算的吗?

通过本章的学习你就会明白其中的道理，并能运用所学的知识解决相关的问题．



一、锐角三角函数

20.1 锐角三角函数

如图 20－1，在 Rt △ ABC 中，∠ ACB = 90°，如果 ∠ BAC = 30°，那么 ∠ BAC 所对的边 BC 与斜边 AB 的比值是多少？

我们可以通过下面的方法，求出这个比值：

延长 BC 至点 D，使得 $CD = BC$，易证△ABD 是等边三角形，所以，$BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$，即 $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$，并且这个比值只与 ∠ BAC = 30° 有关，与 Rt △ABC的大小无关.

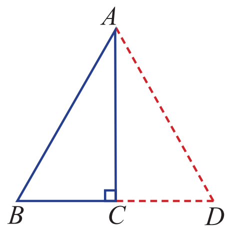


图 20－1

在 Rt △ABC 中，∠ C = 90°，当 ∠ A 是一个不等于 30° 的锐角时，$\frac{BC}{AB}$ 的值是否也只与 ∠ A 的大小有关呢？

思考

实践

1. 如图 20－2，用计算机或图形计算器作 ∠ MAN = 50°，在射线 AM 上任取一点 B，过点 B 作 $BC \perp AN$ 于点 C，度量线段 BC，AB 的长，计算 $\frac{BC}{AB}$ 的值.

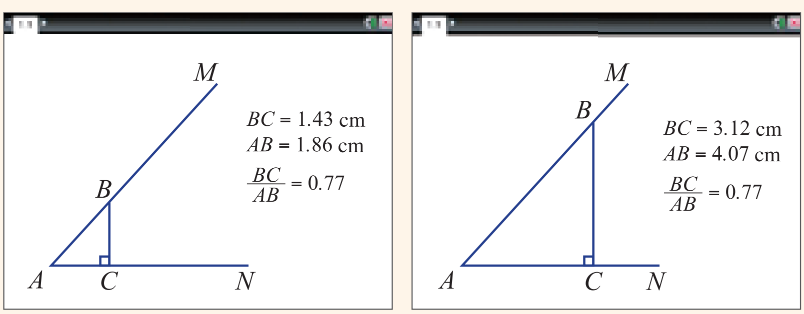


图 20－2

2. 拖动点 B，观察 $\frac{BC}{AB}$ 的值是否发生变化.

我们发现，在图 20－2 中，只要 $\angle A$ 保持 $50°$ 不变，那么 $\angle A$ 的对边 BC 与斜边 AB 的比 $\frac{BC}{AB}$ 始终是一个固定不变的值.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，当 $\angle A$ 为任意一个锐角时，$\angle A$ 的对边 BC 与斜边 AB 的比 $\frac{BC}{AB}$ 是不是仍然具有上述性质呢?

如图 20－3，$\angle MAN$ 为锐角，在射线 AM 上任取点 B_1，B_2，B_3，…，过 B_1，B_2，B_3，…，作 $B_1C_1 \perp AN$ 于点 C_1，$B_2C_2 \perp AN$ 于点 C_2，$B_3C_3 \perp AN$ 于点 C_3，….

$\because \quad \angle AC_1B_1 = \angle AC_2B_2 = \angle AC_3B_3 = \cdots = 90°$，

$\therefore \quad \text{Rt}\triangle AB_1C_1 \backsim \text{Rt}\triangle AB_2C_2 \backsim \text{Rt}\triangle AB_3C_3 \cdots$.

$\therefore \quad \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \cdots$.

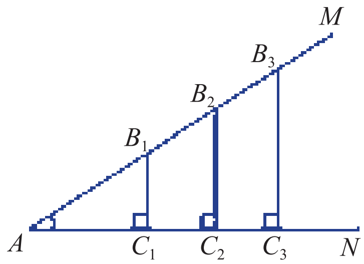


图 20－3

可以得到，在 Rt $\triangle ABC$ 中，当 $\angle C = 90°$ 时，对于锐角 A 的任意一个确定的值，$\angle A$ 的对边与斜边的比是一个固定不变的值.

一般地，在 Rt $\triangle ABC$ 中，当 $\angle C = 90°$，a，b，c 分别为 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，如图 20-4. 我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的**正弦**，记作“$\sin A$”. 即

$$\sin A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

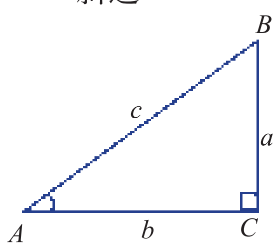


图 20－4

例如，当 $\angle A = 30°$ 时，$\sin A = \sin 30° = \frac{1}{2}$；当 $\angle A = 45°$ 时，$\sin A = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

交流

当 $0° < \angle A < 90°$ 时，$\sin A$ 的值在什么范围内变化？为什么？

例 1 已知：如图 20－5，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = 3$，$BC = 4$，求 $\sin A$ 和 $\sin B$ 的值 .

$\sin A$ 的值等于哪两条线段的比？$\sin B$ 呢？

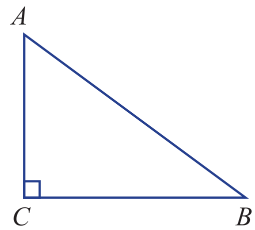


图 20－5

解：在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = 3$，$BC = 4$，由勾股定理，得

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 .$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}, \ \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} .$$

例 2 已知：如图 20–6，在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 AB 边上的高，$CD = 12$，$AD = 9$，$BD = 5$，求 $\sin A$，$\sin\angle ACD$，$\sin B$ 和 $\sin\angle BCD$ 的值 .

解：在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 AB 边上的高，

$$\therefore \quad \angle ADC = \angle BDC = 90° .$$

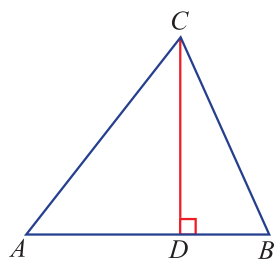


图 20－6

在 Rt $\triangle ADC$ 中，$AD = 9$，$CD = 12$，由勾股定理，得

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 .$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5},$$

$$\sin\angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} .$$

在 Rt $\triangle BCD$ 中，$BD = 5$，$CD = 12$，由勾股定理，得

$$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 .$$

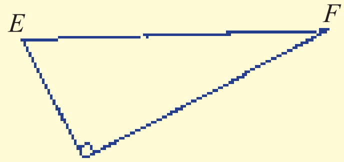
$$\therefore \quad \sin B = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad},$$

$$\sin\angle BCD = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} .$$

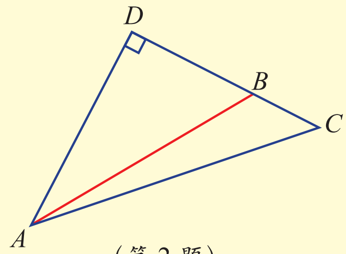
$\sin B$，$\sin\angle BCD$ 的值分别等于哪两条线段的比？

练习

1. 已知：如图，在 Rt $\triangle EFG$ 中，$\angle G=90°$，$EG=4$，$FG=8$，求 $\sin E$，$\sin F$ 的值.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在 Rt $\triangle ACD$ 中，$\angle D=90°$，B 为 CD 上的一点，$AC=15$，$AD=12$，$CB=4$，求 $\sin C$，$\sin\angle ABD$ 的值.

3. 已知：在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\dfrac{4}{5}$，$BC=20$，求 $\triangle ABC$ 的周长和面积.

交流

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，当锐角 A 取任意一个确定的值时，除了 $\angle A$ 的对边与斜边之比外，还有哪两条边的比是固定不变的值？为什么？

与锐角的正弦情况相似，当锐角 A 取任意一个确定的值时，$\angle A$ 的邻边与斜边的比、$\angle A$ 的对边与邻边的比也分别是固定不变的值.

一般地，在 Rt $\triangle ABC$ 中（图 20－7），$\angle C=90°$，我们把锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的**余弦**，记作“$\cos A$”. 即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}.$$

把锐角 A 的对边与邻边的比叫做 $\angle A$ 的**正切**，记作“$\tan A$”. 即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}.$$

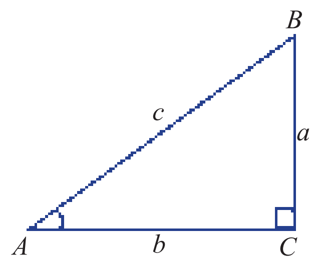


图 20－7

交流

当 $0° < \angle A < 90°$ 时，$\cos A$，$\tan A$ 的值分别在什么范围内变化？请说明理由．

锐角的正弦、余弦、正切都是锐角的函数，统称为**锐角三角函数**．

例 3 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c．

(1) 如图 20－8，已知 $b = 24$，$c = 25$，求 $\angle A$ 的正弦、余弦、正切值；

(2) 如图 20－9，已知 $\tan A = \frac{3}{2}$，求 $\angle B$ 的三角函数值．

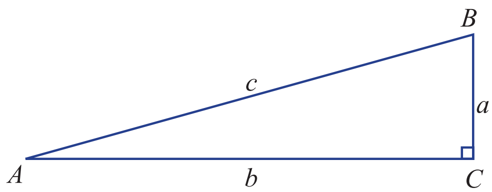


图 20－8

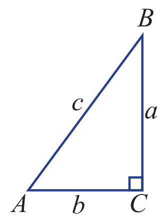


图 20－9

解：在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$.

(1) $\because$ $b = 24$，$c = 25$，由勾股定理，得

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7.$$

$\therefore$ $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{25}$，$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{24}{25}$，$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{24}$．

(2) $\because$ $\tan A = \frac{3}{2}$，

$\therefore$ $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$．

$\tan A = \frac{3}{2}$ 表示哪两条线段的比是 $\frac{3}{2}$？

不妨设 $a = 3k$，$b = 2k$（$k > 0$），由勾股定理，得

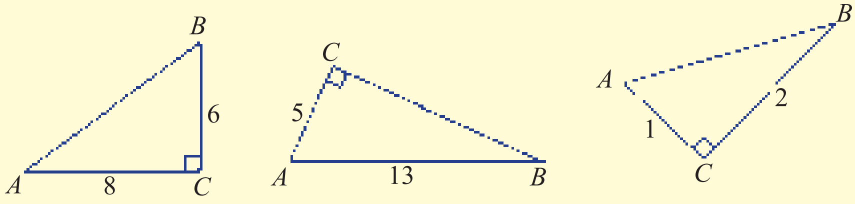
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{13}\,k.$$

$\therefore$ $\sin B = \frac{b}{c} = \frac{2k}{\sqrt{13}\,k} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$，$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{3k}{\sqrt{13}\,k} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$，

$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$．

练 习

1. 在 Rt △ABC 中，∠ C = 90°，求以下各图中 ∠ A 和 ∠ B 的三角函数值 .



（1）　　　　（2）　　　　（3）

（第 1 题）

2. 在 Rt △ABC 中，∠ C = 90°，$AC = \frac{5}{13}AB$，那么 $\sin A$ = ______，$\cos A$ = ______，$\tan A$ = ______.

3. 在 Rt △ABC 中，∠ C = 90°，$\sin A = \frac{2}{3}$，求 ∠ B 的三角函数值 .

例 4 已知：如图 20 – 10，在 Rt △ABC 中，∠ ACB = 90°，$CD \perp AB$ 于点 D，AB = 16，BC = 12 . 求 $\sin \angle DCA$ 和 $\tan \angle DCA$ 的值 .

怎样求解比较简捷?

解：∵　∠ ACB = 90°，AB = 16，BC = 12，

∴　$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{16^2 - 12^2} = 4\sqrt{7}$.

又 $CD \perp AB$ 于点 D，

∴　∠ DCA = ∠ B .

∴　$\sin \angle DCA = \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{4\sqrt{7}}{16} = \frac{\sqrt{7}}{4}$，

$\tan \angle DCA = \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{7}}{12} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

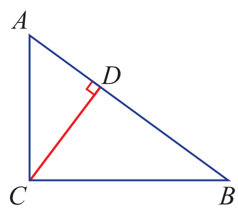


图 20 – 10

交流

在 Rt △ABC 中，∠ C = 90°，a，b，c 分别为 ∠ A，∠ B，∠ C 的对边 .

（1）写出由 a，c，$\sin A$ 组成的三种不同的关系式；

（2）写出由 b，c，$\cos A$ 组成的三种不同的关系式；

（3）写出由 a，b，$\tan A$ 组成的三种不同的关系式 .

练习

1. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90°$，CD 是中线，$BC=8$，$CD=5$. 求 $\sin A$，$\cos\angle ACD$，$\tan\angle DCB$ 的值 .
2. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90°$，CD 是高线，$BD=4$，$CD=2$，求 $\angle A$ 的三角函数值 .
3. 在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC=13$，$BC=24$，求 $\sin B$，$\cos B$，$\tan B$ 的值 .

20.2 30°，45°，60° 角的三角函数值

实践

分别求 30°，45°，60° 角的三角函数值，并填写下表：

三角函数	30°	45°	60°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\tan\alpha$			

例 1 求下列各式的值：

(1) $\sin 30°\times\cos 60°+\cos 30°\times\sin 60°$；

(2) $\dfrac{\tan 60°\times\tan 30°-1}{\sin 45°+\cos 45°}$.

解：(1) 原式 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$；

(2) 原式 $=\dfrac{\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=0$.

例 2 求适合下列条件的锐角 α：

(1) $\sqrt{2}\sin\alpha-1=0$； (2) $\dfrac{2\cos\alpha+1}{2}=1$； (3) $3\tan\alpha=\sqrt{3}$.

解：(1) 由 $\sqrt{2}\sin\alpha-1=0$，得 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ 锐角 $\alpha=45°$.

(2) 由 $\dfrac{2\cos\alpha+1}{2}=1$，得 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

∴ 锐角 $\alpha=60°$.

(3) 由 $3\tan\alpha=\sqrt{3}$，得 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

∴ 锐角 $\alpha=30°$.

练习

1. 计算下列各式的值：

(1) $\sin 60°-2\sin 30°\cos 30°$；　(2) $\sqrt{3}\tan 60°-2\cos 45°$；

(3) $\sin 30°-\dfrac{\sqrt{3}\tan 45°}{\tan 30°}$；　(4) $\tan 30°+\sin^2 45°-\cos 60°$.

$\sin^2 45°$ 表示 $(\sin 45°)^2$.

2. 求适合下列条件的锐角 α.

(1) $\sqrt{2}\cos\alpha-1=0$；　(2) $3\tan\alpha-\sqrt{3}=0$；　(3) $2\sqrt{3}\sin\alpha=3$.

20.3 用科学计算器求锐角三角函数值

在生产和科学研究中，经常需要求任意锐角的三角函数值，我们可以利用科学计算器来求.

1. 求已知锐角的三角函数值

例 1 用科学计算器求下列各三角函数值(结果精确到 0.000 1)：

(1) $\sin 40°18'$；　(2) $\cos 63°52'41''$；　(3) $\tan 52°6'$.

解：(1)

	具体操作	结　果
A型计算器	sin 40 2nd [illegible] 1 18 2nd [illegible] 2 =	sin (40°18′ 0.64678978
B型计算器	sin 40 [illegible] 18 [illegible] =	sin (40°18° 0.6467897795

所以，$\sin 40°18' \approx 0.646\ 8$.

（2）

	具体操作	结　果
A型计算器	[cos] 63 [2nd] [°′″] 152 [2nd] [°′″] 241 [2nd] [°′″] 3 [enter]	cos（63°52′41″ 0.440283085
B型计算器	[cos] 63 [°′″] 52 [°′″] 41 [°′″] [=]	cos（63°52°41° 0.4402830847

所以，$\cos 63°52'41'' \approx 0.440\ 3$.

（3）

	具体操作	结　果
A型计算器	[tan] 52 [2nd] [°′″] 16 [2nd] [°′″] 2 [enter]	tan（52°6′ 1.284556562
B型计算器	[tan] 52 [°′″] 6 [°′″] [=]	tan（52°6° 1.284556562

所以，$\tan 52°6' \approx 1.284\ 6$.

2. 已知锐角三角函数值求锐角

例 2 已知锐角 α 的三角函数值，用科学计算器求 α（结果精确到 1′）.

（1）$\sin\alpha = 0.551\ 2$；　　（2）$\cos\alpha = 0.255\ 9$；　　（3）$\tan\alpha = 2.755$.

解：（1）

	具体操作	结　果
A型计算器	[2nd] [sin] 0.5512 [enter] [2nd] [°′″] 6 [enter]	33°26′57.75716″
B型计算器	[2nd] [sin] 0.5512 [=] [°′″]	$\sin^{-1}$（0.5512 33°26′57.76″

所以，锐角 $\alpha \approx 33°27'$.

(2)

	具体操作	结　果
A型计算器	2nd cos 0.2559 2nd 6	75°10′23.08471″
B型计算器	cos 0.2559 =	$\cos^{-1}$(0.2559 75°10′23.08″

所以，锐角 $\alpha \approx 75°10'$.

(3)

	具体操作	结　果
A型计算器	2nd tan 2.755 2nd 6	70°3′1.0700019″
B型计算器	tan 2.755 =	$\tan^{-1}$(2.755 70°3′1.07″

所以，锐角 $\alpha \approx 70°3'$.

练习

1. 用科学计算器求下列各三角函数的值(结果精确到 0.000 1)：

(1) sin70°，sin9°24′；　(2) cos52°，cos87°36′；　(3) tan31°，tan45°9′.

2. 已知锐角 A 的三角函数值，用科学计算器求 $\angle A$（结果精确到 1′）.

(1) $\sin A = 0.501\,8$；　(2) $\cos A = 0.785\,7$；　(3) $\tan A = 1.403\,6$.

习　题　20 – 1

★基础★

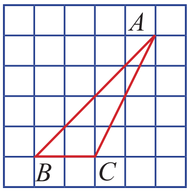
1. 选择题：

(1) 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，$\sin A + \cos B$ 的值等于（　　）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. 1　　C. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(2) 如图，每个小正方形的边长为 1，那么 $\sin B$ 的值为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$



[第 1 (2)题]

(3) 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{3}{5}$，那么 $\cos B$ 的值等于（　　）.

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{16}{25}$　　D. $\frac{9}{25}$

2. 已知:Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，M 为 BC 上一点，$MD\perp AB$ 于点 D，且 $BC=2$，$AC=3$，求 $\angle DMB$ 的三角函数值.

3. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，D 为 AB 中点，如果 $\tan\angle BCD=\frac{1}{3}$，求 $\angle A$ 的三角函数值.

4. 求下列各式的值：

(1) $\sin 30°+2\cos 30°$；　　(2) $\cos 60°\tan 60°+\sin 60°\sin 30°$；

(3) $\frac{\sqrt{3}\tan 60°}{\cos 45°}$；　　(4) $\sin^2 45°+\tan^2 30°$.

5. 用科学计算器求下列锐角三角函数值(结果精确到 0.000 1)：

(1) $\sin 17°39'$；　　(2) $\cos 76°44'$；　　(3) $\tan 86°7'$.

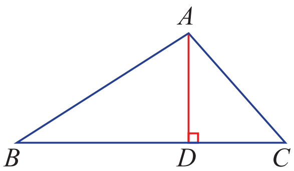
6. 已知下列锐角三角函数值，用科学计算器求锐角 A (结果精确到 $1'$).

(1) $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $\cos A=0.658\ 1$；　　(3) $\tan A=35.43$.

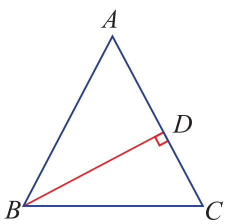
★★提升★★

1. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，a，b，c 分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边.能否用关于 c 的式子表示 $a\sin A+b\sin B$？

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于点 D，$\frac{BD}{DC}=\frac{7}{4}$，$\tan B=\frac{2}{3}$，求 $\tan C$.



(第 2 题)



(第 3 题)

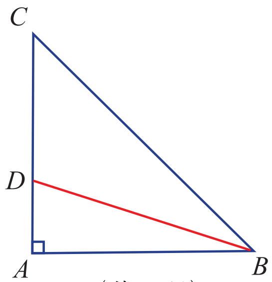
3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=4$，$BD\perp AC$ 于点 D.

(1) 求 $\tan\angle ABC$ 的值；　　(2) 求 BD 的长.

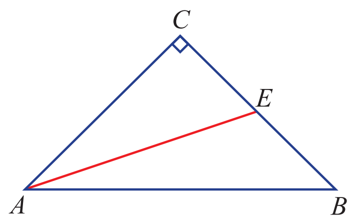
4. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，D 为 AC 上一点，且 $AD:DC=1:2$.

(1) 求 $\angle ADB$ 的正弦、余弦、正切的值；

(2) 求 $\angle DBC$ 的正弦、余弦、正切的值.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=CB$，E 是 CB 中点，求 $\tan\angle CAE$ 与 $\tan\angle BAE$ 的值.

★★★ 拓展 ★★★

求 $\tan 15°$ 的值.

二、解直角三角形

20.4 解直角三角形

思考

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，除直角 C 外，其余的两个锐角和三条边之间有什么关系？

锐角之间的关系：________________________；

三边之间的关系：________________________；

边角之间的关系：________________________.

探索

某学校数学课外活动小组的同学们，为了测量一个小湖泊两岸的两棵树 A 和 B 之间的距离，在垂直 AB 的方向 AC 上确定点 C，测得 $AC = 100$ m，$\angle ACB = 50°$，从而计算出了 A，B 之间的距离（图 20－11）．

你能根据以上数据，计算出 A，B 之间的距离吗？

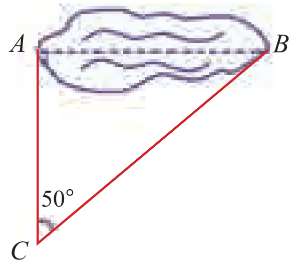


图 20－11

我们常常把生产和生活中的某些实际问题，归结为在直角三角形中根据已知的一些条件求出未知的边和角，从而将问题加以解决．

由直角三角形中除直角外的两个已知元素（其中至少一个是边），求出其余未知元素的过程，叫做**解直角三角形**．

例 1 已知：如图 20－12，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 60°$，$a = 15$，解这个直角三角形．

解：$\because \angle C = 90°$，$\angle A = 60°$，

$\therefore \angle B = 90° - \angle A = 30°$．

还有其他的解法吗？

$\because a = 15$，$\sin A = \dfrac{a}{c}$，

$\therefore c = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{15}{\sin 60°} = \dfrac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\sqrt{3}$．

又 $\because \tan A = \dfrac{a}{b}$，

$\therefore b = \dfrac{a}{\tan A} = \dfrac{15}{\tan 60°} = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$．

$\therefore \angle B = 30°$，$c = 10\sqrt{3}$，$b = 5\sqrt{3}$．

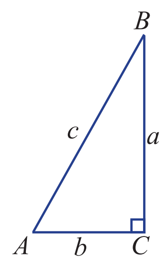


图 20－12

例 2 已知：如图 20－13，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，如果 $a = 5$，$b = 10$，解这个直角三角形（角度精确到 1°）．

解：在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$a = 5$，$b = 10$，

$\therefore \tan A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$．

由科学计算器计算，得 $\angle A \approx 27°$．

$\therefore \angle B = 90° - \angle A \approx 63°$．

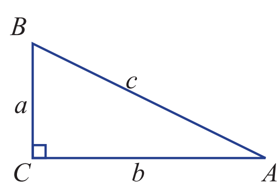


图 20－13

由勾股定理，得

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}.$$

$\therefore\quad \angle A\approx 27^\circ$，$\angle B\approx 63^\circ$，$c=5\sqrt{5}$.

练习

1. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，根据下列条件解这个直角三角形：

   （1）$c=10$，$\angle A=30^\circ$；　　（2）$c=8$，$b=4\sqrt{2}$.

2. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$.

   （1）如果 $a=5$，$b=12$，解这个直角三角形（角度精确到 1°）；

   （2）如果 $a=15$，$\angle B=40^\circ$，解这个直角三角形（边长精确到 0.01）.

交流

怎样根据已知条件解直角三角形？请你举例说明.

例 3 已知：如图 20－14，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$a=10$，$S_{\triangle ABC}=\frac{50}{3}\sqrt{3}$，解这个直角三角形.

分析：根据已知条件可以先求出 b.

解：在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$a=10$，$S_{\triangle ABC}=\frac{50}{3}\sqrt{3}$.

$$\because\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{50}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad b=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a}=\frac{2\times\frac{50}{3}\sqrt{3}}{10}=\frac{10}{3}\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \tan A=\frac{a}{b}=\frac{10}{\frac{10}{3}\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \angle A=60^\circ,\ \angle B=90^\circ-\angle A=30^\circ.$$

$$\therefore\quad c=\frac{b}{\sin B}=\frac{\frac{10}{3}\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{20}{3}\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad b=\frac{10}{3}\sqrt{3},\ c=\frac{20}{3}\sqrt{3},\ \angle A=60^\circ,\ \angle B=30^\circ.$$

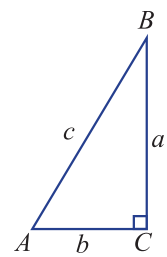


图 20－14

例 4 已知：如图20－15，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=120°$，$BC=4$ cm．求AB 的长．

分析：在 $\triangle ABC$ 中，由$AB=AC$，$\angle A=120°$，可得$\angle B=30°$．要求 AB 的长，需要把 AB 放在一个直角三角形中，因而需要作 $AD\perp BC$ 于点 D．

解：作 $AD\perp BC$ 于点 D，那么 $\angle ADB=90°$．

$\because$ $AB=AC$，$\angle BAC=120°$，

$\therefore$ $\angle B=30°$，$BD=\dfrac{1}{2}BC$．

$\because$ $BC=4$ cm，

$\therefore$ $BD=2$ cm．

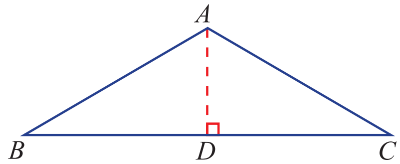


图 20－15

在 Rt $\triangle ABD$ 中，

$\because$ $\cos B=\dfrac{BD}{AB}$，

$$\therefore\quad AB=\frac{BD}{\cos B}=\frac{2}{\cos 30°}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}\ (\text{cm}).$$

练习

1. 已知：在Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，$CD\perp AB$ 于点 D，$CD=\sqrt{3}$．解 Rt $\triangle ABC$．
2. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle A=72°$，AC 边上的高为 14 cm．求 BC 和 AB 的长（用科学计算器计算，结果精确到 0.1 cm）．
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=100$，$\angle BAC=45°$，$\angle ACB=30°$．求 AC，BC 的长及 $S_{\triangle ABC}$.

20.5 测量与计算

解直角三角形的知识在日常生活和生产中的应用十分广泛．

在测量时，常用到仰角和俯角这两个名词. 如图20－16，在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的角叫做**仰角**，视线在水平线下方的角叫做**俯角**.

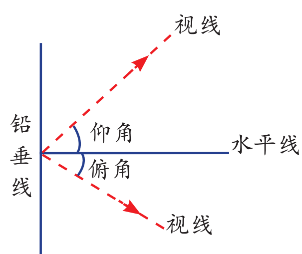


图 20－16

例 1 如图 20 – 17，某同学在测量学校旗杆 AC 的高度时，先在测量点 F 处用高为 1.2 m 的测角仪 DF 测得旗杆顶部 A 的仰角 $\alpha = 34°$，再量出点 F 到旗杆的水平距离 $FC = 16.5$ m. 请你帮助他计算出旗杆 AC 的高(结果精确到 0.1 m).

分析：设水平线与旗杆交于点 B. 容易得出四边形 $BCFD$ 为矩形，解 Rt $\triangle ABD$，可以求出 AB 的长.

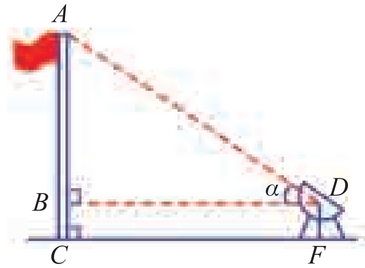


图 20 – 17

解：设水平线 DB 与旗杆 AC 交于点 B.

由题意得四边形$BCFD$ 为矩形，

$\therefore$ $BD = CF = 16.5$，$BC = DF = 1.2$.

在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ABD = 90°$，$\angle ADB = \alpha = 34°$.

$\because$ $\tan\alpha = \dfrac{AB}{BD}$，

$\therefore$ $AB = BD \cdot \tan\alpha = 16.5 \times \tan 34° \approx 11.13$.

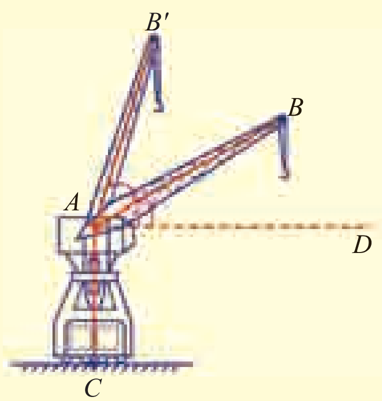
$\therefore$ $AC = AB + BC \approx 11.13 + 1.2 = 12.33 \approx 12.3$ (m).

答：旗杆的高约为12.3 m.

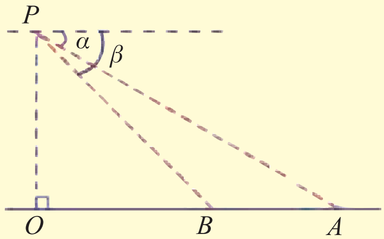
练习

1. 如图，一台起重机，它的机身高 AC 为 21 m，吊杆 AB 长为 36 m，吊杆与水平线的夹角 $\angle BAD$ 可从 30° 升到 80°，求这台起重机工作时，吊杆端点 B 离地面的最大高度和离机身的最大水平距离 (结果精确到 0.1 m).

2. 如图，直升机在跨河大桥 AB 上方的点 P 处. 此时直升机离地面高度 $PO = 450$ m，且 A，B，O 三点在一条直线上，测得大桥两端的俯角分别为 $\alpha = 30°$，$\beta = 45°$，求大桥 AB 的长 (结果精确到 1 m).



(第 1 题)



(第 2 题)

实践

请你参照图 20 – 18 用量角器做一个简易实用的测仰角的仪器，并用它测量、计算学校某建筑物的高．

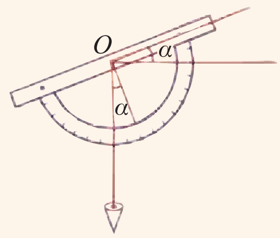


图 20 – 18

例 2 修建一条铁路要经过一座高山，需在山腰 B 处开凿一条隧道 BC. 经测量，西山坡的坡度 $i=1:0.6$，由山顶 A 观测到点 C 的俯角为 60°，AC 的长为 60 m，如图 20 – 19 所示，试求隧道 BC 的长（结果精确到 0.1 m）．

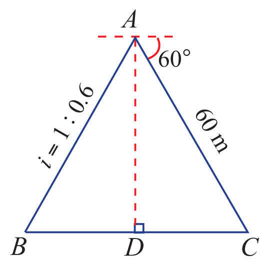


图 20 – 19

分析：在筑坝、开渠、挖河和修路的设计图纸上都要注明斜坡的倾斜程度，如图 20 – 20，我们通常把坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比叫做坡度（或坡比），用字母 i 表示，即

$$i=\frac{h}{l}.$$

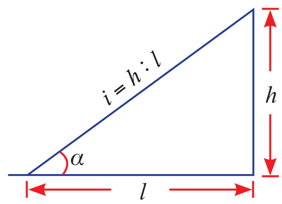


图 20 – 20

坡度一般写成 $1:m$ 的形式，如 $i=1:5$（即 $i=\frac{1}{5}$）．

如果把坡面与水平面的夹角记为 α（叫做坡角），那么坡度 i 等于坡角的正切值，即

$$i=\tan\alpha.$$

显然，坡度越大，坡角就越大，坡面也就越陡．

在图 20 – 19 中，作 $AD\perp BC$ 于点 D．由已知条件求解 Rt $\triangle ADC$，可以求出 AD 和 DC 的长，再求解 Rt $\triangle ABD$，求出 BD 的长，从而求得 BC 的长．

解：在图 20 – 19 中，作 $AD\perp BC$ 于点 D．

$\because$ A 对山坡 C 处的俯角为 60°，

$\therefore$ $\angle ACD=60°$．

在 Rt $\triangle ADC$ 中，

$\because$ $\sin\angle ACD=\frac{AD}{AC}$，$AC=60$，

$\therefore$ $AD=AC\cdot\sin\angle ACD=60\times\sin60°=60\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}$．

$\therefore \quad DC = AC \cdot \cos\angle ACD = 60 \times \cos 60^\circ = 60 \times \dfrac{1}{2} = 30.$

$\because$ 西山坡 AB 的坡度 $i = 1 : 0.6$，即 $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{5}{3}$，

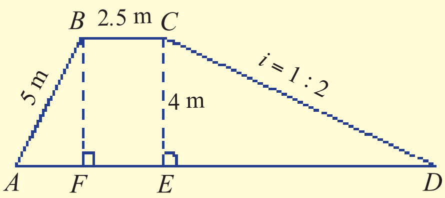
$\therefore \quad BD = \dfrac{3}{5}AD = \dfrac{3}{5} \times 30\sqrt{3} = 18\sqrt{3}.$

$\therefore \quad BC = BD + DC = 18\sqrt{3} + 30 \approx 61.2\ (\text{m}).$

答：隧道 BC 的长约为 61.2 m .

练习

如图所示，有一段防洪大堤，它的横断面为梯形 $ABCD$. 根据图示数据，求堤底宽 AD、坡角 $\angle BAD$、坡角 $\angle CDA$（角度精确到 1°）.



例 3 如图 20 – 21，一艘渔船正自西向东航行追赶鱼群，在 A 处望见岛 C 在船的北偏东 60° 方向，前进 20 海里①到达 B 处，此时望见岛 C 在船的北偏东 30° 方向 . 以岛 C 为中心的 12 海里内为军事演习的危险区，如果这艘渔船继续向东追赶鱼群，是否有进入危险区的可能？

分析：要判断渔船是否有进入危险区的可能，就要看船行驶至距离岛 C 最近的位置即图中点 D 时，CD 的长度与 12 海里的大小关系 .

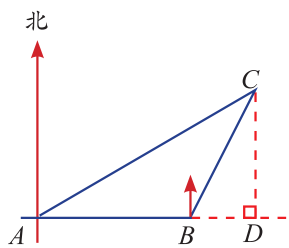


图 20 – 21

解：作 $CD \perp AB$，交 AB 延长线于点 D . 由题设可知，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB = 30^\circ$，$\angle ABC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$，

$\therefore \quad \angle ACB = 30^\circ$，$BC = AB = 20$.

在 Rt $\triangle CBD$ 中，$\angle CBD = 60^\circ$，

$\because \quad \sin\angle CBD = \dfrac{CD}{CB}$，

$\therefore \quad CD = CB \cdot \sin\angle CBD = 20 \times \sin 60^\circ = 20 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$（海里）.

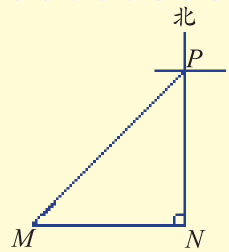
$\because \quad 10\sqrt{3} > 12$，

$\therefore$ 这艘渔船继续向东航行追赶鱼群不会进入危险区 .

① 1 海里 = 1 852 米 .

练习

一艘船向东航行，上午 10 时到达一座灯塔 P 的西南 68 海里的 M 处，中午 12 时到达这座灯塔的正南 N 处，求这艘船航行的速度(结果精确到 1 海里 / 时).



例 4 在数学活动课上，老师带领学生去测量位于北京大学未名湖东南湖畔的博雅塔的高度. 如图 20－22，在 C 处用高 1.2 m 的测角仪 CE 测得塔顶 A 的仰角为 30°，向塔的方向前进 50 m 到达 D 处，在 D 处测得塔顶 A 的仰角为 71°. 求博雅塔的高 AB 约为多少米（结果精确到 1 m）.

分析：设 EF 的延长线交 AB 于点 G，根据题意，要求 AB 的长，只要求出 AG 的长即可. 设 AG 为 x m，在 Rt $\triangle AEG$ 和 Rt $\triangle AFG$ 中，EG 和 FG 分别能用含 x 的代数式表示，再利用 $EG-FG=EF$，得到关于 x 的方程，进而求得 x 的值.

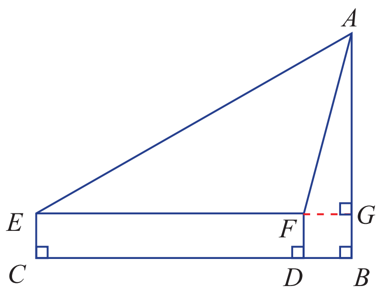


图 20－22

解：设 EF 的延长线交 AB 于点 G，根据题意，得

$$DF=BG=CE=1.2,\ EF=CD=50.$$

设 AG 为 x m. 在 Rt $\triangle AEG$ 和 Rt $\triangle AFG$ 中，

$\because$ $\angle AEF=30°$，$\angle AFG=71°$，

$\therefore$ $\angle EAG=60°$，$\angle FAG=19°$.

$\because$ $\tan\angle EAG=\dfrac{EG}{AG}$，

$\therefore \quad EG = AG \cdot \tan\angle EAG = x \cdot \tan 60°$.

同理 $\quad FG = AG \cdot \tan\angle FAG = x \cdot \tan 19°$.

又 $\quad EF = EG - FG$,

$\therefore \quad 50 = (\tan 60° - \tan 19°) \cdot x$.

$\therefore \quad x = \dfrac{50}{\tan 60° - \tan 19°} \approx 36.0$.

$\therefore \quad AB = AG + GB \approx 36.0 + 1.2 = 37.2 \approx 37\ (\mathrm{m})$.

答：博雅塔的高 AB 约为 37 m.

练习

根据章前页的数据，计算人民英雄纪念碑的高度（结果精确到 0.1 m）.

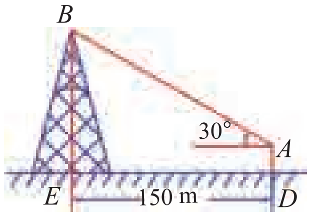
习 题 20－2

★基础★

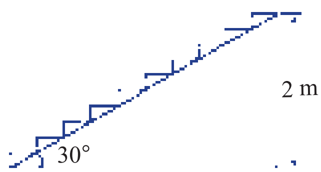
1. 填空题：

（1）如图，在远离铁塔 150 m 的 D 处，用测角仪测得塔顶的仰角为 30°，已知测角仪高 $AD = 1.52$ m，那么塔高 $BE \approx$ __________ m（结果精确到 0.1 m）；

（2）如图，在高 2 m，坡角 30° 的楼梯表面铺地毯，地毯的长度至少需要 __________ m（结果精确到 0.1 m）.



[第 1（1）题]



[第 1（2）题]

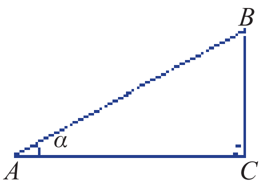
2. 选择题：

（1）如图，为测楼房 BC 的高，在距楼房 30 m 的 A 处，测得楼顶 B 的仰角为 α，那么楼房 BC 的高为（　　）.

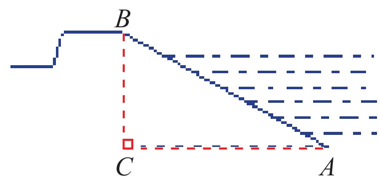
A. $30\tan\alpha$（m）　　B. $\dfrac{30}{\tan\alpha}$（m）　　C. $30\sin\alpha$（m）　　D. $\dfrac{30}{\sin\alpha}$（m）

（2）河堤的横断面如图所示，堤高 BC 为 5 m，迎水坡 AB 的长是 13 m，那么斜坡 AB 的坡度 i 是（　　）.

A. 1∶3　　B. 1∶2.6　　C. 1∶2.4　　D. 1∶2



［第 2（1）题］



［第 2（2）题］

3. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，根据下列条件解直角三角形：

（1）$c=8\sqrt{3}$，$\angle A=60°$；　　（2）$a=6$，$b=2\sqrt{3}$.

4. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$.

（1）如果 $c=41$，$b=9$，解这个直角三角形（角度精确到 1′）；

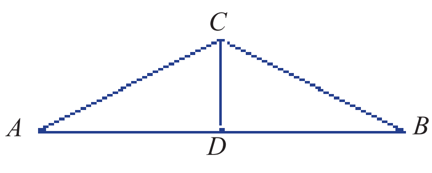
（2）如果 $b=192$，$\angle B=42°$，解这个直角三角形（边长的结果精确到 0.1）.

5. 在△ABC 中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=4$，$\angle A=60°$，求 $S_{\triangle ABC}$.

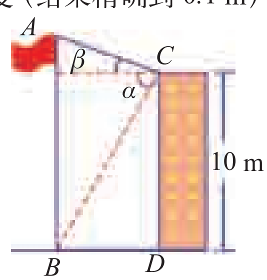
6. 在△ABC 中，$\angle A=60°$，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，求 $\angle B$ 的度数.

7. 如图，某校的“人”字形自行车棚顶为等腰三角形，D 是 AB 的中点，中柱 $CD=1$ m，$\angle A=27°$. 求跨度 AB 的长（结果精确到 0.01 m）.

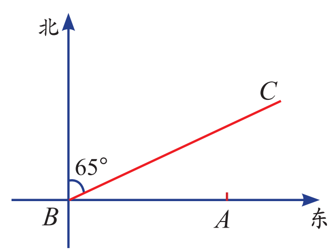
8. 如图，在一座高为 10 m 的建筑物顶 C，测得旗杆底部 B 的俯角 α 为 60°，旗杆顶部 A 的仰角 β 为 20°. 请你计算旗杆的高度（结果精确到 0.1 m）.



（第 7 题）



（第 8 题）



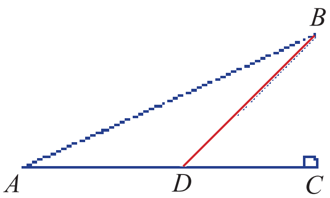
（第 9 题）

9. 如图，A 市气象台预报：一沙尘暴中心在 A 市正西方向 1 000 km 的 B 处，正迅速向北偏东 65° 的 BC 方向移动，距沙尘暴中心 400 km 的范围内将受沙尘暴影响. 请问 A 市是否会受这次沙尘暴的影响?

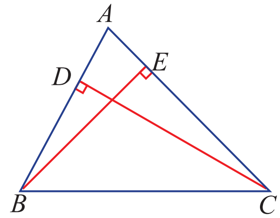
★★提升★★

1. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{2}{5}$，D 为 AC 上一点，$\angle BDC=45°$，$DC=6$，求 AB 的长．

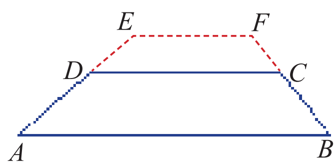
2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，CD，BE 分别为 AB 与 AC 上的高，$\angle EBC=45°$，$\angle DCB=30°$，$DC=12$，求 BE 的长．



（第 1 题）



（第 2 题）



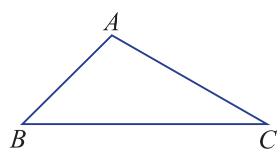
（第 4 题）

3. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$BC=6$，$AC=6\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，求 AB 的长．

4. 如图，有一段防洪大堤，其横断面为梯形 $ABCD$，$AB /\!/ DC$，斜坡 AD 的坡度 $i_1=1:1.2$，斜坡 BC 的坡度 $i_2=1:0.8$，大堤顶宽 DC 为 6 m．为了增强抗洪能力，现将大堤加高，加高部分的横断面为梯形 $DCFE$，$EF /\!/ DC$，点 E，F 分别在 AD，BC 的延长线上．当新大堤顶宽 EF 为 3.8 m 时，大堤加高了几米？

★★★拓展★★★

有一个半径为 0.7 km 的圆形森林公园，其圆心为 A；在森林公园附近有 B，C 两个村庄．现要在 B，C 两个村庄之间修一条长为 2 km 的笔直公路，将两村连接，如图所示．经测量得 $\angle ABC=45°$，$\angle ACB=30°$. 此公路是否会穿过该森林公园？请通过计算说明理由．



综合与实践

测量建筑物的高度

分小组测量不能直接到达底部的某建筑物高度．

阅读理解

三角函数符号史话

我们在学习和应用数学知识的时候，都会感到有简洁的数学符号是多么的重要．各种各样的数学符号错综复杂地交织在一起，构成了数学世界中一幅宏大而绚丽的图画．

你可知道三角函数符号产生和发展的历史?

正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以比值为函数值的函数，统称为三角函数．它起源于天文、测量等实际需要．

阿尔·巴塔尼是中世纪对欧洲影响最大的天文学家，其《天文论著》(又名《星的科学》) 被普拉托译成拉丁文后，在欧洲广为流传，在该书中阿尔·巴塔尼创立了系统的三角学术语，如正弦、余弦、正切、余切．

sin 的英文全名是 sine (正弦)，阿尔·巴塔尼在《天文论著》中对它的命名来源于阿耶波多的印度语术语 jī va，拉丁语译作 sinus，后来演变为英语 sine.

cos 的英文全名是 cosine (余弦)，最早出现在 1620 年出版的《炮兵测量学》一书中，作者是英国人根日尔．

tan 的英文全名是 tangent (正切)，阿尔·巴塔尼称正切为 umbra versa，意为反阴影．后来演变成拉丁语 tangent，首见于丹麦数学家芬克的《圆几何学》一书中．

此外，在三角函数中，还有 cot (余切)、sec (正割)、csc (余割) 等，这些函数早在 1597 年前就已存在了．

18 世纪末期，瑞士数学家欧拉非常欣赏前人所创用的三角函数符号，在他的大力倡导下，三角函数的符号终于得到了公认．

回顾与整理

知识要点

本章主要的知识有：锐角三角函数的概念，解直角三角形及其应用．

1. 锐角三角函数的概念．

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$ 的三角函数：

$$\angle A\text{ 的正弦 } \sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c};$$

$$\angle A\text{ 的余弦 } \cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c};$$

$$\angle A\text{ 的正切 } \tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

2. 特殊角的三角函数值．

$\sin30°=\cos60°=\frac{1}{2}$，$\sin45°=\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\sin60°=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan45°=1$，$\tan60°=\sqrt{3}$．

3. 锐角三角函数值可利用科学计算器求得；反过来，已知锐角的一个三角函数值，也可利用科学计算器求出这个锐角．

4. 由直角三角形中除直角外的已知元素，求出所有未知元素的过程，叫做解直角三角形．已知元素应该有两个，其中至少有一个是边．解直角三角形的基本类型及解法如下表：

已知条件		解 法
两 边	两条直角边 a 和 b	$c=\sqrt{a^2+b^2}$，用 $\tan A=\frac{a}{b}$ 求 $\angle A$，$\angle B=90°-\angle A$
	一条直角边 a 和斜边 c	$b=\sqrt{c^2-a^2}$，用 $\sin A=\frac{a}{c}$ 求 $\angle A$，$\angle B=90°-\angle A$
一边和一锐角	一条直角边 a 和锐角 A	用 $\tan A=\frac{a}{b}$ 求 b，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，$\angle B=90°-\angle A$
	斜边 c 和锐角 A	用 $\sin A=\frac{a}{c}$ 求 a，$b=\sqrt{c^2-a^2}$，$\angle B=90°-\angle A$

学习指导

1. 正确认识和理解锐角三角函数.

(1) 对锐角三角函数，我们是通过实验、观察、归纳、证明的方法，经历由特殊到一般的过程来认识的.

(2) 锐角三角函数值是直角三角形中两条边的比值，由直角三角形中两条边的比，可以求得某个锐角的三角函数值；反之，已知一个锐角的三角函数值，就可以得到这个角所在的直角三角形中两条边的比.

2. 恰当选用关系式来解直角三角形.

例如，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，求边 a. 涉及边 a 的关系式有：$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos B=\frac{a}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$，$\tan B=\frac{b}{a}$，$a=\sqrt{c^2-b^2}$ 等. 在这些关系式中，只要知道其中两个量，就可以求出第三个量，选哪一个关系式求解 a，要根据具体情况而定. 因此，要注意选择恰当的关系式来解决问题.

3. 将某些问题转化为解直角三角形的问题.

在某些图形中，有时需要通过作垂线的方法将相关的边角计算问题转化为解直角三角形的问题去解决.

4. 构造与实际问题相关的直角三角形.

利用解直角三角形解决实际问题时，关键是将实际问题中的数量关系转化为直角三角形中的元素之间的关系. 同时应注意：

(1) 认真审题，根据题意画出示意图，搞清已知条件和所要求的问题；

(2) 弄清相关概念，例如仰角、俯角、坡度、坡角等的意义；

(3) 按题目中精确度的要求进行近似计算、确定答案及注明单位.

复习题

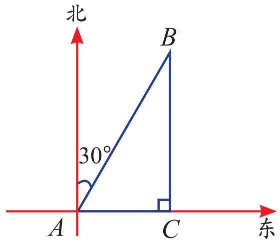
★基础★

1. 填空题：

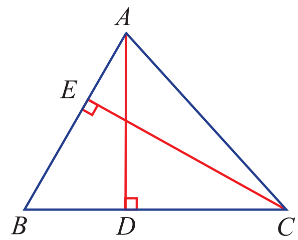
(1) 不用计算器求值：$\dfrac{\tan30°+\sin60°}{1-\cos60°}=$ ________________.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$BC = 2$，$\sin A = \dfrac{1}{3}$，那么 $AB =$ ____________________.

(3) 如图，一艘轮船以每小时 20 海里的速度沿正东方向航行. 上午 8 时，该船在 A 处测得某灯塔位于它的北偏东 30° 的 B 处. 上午 9 时船行至 C 处，测得该灯塔恰好在它的正北方向，此时它与灯塔的距离是 ____________ 海里.



[第 1 (3)题]

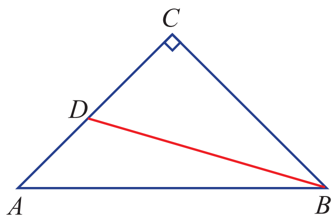


[第 1 (5)题]

(4) 如果某人沿坡度 $i = 1 : 0.75$ 的斜坡前进 10 m，那么他所在的位置比原来的位置升高了 __________________ m.

(5) 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于点 D，$CE \perp AB$ 于点 E，且 $BE = 2AE$，已知 $AD = 3\sqrt{3}$，$\tan\angle BCE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，那么 $CE =$ ______________.

2. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 6$，D 是 AC 上一点. 如果 $\tan\angle DBA = \dfrac{1}{5}$，那么 AD 的长为（　　）.



（第 2 题）

A. $\sqrt{2}$　　　B. 2　　　C. 1　　　D. $2\sqrt{2}$

3. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，根据下列条件解直角三角形：

(1) $c = 10$，$\angle B = 60°$；

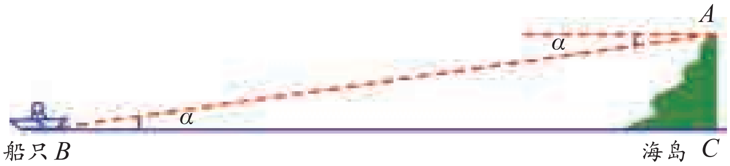
(2) $a = 4\sqrt{6}$，$b = 12\sqrt{2}$；

(3) $c = 2\sqrt{3}$，$b = \sqrt{6}$；

(4) $b = 6$，$S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}$.

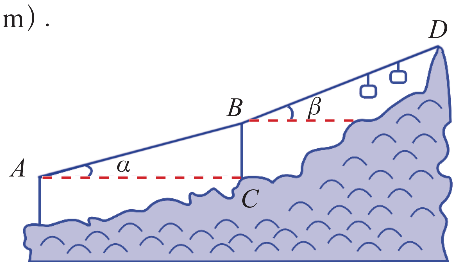
4. 如图，某海岛上的观察哨所 A 发现海上某船只 B，并测得其俯角 $\alpha = 8°14'$. 已知观察哨所 A 的标高（当水位为 0 m 时的高度）为 43.74 m，当时水位为 + 2.63 m. 求观察哨所

A 到船只 B 的水平距离 BC（结果精确到 1 m）.



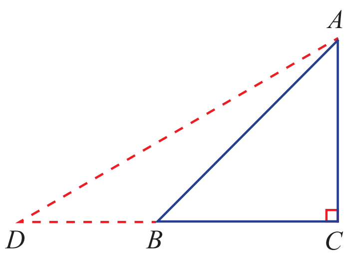
（第 4 题）

5. 如图，当北京香山的缆车经过 A 到达 B 时，它走过了 700 m. 由 B 到达山顶 D 时，它又走过了 700 m. 已知线路 AB 与水平线的夹角 α 为 16°，线路 DB 与水平线的夹角 β 为 20°，A 的海拔是 126 m . 求山顶 D 的海拔（结果精确到 1 m）.

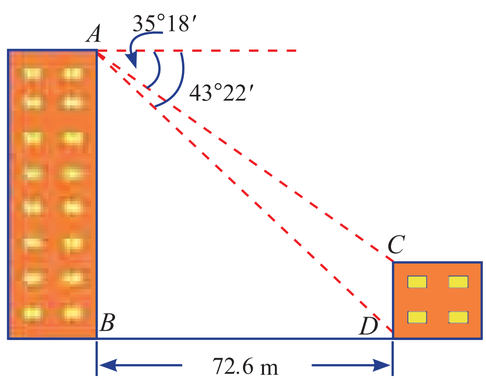


（第 5 题）

6. 如图，Rt △ ABC 是一防洪堤背水坡的横截面图，斜坡 AB 的长为 12 m，它的坡角为 45°. 为了提高该堤的防洪能力，现把它改成坡比为 1 : 1.5 的斜坡 AD，求 DB 的长（结果精确到 0.1 m）.



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，两个建筑物 AB 和 CD 之间的水平距离是 72.6 m . 从其中一个建筑物的顶部 A 点测得另一个建筑物的顶部 C 点的俯角是 35°18′，底部 D 点的俯角是 43°22′ . 求这两个建筑物的高（结果精确到 1 m）.

★★提升★★

1. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，请你确定式子 $\frac{a^2}{bc}\cos A+\frac{b^2}{ac}\cos B$ 是否为常数，并试证明你的结论.

2. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，如果斜边 $c=6k$（$k>0$），面积 $S=6k^2$，那么 $\tan A+\tan B$ 的值是含 k 的式子，还是不含 k 的常数？试加以证明.

3. 已知 α 为锐角，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，求 $\cos\alpha+\tan\alpha$ 的值.

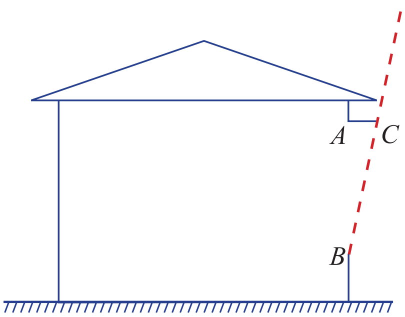
4. 已知 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，根据下列条件解 Rt $\triangle ABC$：

   (1) $\angle A=60°$，$CD\perp AB$ 于点 D，$CD=\sqrt{3}$；

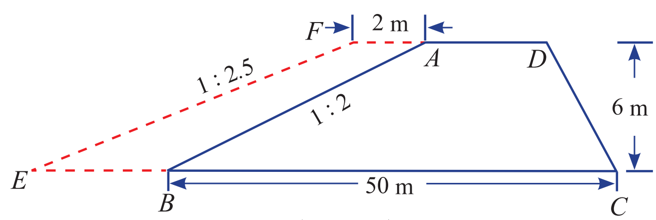
   (2) $BC=2$，$CD\perp AB$ 于点 D，$BD=\sqrt{3}$；

   (3) $AC=8\sqrt{5}$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，$AD=\frac{16}{3}\sqrt{15}$.

5. 已知：如图，北方某地夏季中午，太阳正高，光线与地面成 78° 角，房屋朝南的窗子高 $AB=220$ cm，要在窗子外面上方安装水平挡光板 AC，使午间光线不能直接射入室内，那么挡光板 AC 的宽度至少应是多少厘米（结果精确到 1 cm）？如果冬天正午时，光线与地面成 31° 角，窗台的高为 80 cm，按照上面要求设计挡光板 AC 的宽度，理论上太阳光最远能照进室内多少厘米（结果精确到 1 cm）？



（第 5 题）



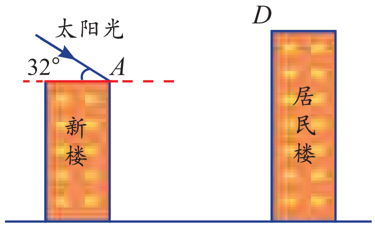
（第 6 题）

6. 如图，为提高水库的蓄水抗洪能力，需沿水库拦水坝的背水坡将坝顶加宽 2 m，坡度由原来的 1 : 2 变成 1 : 2.5. 已知坝高 6 m，坝长 50 m. 求加宽部分横截面 $AFEB$ 的面积.

★★★拓展★★★

1. 如图所示，某居民小区有一栋朝向为正南方向的居民楼 DC，该居民楼的第一层是高 6 m

的小区超市，超市以上是居民住房．在该楼正南方向 15 m 处要盖一栋高 20 m 的新楼 AB. 当冬季正午的阳光与水平面的夹角为 32° 时，回答下列问题：



（第 1 题）

(1) 超市以上的居民住房采光是否受到影响?

(2) 如果要使超市采光不受影响，两楼应至少相距多少米?

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，那么 $\dfrac{a}{\sin A}$ 与 $\dfrac{b}{\sin B}$ 的大小关系是什么？请说明理由．如果△ABC 为锐角三角形，结论又如何呢？请说明理由．

第二十一章
圆（上）

我们已经学过圆的一些简单知识．圆是一种十分简单、美观的几何图形，它在生产和日常生活中有着广泛的应用．在本章，我们将进一步学习圆的有关概念、性质、计算及简单应用．

一 圆的有关概念

21.1 圆的有关概念

如图 21－1，取一根细绳拉直后卡住两端．在一个平面内，将一端点 O 固定，另一端点 P 绕着点 O 旋转一周，所形成的图形就是圆．

平面内到定点的距离等于定长的所有点组成的图形叫做**圆**．定点 O 称为**圆心**，线段 OP 称为**半径**．以点 O 为圆心的圆记作“⊙O”，读作“圆 O”．

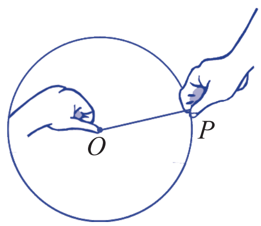


图 21－1

可以知道：

圆上任意一点到定点（圆心 O）的距离等于定长（半径的长 r），到定点的距离等于定长的点都在圆上．

也就是说：

在平面内，圆是到定点的距离等于定长的点的集合．

圆的位置由什么决定？圆的大小与什么有关？

思考

如图 21－2，墙上有一个圆形靶盘，三支飞镖分别落到了 A，B，C 三点处．可以看出，点 B 在⊙O 内，点 A 在⊙O 上，点 C 在⊙O 外．

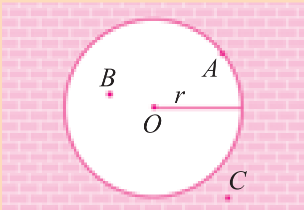


图 21－2

(1) A，B，C 三个点到圆心的距离与⊙O 的半径 r 有怎样的大小关系？

(2) 如果墙上有一点 P，点 P 到圆心的距离为 d，你能根据 d 与 r 的大小关系，说出点 P 与⊙O 的位置关系吗？

点与圆的位置关系有三种：点在圆内、点在圆上、点在圆外.

圆内各点到圆心的距离都小于半径，到圆心的距离小于半径的点都在圆内.也就是说：

圆的内部可以看做是到定点的距离小于定长的点的集合.

圆外各点到圆心的距离都大于半径，到圆心的距离大于半径的点都在圆外.也就是说：

圆的外部可以看做是到定点的距离大于定长的点的集合.

设 $\odot O$ 的半径为 r，点 P 到圆心的距离为 d，那么有：

1. 点 P 在圆内 $\Leftrightarrow$[1] $d<r$；
2. 点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d=r$；
3. 点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>r$.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$AB=5$，以点 C 为圆心，以 r 为半径作圆，按下列条件分别判断 A，B 两点和 $\odot C$ 的位置关系：

(1) $r=2.4$；　　(2) $r=4$.

解：$\because\ \angle C=90°$，$AC=4$，$AB=5$，

$\therefore\ BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=3.$

(1) 当 $r=2.4$ 时，

$\because\ BC=3>r$，$AC=4>r$，

$\therefore\ A$，B 两点都在 $\odot C$ 外.

自己画出图形试一试.

(2) 当 $r=4$ 时，

$\because\ BC=3<r$，$AC=4=r$，

$\therefore$ 点 B 在 $\odot C$ 内，点 A 在 $\odot C$ 上.

例 2 已知四边形 $ABCD$ 为矩形.判断 A，B，C，D 四个点是否在同一个圆上，并说明理由.

解：A，B，C，D 四个点在同一个圆上.

理由如下：

如图 21－3，连接 AC，BD，AC 与 BD 相交于点 O.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

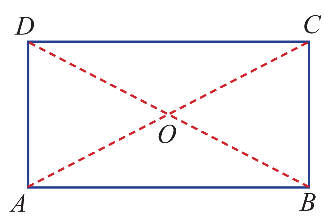


图 21－3

① 数学符号"$\Leftrightarrow$"表示从左边可以推出右边，也可以从右边推出左边.

$\therefore \quad OA = OC = \frac{1}{2}AC,\ OB = OD = \frac{1}{2}BD.$

又 $\because \quad AC = BD,$

$\therefore \quad OA = OC = OB = OD.$

$\therefore$ A，B，C，D 四个点在以点 O 为圆心，OA 为半径的圆上．

你能叙述这个结论吗？

交流

如图 21－4，几名选手被要求呈“一”字形排开，并按顺序进行套圈比赛．1 号选手认为这种站位方式不公平，他的理由是什么？你认为选手怎样站位比较公平？

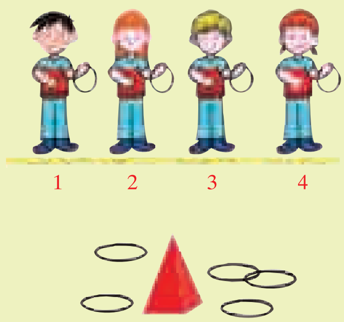


图 21－4

练习

已知 ⊙O 的半径为 6 cm．当 OP 满足下列条件时，分别指出点 P 和 ⊙O 的位置关系：

（1）$OP = 4$ cm；（2）$OP = 7$ cm；（3）$OP = 6$ cm；（4）$OP = 6.1$ cm．

如图 21－5，圆心相同、半径不相等的两个圆称为同心圆．能够重合的两个圆称为等圆．容易看出，等圆的半径相等．

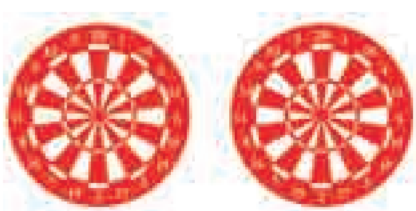


图 21－5

图中的各圆中，哪些圆是同心圆，哪些圆是等圆？

如图 21－6，圆上任意两点之间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**．小于半圆的弧又称为劣弧，如劣弧 AB，记作“$\overset{\frown}{AB}$”，读作“弧AB”．大于半圆的弧又称为优弧，如优弧 AB，记作“$\overset{\frown}{AmB}$”，读作“弧 AmB”．在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做**等弧**．连接圆上任意两点的线段叫做**弦**，经过圆心的弦叫做**直径**．顶点在圆心的角叫做**圆心角**．

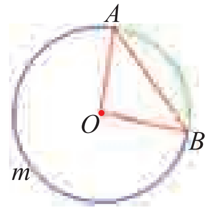


图 21－6

实践

如图21－7，指出⊙O 中所有的弦、劣弧和劣弧所对的圆心角．

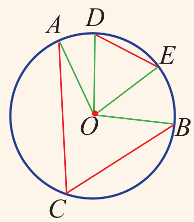


图 21－7

思考

已知：A，B 为⊙O 上的两点，⊙O 的半径为 R．

(1) 如果 $\angle AOB=90°$，那么 $\angle AOB$ 所对的弧长为 ＿＿＿＿＿＿；

(2) 如果 $\angle AOB=60°$，那么 $\angle AOB$ 所对的弧长为 ＿＿＿＿＿＿；

(3) 如果 $\angle AOB=n°$，那么 $n°$ 的圆心角所对的弧长为 ＿＿＿＿＿＿.

如图 21－8，将整个圆分成 360 等份，我们把每一份弧称为 1° 的弧，由此可知，弧的度数等于它所对的圆心角的度数．在图 21－8 中，如果 $\angle AOB$ 的度数为 n，那么 $\angle AOB$ 所对的 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 n，也可以说 $\overset{\frown}{AB}$ 是 $n°$ 的弧．

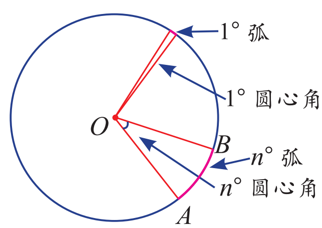


图 21－8

因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C=2\pi R$，所以 1° 的圆心角所对的弧长是 $\dfrac{2\pi R}{360}$，即 $\dfrac{\pi R}{180}$．于是可得，在半径为 R 的圆中，$n°$ 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式：

$$l=\frac{n\pi R}{180}.$$

当半径 R 一定时，圆心角的度数 n 与弧长 l 之间存在怎样的函数关系？

例 3 道路施工部门在铺设形如图 21－9 的管道时，需要先按照其中心线计算长度后再备料．试计算图中的管道中心线 $\overset{\frown}{AB}$ 的长（π 取 3.14，结果精确到 0.1 m）．

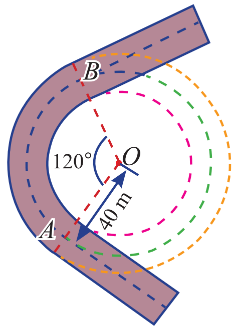


图 21－9

解：∵ $OA = 40$，$n = 120$，

$$\therefore\quad l = \frac{n\pi R}{180} = \frac{120 \times 3.14 \times 40}{180} \approx 83.7\ (\text{m}).$$

答：$\overset{\frown}{AB}$ 的长约为 83.7 m.

我们已经知道，一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做扇形．如图 21－10，圆的半径也是扇形的半径．

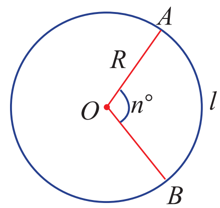


图 21－10

探索

已知扇形的圆心角度数和它的半径，如何计算扇形的面积？

半径为 R，圆心角为 $n°$ 的扇形面积的计算公式是

$$S_{扇形} = \frac{n\pi R^2}{360}.$$

因为 $\dfrac{n\pi R^2}{360} = \dfrac{n\pi R}{180} \cdot \dfrac{R}{2} = \dfrac{1}{2}lR$，所以扇形的面积公式还可以写成

$$S_{扇形} = \frac{1}{2}lR.$$

例 4 如图 21－11，现有一把折扇和一把圆扇．已知折扇的骨柄长等于圆扇的直径，折扇扇面的宽度是骨柄长的 $\dfrac{2}{3}$，折扇张开的角度为 120°，通过计算来说明哪一把扇子的扇面面积较大．

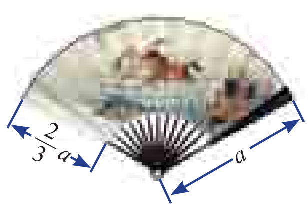


图 21－11

解：由折扇的骨柄长和圆扇的直径都是 a，得

$$S_{\text{圆扇的扇面}}=\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi a^2;$$

$$S_{\text{折扇的扇面}}=S_{\text{大扇形}}-S_{\text{小扇形}}$$

$$=\frac{120}{360}\times\pi\times a^2-\frac{120}{360}\times\pi\times\left(a-\frac{2}{3}a\right)^2$$

$$=\frac{8}{27}\pi a^2.$$

$\because$ $\frac{8}{27}\pi a^2>\frac{1}{4}\pi a^2$，

$\therefore$ 折扇的扇面面积大于圆扇的扇面面积.

练习

1. 判断题：

(1) 直径是弦；（　　）

(2) 半圆是弧；（　　）

(3) 长度相等的两条弧是等弧；（　　）

(4) 在同圆中，优弧一定比劣弧长.（　　）

2. 弧长为 6π 的弧所对的圆心角为 $60°$，求弧所在的圆的半径.

3. 扇形的面积是 S，它的半径是 r，求这个扇形的弧长.

21.2 过三点的圆

实践

1. 按下列要求，利用直尺和圆规作圆：

(1) 过已知的点 A 作一个圆；

(2) 过已知的 A，B 两点作一个圆.

2. 分别满足上面(1)、(2)条件的圆各能作多少个？说明你的理由.

以点 A 外的任意一点 O 为圆心，以点 O 到点 A 的距离为半径，可以作出经过已知点 A 的 $\odot O$. 由于点 O 可以任意选取，因此经过一点 A 的圆有无数多个（图 21－12）.

以线段 AB 的垂直平分线上任意一点 O 为圆心，以点 O 与点 A（或点 B）的距离为半径，可以作出经过已知两点 A，B 的圆. 由于 AB 的垂直平分线上有无数多个点，因此经过已知两点 A，B 的圆也可以画出无数多个（图 21－13）.

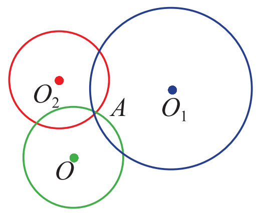


图 21－12

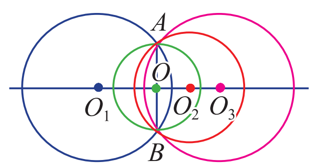


图 21－13

思考

过已知 A，B，C 三个点一定可以作一个圆吗？如果能，在什么条件下能作？如果不能，试说明理由.

在图 21－14 中，A，B，C 三点不在同一条直线上，AB 的垂直平分线 FG 与 AC 的垂直平分线 DE 相交于点 O，那么 $OA=OB=OC$. 以 O 为圆心，OA 为半径作圆，便可得到经过 A，B，C 三点的圆. 因此，过不在同一条直线上的三个点可以作一个圆，并且只能作一个圆，即

不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

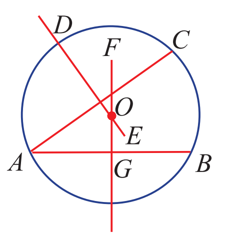


图 21－14

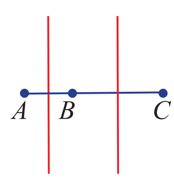


图 21－15

在图 21－15 中，A，B，C 三点在同一条直线上，AB 的中垂线与 BC 的中垂线平行，没有交点，说明圆心不存在，因此，过在同一条直线上的三个点不能作圆.

下面我们用另一种方法来说明这个问题.

假设过同一条直线上的 A，B，C 三点可以作圆，设这个圆的圆心为 P. 因为点 P 到点 A、点 B、点 C 的距离相等，所以点 P 既在线段 AB 的垂直平分线 a 上，又在线段 BC 的垂直平分线 b 上，即点 P 为直线 a 和直线 b 的交点（图 21–16）. 这与“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”相矛盾，所以过同一条直线上的三个点不能作圆. 我们在七年级研究平行线的性质时曾经接触过这种证明方法——反证法.

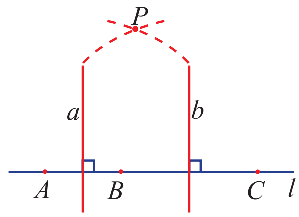


图 21 – 16

利用反证法证明命题一般有三个步骤：(1) 假设命题的结论不成立；(2) 从这个假设出发，经过推理论证，得出了与定义、基本事实、定理或题设相矛盾的结论；(3) 由此判定这个假设不正确，从而肯定原命题的正确性.

经过三角形三个顶点的圆称为三角形的**外接圆**. 三角形外接圆的圆心叫做三角形的**外心**. 这个三角形叫做这个圆的**内接三角形**.

三角形的外心是三角形哪三条线的交点?

例 已知：△ABC.

求作：△ABC 的外接圆.

作法：(1) 作线段 AC 的垂直平分线 DE；

(2) 作线段 AB 的垂直平分线 FG，交 DE 于点 O；

(3) 以点 O 为圆心，以 OB 为半径作圆.

所以⊙O 就是所求作的△ABC 的外接圆（图 21 – 17）.

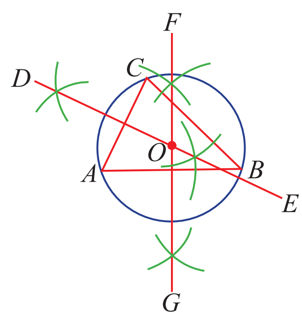


图 21 – 17

练习

1. 请利用直尺和圆规确定图中 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心，并画出这个圆.
2. 在一个三角形中，能有两个角是钝角吗？请说明理由.

（第 1 题）

习　题　21－1

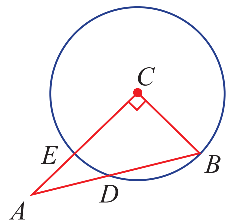
★基础★

1. 填空题：

（1）$\odot O$ 的半径为 r，那么 $\odot O$ 的弦长的取值范围是 ＿＿＿＿＿＿；

（2）在平面直角坐标系内，如果点 A 到坐标原点的距离等于 3，那么请你任意写出三个满足条件的点 A 的坐标 ＿＿＿＿＿＿＿；

（3）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是直角，$\angle A = 32°$. 以点 C 为圆心，BC 为半径作圆交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，那么 $\overset{\frown}{BD}$ 的度数是 ＿＿＿＿＿＿.



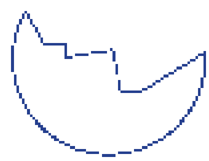
[第 1 (3) 题]

2. 已知 $\odot O$ 的半径是 4 cm，当 OP 满足下列条件时，分别指出点 P 和 $\odot O$ 的位置关系：

（1）$OP = 2$ cm；　　（2）$OP = 3.5$ cm；

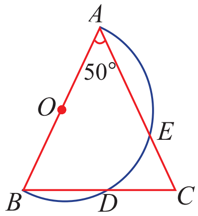
（3）$OP = 4$ cm；　　（4）$OP = 5.6$ cm.

3. 一张圆形玻璃桌面被打破，残留下的一块玻璃如图所示. 请你测量出图中圆形桌面的直径（精确到 1 cm），再按 1 : 50 的比例，求出圆形桌面的实际面积.

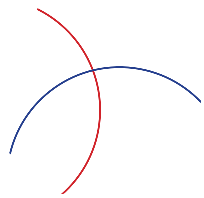

（第 3 题）

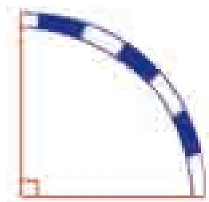
4. 如图，等腰 $\triangle ABC$ 的顶角为 50°，$AB = AC$，以 AB 为直径作半圆与 BC 交于点 D，与 AC 交于点 E. 求 $\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{DE}$ 和 $\overset{\frown}{AE}$ 的度数.

5. 如图，估计两条弧各自所在圆的半径的大小关系，并通过作图来验证结果是否正确.



（第 4 题）


（第 5 题）


（第 7 题）

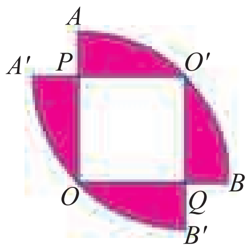
6. AB 是 $\odot O$ 的弦，C，D 是 AB 上两点，并且 $AC = BD$，判断 OC 与 OD 是否相等，并说明理由.

7. 如图所示为圆弧形状的铁轨示意图，其中铁轨的半径为 120 m，圆心角为 90°. 你能求出这段铁轨的长度吗？当圆心角是 33° 时，求它所对的弧长.

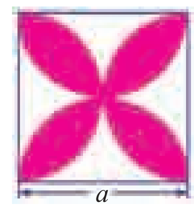
8. 圆心角为 60° 的扇形的半径为 6 cm，求这个扇形的面积和周长.

9. 如图，两个半径为 1，圆心角是 90° 的扇形 OAB 和扇形 $O'A'B'$ 叠放在一起，点 O' 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，

四边形 $OPO'Q$ 是正方形，求图中红色部分的面积 .



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，正方形的边长为 a，分别以各边为直径在正方形内部画半圆，求所围成的图形（红色部分）的面积 .

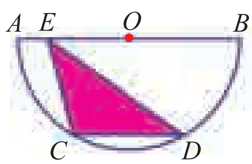
11. 平行于同一条直线的两条直线一定平行吗？试说明理由 .

★★ 提升 ★★

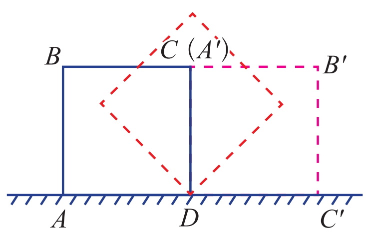
1. 平面直角坐标系中有四个点 $A(-2\sqrt{6}, 1)$，$B(-1, 2\sqrt{6})$，$C(5\sqrt{3}, 5)$，$D(5\sqrt{3}, -5)$，O 为坐标原点 . 判断 A，B，C，D 四个点是否在以 O 为圆心的同一个圆上，并说明理由 .

2. 如图，AB 为半圆 O 的直径，C，D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点 . 如果⊙O 的半径为 1，E 为 AB 上任意一点，求图中红色部分的面积 .

3. 如图，一块边长为 10 厘米的正方形木板 $ABCD$ 在水平桌面上绕点 D 按顺时针方向旋转到 $A'B'C'D$ 的位置时，顶点 B 从开始到结束所画过的路线总长为多少厘米？



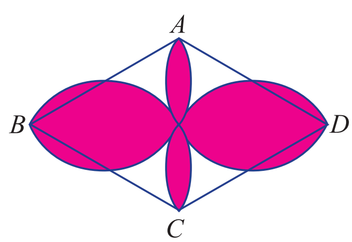
（第 2 题）



（第 3 题）

★★★ 拓展 ★★★

如图，四边形 $ABCD$ 是菱形 . $AB = 10$ cm，$\angle ABC = 60°$，分别以 $ABCD$ 的四条边为直径作半圆 . 求图中红色部分的面积 .



二、圆的性质

21.3 圆的对称性

思考

圆是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴.

把一张圆形的纸片沿着它的任意一条直径对折，直径两侧的两个半圆能够互相重合. 这说明：

圆是轴对称图形，它有无数条对称轴，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴.

思考

CD 是以点 O 为圆心的圆形纸片的直径，过直径上任意一点 E 作弦 $AB \perp CD$（图 21－18）. 将圆形纸片沿着直径 CD 对折，比较图中的线段和弧，你有什么发现？

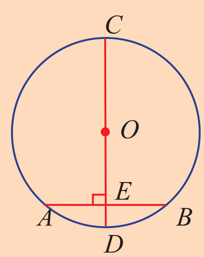


图 21－18

在图21－18 中，根据图形的轴对称性，可知 $AE = BE$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$. 由此得出：

***垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧.**

也就是说，在⊙O中，CD为直径，AB为弦，如果$CD \perp AB$于点E，那么 $AE = BE$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.

例 1 已知：如图21－19，在 ⊙O 中，直径CD交弦AB于点E，$AE = BE$.
求证：$CD \perp AB$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.

证明：连接AO，BO.

∵　$AO=BO$，

∴　$\triangle AOB$为等腰三角形.

∵　$AE=BE$，

∴　$CD\perp AB$.

∵　CD 为直径，

∴　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

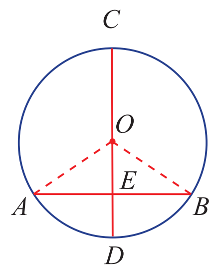


图 21－19

为什么这条弦不能是直径？

由此可以得到一个推论：

平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

交流

下面两个命题是真命题还是假命题？如果是真命题，请说明理由；如果是假命题，请举出反例.

(1) 弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

(2) 平分弦所对一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

例 2　已知：如图21－20，A，B，C，D为$\odot O$ 上的四个点，$AB\parallel CD$. 判断$\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 是否相等，并说明理由.

解：$\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 相等.

理由如下：

过点O作直线$OE\perp AB$于点H，交DC于点G，交$\odot O$于E，F 两点.

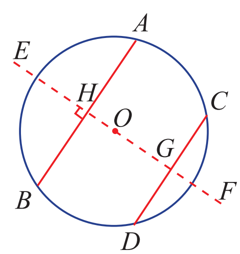


图 21－20

∴　$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.

∵　$AB\parallel CD$，

∴　$OE\perp CD$.

∴　$\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DE}$.

∴　$\overset{\frown}{CE}-\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BE}$.

即　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

你还能用其他方法来说明理由吗？

例 3 我国隋代建造的赵州桥（图 21－21）的桥拱是圆弧形，它的跨度（即弧所对的弦长）为 37.4 m，拱高（即弧的中点到弦的距离，也叫弓形[①]高）为 7.2 m，求桥拱所在圆的半径（结果精确到 0.1 m）.

图 21－21

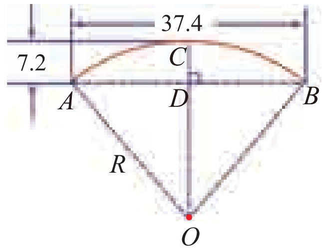


图 21－22

解： 如图21－22，设桥拱 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心为O，半径为R m，连接OA，OB，过点O作$OC\perp AB$，D为垂足，与 $\overset{\frown}{AB}$ 相交于点C.

$\therefore\quad AD=BD.$

$\because\quad AB=37.4,\ DC=7.2,$

$\therefore\quad AD=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 37.4=18.7,$

$\qquad OD=OC-DC=R-7.2.$

在 Rt△OAD中，由勾股定理，得

$$OA^2=AD^2+OD^2.$$

即 $R^2=18.7^2+(R-7.2)^2.$

解这个方程，得

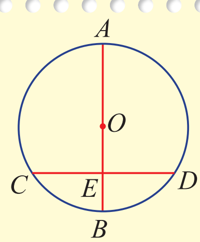
$$R\approx 27.9\ (\text{m}).$$

答：赵州桥的桥拱所在圆的半径约为27.9 m.

练习

1. 已知：如图，⊙O的直径 $AB=15$，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，$BE=3$，那么 CD 的长为 ________.

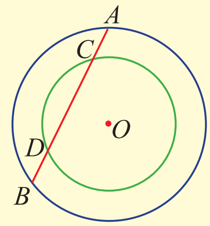
2. 已知：CD 为⊙O 的直径，弦 AB 交 CD 于 E，$AE=BE$，$AB=6$，$CE=1$，那么⊙O 的半径长为 ________.



（第 1 题）

① 由弦及其所对的弧组成的图形叫做弓形.

3. 已知：如图，在以 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 交小圆于 C，D 两点，试比较 AC 与 BD 长度的大小，并说明理由.



（第 3 题）

交流

圆是中心对称图形吗？如果是，指出它的对称中心.

如图21－23，在 $\odot O$ 上任意取一点 A，作直径 AB，那么 $OA = OB$．就是说，A，B 两点关于点O 对称，因此：

圆是中心对称图形，对称中心是圆心.

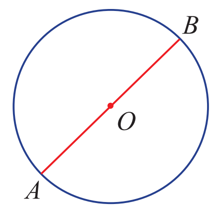


图 21－23

思考

用计算机或图形计算器作$\odot O$ 及相等的圆心角 $\angle AOB$，$\angle A'OB'$（图 21－24），连接 AB，$A'B'$，拖动点 A 在圆上运动，你能发现图中有哪些相等的关系？

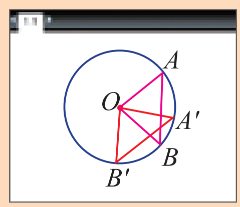


图 21－24

当$\angle AOB$ 与$\angle A'OB'$重合时，$\triangle OAB$与$\triangle OA'B'$ 能够完全重合，可以看到下面的两组量分别相等：$AB = A'B'$，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$. 由此可以得到：

在同圆或等圆中，如果圆心角相等，那么它们所对的弧相等，所对的弦也相等.

还可以得到：

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中的一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

不在同圆或等圆中，结论还成立吗？

交流

如图21－25，在⊙O中，AB，CD是两条弦，$OE\perp AB$于点E，$OF\perp CD$于点F.

(1) 如果$AB=CD$，那么能否得到$OE=OF$，为什么？

(2) 如果$OE=OF$，那么能否得到$AB=CD$，为什么？

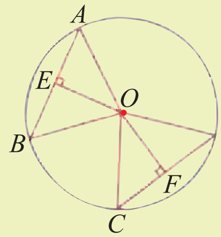


图 21－25

例 4 已知：A，B是⊙O上的两点，$\angle AOB=120°$，C是$\overset{\frown}{AB}$的中点. 试判断四边形$AOBC$的形状，并说明理由.

解：四边形$AOBC$为菱形.

理由如下：

如图21－26，连接OC.

∵ C是$\overset{\frown}{AB}$的中点，

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

∵ $\angle AOB=120°$，

∴ $\angle 1=\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle AOB=60°$.

又∵ $OA=OC=OB$，

∴ $\triangle AOC$，$\triangle BOC$均为等边三角形.

∴ $AC=AO=OB=BC$.

∴ 四边形$AOBC$为菱形.

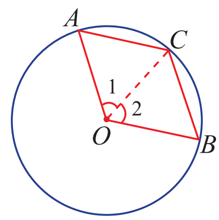


图 21－26

练习

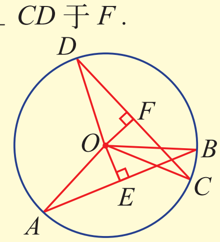
1. 已知：如图，AB，CD是⊙O的两条弦，$OE\perp AB$于E，$OF\perp CD$于F.

(1) 如果$AB=CD$，那么__________________；

(2) 如果$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，那么__________________；

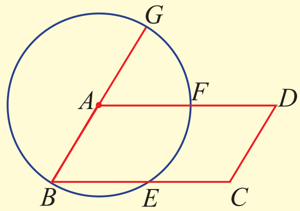
(3) 如果$\angle AOB=\angle COD$，那么__________________；

(4) 如果$OE=OF$，那么__________________.



（第 1 题）

2. 如图，以▱$ABCD$ 的顶点 A 为圆心，AB 为半径作 $\odot A$，分别交 BC，AD 于 E，F 两点，交 BA 的延长线于 G，判断 $\overset{\frown}{EF}$ 和 $\overset{\frown}{FG}$ 是否相等，并说明理由.



（第 2 题）

习　题　21－2

★基础★

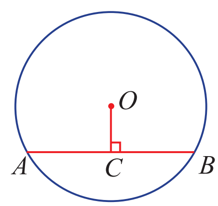
1. 选择题：

(1) AB，CD 分别是两个圆中的弦，如果 $AB=CD$，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 的关系是（　　）.

A. $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{CD}$　　B. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$　　C. $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$　　D. 不能确定

(2) 如图 $\odot O$ 的半径为 5，AB 为弦，$OC\perp AB$，垂足为 C，如果 $OC=3$，那么弦 AB 的长为（　　）.

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10



[第 1 (2)题]

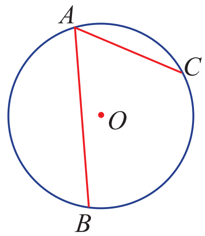
2. 填空题：

(1) 在同一个圆中，当圆心角不超过 180° 时，圆心角越大，所对的弧越__________，所对的弦越__________，圆心到所对弦的距离越________.（填“长”或“短”）

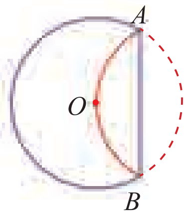
(2) 如果 AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于 M，$AM=16$，$BM=4$，那么 $CD=$________，$AC=$________.

(3) 已知：CD 为 $\odot O$ 的直径，弦 AB 交 CD 于 E，$AE=BE$，$CD=8$，$CE=2$，那么 AB 的长为________.

(4) 如图，在 $\odot O$ 中，如果 $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{AC}$，那么 AB________$2AC$.（填“>”、“=”或“<”）



[第 2 (4)题]

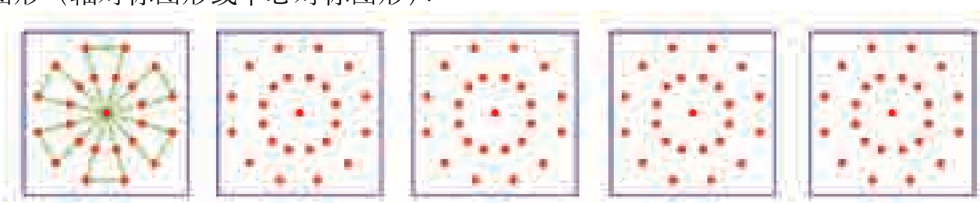


[第 2 (5)题]

(5) 如图，将⊙O沿着弦AB翻折，劣弧恰好经过圆心O，如果⊙O的半径为 4，那么弦AB的长度等于 ____________ .

(6)“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸①，锯道长一尺，问径几何？”这是《九章算术》中的一个问题，用现代的语言表述为：“如果CD为⊙O的直径，弦$AB \perp CD$于E，$CE = 1$寸，$AB = 10$寸，那么直径CD的长为 ___________ 寸.”

3. 依照图（1），在图（2）~（5）中，利用给出的两个同心圆上的点，设计几个不同的对称图形（轴对称图形或中心对称图形）.

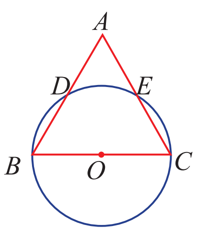


（1）　（2）　（3）　（4）　（5）

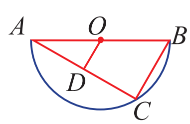
（第 3 题）

4. 已知：如图，△ABC是等边三角形，BC是⊙O的直径，AB，AC边分别交⊙O于D，E两点，求证：$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EC}$.

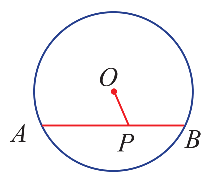
5. 已知：如图，AB是半圆O的直径，AC为弦，$OD // BC$交AC于D，$BC = 8$ cm，求OD的长.



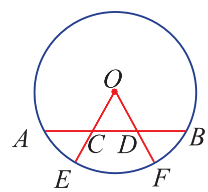
（第 4 题）



（第 5 题）



（第 6 题）



（第 7 题）

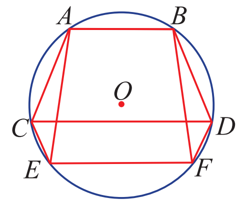
6. 如图，在⊙O中，P是弦AB上一点，$AB = 10$ cm，$PB = 4$ cm，$OP = 2.5$ cm，求⊙O的周长.

7. 已知：如图，AB是⊙O的弦，且$AC = BD$，半径OE，OF分别过C，D两点，求证：$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF}$.

① 古代的长度计量单位，不同时期的标准不同. 今1寸 = $\frac{1}{30}$米.

★★提升★★

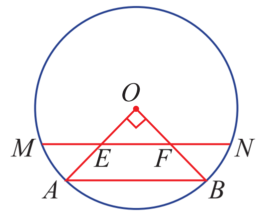
1. 已知：菱形 $ABCD$ 和 $\odot O$，求作一条直线，使它同时平分菱形 $ABCD$ 和 $\odot O$ 的面积 .
2. 已知：如图，AB，CD，EF 是 $\odot O$ 的弦，$AB\,/\!/\,CD\,/\!/\,EF$. 求证：$\triangle ACE \cong \triangle BDF$.



（第 2 题）

★★★拓展★★★

1. 秋千的拉绳长 3 m，静止时踩板离地面 0.5 m，聪聪荡秋千，秋千在最高处时踩板离地面 2 m（前后高度对称），求该秋千所荡过的圆弧长是多少 .
2. 已知：如图，$\odot O$ 的半径为 10，$\angle AOB = 90°$，弦 $MN\,/\!/\,AB$，MN 与 OA，OB 分别相交于点 E，F，且 MN 被点 E，F 三等分 . 求证：O 点到 MN 的距离的平方数等于半径长 .



（第 2 题）

21.4 圆周角

顶点在圆上，两边都和圆相交的角叫做**圆周角**. 如图21－27，$\angle BAC$ 是 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角 .

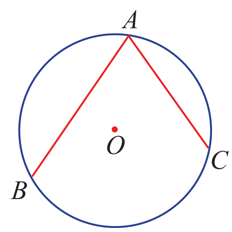


图 21－27

探索

1. 任意画同一条弧所对的圆心角和圆周角，分别测量这两个角的大小，你能得到它们在度数之间有怎样的关系？再画一个圆周角试一试 .

2. 用计算机或图形计算器画出如图 21－28 的图形．如图 21－29，拖动点 C，利用“度量”功能，猜想圆周角与圆心角之间的关系．

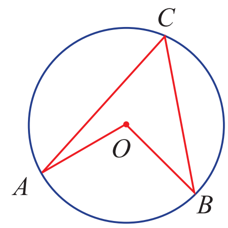


图 21－28

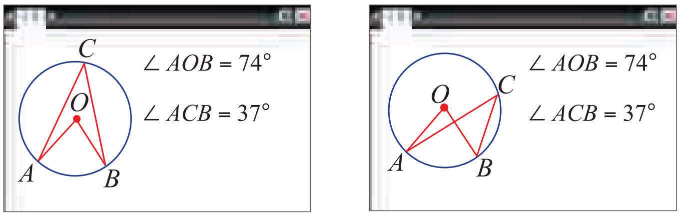
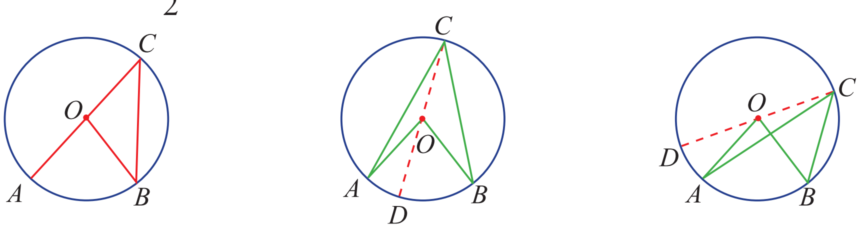


图 21－29

圆周角定理　一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半．

已知：如图 21－30，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角是 $\angle ACB$，圆心角是 $\angle AOB$.

求证：$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$．



(1)　(2)　(3)

图 21－30

分析： 由“探索”可知，圆心与圆周角有三种不同的位置关系，当圆心 O 在 $\angle ACB$ 的边上时，只要利用三角形内角和定理的推论和等腰三角形的性质即可证明．当圆心 O 在 $\angle ACB$ 的内部或外部时，可以通过添加直径这条辅助线，把问题转化为圆心 O 在 $\angle ACB$ 的边上时的特殊情形来解决．

证明：（1）如图 21－30（1），圆心 O 在 $\angle ACB$ 的边上．

$\because$　$OC=OB$，

$\therefore$　$\angle C=\angle B$．

$\because$　$\angle AOB$ 是 $\triangle OBC$ 中 $\angle COB$ 的外角，

$\therefore$　$\angle AOB=\angle C+\angle B$．

$\therefore\quad \angle AOB = 2\angle C$.

即 $\angle C = \frac{1}{2}\angle AOB$.

(2) 如图 21－30 (2)，圆心 O 在 $\angle ACB$ 的内部.

作直径 CD，利用 (1) 的结果，有

$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$，$\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$.

$\therefore\quad \angle ACD + \angle BCD = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle BOD)$.

即 $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

(3) 如图 21－30 (3)，圆心 O 在 $\angle ACB$ 的外部.

作直径 CD，利用 (1) 的结果，有

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD,\ \angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD.$$

$\therefore\quad \angle BCD - \angle ACD = \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle AOD)$.

即 $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

由定理可以推出下面的推论：

推论 1　同弧或等弧所对的圆周角相等. 同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等.

已知：如图 21－31，A，B，C，D 为$\odot O$ 上的四个点，点 E 为 DC 延长线上的一点.

求证：$\angle BCD + \angle A = 180°$，$\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

证明： $\because\quad \overset{\frown}{BAD}$ 和 $\overset{\frown}{BCD}$ 所对的圆心角的和是周角，即 $\angle 1 + \angle 2 = 360°$.

$\therefore\quad \angle BCD + \angle A$

$= \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2$

$= \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)$

$= \frac{1}{2} \times 360° = 180°$.

我们又称四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

同理可证　$\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

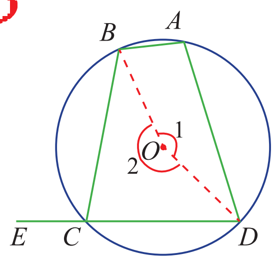
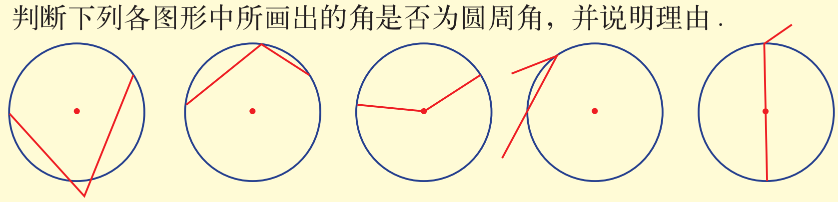


图 21－31

推论 2　圆内接四边形的对角互补.

练习

1. 如图，判断下列各图形中所画出的角是否为圆周角，并说明理由 .



（第 1 题）

2. A，B，C 是⊙O 上的三个点，$\angle BAC = 61°$，求 $\angle BOC$ 的度数 .
3. 在同一个圆中画出三条弦，使其构成三个圆周角，你有几种画法?
4. 已知：A，B，C，D 为⊙O 上的四个点，点 E 为 DC 延长线上的一点 .

   求证：$\angle BCE = \angle A$.

思考

在⊙O 中，AB 为直径，如果点 C 在圆上（点 C 不与 A，B 两点重合)，那么 $\angle ACB$ 具有怎样的特征？为什么？

因为一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半，此时AB为直径，圆心角 $\angle AOB = 180°$，所以直径 AB 所对的圆周角 $\angle ACB$ 是直角.

由定理还可以推出下面的推论：

推论 3　半圆（或直径）所对的圆周角是直角.

推论 4　90°的圆周角所对的弦是直径.

例 1 已知：如图 21－32，CD 为⊙O 的直径，AC，AE 分别交 ⊙O 于 B，D 两点，$\angle A = 23°$，$\angle BED = 21°$，求 $\angle DCE$ 的度数 .

解：∵　CD 为 ⊙O 的直径，

∴　$\angle CED = 90°$.

∵　$\angle A = 23°$，

∴　$\angle BCE = 67°$.

∵　$\angle BCD = \angle BED = 21°$，

∴　$\angle DCE = \angle BCE - \angle BCD$

$= 67° - 21°$

$= 46°$.

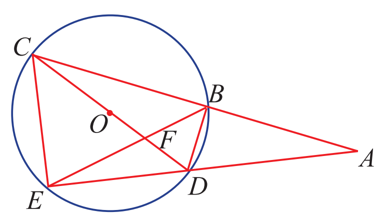


图 21－32

例 2 已知：如图 21－33，在⊙O 中，直径 AB 的长为 10 cm，弦 AC 的长为 6 cm，$\angle ACB$ 的平分线交⊙O 于点 D，求 BC，AD 和 BD 的长．

解：$\because$ AB 为直径，

$\therefore$ $\angle ACB=\angle ADB=90°$．

在 Rt△ACB 中，

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\ (\text{cm}).$$

$\because$ CD 平分 $\angle ACB$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$．

$\therefore$ $AD=BD$．

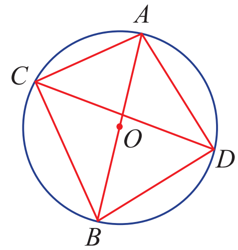


图 21－33

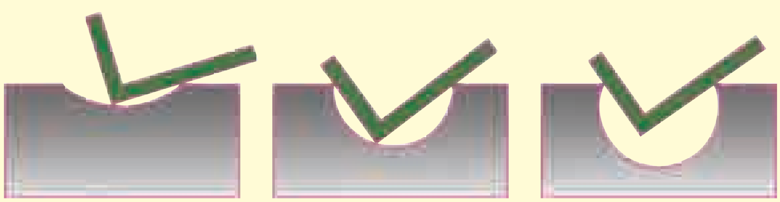
在等腰直角三角形 ADB 中，

$$AD=BD=AB\times\sin45°=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}\ (\text{cm}).$$

$\therefore$ $BC=8$ cm，$AD=BD=5\sqrt{2}$ cm．

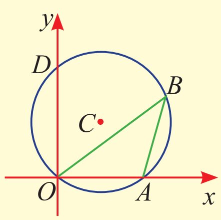
练习

1. 证明：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形．
2. 使用曲尺检验工件的凹面．已知凹面成半圆时工件为合格品．如图所示的三种情况中，哪个工件可能是合格的？哪个工件是不合格的？为什么？



（第 2 题）

3. 如图，⊙C 经过坐标原点 O，并与两坐标轴相交于 A，D 两点，已知 $\angle OBA=30°$，点 D 的坐标为（0，2），求点 A 的坐标及圆心 C 的坐标．



（第 3 题）

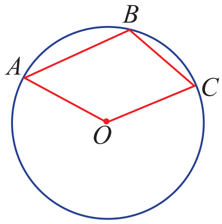
习　题　21－3

★基础★

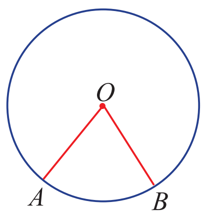
1. 填空题：

(1) 已知：如图，A，B，C 都是⊙O 上的点，如果 $\angle AOC = 130°$，那么 $\angle ABC$ 的度数为 ________；

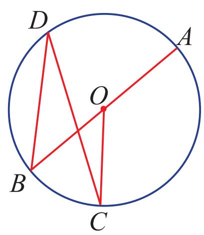
(2) 如图，A，B 是⊙O 上的两点，如果 $\angle AOB = 70°$，C 是⊙O 上不与点 A，B 重合的任一点，那么 $\angle ACB$ 的度数为 ________；



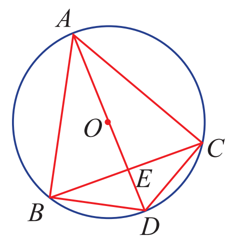
[第 1 (1)题]



[第 1 (2)题]



[第 1 (3)题]

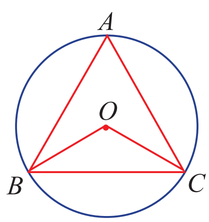


[第 1 (4)题]

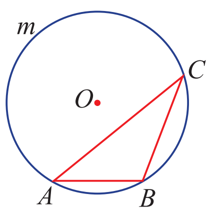
(3) 如图，在⊙O 中，C，D 为⊙O 上两点，AB 是⊙O 的直径，如果 $\angle AOC = 130°$，那么 $\angle D =$ ________；

(4) 已知：如图，在⊙O 中，AD 是直径，BC 是弦，$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$，由这些条件你能推出的结论是 ________________（至少写出 6 个结论）.

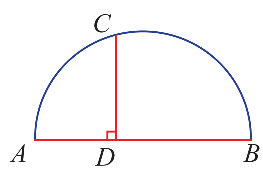
2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，$AB = AC$，$\angle BOC = 120°$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数.



（第 2 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

3. 直角三角形的两条边长分别为 6 和 8，求这个三角形外接圆的半径.

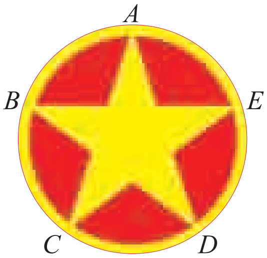
4. 如图，弦 AB 的长等于⊙O 的半径，点 C 在 $\overset{\frown}{AmB}$ 上，求 $\angle C$ 的度数.

5. 如图，半圆的直径 $AB = 13$ cm，C 是半圆上一点，$CD \perp AB$ 于 D，并且 $CD = 6$ cm，求 AD 的长.

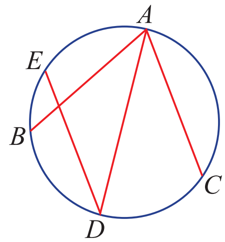
6. 如图所示为中国共产主义青年团团旗上的图案，点 A，B，C，D，E 五等分圆，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的度数.

7. 已知：如图，AD 平分 $\angle BAC$，$DE \parallel AC$，且 $AB = a$. 求 DE 的长.

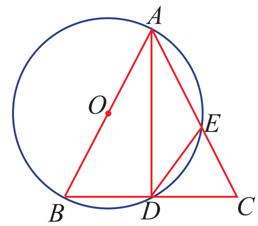
8. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AC = AB$，以 AB 为直径作 $\odot O$，交 BC 于 D，交 AC 于 E. 试说明 $\angle BAD$ 和 $\angle EDC$ 之间的数量关系.



（第 6 题）



（第 7 题）

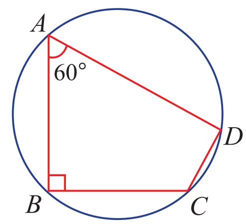


（第 8 题）

★★提升★★

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，$\angle A = 60°$，$\angle B = 90°$，$AB = 2$，$CD = 1$，求 AD 的长.

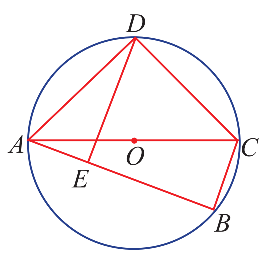
2. 已知：A，B，C，D 四个点在 $\odot O$ 上，射线 AB 与射线 CD 相交于点 P. 如果 $\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{BD}$ 所对的圆心角分别为 $80°$ 和 $60°$，求 $\angle APC$ 的度数.



（第 1 题）

★★★拓展★★★

如图，在 $\odot O$ 中，AC 为直径，点 B，D 在 $\odot O$ 上，且 $AD = DC$，$DE \perp AB$ 于 E，四边形 $ABCD$ 的面积为 18，求 DE 的长.



问题解决

1. 如图 21－34，当⊙O 中的弦 AB，CD 相交于点 P 时，探索 $\angle APC$ 的度数与 $\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{BD}$ 的度数之间的数量关系．

2. 如图 21－35，当⊙O 中的弦 AB，CD 的延长线相交于点 P 时，探索 $\angle APC$ 的度数与 $\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{BD}$的度数之间的数量关系．

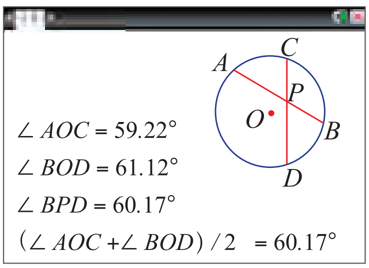


图 21－34

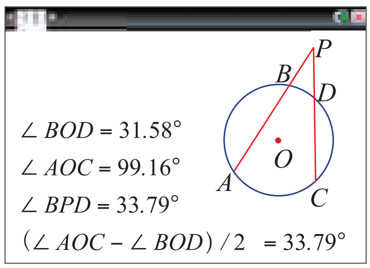


图 21－35

阅读理解

《原本》及其影响

《原本》(Elements) 由古希腊数学家欧几里得 (Euclid，约公元前 330—公元前 275) 所著，是至今流传最广、影响最大的一部数学名著，它对数学以及自然科学的发展产生了深远的影响．

欧几里得在编写《原本》时，广泛地吸取了前人的成果，将几何知识加以总结和系统化．在古往今来的浩瀚书海中，用各国文字出版《原本》的次数位居世界第二位．中国最早的中文译本是由利玛窦 (Matteo Ricci) 和我国明代科学家徐光启合译的，他们于 1607 年把该书的前六卷“平面几何”部分翻译成中文，书名定为《几何原本》．此后，我国出版的各种译本都沿袭这一名称．它的后九卷由我国清代数学家李善兰 (1811—1882) 和英国人伟烈亚力合译完成．

《几何原本》列出了五条公理和五条公设，并在各章的开头给出了一系列定义，然后根据这些定义、公理和公设推导出了465个数学命题，其系统之严谨，推理之严密，令人叹为观止．我国初中数学教材中，有关平面几何的内容主要取材于《几何原本》的前六卷．现代德国数学家希尔伯特在其著作《几何基础》中进一步发展、完善了欧几里得的公理体系．

欧几里得最大的贡献就是选择了一系列具有重大意义的、最原始的定义和公理，并将它们严格地按照逻辑顺序进行排列，然后在此基础上进行演绎和证明，形成了具有公理化结构和严密逻辑体系的《原本》．它的公理化方法为人们提供了一种研究问题的方法．千千万万的人通过学习欧氏几何，受到了严格的逻辑训练，从而迈进了科学殿堂，因此，《原本》是2 000多年来运用公理化方法的一个绝好典范，是人类文化遗产中的一块瑰宝，是科学思想史上最伟大的里程碑之一．

回顾与整理

知识要点

本章研究了圆的有关知识，主要内容包括：圆的概念及性质，点和圆的位置关系，与圆有关的角，圆和三角形、四边形的位置关系以及它们的应用．

1. 圆的概念和性质．

(1) 圆是到定点的距离等于定长的点的集合，定点确定圆的位置，定长确定圆的大小．

不共线的三个点可以确定一个圆．

(2) 圆的性质．

圆是轴对称图形，任何一条直径所在的直线都是它的对称轴．

圆中的有关垂直于弦的直径的性质：垂直于弦的直径平分弦，

并且平分弦所对的两条弧．

知识要点

圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心．圆绕圆心 O 旋转任意角度后所得到的图形都能与原图形重合，这是圆的旋转不变的性质．

2. 点与圆的位置关系．

点与圆的位置关系有三种：点在圆外、点在圆上、点在圆内．

设⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心的距离为 d，那么有：

点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>r$；

点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d=r$；

点 P 在圆内 $\Leftrightarrow d<r$．

3. 和圆有关的角．

圆心角是指顶点在圆心的角．圆心角的度数与它所对的弧的度数相等．

圆周角是指顶点在圆上，两边和圆相交的角．

同弧（或等弧）所对的圆周角等于圆心角的一半．

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中的一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等．

同弧或等弧所对的圆周角相等．同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧相等．

半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90° 的圆周角所对的弦是圆的直径．

4. 和圆有关的三角形、四边形．

三角形有且只有一个外接圆，它的圆心称为三角形的外心．

圆内接四边形的对角互补．

学习指导

1. 要注意圆的对称性知识的学习与应用．

圆是特殊的对称图形，圆的一些性质都可以由它的对称性推出．例如：有关垂直于弦的直径的性质及其推论；在同圆或等圆中，两个圆心角、圆心角所对的两条弧、两条弦之间的数量关系等．数学的对称美在这里得到了充分的体现．

学习指导

2. 体验运动变化在解决数学问题中的作用．

我们运用运动变化的方法研究了许多有关圆的性质．例如：在学习圆周角与圆心角之间的关系定理时，我们让圆周角的顶点在圆上运动，通过测量体验圆周角与圆心角之间的数量关系．当然，如果能够充分利用计算机或图形计算器等现代技术，那将更有利于我们体验运动变化在解决数学问题中的作用．

3. 注意知识之间的联系与转化．

在学习圆这一部分知识的时候，要注意前后知识之间的联系，并注重使用转化的数学方法．例如：在解题过程中经常将圆的知识向直线形知识转化；在圆的有关证明或计算问题中，经常通过添加辅助线，将一般性问题向特殊性问题转化．

值得注意的是，转化是有条件的．例如，当通过证明两条弧或者两个圆心角之间的相等关系来证明两条弦的相等关系时，“在同圆或等圆中”是前提．

复　习　题

★基础★

1. 判断题：

(1) 经过三个点一定可以作圆；（　　）

(2) 圆心角相等，那么圆心角所对的弧就相等；（　　）

(3) 任意一个三角形一定有一个外接圆，并且只有一个外接圆；（　　）

(4) 等弦所对的圆心角相等；（　　）

(5) 圆是绕圆心旋转任意角度后能和原图形重合的图形；（　　）

(6) 平分弦的直径垂直于弦．（　　）

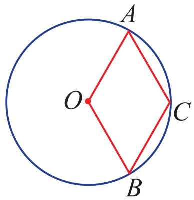
2. 填空题：

(1) 在半径为 10 cm 的⊙O 中，如果弦 AB 长为 $10\sqrt{2}$ cm，那么 $\angle AOB =$________.

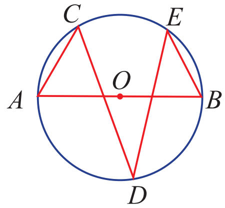
(2) 如果 AB 为⊙O 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于 M，$AM = 16$，$BM = 4$，那么 $CD =$______.

(3) 如果⊙O 的直径为 10，弦 $AB=6$，P 是 AB 上一动点，那么 OP 长的取值范围是 ____________.

(4) 如图，在⊙O 中，$\angle AOB=\angle ACB$，那么 $\angle A+\angle B$ 的度数为 ______.



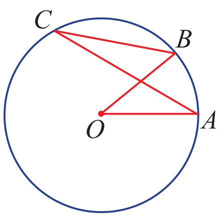
[第 2 (4)题]



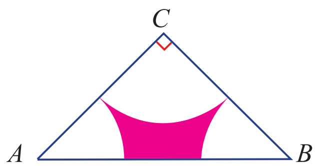
[第 2 (5)题]

(5) 如图，AB 为⊙O 的直径，$\angle BED=40°$，那么 $\angle ACD=$______.

(6) 如图，OA，OB 是⊙O 的半径，如果 $\angle AOB=40°$，$\angle OBC=50°$，那么 $\angle ACB=$ ________，$\angle OAC=$ __________ .



[第 2 (6)题]



[第 2 (7)题]

(7) 如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$CA=CB=2$. 分别以 A，B，C 为圆心，以 $\frac{1}{2}AC$ 为半径画弧，三条弧与边 AB 所围成的红色部分的面积是 ____________.

(8) 在△ABC 中，$AB=12$，$BC=9$，$AC=15$，那么△ABC 的外接圆的半径长为 ________.

(9) 如果⊙O 的半径为 25 cm，弦 $AB\parallel CD$，且 $AB=40$ cm，$CD=14$ cm，那么 AB 和 CD 之间的距离是 ______________.

3. 小明四等分$\overset{\frown}{AB}$，他的作法如下：

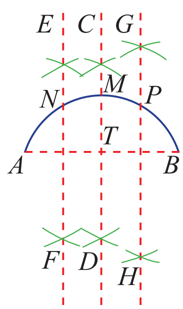
(1) 连接 AB（如图）；

(2) 作 AB 的垂直平分线 CD 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 M，交 AB 于点 T；

(3) 分别作 AT，TB 的垂直平分线 EF，GH，交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 N，P 两点 .

那么 N，M，P 三点把 $\overset{\frown}{AB}$ 四等分 .

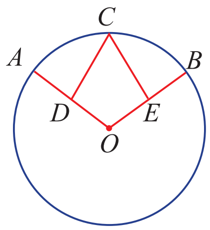
小明的作法对吗？请你作出判断，并说明理由 .



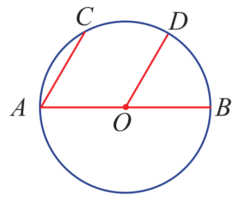
（第 3 题）

4. 已知：如图，在⊙ O 中，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$D$，$E$ 分别是半径 OA，OB 的中点 . 求证：$CD=CE$.

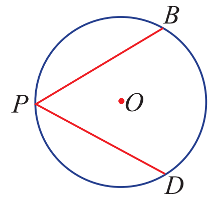
5. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，$OD\parallel AC$. 求证：点 D 平分 $\overset{\frown}{BC}$.



（第 4 题）



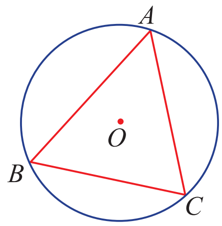
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 已知：如图，PB，PD 是⊙O 的弦，$PB=PD$. 点 O 在∠BPD 的平分线上吗？说明你的理由.

7. 如图，△ABC 中，∠$B=60°$，$AC=3$ cm，⊙O 为△ABC 的外接圆. 求⊙O 的半径.



（第 7 题）

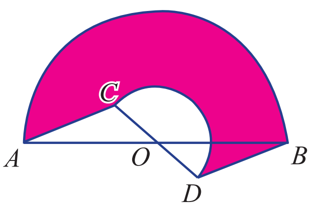

（第 8 题）

8. 如图，照片是圆盘的一部分，照片与实物的比例为 1 : 20 . 现在要制作一个与实物圆盘同样大小的仿制品. 请你设计一种方案，将照片中的圆盘外边沿画完整，并计算仿制圆盘的半径长度（结果精确到 1 cm）.

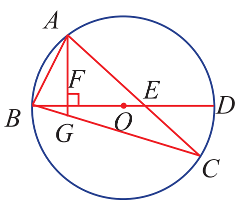
9. 点 O 是两个同心半圆的圆心，如图所示叠放在一起，连接 AC，BD.

（1）求证：△AOC≌△BOD；

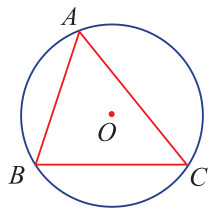
（2）如果 $OA=3$ cm，$OC=1$ cm，求红色部分的面积.



（第 9 题）



（第 10 题）



（第 11 题）

10. 如图，△ABC 是⊙O 的内接三角形，⊙O 的直径 BD 交 AC 于点 E，$AF\perp BD$ 于点 F，延长 AF 交 BC 于点 G. 试问 $AB^2=BG\cdot BC$ 吗？为什么？

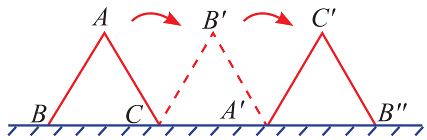
11. 如图，已知△ABC 内接于半径为 R 的⊙O，∠A 为锐角. 求证：$\dfrac{BC}{\sin A}=2R$.

★★提升★★

1. 画一个圆，并将这个圆 2 等分、4 等分、8 等分. 你还能将圆几等分？

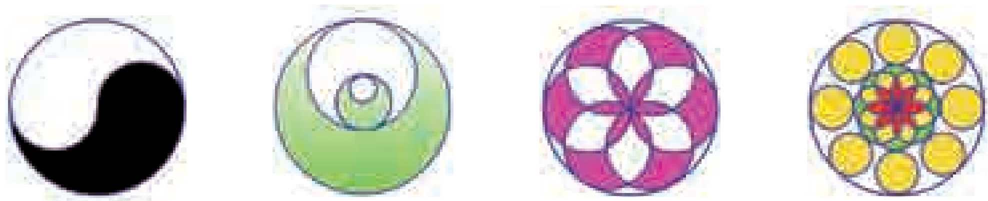
2. 如图，一块等边三角形的木板，边长为 10 cm. 现将该木板在同一平面内沿水平线 BC 翻

滚 2 次，那么 B 点从开始到结束所经过的路径长度为多少?



（第 2 题）

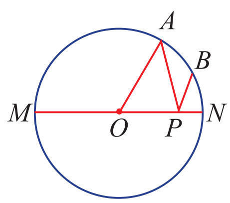
3. 请你欣赏下列图案，并设计一个美丽的图案.



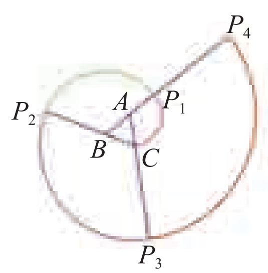
（第 3 题）

★★★ 拓展 ★★★

1. 如图，点 A 是半圆上一个三等分点，点 B 是 $\overset{\frown}{AN}$ 的中点，点 P 是直径 MN 上一动点，$\odot O$ 的半径为 1，求 $AP+BP$ 的最小值.



（第 1 题）



（第 2 题）

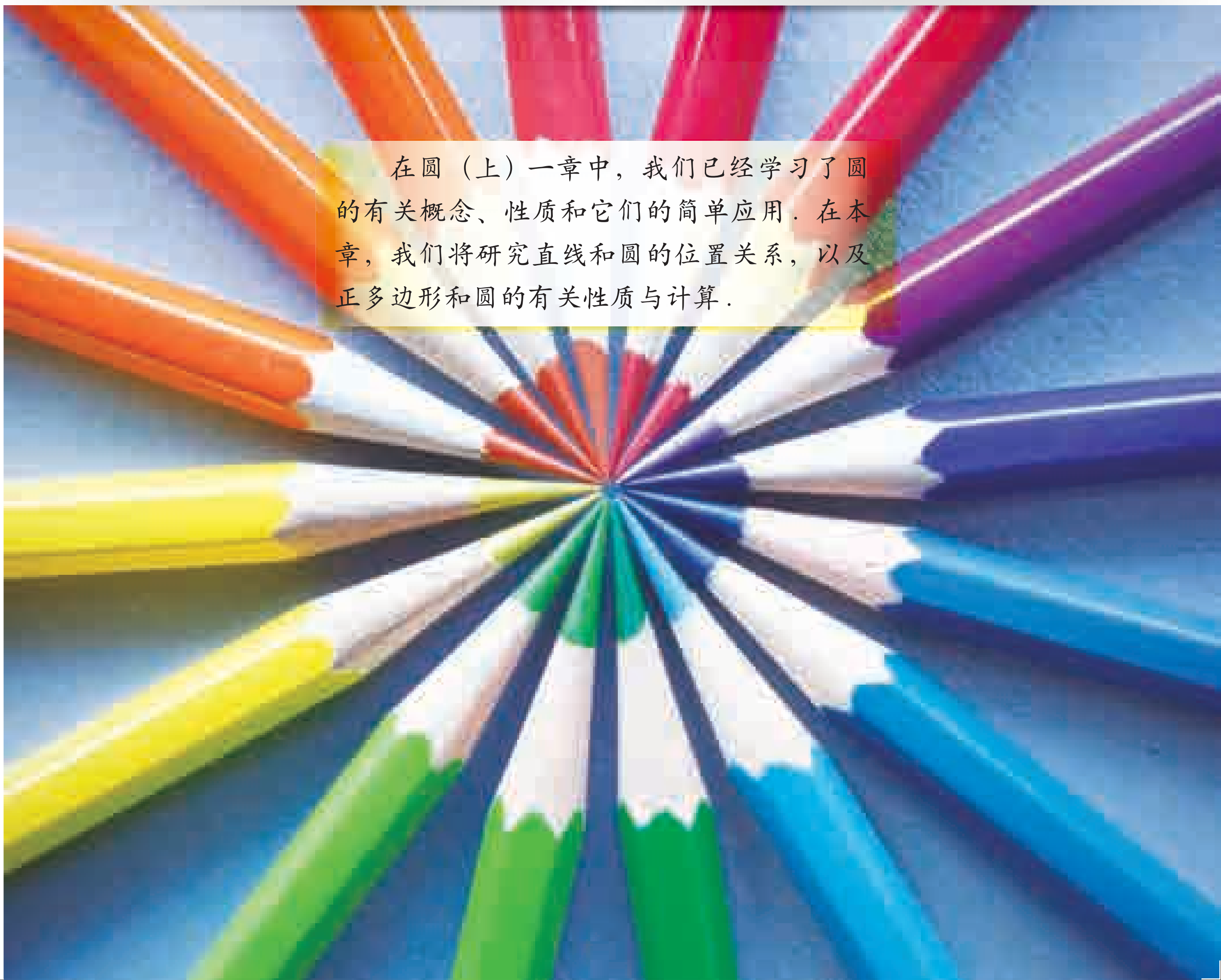
2. 如图，正三角形 ABC 的边长为 1 cm，将线段 AC 绕点 A 逆时针旋转 120° 至 AP_1，形成扇形 D_1；将线段 BP_1 绕点 B 逆时针旋转 120° 至 BP_2，形成扇形 D_2；将线段 CP_2 绕点 C 逆时针旋转 120° 至 CP_3，形成扇形 D_3；将线段 AP_3 绕点 A 逆时针旋转 120° 至 AP_4，形成扇形 D_4……设 l_n 为扇形 D_n 的弧长（$n=1$，2，3，…）. 回答下列问题：

（1）按照要求填表.

n	1	2	3	4
l_n				

（2）根据上表所反映的规律，试估计 n 至少为何值时，扇形 D_n 的弧长能绕地球赤道一周.（地球的赤道半径约为 6 378 km）

第二十二章
圆（下）



在圆（上）一章中，我们已经学习了圆的有关概念、性质和它们的简单应用．在本章，我们将研究直线和圆的位置关系，以及正多边形和圆的有关性质与计算．

一 直线和圆

22.1 直线和圆的位置关系

实践

1. 如图 22－1，用圆规在单线本上画⊙O，观察⊙O与各条横线的公共点各有多少个.

2. 使一支笔在⊙O所在的平面内运动，观察该笔所表示的直线运动到不同位置时和圆的公共点的个数有什么变化.

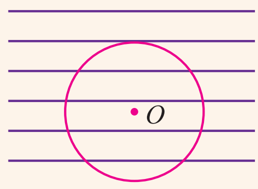
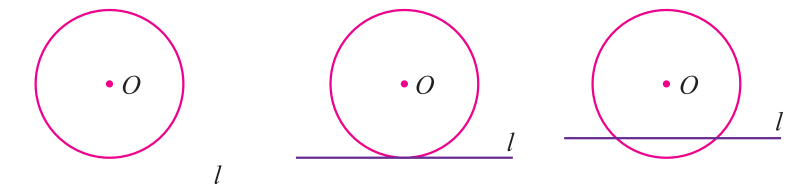


图 22－1

可以发现，直线和圆有三种不同的位置关系：



(1)　　(2)　　(3)

图 22－2

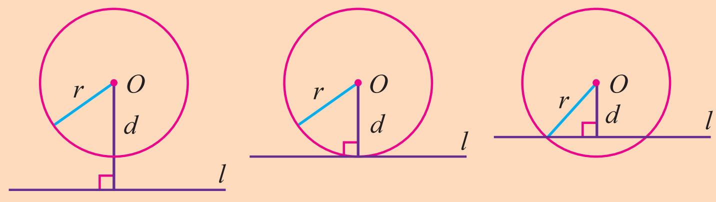
(1) 如图 22－2 (1)，当一条直线与一个圆没有公共点时，我们称这条直线和这个圆**相离**.

(2) 如图 22－2 (2)，当一条直线与一个圆有唯一公共点时，我们称这条直线和这个圆**相切**. 这条直线叫做圆的**切线**，这个公共点叫做**切点**.

(3) 如图 22－2 (3)，当一条直线与一个圆有两个公共点时，我们称这条直线和这个圆**相交**. 这条直线叫做圆的**割线**.

思考

如图 22－3，怎样用圆心 O 到直线 l 的距离 d 与圆的半径 r 之间的数量关系，描述直线和圆的位置关系？



（1）　　（2）　　（3）

图 22－3

可以得出：

直线 l 与⊙O 相离 $\Longleftrightarrow d > r$；

直线 l 与⊙O 相切 $\Longleftrightarrow d = r$；

直线 l 与⊙O 相交 $\Longleftrightarrow d < r$.

例 在△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 3$ cm，$BC = 4$ cm，以 C 为圆心，r 为半径画圆．当（1）$r = 1.8$ cm，（2）$r = 2.4$ cm，（3）$r = 2.6$ cm 时，⊙C 与 AB 所在直线具有怎样的位置关系？为什么？

分析： 要判断⊙C 与 AB 所在直线的位置关系，只需求出圆心 C 到 AB 的距离 CD 的长，然后与圆的半径 r 进行比较．

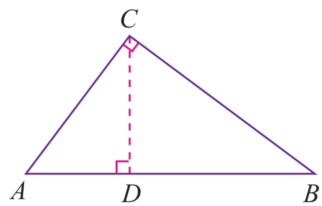


图 22－4

解： 如图 22－4，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D.

$\because \quad \angle ACB = 90°，AC = 3，BC = 4，$

$\therefore \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$\because \quad S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CD = \dfrac{1}{2} BC \cdot AC$，

$\therefore \quad CD = \dfrac{BC \cdot AC}{AB} = \dfrac{4 \times 3}{5} = 2.4$.

请画图验证各个结论．

即圆心 C 到 AB 的距离 CD 的长为 2.4 cm.

（1）当 $r = 1.8$ cm 时，$CD > r$，因此⊙C 与 AB 相离；

（2）当 $r = 2.4$ cm 时，$CD = r$，因此⊙C 与 AB 相切；

(3) 当 $r=2.6$ cm 时，$CD<r$，因此⊙C 与 AB 相交 .

练习

1. 已知⊙O 的半径为 4 cm，当圆心 O 到直线 l 的距离分别为 (1) 3.5 cm，(2) 4 cm，(3) 4.5 cm 时，判断直线 l 和⊙O 的位置关系 .
2. 在△ABC 中，$AB=10$，$BC=8$，$AC=6$. 如果以 C 为圆心，$\frac{1}{2}BC$ 的长为半径画圆，那么 AB 与⊙C 有怎样的位置关系？

22.2 圆的切线

探索

经过⊙O 上的一点 A，怎样准确地画出⊙O 的切线？

如图 22 − 5，连接 OA，过点 A 画半径 OA 的垂线 AB，那么直线 AB 是⊙O 的切线，A 为切点 .

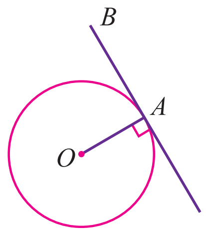
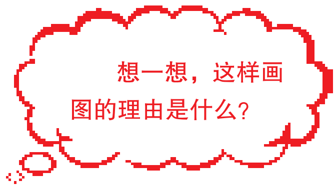


图 22 − 5



此时，圆心 O 到 AB 的距离等于半径，即 AB 为⊙O 的切线 . 也就是说，**经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线** .

例 1 已知：如图 22 − 6，AB 为⊙O 的直径，$AB=1$ cm，$BC=\sqrt{2}$ cm，$AC=1$ cm. 判断直线 AC 与⊙O 是否相切，并说明理由 .

解： 直线 AC 与⊙O 相切 .

理由如下：

∵ $AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，$AC=1$，

∴ $AB^2+AC^2=BC^2$.

∴ △ABC 为直角三角形，$\angle BAC=90°$.

∵ AB 为⊙O 的直径，

∴ 直线 AC 经过⊙O 半径的外端 A.

∴ 直线 AC 与⊙O 相切，A 为切点 .

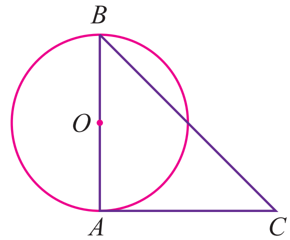
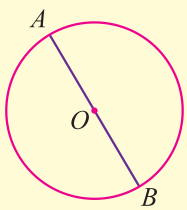


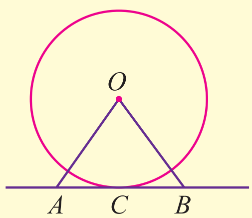
图 22－6

练习

1. 砂轮转动时，火花是沿着砂轮的切线方向飞出去的，给我们以直线和圆相切的形象 . 请你再举出几个生活中直线和圆相切的实例 .
2. 如图，AB 是⊙O 的直径，分别过点 A、点 B 画⊙O 的切线，并判断这两条切线的位置关系 .
3. 已知：如图，直线 AB 经过⊙O 上的点 C，且 $OA=OB$，$CA=CB$. 判断直线 AB 与⊙O 的位置关系，并说明理由 .



（第 2 题）



（第 3 题）

思考

如图 22－7，直线 AB 与⊙O 相切于点 A. 判断直线 AB 与半径 OA 是否垂直，为什么？

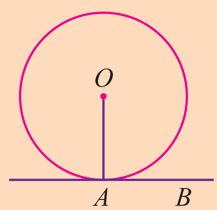


图 22－7

可以判断 AB 与 OA 垂直．理由如下：

假设 AB 与 OA 不垂直，过点 O 作 $OC \perp AB$，垂足为 C，如图 22－8．根据"垂线段最短"的性质，可知 $OC < OA$．这就是说，圆心 O 到直线 AB 的距离小于半径，那么有 AB 与 $\odot O$ 相交，这与"直线 AB 与 $\odot O$ 相切"的已知条件相矛盾．因此，AB 与半径 OA 垂直．

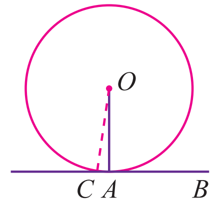


图 22－8

由此可得圆的切线的性质：**圆的切线垂直于过切点的半径**．

例 2 已知：如图 22－9，AB 为半圆 O 的直径，CD 为半圆 O 的一条切线，C 为切点，$AD \perp CD$，垂足为 D．

求证：AC 平分 $\angle DAB$．

怎样利用切线的性质来证明呢？

证明： 连接 OC．

$\because$ CD 是 $\odot O$ 的切线，切点为 C，

$\therefore$ $OC \perp CD$．

$\because$ $AD \perp CD$，

$\therefore$ $OC \parallel AD$．

$\therefore$ $\angle 2 = \angle 3$．

$\because$ $OA = OC$，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3$．

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$．

即 AC 平分 $\angle DAB$．

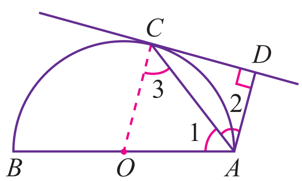
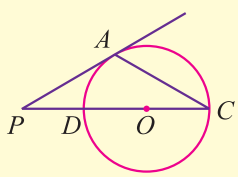


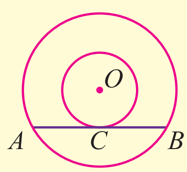
图 22－9

练习

1. 如图，P 是 $\odot O$ 的直径 CD 的延长线上的一点，PA 与 $\odot O$ 相切于点 A，$\angle P = 30°$．求 $\angle ACP$ 的度数．
2. 如图，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 与小圆相切，C 为切点．判断 AC 与 BC 是否相等，并说明理由．



（第 1 题）



（第 2 题）

思考

经过⊙O外的一点可以画该圆的几条切线？画出图形并观察，你可以得到哪些结论？

如图 22－10，过⊙O外的一点P可以画圆的两条切线PA和PB，切点分别为A，B. 可以证明$\triangle AOP \cong \triangle BOP$. 因此，$PA = PB$，$\angle APO = \angle BPO$.

经过圆外一点作圆的切线，这点与切点之间的线段的长叫做这点到圆的**切线长**.

从而得到：

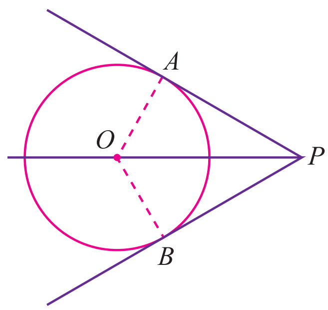
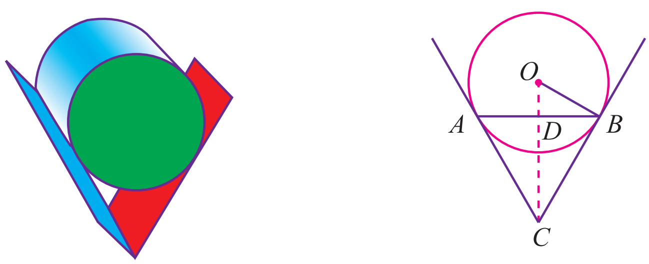


图 22－10

***切线长定理　从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，这点和圆心的连线平分两条切线的夹角.**

例 3　如图 22－11（1），一段圆柱形钢材放在 V 形支架中. 图 22－11（2）是它的截面示意图，CA和CB都是⊙O的切线，切点分别是A，B. ⊙O的半径为$2\sqrt{3}$ cm，$AB = 6$ cm.

求$\angle ACB$的度数.



（1）　　　　（2）

图 22－11

解： 如图 22－11（2），连接OC，交AB于点D.

$\because$ CA，CB都是⊙O的切线，切点分别是A，B，

$\therefore$ $CA = CB$，CO平分$\angle ACB$.

$\therefore$ $OC \perp AB$，$BD = \frac{1}{2}AB$.

$\because$ $AB=6$,

$\therefore$ $BD=3$.

$\because$ 在$\triangle OBD$中，$\angle ODB=90^\circ$，$OB=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ $\sin\angle BOD=\dfrac{BD}{OB}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ $\angle BOD=60^\circ$.

$\because$ CB是$\odot O$的切线，B为切点，

$\therefore$ $OB\perp BC$.

$\therefore$ $\angle OCB=30^\circ$.

$\therefore$ $\angle ACB=2\angle OCB=60^\circ$.

还有其他的解法吗？

练习

1. 如图，PA与$\odot O$相切于点A，PB与$\odot O$相切于点B，OP交$\odot O$于点D，交AB于点C.

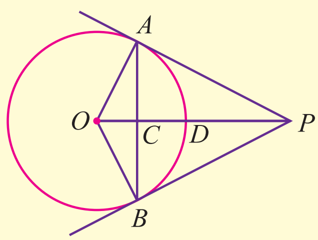
   (1) 图中的垂直关系有________________________;

   (2) 图中的全等三角形有________________________;

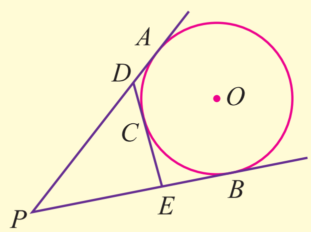
   (3) 写出图中的四对相似三角形（不含全等三角形）________________;

   (4) 如果$PA=4$，$PD=2$，那么$\odot O$的半径长为________________.

2. 如图，PA，PB分别与$\odot O$相切于A，B两点，点C为劣弧$\overset{\frown}{AB}$上任意一点，过点C的切线分别交AP，BP于D，E两点. 如果$AP=5$ cm，求$\triangle PDE$的周长.



（第1题）



（第2题）

探索

1. 能不能画出和三角形三边都相切的圆？

2. 木工师傅要在一块三角形木板上裁下一个面积最大的圆形，这个圆有什么特点？用尺规、计算机或图形计算器画出这个圆（图 22－12）．

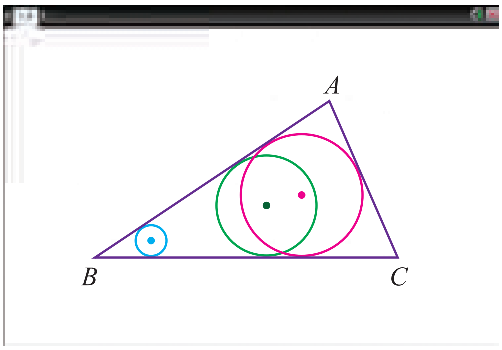


图 22－12

可以看到，能够画出和△ABC 三边都相切的圆，这个圆的面积最大．因为所求作的圆与△ABC 的三边都相切，所以这个圆的圆心到三边的距离都相等．因此，圆心既要在∠ABC 的平分线上，又要在∠ACB 的平分线上．这两条角平分线的交点即为所求圆的圆心，它到三角形一边的距离为所求圆的半径．

交点也在∠BAC 的平分线上吗？为什么？

作法：（1）作∠ABC，∠ACB 的平分线 BM 和 CN，两线相交于点 O．

（2）过点 O 作 $OD \perp BC$，垂足为点 D．

（3）以点 O 为圆心，OD 长为半径作⊙O．

所以⊙O 就是所求作的圆（图 22－13）．

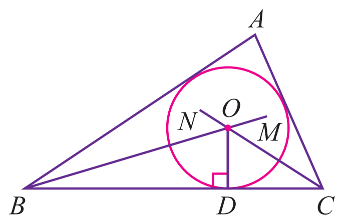


图 22－13

由作法可知，和三角形的三边都相切的圆可以作出一个，并且只可以作出一个．

如图 22－14，当圆和三角形的三边都相切时，我们称这个圆为三角形的**内切圆**．内切圆的圆心叫做三角形的**内心**，这个三角形称为这个圆的**外切三角形**．

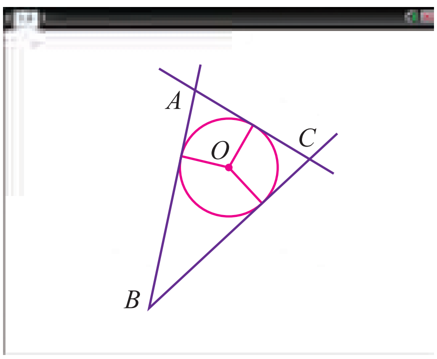


图 22－14

例 4 如图 22－15，⊙O 是△ABC 的内切圆，切点分别为 E，F，G，$AB=9$，$BC=13$，$AC=10$.

求 AE，BF 和 CG 的长 .

解： ∵ ⊙O 是△ABC 的内切圆，切点分别为 E，F，G，

∴ $AE=AG$，$BE=BF$，$CG=CF$.

设 $AE=x$，$BF=y$，$CG=z$.

∵ $AB=9$，$BC=13$，$AC=10$，

∴ $\begin{cases} x+y=9, \\ y+z=13, \\ z+x=10. \end{cases}$

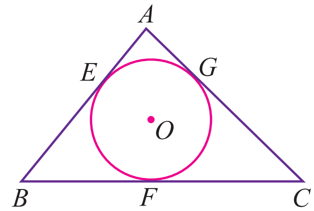


图 22－15

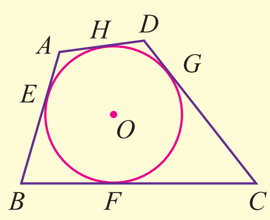
解这个方程组，得

$\begin{cases} x=3, \\ y=6, \\ z=7. \end{cases}$

∴ $AE=3$，$BF=6$，$CG=7$.

练习

1. 在△ABC 中，点 O 是△ABC 的内心，$\angle BOC=112°$，求$\angle A$ 的度数 .
2. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 外切于⊙O，切点分别为 E，F，G，H. 判断 $AD+BC$ 与 $AB+DC$ 是否相等，为什么？



（第 2 题）

探究学习

与圆有关的比例线段

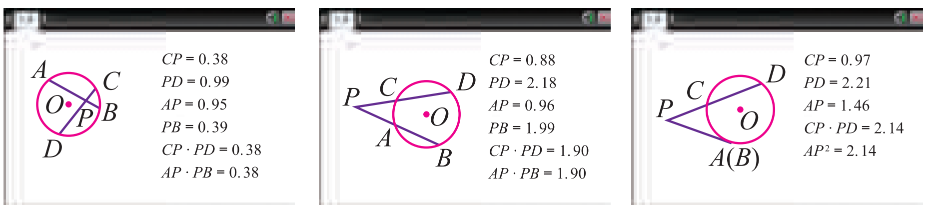
A，B，C，D 为 $\odot O$ 上的点，直线 AB，CD 相交于点 P.

（1）当点 P 在 $\odot O$ 内时 [如图 22－16（1）]，试探究 PA，PB，PC，PD 四条线段的长有怎样的关系；

（2）当点 P 在 $\odot O$ 外时 [如图 22－16（2）]，猜想图中的 PA，PB，PC，PD 四条线段的长是否仍然具有（1）中的关系；

（3）当点 A 和点 B 重合时 [如图 22－16（3）]，猜想图中的 PA，PC，PD 三条线段的长是否仍然具有（1）中的关系．

利用尺规、计算机或图形计算器验证你的猜想，最后将猜想用文字叙述出来，并说明理由．



（1）　（2）　（3）

图 22－16

习　题　22－1

★基础★

1. 填空题：

（1）三角形的内心是三角形三条________________的交点．

（2）如果以三角形的一边为直径的圆恰好与另一边相切，那么这个三角形为__________三角形．

（3）过圆外一点 P 作圆的切线 PM，M 为切点，点 P 到圆心 O 的距离为 13 cm，圆的半径为 5 cm，那么 $PM=$ ________．

（4）给出下列命题：

① 任意一个三角形一定有一个外接圆，并且只有一个外接圆；

② 任意一个圆一定有一个内接三角形，并且只有一个内接三角形；

③ 任意一个三角形一定有一个内切圆，并且只有一个内切圆；

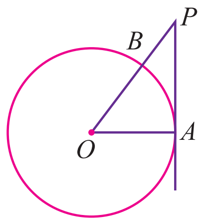
④ 任意一个圆一定有一个外切三角形，并且只有一个外切三角形．

其中，________是真命题（填入序号）．

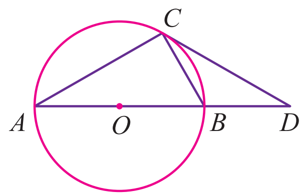
（5）如图，PA 与⊙O 相切，A 为切点，PO 交⊙O 于点 B，$PA=4$，$OA=3$，那么 $\cos P$ 的值为________．

（6）如图，已知 AB 是⊙O 的直径，$BD=OB$，$\angle CAB=30°$．请写出三个正确的结论（$AO=OB=BD$ 除外）：____．

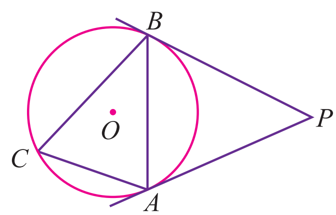
（7）如图，PA，PB 是⊙O 的切线，切点分别为 A，B，点 C 在⊙O 上，如果 $\angle P=50°$，那么 $\angle ACB$ 等于________．



［第 1（5）题］



［第 1（6）题］



［第 1（7）题］

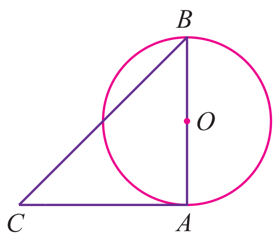
2. 两个同心圆，大圆的半径 $R=3$ cm，小圆的半径 $r=2$ cm，d 是圆心 O 到直线 l 的距离．当 d 取下列不同的值时，分别说出直线 l 和大圆、小圆的位置关系：

（1）$d=2$ cm；（2）$d=2.5$ cm；（3）$d=3$ cm.

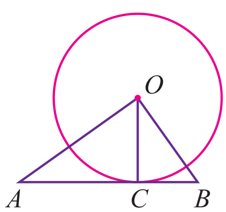
3. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，$\angle CBA=45°$，$AC=AB$. 求证：AC 为⊙O 的切线．

4. 已知：如图，⊙O 的半径为 4，$OA\perp OB$ 于点 O，$OC\perp AB$ 于点 C，$OA=4\sqrt{5}$，$OB=2\sqrt{5}$. 求证：AB 与⊙O 相切．

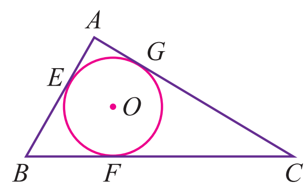
5. 如图，⊙O 是△ABC 的内切圆，切点分别为 E，F，G. 如果 $GC=10$，$BF=3$，$AG=2$，试判断△ABC 的形状，并说明理由．



（第 3 题）

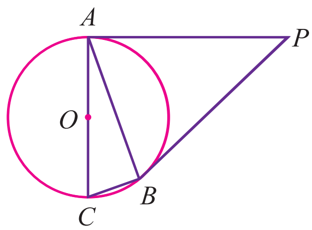


（第 4 题）

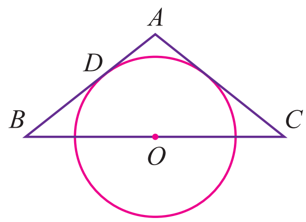


（第 5 题）

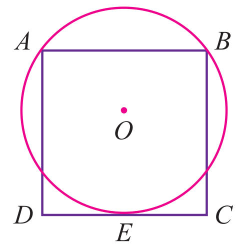
6. 如图，PA，PB 是⊙O 的切线，A，B 是切点，AC 是⊙O 的直径，$\angle ACB = 70°$. 求$\angle P$ 的度数 .
7. 已知：如图，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，O 是底边 BC 的中点，⊙O 与腰 AB 相切于点 D. 求证：AC 与⊙O 相切 .
8. 已知：PA，PB 分别与⊙O 相切于 A，B 两点，$\angle APB = 60°$. 如果⊙O 的半径为 3，求$\triangle PAB$ 的面积 .



（第 6 题）



（第 7 题）



（第 10 题）

9. 直角三角形的斜边长为 10，其内切圆半径为 2，求直角三角形的周长 .
10. 已知：如图，⊙O 过正方形 $ABCD$ 的顶点 A，B，且与 CD 边相切于点 E. 如果正方形的边长为 2，求⊙O 的半径 .

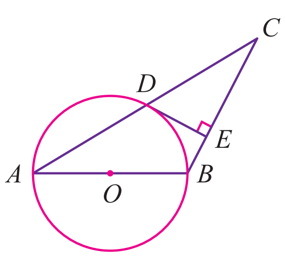
★★提升★★

1. 如图，AB 是⊙O 的直径，⊙O 过 AC 的中点 D，$DE \perp BC$，垂足为点 E. 由这些条件，你能得到哪些结论？（写出 4 个结论即可，并选择其中一个进行证明）
2. $\triangle ABC$ 的面积为 4 cm^2，周长为 10 cm，求$\triangle ABC$ 内切圆的半径 .
3. 如图，实验室常用游标卡尺来测量圆形物体的直径，请你说明其中的道理 .
4. 如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，AD 是$\angle BAC$ 的角平分线 .

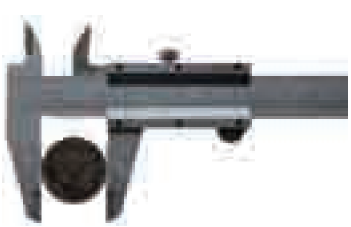
(1) 以 AB 上一点 O 为圆心，AD 为弦作⊙O.

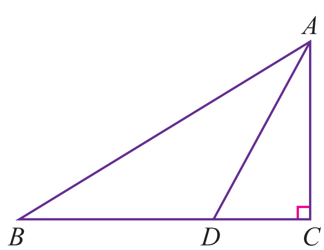
(2) 求证：BC 为⊙O 的切线 .

(3) 如果 $AC = 3$，$\tan B = \dfrac{3}{4}$，求⊙O 的半径 .



（第 1 题）


（第 3 题）



（第 4 题）

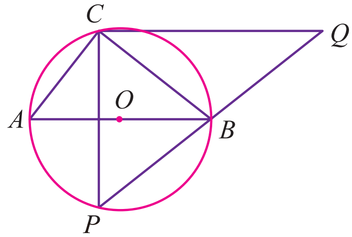
★★★拓展★★★

如图，在半径为2.5 cm的⊙O中，直径AB的两侧有定点C和动点P. 已知BC ∶ CA = 4 ∶ 3，点P在$\overset{\frown}{AB}$上运动，过点C作CP的垂线，与PB的延长线交于点Q.

(1) 当点P与点C关于AB对称时，求CQ的长.

(2) 当点P运动到$\overset{\frown}{AB}$的中点时，求CQ的长.

(3) 当点P运动到什么位置时，CQ取到最大值？求此时CQ的长.



二、正多边形和圆

22.3 正多边形的有关计算

前面已经认识到各边相等、各角也相等的多边形是正多边形，下面学习正多边形和圆的关系以及正多边形的有关计算.

如图22－17，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$，可以证明六边形$ABCDEF$是⊙$O$的内接正六边形；反过来，由于正六边形$ABCDEF$各个顶点到点$O$的距离都相等，因此，正六边形$ABCDEF$的各个顶点都在⊙$O$上.

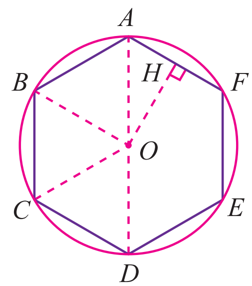


图22－17

类似的，如果将一个圆分成n等份，那么依次连接各等分点所得的多边形是这个圆的内接正n边形；反过来，正n边形的各个顶点都在同一个圆上，这个圆是正n边形的外接圆.

正多边形的外接圆的圆心叫做正多边形的**中心**，外接圆的半径叫做正多边形的**半径**，中心到圆内接正多边形各边的距离叫做正多边形的**边心距**. 正多边形各边所对的外接圆的圆心角都相等，这个圆心角叫做正多边形的**中心角**.

例如，在图22－17中，圆心O是正六边形$ABCDEF$的中心，OA是它的

一条半径，OH 是它的一条边心距，$\angle AOB$ 是它的一个中心角 .

交流

正多边形都是轴对称图形吗？都是中心对称图形吗？举例说明 .

例 1 已知：$\odot O$.

求作：$\odot O$ 的内接正方形 .

作法：(1) 过圆心 O 作直线 AC，与 $\odot O$ 相交于 A，C 两点；

(2) 过点 O 作直线 $BD \perp AC$，交 $\odot O$ 于 B，D 两点；

(3) 连接 AB，BC，CD，DA.

所以四边形 $ABCD$ 为所求（如图 22－18）.

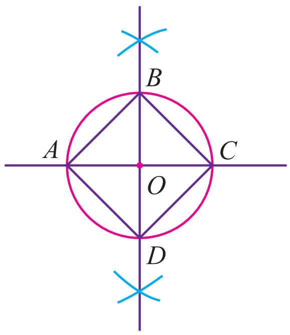


图 22－18

例 2 已知：$\odot O$.

求作：$\odot O$ 的内接正六边形 .

作法：(1) 过圆心 O 作直线 AD，与 $\odot O$ 相交于 A，D 两点；

(2) 分别以 A，D 为圆心，以 AO 为半径画弧，交 $\odot O$ 于 B，F，C，E 点；

(3) 连接 AB，BC，CD，DE，EF，FA.

所以六边形 $ABCDEF$ 为所求（如图 22－19）.

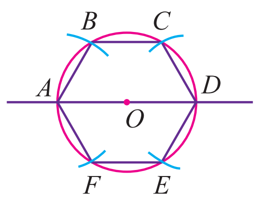
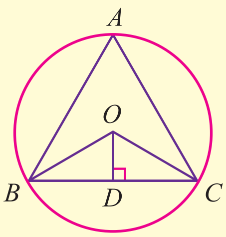


图 22－19

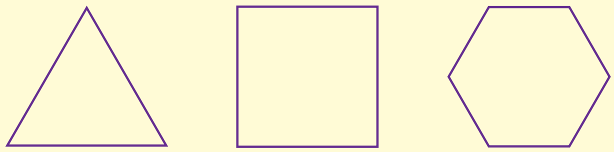
练习

1. 如图，$\triangle ABC$ 是正三角形，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，指出图中各部分的名称：$\odot O$ 的圆心 O 是正三角形的________，OD 是正三角形的________，OC 是正三角形的________，$\angle BOC$ 是正三角形的________.
2. 图中的多边形分别是正三角形、正方形和正六边形 . 如果是轴对称图形，分别

画出它们所有的对称轴；如果是中心对称图形，分别指出对称中心的位置．



（第 1 题）



（第 2 题）

交流

如图 22－20，在下列正多边形中，点 O 是正多边形的中心．

（1）正多边形的半径分别将原来的图形分割成为怎样的三角形？

（2）正多边形的半径、边心距及边长可以通过怎样的图形联系在一起？

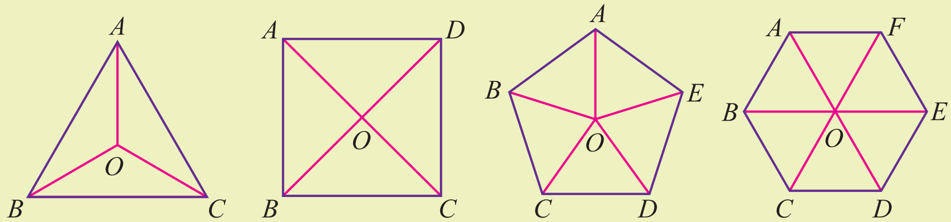


图 22－20

如图 22－21，作正六边形的半径，这些半径将正六边形分成了 6 个等腰三角形，这些等腰三角形是全等的．再作正六边形各边的边心距，这些边心距又将这 6 个等腰三角形分成了 12 个直角三角形，这些直角三角形也是全等的．

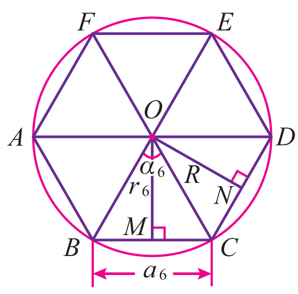


图 22－21

由于这些直角三角形的斜边都是正六边形的半径 R，其中一条直角边是正六边形的边心距 r_6，另一条直角边是正六边形的边长 a_6 的一半，

一个锐角是中心角 α_6 的一半，即 $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$，另一个锐角是正六边形的内角的一半，即 $\frac{(6-2)\times180^\circ}{12}=60^\circ$. 所以，可以借助解 Rt△$OMC$ 来解决正六边形 $ABCDEF$ 的有关计算问题.

转化为解直角三角形的问题.

例 3 已知正三角形 ABC 的半径为 R.

求它的边长 a_3、周长 p_3 和面积 S_3.

解： 如图 22－22，连接 OC，过 O 点作 $OG\perp BC$ 于点 G.

在 Rt△OCG 中，

$$\because\quad \angle GOC=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ,$$

$$\therefore\quad CG=R\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

$$\therefore\quad a_3=2CG=\sqrt{3}R.$$

$$\therefore\quad p_3=3a_3=3\sqrt{3}R.$$

$$\because\quad r_3=R\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}R,$$

$$\therefore\quad S_3=\frac{1}{2}r_3\cdot CG\cdot6=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

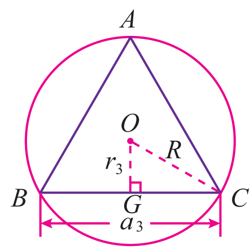


图 22－22

∴ 这个正三角形的边长 a_3 为 $\sqrt{3}R$，周长 p_3 为 $3\sqrt{3}R$，面积 S_3 为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

练习

完成下表中正多边形的有关计算：

边数 n	中心角 α_n	半径 R_n	边长 a_n	边心距 r_n	周长 p_n	面积 S_n
3			2			
4				5		
6		3				

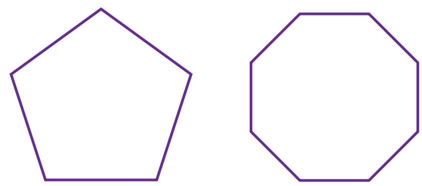
习 题 22－2

★基础★

1. (1) 正方形被它的半径和边心距分成几个直角三角形？这些直角三角形为什么全等？

   (2) 正六边形被它的半径和边心距分成的几个直角三角形中，以正六边形中心为顶点的锐角的度数为多少度？以正六边形的顶点为顶点的锐角的度数为多少度？正三角形呢？

2. 如图，如果图中的正多边形是轴对称图形，请画出它所有的对称轴；如果是中心对称图形，请指出它的对称中心的位置．

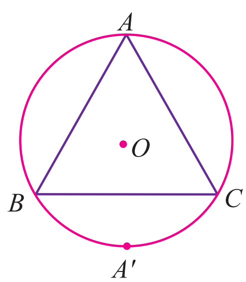


（第 2 题）

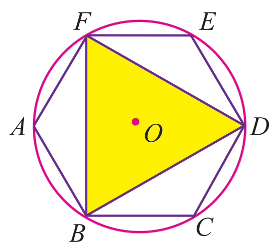
3. 已知正三角形的边长为 6，求它的外接圆的周长．
4. 已知正六边形的边心距为 2，求它的外接圆的面积．
5. 要在圆形铁片上裁出边长为 a 的正方形铁片，求选用的圆形铁片的最小直径．

★★提升★★

1. 如图，把正△ABC 的外接圆对折，使点 A 落在$\overset{\frown}{BC}$的中点 A' 上．如果 $BC=6$，求折痕在△ABC 内的长．



（第 1 题）



（第 2 题）

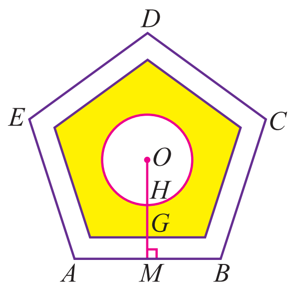
2. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，图中黄色部分的面积为 $12\sqrt{3}$，求⊙O 的半径．
3. 已知正六边形 $ABCDEF$ 的半径为 R，求这个正六边形的边长 a_6、周长 p_6 和面积 S_6.

★★★ 拓展 ★★★

如图，吸顶灯灯罩的内、外边缘都是正五边形，外边缘周长为 26 cm，点 O 为中心．设计人员要在灯罩的正中间留出一个圆形区域，并在图中的黄色部分绘制花纹．已知 $OM \perp AB$ 于点 M，OM 分别交⊙O、灯罩的内边缘于 H，G 两点．

(1) 求灯罩的中心到外边缘的距离；

(2) 如果灯罩的外边宽 $GM = 1$ cm，$HG = 1.6$ cm，求此时⊙O 的半径 OH（结果精确到 0.1 cm）．



阅读理解

从刘徽割圆说起

圆的周长和直径的比称为圆周率，记作 π. 它是一个常数，并且是一个无理数．

怎样利用圆的直径来求圆的周长呢？在我国古代，最早遇到圆的计算时曾采用“径一周三”的方法，即把圆的周长看做直径的 3 倍，相当于取 $\pi = 3$，后人称之为“古率”．后来人们发现“古率”误差太大，圆周率应是“圆径一而周三有余”，不过究竟余多少，意见不一．公元 3 世纪，我国数学家刘徽对计算圆周率提出了新的方法．他用圆内接正多边形的周长近似地表示圆的周长，当边数越多时，正多边形的周长就越接近于圆的周长．他首先在圆内画一个内接正六边形，再不断地把正多边形的边数倍增（如图 22－23）．他一直算到圆内

接正 192 边形，得到了圆周率精确到小数点后两位的近似值 $\pi \approx 3.14$，化成分数为 $\frac{157}{50}$，这就是有名的“徽率”. 刘徽一再声明，“此率尚微少”，需要的话，可以继续算下去，得到更精确的近似值. 刘徽在《九章算术》中写道：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.” 我们称这种方法为刘徽割圆术，它开启了研究圆周率的新纪元.

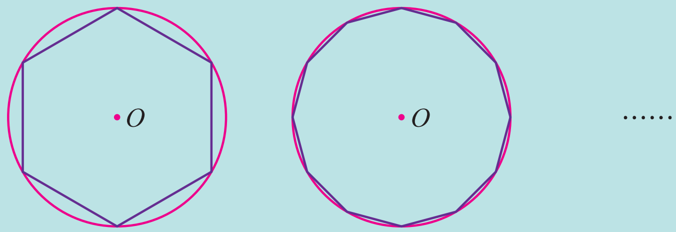


图 22－23

祖冲之（429—500）继承了刘徽的思想，经过刻苦钻研、反复演算，求出 π 的值在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间，最先将 π 值精确到了小数点后 6 位. 他还得出了 π 的分数形式的近似值，取 $\frac{22}{7}$ 为约率，取 $\frac{355}{113}$ 为密率，其中 $\frac{355}{113}$ 是分子、分母在 1 000 以内最接近 π 值的分数. 如果他按刘徽的“割圆术”方法去计算的话，就要计算到圆内接正 16 384 边形，这需要花费多少时间和付出多么艰辛的劳动啊！外国数学家获得与密率同样的结果已是 1 000 多年以后的事了. 人们为了纪念祖冲之为数学发展做出的卓越贡献，将 $\frac{355}{113}$ 叫做“祖率”.

20 世纪 50 年代以后，人们开始借助电子计算机计算圆周率 π 更为精确的近似值，并且随着技术的改进，π 的近似值不断得到新的突破.

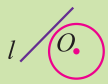
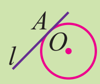
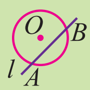
回顾与整理

知识要点

本章的主要内容为：直线和圆的位置关系，圆和正多边形的关系以及它们的简单应用．

1．直线和圆．

直线和圆有三种不同的位置关系：

直线与圆的位置关系	直线与圆的公共点个数	图　形	直线的名　称	公共点名　称	圆心到直线的距离 d 与 r 之间的数量关系
相　离	无				$d>r$
相　切	一个		切线	切点	$d=r$
相　交	两个		割线	交点	$d<r$

经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线．

圆的切线垂直于过切点的半径．

从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，这点和圆心的连线平分两条切线的夹角．

2．圆与正多边形之间的关系．

正多边形的外接圆的圆心叫做正多边形的中心，外接圆的半径叫做正多边形的半径，中心到圆内接正多边形各边的距离叫做正多边形的边心距．正多边形每一条边所对的外接圆的圆心角叫做正多边形的中心角．

学习指导

1. 注意把握数学知识之间的内在联系．比如切线和切线长的概念．切线是直线，而切线长是圆外一点到切点的线段的长．在本章中，由于综合运用了三角形、四边形等知识，因此，我们应该对这些知识及时进行总结和复习．

2. 注意体会研究数学问题的方法．比如，在学习直线和圆的位置关系时，我们类比点和圆的位置关系的研究方法——利用几何量之间的数量关系描述它们的位置关系；在研究正多边形的问题时，常常通过解直角三角形来解决等．

3. 充分运用现代信息技术．现代信息技术的运用，为同学们提供了探究数学问题的一种手段，有利于改变学习方式，提高学习效率．比如，在探究与圆有关的比例线段的过程中，同学们可以利用计算机或图形计算器的展示图形运动和测算功能，参与观察、实验、猜想、归纳和证明等的探究过程，体验事物之间相互联系和运动变化的关系，以及特殊和一般的辩证关系．

4. 重视基本技能的训练．比如，会作三角形的内接圆、圆的内接正方形和正六边形，不仅有助于同学们加深对基本知识的理解，还有助于发挥几何直观在数学学习中的作用．

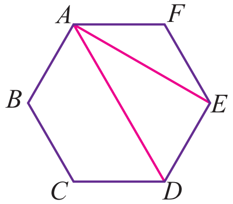
复习题

★基础★

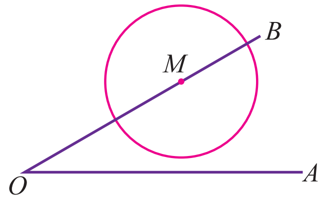
1. 填空题：

(1) 设$\triangle ABC$的内切圆$\odot O$的半径为r，$\triangle ABC$的周长为k，那么$\triangle ABC$的面积为________________.

(2) 如图，AD，AE 是正六边形的两条对角线，不添加任何辅助线，请写出两个正确的结论：____.



[第 1 (2) 题]

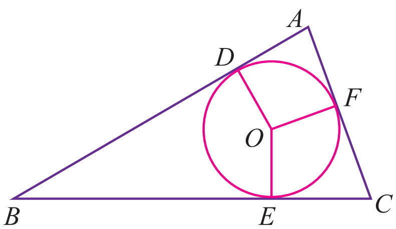


[第 1 (3) 题]

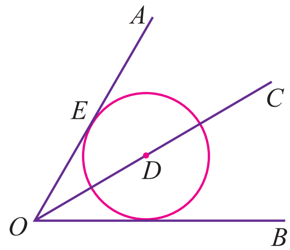
(3) 如图，已知 $\angle AOB = 30°$，M 为 OB 边上一点，以 M 为圆心，2 cm 为半径作 $\odot M$. 如果 $\odot M$ 在 OB 边上运动，那么当 $OM =$ ________ cm 时，$\odot M$ 与 OA 相切.

2. 如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，与边 AB，BC，CA 分别切于点 D，E，F，$\angle DOE = 150°$，$\angle EOF = 110°$，求 $\triangle ABC$ 三个内角的度数.

3. 已知：如图，OC 平分 $\angle AOB$，D 是 OC 上任意一点，$\odot D$ 与 OA 相切于点 E. 求证：OB 与 $\odot D$ 相切.



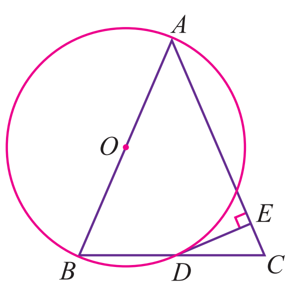
(第 2 题)



(第 3 题)

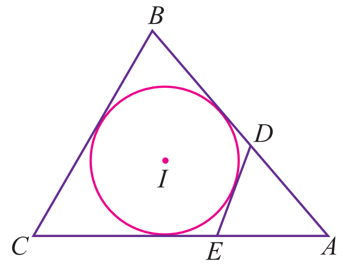
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$，$AB = 6$，内切圆 $\odot O$ 的半径为 2，求斜边 AC 的长.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于 D，过点 D 作 $DE \perp AC$，交 AC 于 E. DE 是 $\odot O$ 的切线吗？为什么？



(第 5 题)

6. 如图，$\odot I$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，$AB=9$，$BC=8$，$CA=10$，点 D，E 分别为 AB，AC 上的点，且 DE 为 $\odot I$ 的切线，求 $\triangle ADE$ 的周长．

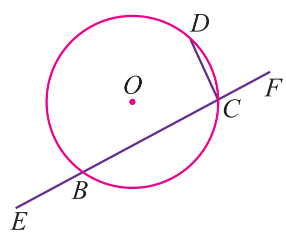


（第 6 题）

★★提升★★

1. 填空题：

（1）如图，直线 EF 与 $\odot O$ 相交于 B，C 两点，DC 为 $\odot O$ 的弦，点 A 为 $\odot O$ 上任意一个动点（点 A 与 B，D 两点不重合）．如果 $\angle DCF=86°$，那么 $\angle DAB$ 的度数为 ________ ．



[第 1（1）题]

（2）正多边形的一边所对的中心角与该正多边形的一个内角的关系是 ________ ．

2. 选择题：

（1）下列命题正确的是（　　）．

A. 三角形的外心到三边距离相等　　B. 三角形的内心不一定在三角形的内部

C. 等边三角形的内心、外心重合　　D. 三角形不一定有内切圆

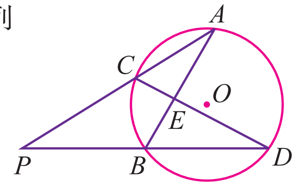
（2）如图，点 P 是 $\odot O$ 外一点，PA 与 $\odot O$ 相交于点 C，A，PD 与 $\odot O$ 相交于点 B，D，CD 与 AB 相交于点 E. 下列等式成立的是（　　）．

A. $PC \cdot AC = PB \cdot BD$

B. $CE \cdot AE = BE \cdot ED$

C. $CE \cdot CD = BE \cdot BA$

D. $PB \cdot CD = PC \cdot BA$



[第 2（2）题]

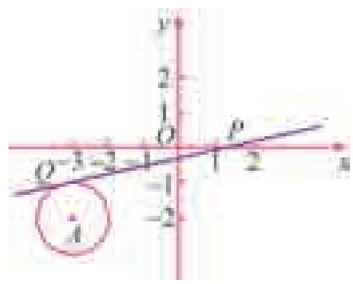
3. 等边三角形的外接圆半径与内切圆半径之比为________.

4. 已知正方形 $ABCD$ 内切圆的半径为 6，求这个正方形的外接圆的面积.

★★★ 拓展 ★★★

1. 已知⊙O 的半径为 R，过已知的圆外一点 P 作直线与⊙O 交于 A，B 两点．求证：$PA \cdot PB = OP^2 - R^2$.

2. 如图，在平面直角坐标系中，A 点坐标为（-3，-2），⊙A 的半径为 1，P 为 x 轴上的一个动点，PQ 切⊙A 于点 Q．求当 PQ 最小时，点 P 的坐标.



（第 2 题）

附　录

部分中英文词汇索引

中　文	英　文	页　码
比例线段	proportional segments	3
黄金分割	golden cut	6
相似多边形	similar polygons	13
相似比	similarity ratio	13
二次函数	quadratic function	39
抛物线	parabola	41
反比例函数	inverse proportion function	63
双曲线	hyperbola	65
正　弦	sine	77
余　弦	cosine	79
正　切	tangent	79
锐角三角函数	acute trigonometric function	80
解直角三角形	solving a right triangle	88
圆	circle	106
半　径	radius	106
直　径	diameter	109
圆心角	central angle	109
外接圆	circumcircle	113
外　心	circumcenter	113
内接三角形	inside triangle	113
圆周角	angle of circumference	123
切　线	tangent line	138
内切圆	inscribed circle	145
内　心	incenter	145