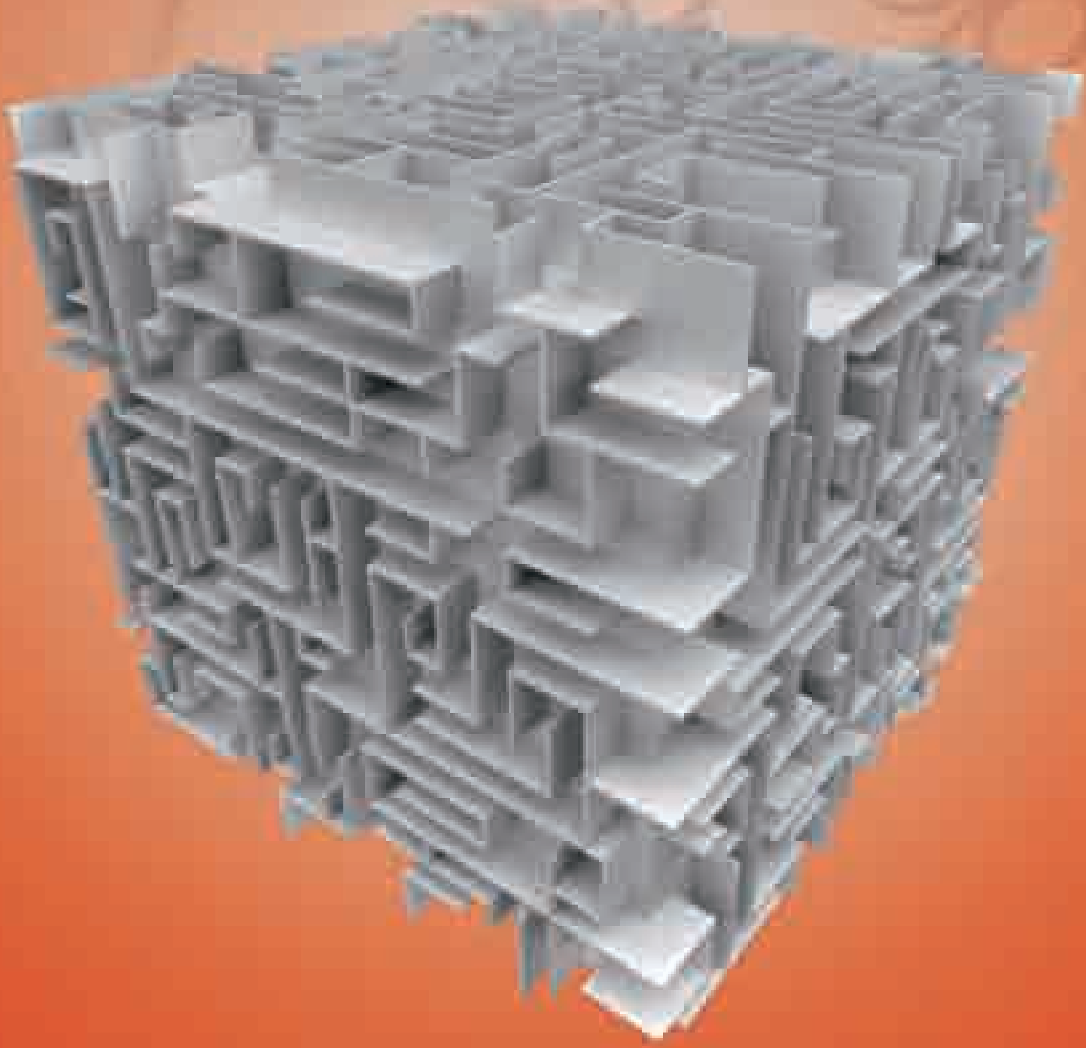
教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级 下册



北京出版社

教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级 下册

北京教育科学研究院 编

北京出版社

前 言

亲爱的同学们：

欢迎你们使用本套义务教育教科书！

数学是研究数量关系和空间形式的科学，是人类文化的重要组成部分。通过本套教科书，能够获得良好的数学教育，在数学上得到不同程度的发展。

栏目说明

思考

思考是数学发展的前提，不要放弃任何一个独立思考的机会，甚至在别人已经说出答案而你还没有找到例子或思路的时候也不要放弃。

交流

将你的思路和方法记录下来，有条理地向其他同学或老师表达，耐心倾听他们的意见，调整自己的思路或方法。

探索

严谨观察、细致分析、大胆猜想、细心验证、不断反思，直到找到满意的结论，体会数学探索的艰辛与乐趣。

实践

学好数学不仅要勤于动脑，也要勤于动手。动手画图、计算、列式、填表，将实际问题转化为数学问题，用数学的方法解决问题。

问题解决

你将遇到富有趣味性、挑战性的数学问题。这些问题需要你在理解的基础上，运用所学的数学知识和方法，寻求解决问题的思路和线索，猜想与验证结论，并将解决问题的整个过程有条理地记录下来，和同学们分享。

探究学习

你将面对一个新的情境，需要你发现和提出问题，独立思考，通过归纳、概括、类比、证明，得到新的猜想或规律，或者得到一个崭新的方法。

阅读理解

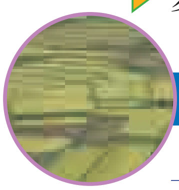
你将会发现数学发展的悠久历史，体验数学家探索数学的艰辛与快乐，感受数学对其他学科的巨大贡献。数学是人类文化的重要组成部分。

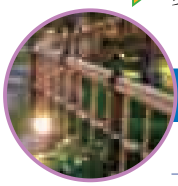
综合与实践

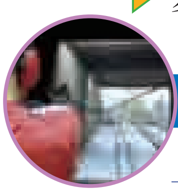
数学既能锤炼思维又具有广泛应用的事实将在这里得到充分的体现。你将尝试综合运用所学的数学概念、原理、方法和思想去解释和解决实际生活中的问题与现象，经历制定方案、调查研究、收集数据、整理数据、分析数据、做出判断、发现规律等过程，感受到数学的魅力。

希望这套数学教科书能够陪伴你度过一个充满智慧、乐趣的初中！

目　录







第十四章
一次函数

世界上的万事万物都在不停地发展着、变化着，在这些发展和变化的过程中，存在着各式各样相关联的量．

例如，从家走向学校，在商店里购物，在操场上进行百米赛跑，飞机从北京飞往上海……在这些活动中存在着很多变化着的量．这些量在变化中有什么规律？有什么相依关系？用什么方法来反映这些量的变化规律和它们之间的相依关系？怎样运用这些规律和关系来解决我们在生活中遇到的问题呢？

这是我们在本章将要学习的内容．

一、函数和函数的图象

14.1 函数

1. 变量和常量

交流

1. 在章前页所列举的每一项活动中，都存在着哪些互相关联的量？这些量中，哪些量是在不断变化的？哪些量是保持不变的？

2. 在你的身边是否有这样的事物，它涉及变化的量和不变的量？

从北京到上海的飞机在飞行过程中，涉及的量有：飞行时间、飞行里程、乘客的总人数、行李的总质量、油箱内的剩余油量……其中，飞行时间、飞行里程、剩余油量等都是不断变化的量；乘客的总人数、行李的总质量都是不变的量……

一般地，在一个变化的过程中，可以取不同数值的量叫做**变量**，只取同一数值的量叫做**常量**．

例 1 判断下面各题中，哪些是常量，哪些是变量：

(1) 用公式 $S=\pi r^2$ 计算圆的面积；

(2) 用公式 $s=vt$ 计算汽车以每小时 80 千米匀速行驶的路程；

(3) 一个容积是 10 万升的储油罐内储满了汽油，如果每天运出 4 000 升，计算储油罐内的剩余油量．

解：(1) 在 $S=\pi r^2$ 中，π 是常量，r 和 S 都是变量；

(2) 在 $s=80t$ 中，80 是常量，s 和 t 都是变量；

(3) “10 万升”和“4 000 升”是常量，“供油的天数”和储油罐内的“剩余油量”都是变量．

练习

电度表内存入了 1 000 度[①]电，每度电收费 0.48 元，计算每月的电费．在此计算过程中存在着哪些量？哪些是变量？哪些是常量？

2. 函数

在事物的变化过程中，存在着变量和常量．这些量之间有什么关系呢？

例如，在飞机飞行的过程中，起飞后的飞行里程和油箱内的剩余油量与起飞后的飞行时间分别有什么关系呢？

探索

1. 已知飞机的平均航速是 14 km/min，请填写下表：

飞行时间 /min	5	15	20	30	45	60	70	80	100
飞行里程 /km									

2. 已知这架飞机起飞时油箱内的油量为 13 t，飞行时每分钟耗油 0.12 t，请填写下表：

飞行时间 /min	5	15	20	30	45	60	70	80	100
剩余油量 /t									

3. 飞行里程和油箱内的剩余油量是怎样受到飞行时间的影响和制约的？

在填表的过程中我们发现，“飞行里程”、油箱内的“剩余油量”是受到“飞行时间”的影响和制约的．对于“飞行时间”的每一个值，“飞行里程”和“剩余油量”都有唯一确定的值和它对应．

一般地，在一个变化过程中，有两个变量 x 和 y，对于变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，我们就把 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，y

① 1 度 = 1 千瓦时．

是 x 的**函数**.

例 2 下面每题都给出了某个变化过程中的两个变量 x 和 y，判断 y 是不是 x 的函数：

(1) y：正方形的面积.　　x：这个正方形的周长.

(2) y：长方形的面积.　　x：这个长方形一边的长.

(3) y：一个正数的平方根.　　x：这个正数.

(4) y：一个正数的算术平方根.　　x：这个正数.

解：(1) 对于正方形周长的每一个值，这个正方形的面积都有唯一确定的值和它对应，所以 y 是 x 的函数；

(2) 对于长方形一边长的每一个值，这个长方形的面积是不确定的，它没有唯一确定的值和它对应，所以 y 不是 x 的函数；

(3) 对于正数的每一个值，都有两个互为相反数的平方根和它对应，由于和它对应的值不是唯一的，所以 y 不是 x 的函数；

(4) 对于正数的每一个值，都有唯一确定的算术平方根和它对应，所以 y 是 x 的函数.

练习

1. 学校组织同学们看电影，人数和总票款之间存在函数关系吗？如果存在，指出其中的自变量和因变量，描述一下它的因变量是怎样受到自变量的影响和制约的.
2. 举出可以看做函数的例子，指出其中的自变量、因变量和常量，描述一下它的因变量是怎样受到自变量的影响和制约的.
3. 下面每题都给出了某个变化过程中的两个变量 x 和 y，判断 y 是不是 x 的函数：

   (1) y：等边三角形的面积.　　x：这个等边三角形的边长.

   (2) y：三角形的周长.　　x：这个三角形的面积.

我们解答过一些求代数式的值的题目，例如根据字母 x 的一些值，求出如

$$3x^2-2x+4,\quad \frac{x+1}{3x-2},\quad \sqrt{5-3x},\quad \cdots$$

这样一些代数式的值. 例如当 x 的值分别取 -5，0，1，…时，$3x^2-2x+4$ 的

值分别为 89，4，5，…；$\dfrac{x+1}{3x-2}$ 的值分别为 $\dfrac{4}{17}$，$-\dfrac{1}{2}$，2，…；$\sqrt{5-3x}$ 的值分别为 $2\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}$，….

1. 根据函数的意义，可以把 x 看做自变量，把代数式的值 y 看做因变量，那么 y 是 x 的函数吗？为什么？

2. 自变量 x 的取值范围有限制吗？如果有，这些限制是什么？

思考

一般地，对于 x（使代数式有意义）的每一个值，各代数式都有唯一确定的值和它对应，所以可以把 x 看做自变量，把各代数式的值 y 看做因变量，y 就是 x 的函数．这些函数可以写成

$$y=3x^2-2x+4,\ y=\frac{x+1}{3x-2},\ y=\sqrt{5-3x}\ ,\cdots$$

对于函数 $y=3x^2-2x+4$，x 可以取任意实数；对于函数 $y=\dfrac{x+1}{3x-2}$，x 可以取不等于 $\dfrac{2}{3}$ 的任意实数，也可以表示为 $x\neq\dfrac{2}{3}$；对于函数 $y=\sqrt{5-3x}$，x 可以取不大于 $\dfrac{5}{3}$ 的任意实数，也可以表示为 $x\leqslant\dfrac{5}{3}$．

想一想，为什么？

思考

圆的周长公式 $C=2\pi r$ 中，自变量 r 的取值范围是什么？

对于周长公式 $C=2\pi r$，自变量 r 的值不仅要使式子 $2\pi r$ 的值存在，而且还要有实际意义，所以 r 的取值范围不是一切实数，而是一切正实数．

一般地，研究函数时应考虑函数的自变量的取值范围．

练习

1. 求下列函数中自变量 x 的取值范围：

(1) $y=3x-5$；

(2) $y=\dfrac{x-3}{2x+7}$；

(3) $y=\sqrt{4-3x}$；

(4) $y=\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}$.

2. 下面各事物中变量之间存在函数关系吗？如果存在，分别指出它们各自的自变量和因变量．用怎样的式子可以由自变量的值计算出因变量的值？函数的自变量的取值范围是什么？

(1) 全校共有 2 530 名学生．现自愿购买运动服，如果每套 85 元，统计购买运动服的人数并计算总金额．

(2) 汽车在离 A 城 45 km 处的公路上，以 70 km/h 的速度向远离城市的方向行驶，计算汽车离 A 城的路程．

14.2 函数的表示法

思考

在前面，我们曾用 $s=80t$，$y=3x^2-2x+4$，$y=\dfrac{x+1}{3x-2}$，…来表示函数关系，其中：t，x，…都表示自变量；s，y，…都表示因变量．那么这些表示函数的式子有什么共同的特征？

它们都是用关于自变量的代数式来表示因变量的式子，应用它们可以由自变量的每一个值，计算出相对应的因变量的值．

像这样，用含有表示自变量的字母的代数式表示因变量的式子叫做函数的**表达式**．这种表示函数关系的方法称为解析法．

利用函数的表达式，既可以由函数的任意一个自变量的值求出相应

的函数的值(简称函数值)，也可以由某一个确定的函数值求出相应的自变量的值.

例 已知两个函数的表达式分别为

$$y=2x-5 \quad 和 \quad y=\frac{1}{2}x^2.$$

(1) 当 $x=-4$ 时，分别求出这两个函数的函数值；

(2) 当这两个函数的函数值都为 18 时，自变量 x 分别取什么值?

解: (1) 把 $x=-4$ 分别代入这两个函数的表达式，得

$$y=2x-5=2\times(-4)-5=-8-5=-13.$$

$$y=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\times(-4)^2=\frac{1}{2}\times 16=8.$$

所以，当 $x=-4$ 时，函数 $y=2x-5$ 的函数值为 -13，函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的函数值为 8.

(2) 把函数值 $y=18$ 代入函数的表达式 $y=2x-5$，得

$$18=2x-5.$$

解这个方程，得

$$2x=23.$$

所以 $$x=\frac{23}{2}.$$

把函数值 $y=18$ 代入函数的表达式 $y=\frac{1}{2}x^2$，得

$$18=\frac{1}{2}x^2.$$

于是，得

$$x^2=36.$$

因为 x 是 36 的平方根，所以

$$x=6 \quad 或 \quad x=-6.$$

所以，当这两个函数的函数值都为 18 时，函数 $y=2x-5$ 的自变量 x 的值为 $\frac{23}{2}$，函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的自变量 x 的值为 6 或 -6.

探索

某城市有一路全程共 22 站的公共汽车，其票价是这样规定的：1 ~ 4 站，1.00 元；5 ~ 8 站，1.50 元；9 ~ 14 站，2.00 元；15 ~ 22 站，2.50 元．

在这里，票价是乘车站数的函数吗？如果是，怎样表示这个函数呢？

在这种乘车收费的规定下，对于乘车的每一个站数，都有一个唯一确定的票价和这个站数相对应，所以票价与乘车站数也存在着函数关系．由于这个函数的自变量只有 22 个值，所以用列表的方法就可以表示出它们的对应关系：

乘车站数	1 ~ 4	5 ~ 8	9 ~ 14	15 ~ 22
票价 / 元	1.00	1.50	2.00	2.50

像这样用列表来表示函数关系的方法称为列表法．

交流

洞庭湖地区连日遭受暴雨袭击，导致湖水的水位猛涨，图 14 − 1 是涨水期 22 日至 27 日的水位记录．观察这个图形，你能从中获得什么信息？

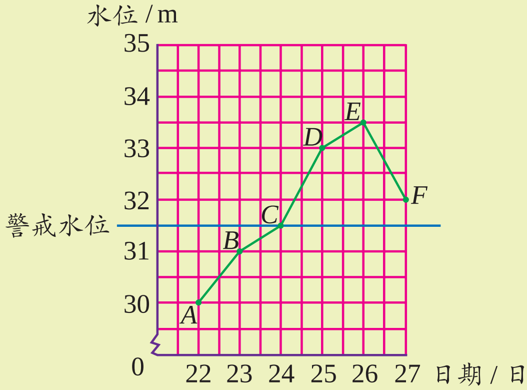


图 14 − 1

观察这个图形．

(1) 填下表，得：

日期 / 日	22	23	24	25	26	27
水位 / m	30	31	31.5	33	33.5	32

(2) 这几天中的每一时刻，都有唯一确定的水位和它对应，所以可以认为水位是时间的函数；

(3) 从 22 日起，水位开始上涨，26 日水位达到最高；

(4) 从 24 日起，水位开始超过警戒水位，全天水位上涨了 1.5 m；

(5) 从 26 日起，水位开始回落；

……

由此可见，用这样的图形表现一个函数关系的变化状态，可以做到直观、简洁和一目了然．我们把这样的图形叫做这个函数的图象．用画图象表示函数关系的方法称为图象法．

归纳起来，表示函数关系的主要方法有解析法、列表法和图象法．

练习

1. 某文具店促销一种圆珠笔，它的单价随购买量的增加而降低．具体方案如下：

   1 ~ 5 支，每支 1.00 元；

   6 ~ 10 支，每支 0.90 元；

   11 ~ 20 支，每支 0.80 元；

   21 支及以上，每支 0.70 元．

   顾客购买这种圆珠笔时，他的付款总额 (元) 与他购买的数量 (支) 是函数关系吗？如果是，用适当的方法表示这个函数关系．

2. 已知城市轻轨列车的平均速度约是 1 330 m/min．廖欣同学每天上学时，须先步行 850 m 到达轻轨车站．当他上车后，离家的总路程 s 是他上车后的时间 t 的函数吗？如果是，请写出这个函数的表达式．

3. 请你找一个用图象法表示函数的实例，说出你从中获得的信息．

14.3 函数图象的画法

思考

1. 在电影院里，你是怎样找到自己的座位的？
2. 从中你能找到一种表示平面上点的位置的方法吗？

1. 平面直角坐标系

在平面内，画出原点重合的两条互相垂直的数轴（图 14－2），就组成了一个**平面直角坐标系**．其中，水平方向的数轴叫做 x 轴，竖直方向的数轴叫做 y 轴，原点叫做坐标原点．

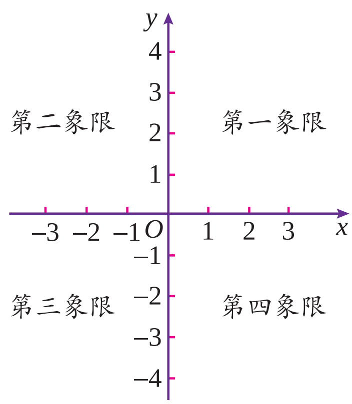


图 14－2

x 轴和 y 轴把平面直角坐标系所在的平面分为四个区域，分别称为第一象限、第二象限、第三象限和第四象限．x 轴和 y 轴不属于任何象限．一般情况下，x 轴和 y 轴取相同的单位长度．

设 P 是平面直角坐标系中的一点，作 $PA\perp x$ 轴于 A，$PB\perp y$ 轴于 B，点 A 和点 B 在 x 轴和 y 轴上分别对应于 -3 和 $+4$（图 14－3）．依照这样的方法，对于平面直角坐标系内的任何一个点，一定存在一对实数和它对应．

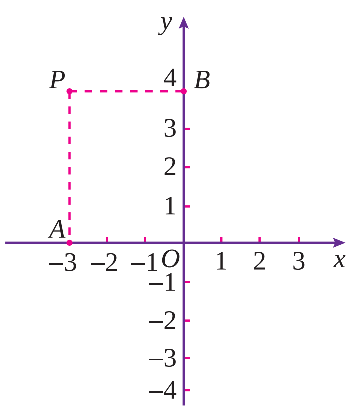


图 14－3

我们把平面直角坐标系中的任意一个点 P 在 x 轴上的对应点所表示的实数 m 叫做点 P 的**横坐标**，在 y 轴上的对应点所表示的实数 n 叫做点 P 的**纵坐标**，把 m 和 n 合在一起叫做点 P 的**坐标**，记作 $P(m，n)$．

实践

1. 在平面直角坐标系中的各个象限内和两条坐标轴上作出一些点，并确定这些点的坐标，同时注意各点坐标的符号变化.

2. 利用计算机或图形计算器，在平面直角坐标系中拖动动点，观察动点坐标的变化，看看点的位置和点的坐标有什么关系(图 14－4). 并回答：

(1) 在各个象限内点的横坐标和纵坐标的符号有什么特点?

(2) 在两坐标轴上点的坐标有什么特点?

(3) 如果直线 a 和 y 轴平行，并且经过点(3，0)，那么直线 a 上的点的坐标有什么特点?

(4) 如果直线 b 和 x 轴平行，并且经过点(0，－3)，那么直线 b 上的点的坐标有什么特点?

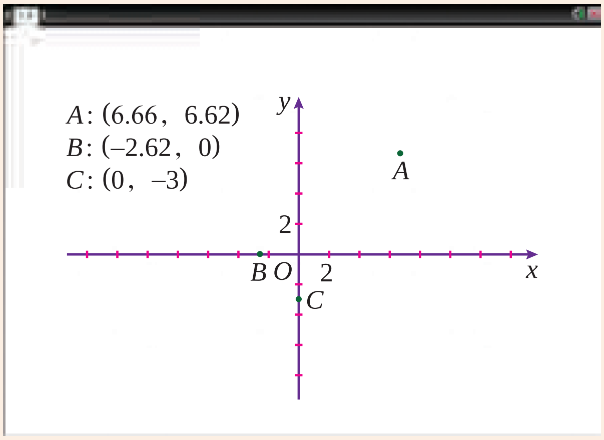


图 14－4

例 1 (1) 在平面直角坐标系中，作出下列各点：

$A(-1,-1)$，$B(-1,1)$，$C(1,1)$，$D(1,-1)$.

顺次连接点 A，B，C，D 所得的图形是哪种特殊的四边形?

(2) 在平面直角坐标系中，已知点 M 的坐标是 $(-5,3)$，点 P 和点 M 关于 x 轴成轴对称，点 N 和点 M 关于 y 轴成轴对称. 分别作出点 N 和点 P，并求出点 N，P 的坐标.

解：（1）如图 14－5（1），四边形 $ABCD$ 是正方形．

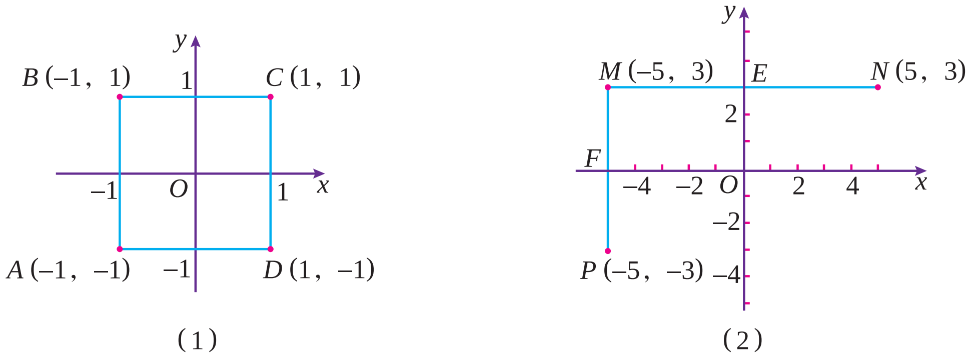


图 14－5

（2）如图 14－5（2），作 ME 垂直 y 轴于点 E，并延长 ME 至点 N，使 $EN = ME$，点 N 就是点 M 关于 y 轴的对称点；作 MF 垂直 x 轴于点 F，并延长 MF 至点 P，使 $FP = MF$，点 P 就是点 M 关于 x 轴的对称点．点 N 的坐标为（5，3）；点 P 的坐标为（－5，－3）．

例 2 分别求出下列各点到 x 轴、y 轴的距离：

（1）（－5，3）；（2）（－3，－4）．

解：（1）点（－5，3）到 x 轴的距离为 $|3| = 3$，到 y 轴的距离为 $|-5| = 5$.

（2）点（－3，－4）到 x 轴的距离为 $|-4| = 4$，到 y 轴的距离为 $|-3| = 3$.

实践

1. 在平面直角坐标系的各个象限内确定一些点，并作出这些点关于 x 轴对称的点，再作出这些点关于 y 轴对称的点．

2. 如图 14－6，利用计算机或图形计算器，拖动平面直角坐标系中的动点，观察动点关于坐标轴对称点的坐标的变化．并回答：

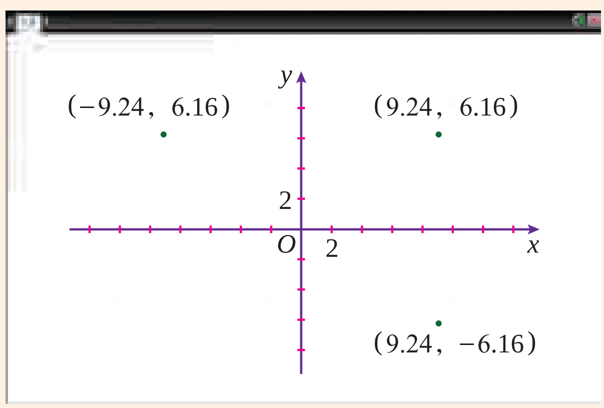


图 14－6

(1) 关于 x 轴对称的两个点的坐标有什么关系？

(2) 关于 y 轴对称的两个点的坐标有什么关系？

不难发现，关于 x 轴对称的两个点的横坐标相同，纵坐标互为相反数；关于 y 轴对称的两个点的纵坐标相同，横坐标互为相反数 .

练习

1. 点 $A(-3,\ 4)$ 和点 $B(3,\ 4)$ 关于________轴对称 .
2. 点 $P(2,\ -3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是________；关于 y 轴对称的点的坐标是________.
3. 在平面直角坐标系中，描出下列各点：$A(-2,\ 1)$ 和它关于 y 轴的对称点 B；$C(0.5,\ -2)$ 和它关于 y 轴的对称点 D；顺次连接 A，B，C，D，看看得到什么图形 .

2. 函数图象的画法

把一个函数的一个自变量的值，和它所对应的因变量的值分别作为一个点的横坐标和纵坐标，就能在平面直角坐标系中描出相应的一个点，由所有这样的点组成的图形，就是这个函数的图象 .

实践

在平面直角坐标系中，分别画出下面三个函数的图象：

(1) $y=2x$；　　(2) $y=x^2$；　　(3) $y=x^3$.

在动手之前，请想一想：

(1) 这三个函数的自变量 x 的取值范围分别是什么？是否可以把每一个点都画在坐标纸上？

(2) 如果不能，是否能选择一些合适的点，使我们通过一定数量的点的位置，估计出这个函数图象的形状和变化趋势？你怎样选取这些合适的点？

由于这三个函数的自变量 x 的取值范围都是全体实数，我们可以选取和原点对称的又便于计算的一些自变量的值，从而得出各自对应的因变量的值．

填写下表：

x / y 函数	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=2x$	…								…
$y=x^2$	…								…
$y=x^3$	…								…

我们把每个函数的 7 个点从左到右用平滑的曲线依次连接起来，就得到这三个函数的图象，如图 14－7 所示．

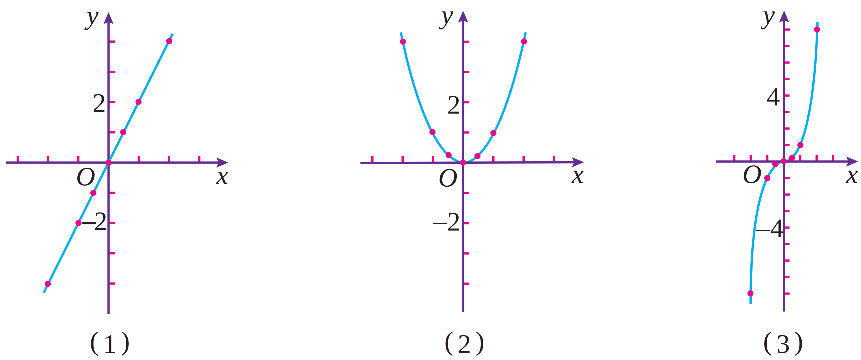


图 14－7

在画图时，由于每两个点之间还存在无数多个符合条件的点，所以我们总可以根据需要作出更多的点，以便更准确地看出曲线的走势，画出更精确的图象．有时所得的图象是一条直线 [图 14－7(1)]，有时所得的图象是一条弯曲、平滑的曲线 [图 14－7(2)、(3)].

实践

利用计算机或图形计算器，可以快速准确地得到函数的图象，如图 14－8.

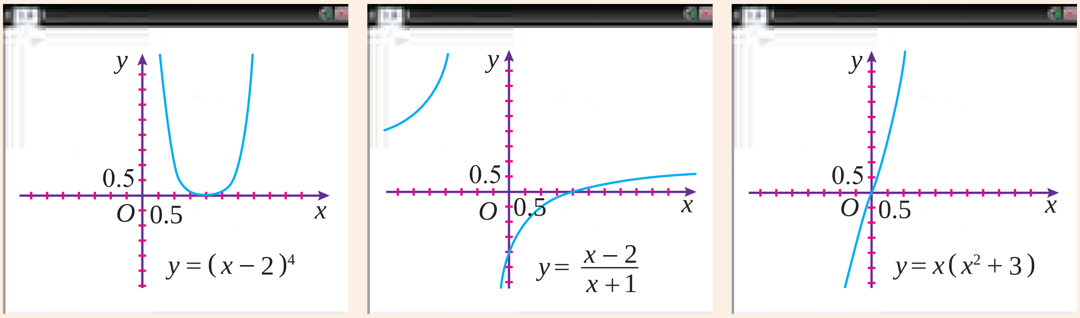


图 14－8

练习

1. 在同一坐标系中画出下列函数的图象：

（1）$y=-x$；　　（2）$y=x+2$；　　（3）$y=-\frac{1}{2}x^2$.

2. 写出在函数 $y=\frac{1}{2}x-2$ 的图象上的五个点的坐标：________，________，________，________，________.

3. 利用计算机或图形计算器，画出任意几个简单函数的图象 .

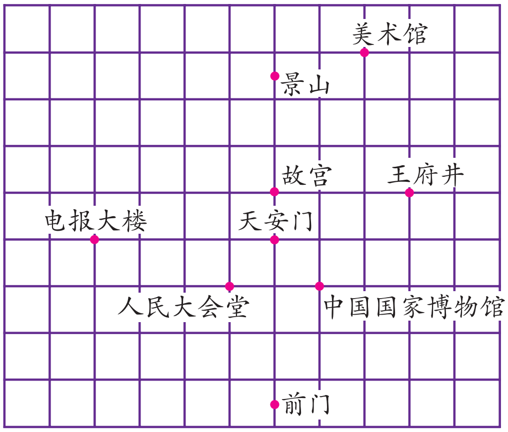
习　题　14－1

★基础★

1. 根据点所在的象限用“＋”、“－”填表：

	横坐标符号	纵坐标符号
第一象限		
第二象限		
第三象限		
第四象限		

2. 下图是天安门广场周围的景点分布示意图．试建立平面直角坐标系，用坐标表示各个景点的位置．



（第 2 题）

3. 求下列函数的自变量 x 的取值范围：

（1）$y=-4x$；　（2）$y=\dfrac{3x+1}{2}$；　（3）$y=\dfrac{8}{x+5}$；

（4）$y=\sqrt{2x-5}$；　（5）$y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$．

4. 选择题：

（1）点 P 的坐标为 $(a，b)$，其中 $a<0$，$b<0$，那么点 P 在（　　）.

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

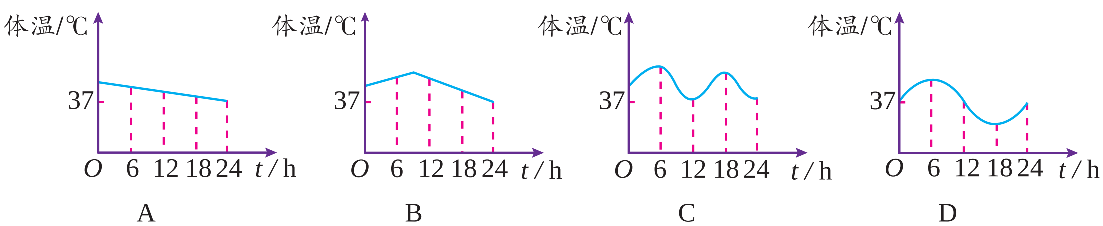
（2）点 $(a，b)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是（　　）.

A. $(-a，-b)$　B. $(b，a)$　C. $(-a，b)$　D. $(a，-b)$

（3）当 $x=0$ 时，点 $A(x，y)$ 一定在（　　）.

A. 第一象限　B. 坐标原点　C. x 轴上　D. y 轴上

（4）一天，肖亮发烧了．早晨他烧得很厉害，吃过药后感觉好多了．中午时他的体温基本正常，但是下午他的体温又开始上升，直到半夜肖亮才感觉身上不那么发烫了．下面能基本反映出肖亮这一天体温变化情况的图象是（　　）.



［第 4(4) 题］

5. 写出下列函数关系的表达式，并指出它的自变量与因变量 .

(1) 三角形的面积 S 为定值时，它的底边长 a 与这条边上的高 h 之间的函数关系 .

(2) 气体质量 m 一定时，它的体积 V 与它的密度 ρ 之间的函数关系 .

(3) 0 ℃时声音在空气中的传播速度是 332 m/s，写出此时声音传播的路程 s(m) 与传播的时间 t(s) 的函数表达式.

(4) 设地面气温是 30 ℃ . 在不高于 12 km 时，如果高度每升高 1 km，气温就下降 6 ℃，写出气温 T(℃) 与高度 h(km) 之间的函数表达式 .

(5) 一种可推拉的长方形塑钢窗，长为 862 mm，打开时的最大宽度为 475 mm. 若设打开的宽度为 x mm，写出打开部分的面积 $S(\text{mm}^2)$ 与打开的宽度 x(mm) 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围 .

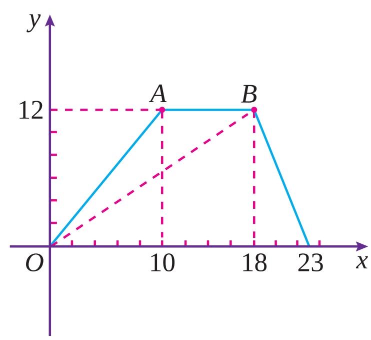
6. 一个函数的图象如图所示，根据图象回答下列问题：

(1) 写出函数的自变量 x 的取值范围 .

(2) 当 x 的值逐渐变大时，函数值 y 怎样变化?

(3) 求线段 AB 的长 .

(4) 求△AOB 的面积 .



(第 6 题)

★★ 提升 ★★

1. 求下列函数的自变量 x 的取值范围：

(1) $y=\dfrac{3-\sqrt{x-2}}{x-2}$；　　(2) $y=\dfrac{3x+1}{x^2+1}$；

(3) $y=\dfrac{1}{3x-5}+\sqrt{5-x}$；　　(4) $y=\sqrt{2x+4}-\sqrt{3-2x}$.

2. 选择题：

(1) 如果点 $P(a，b)$ 在第三象限，那么点 $Q(-2a+3，b-1)$ 在 (　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

(2) 点 P 的坐标为 $(2-a，3a+6)$，且点 P 到两坐标轴的距离相等，那么点 P 的坐标是 (　　).

A. (3，3)　　B. (3，−3)　　C. (6，−6)　　D. (3，3) 或 (6，−6)

3. 点 $P(a+3，2b-1)$ 和点 $Q(3b-2，1-a)$ 关于 x 轴对称，求点 $M(a，b)$ 的坐标 .

4. 如果一个等边三角形 ABC 的一边 AB 在 y 轴上，其顶点 A 在坐标原点 . 已知 $AB=1$，求第三个顶点 C 的坐标 .

5. 下表是五年中全国高考报名人数和招生人数统计（单位：万人）：

年　份	报名人数	招生人数
2006	950	540
2007	1 010	567
2008	1 050	596
2009	1 020	630
2010	957	627

根据统计表，和同学交流你所得到的信息 .

6. 恩格尔系数 η 表示在一定时期内家庭日常食品支出 W（元）占家庭消费总支出 y（元）的比例，它反映了居民家庭的实际生活水平 . 各种家庭类型的恩格尔系数如下表所示：

家庭类型	贫困家庭	温饱家庭	小康家庭	富裕家庭	最富裕家庭
恩格尔系数 η	60% 以上	50% ~ 60%	40% ~ 50%	20% ~ 40%	不到 20%

（1）如果某类家庭的恩格尔系数 η 是定值，那么这类家庭的日常食品支出 W（元）是否是消费总支出 y（元）的函数？如果是，写出这个函数的表达式 .

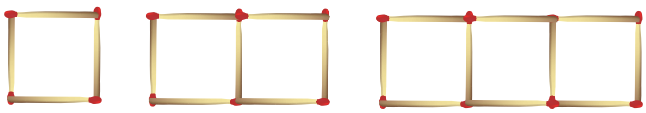
（2）请估算一下你家的恩格尔系数，判断你的家庭属于什么生活水平 .

（3）如果某温饱家庭、小康家庭、富裕家庭的消费总支出分别为 3 000 元、6 000 元和 12 000 元，那么，这三个家庭的日常食品支出各在什么范围内？

★★★ 拓展 ★★★

1. 搭 1 个正方形需要 4 根火柴棍 .

（1）按照图中的方式，搭 2 个正方形需要几根火柴棍？搭 3 个正方形呢？



（第 1 题）

（2）搭 10 个这样的正方形需要多少根火柴棍？

（3）如果用 x 表示所搭正方形的个数，搭 x 个这样的正方形需要 y 根火柴棍，那么 y 与 x 之间存在函数关系吗？如果存在，请你写出函数的表达式 .

（4）用 100 根火柴棍可以搭多少个这样的正方形？

2. 摄氏温度(℃)和华氏温度(°F)是表示温度的两种方法，它们的关系如下表：

摄氏温度/℃	0	10	20	30	40	50
华氏温度/°F	32	50	68	86	104	122

在平面直角坐标系中，通过描点的方法观察各点的分布情况，并回答：

(1) 顺次连接各点，判断各点是否在同一条直线上；

(2) 试着写出华氏温度 y(°F) 和摄氏温度 x(℃) 之间的函数表达式 .

二、一次函数

14.4 一次函数

交流

1. 判断下列每个问题中的两个变量是否构成函数关系 . 如果是，指出哪一个是自变量，哪一个是因变量，并分别写出每一个函数表达式：

(1) 等腰三角形顶角的度数 α 和它的一个底角的度数 β 对应；

(2) 一个长方形的一边的长是 3 cm，它的面积 $S(\text{cm}^2)$ 和另一边的长 m(cm) 对应；

(3) 某种最大量程为 5 N 的弹簧测力计，弹簧的原长度是 15 cm，挂物每增加 1 N 时，弹簧伸长 0.5 cm，这时，伸长后弹簧的总长度 L(cm) 和所称物重 p(N) 对应 .

2. 根据写出的函数表达式，观察含有自变量的代数式的结构有什么共同的特征 .

不难看到，它们都可以看做函数关系，而且它们的表达式分别是：

(1) $\alpha = 180 - 2\beta\ (0 < \beta < 90)$；　　(2) $S = 3m\ (m > 0)$；

(3) $L = 0.5p + 15\ (0 \leqslant p \leqslant 5)$.

$180-2\beta$，$3m$，$0.5p+15$ 都可以归结为 $kx+b$ 的形式 .

一般地，我们把形如

为什么 $180-2\beta$ 可以看做 $kx+b$ 的形式?

$$y=kx+b\ (k，b\ 为常数，且\ k\neq 0)$$

的函数叫做**一次函数**，其中 x 是自变量 . 当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx\ (k\neq 0)$ 又叫做**正比例函数** .

例 1 一个游泳池有甲、乙两个相同的注水口，每个注水口每分钟注水 7 米^3.

(1) 将游泳池的存水排净，打开甲注水口注入新水，试写出游泳池内的水量 N(米^3) 与注水时间 t_1(分) 的函数表达式和自变量 t_1 的取值范围；

(2) 为了加快注水速度，在打开甲注水口 20 分钟时，又打开乙注水口，写出游泳池内的总水量 P(米^3) 与两注水口同时注水时间 t_2(分) 的函数表达式和自变量 t_2 的取值范围 .

解：(1) 设注入游泳池内的水量为 N 米^3，注水时间为 t_1 分 . 根据题意，得

$$N=7t_1,$$

自变量 t_1 的取值范围是 $t_1>0$.

(2) 设游泳池内的总水量为 P 米^3，两注水口同时注水时间为 t_2 分，这时，游泳池内已存水 140 米^3，每分钟注水 14 米^3. 根据题意，得

$$P=14t_2+140,$$

自变量 t_2 的取值范围是 $t_2>0$.

例 2 八年级 (1) 班学生接受了在公路的一边植 50 棵树的任务，树苗堆放在公路边的 M 处 . 现规定，第一棵树种在离点 M 3 米远的 A 处，而且在 MA 的方向上每隔 5 米种一棵树 . 那么，每种一棵树苗时，送树苗所走的路程 s(米) 是所种树苗的序号 n 的函数 . 求出它的表达式，并求出它的自变量的取值范围 .

分析：

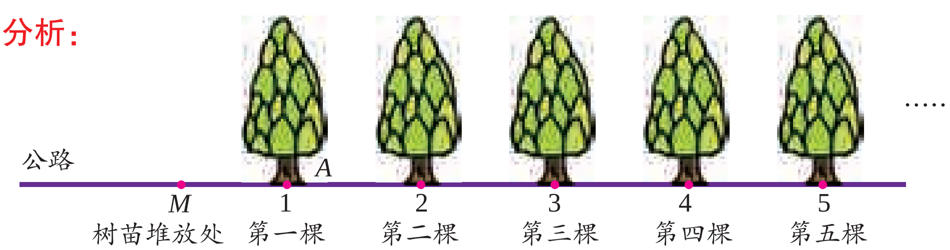


图 14－9

送树苗所走的路程 s(米)和所种树苗的序号 n 的对应关系可列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	…
s/米	3	$3+5\times1$	$3+5\times2$	$3+5\times3$	$3+5\times4$	$3+5\times5$	…

从上表中可以发现 s(米)和 n 的函数关系．

解： 根据题意，得

$$s=3+5\times(n-1).$$

整理，得函数的表达式

$$s=5n-2.$$

自变量 n 的取值范围是：$1\leqslant n\leqslant50$，n 是整数．

练习

1. 下列函数中，哪些是一次函数，哪些不是一次函数？在一次函数中，哪些又是正比例函数？

   (1) $y=-x+4$；　(2) $y=\frac{2}{5}x$；　(3) $y=-\frac{2+x}{3}$；

   (4) $y=-6x^2+7$；　(5) $y=\frac{1}{2}-3x$；　(6) $y=\frac{1}{3x+5}$．

2. 一个长方形的一边比另一边长 3 cm，那么，周长 L(cm)是短边长 a(cm)的函数吗？如果是，写出它的表达式，并求出它的自变量的取值范围．想一想，面积 S(cm^2)是短边长 a(cm)的一次函数吗？

3. 北京到天津的路程约为 120 km，刘海涛和同学一起骑自行车从北京去天津旅游．如果他们骑车的速度是 15 km/h，出发 t 时后，距天津还有 s km 的路程，求 s(km)与 t(h)的函数表达式，并求出 t 的取值范围．

14.5 一次函数的图象

我们知道，$y=2x$ 的图象是一条直线，那么任何一个一次函数的图象也是一条直线吗？

实践

1. 在平面直角坐标系中分别作出下列函数的图象：

(1) $y=-x$；　　(2) $y=-2x+3$；　　(3) $y=2x-3$.

2. 观察所得的图象，你认为一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象也是一条直线吗？如果是，可以怎样快捷地画出它的图象？

列表：

y \ x 函数	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=-x$	…	3	2	1	0	-1	-2	-3	…
$y=-2x+3$	…	9	7	5	3	1	-1	-3	…
$y=2x-3$	…	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	…

描点，作出图象（图 14－10）：

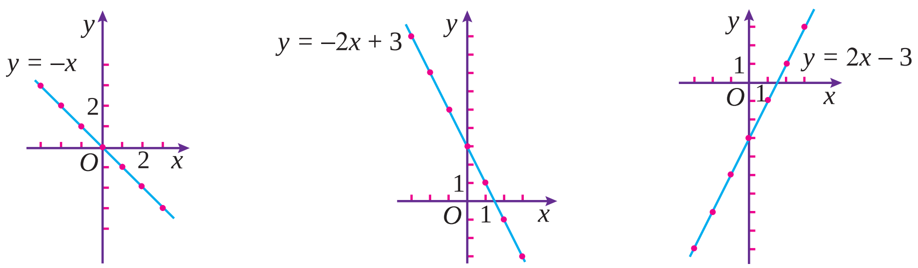


图 14－10

通过描点连线可以发现，函数 $y=-x$，$y=-2x+3$ 和 $y=2x-3$ 的图象也都是一条直线.

所以，我们常把这些函数的图象称为直线 $y=-x$，直线 $y=-2x+3$，直线 $y=2x-3$，等等.

由于两点可以确定一条直线，所以，我们可以说：

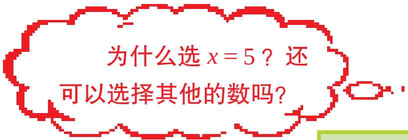
1. 正比例函数 $y=kx$ 的图象是经过原点 (0，0) 和点 (1，k) 的一条直线；

2. 一次函数 $y=kx+b(b\neq 0)$ 的图象是经过点 (0，b) 和点 $\left(-\dfrac{b}{k},\ 0\right)$ 的一条直线.

例 1 作出一次函数 $y=-\frac{3}{5}x+2$ 的图象．

分析： 只需确定两个点的坐标，就能作出这个函数的图象．

解： 列表如下．



x	0	5
y	2	-1

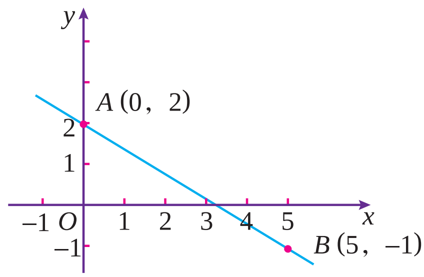


图 14－11

描点画图，如图 14－11.

例 2 一个一次函数的图象经过 $(-3,\ 5)$ 和 $(5,\ 9)$ 两点，求它和坐标轴交点的坐标．

分析： 求出这个一次函数的表达式，就能求出它和坐标轴交点的坐标．

解： 设这个一次函数的表达式为

$$y=kx+b\,(k\neq 0),$$

由于点 $(-3,\ 5)$ 和 $(5,\ 9)$ 在这个一次函数的图象上，所以有

$$\begin{cases}-3k+b=5,\\ 5k+b=9.\end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\ b=\dfrac{13}{2}.\end{cases}$$

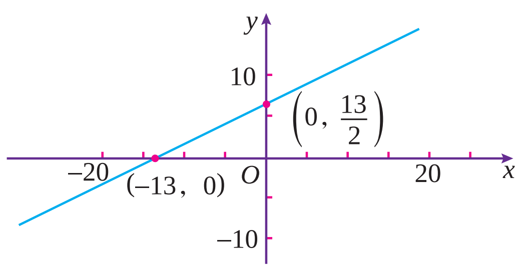


图 14－12

于是，得到这个一次函数的表达式为

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}.$$

令 $x=0$，得 $y=\frac{13}{2}$；令 $y=0$，得 $x=-13$. 所以这个一次函数的图象和 y 轴的交点坐标为 $\left(0,\ \frac{13}{2}\right)$，和 x 轴的交点坐标为 $(-13,\ 0)$（图 14－12）.

应当注意，确定一个函数的表达式，就是要确定表达式中各项系数的值．对于一次函数 $y=kx+b$ 来说，就是确定 k 和 b 的值．像例 2 那样，先把

所求的系数设成未知数，再根据所给的条件确定这些系数的方法，叫做**待定系数法**，它是确定函数表达式时一种常用的方法．

练习

1. 分别在同一坐标系内作出下列各组一次函数的图象：

(1) $y=-\frac{1}{2}x+6$，　　$y=-\frac{1}{2}x$，　　$y=-\frac{1}{2}x-2$；

(2) $y=\frac{1}{2}x+2$，　　$y=x+2$，　　$y=4x+2$；

(3) $y=-\frac{1}{2}x+2$，　　$y=-x+2$，　　$y=-4x+2$.

2. 一次函数的图象经过点 $A(2, 5)$ 和 x 轴上一点 B，且点 B 的横坐标为 -3，求这个一次函数的表达式．

14.6 一次函数的性质

交流

1. 观察前面练习的第 1(1) 题的 3 个函数的图象，你认为一次函数 $y=kx+b$ 中，b 值的变化对图象的位置有什么影响？

2. 分别观察前面练习第 1(2) 题和 (3) 题中的 3 个函数的图象，你认为一次函数 $y=kx+b$ 中，k 值的变化对图象的位置有什么影响？

3. 如图 14－13，利用计算机或图形计算器，观察一下你概括的结论是否正确．

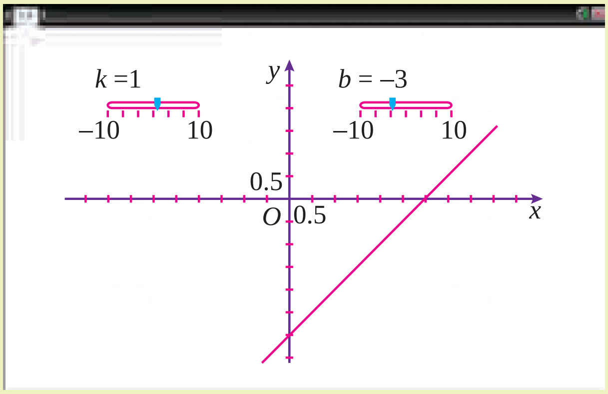
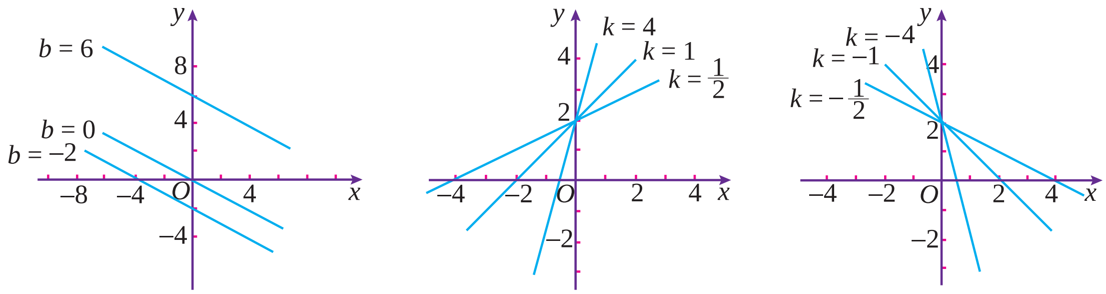


图 14－13

根据前面练习第 1 题的(1)、(2)、(3)题，我们画出了以下三组一次函数的图象：



(1)　　　　(2)　　　　(3)

图 14 − 14

如图 14 − 14(1)，在一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 中，如果 k 的值相同，而对于 b 的不同值，对应的图象是一组互相平行的直线．

观察图 14 − 14(2)、(3) 可以发现，如果 b 的值相同，而对于 k 的不同值，一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的图象是通过点 $(0, b)$ 的一组直线．当 $k > 0$ 时，直线呈现出“左低右高”的变化趋势；当 $k < 0$ 时，直线呈现出“左高右低”的变化趋势．

1. 当一个函数的图象呈现出“左低右高”或“左高右低”的变化趋势时，说说这个函数的自变量增大时，因变量是怎样变化的．

2. 观察图 14 − 14(2)、(3)，在 k 值的影响下，一次函数因变量的变化有什么规律？可以概括出一次函数什么样的性质？

思考

从这里，可以概括出一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的一个重要的性质：

当 $k > 0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

例 1 已知点 $A(-\sqrt{5}, y_1)$ 和点 $B(-2, y_2)$ 是一次函数 $y=-4x+7$ 图象上的点，比较 y_1 和 y_2 的大小．

分析： 根据一次函数的性质，就能由自变量的大小来比较函数值的大小．

解： 因为 $k=-4<0$，

所以 $y=-4x+7$ 的函数值将随 x 的增大而减小．

因为 $-\sqrt{5}<-2$，

所以 $y_1>y_2$.

怎样用图象来分析呢？

例 2 一次函数 $y=(m-3)x+5$ 的函数值随 x 的增大而减小，且一次函数 $y=(3+2m)x-3$ 的函数值随 x 的增大而增大，求同时满足上述条件时，m 的取值范围．

解： 根据一次函数的性质，有

$$\begin{cases} m-3<0, \\ 3+2m>0. \end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$-\frac{3}{2}<m<3.$$

所以，m 的取值范围是 $-\frac{3}{2}<m<3$.

练习

1. 在下列条件下，确定一次函数中因变量随自变量的增大而变化的情况：

(1) $y=x$；　　(2) $y=(a^2+1)x+4$；　　(3) $y=\sqrt{5}+mx$.

2. 已知一次函数 $y=ax+5$ 的图象经过点 $P(-7, 2)$，随着自变量的增大，函数值是增大还是减小？为什么？

14.7 一次函数的应用

生活中很多问题都可以归结为一次函数的问题，并可以用一次函数的知识加以解决 .

例 1 某生产资料门市部出售化肥，每袋售价 80 元 . 为了促进销售，规定了优惠办法：买 3 袋按售价计算，从第 4 袋开始每袋优惠 5%.

(1) 写出购买这种化肥的总金额 M(元) 与购买袋数 n 的函数表达式，并指出它的自变量的取值范围；

(2) 为了快速得到购买这种化肥的总金额，请你利用这个函数的表达式制作一个购买 1 ~ 10 袋化肥的总金额的对照表 .

解: (1) 根据题意，可以知道：

当 $0 \leqslant n \leqslant 3$ 时，可得函数的表达式为

$$M = 80n.$$

自变量 n 的取值范围是 $0 \leqslant n \leqslant 3$ (n 是整数).

当 $n \geqslant 4$ 时，可得函数的表达式为

$$M = 80 \times 3 + 80 \times (1 - 5\%)(n - 3).$$

整理，得

$$M = 76n + 12.$$

自变量 n 的取值范围是 $n \geqslant 4$ (n 是整数).

(2) 当 n 依次取 1 ~ 10 时，分别计算出函数的值，得出下表：

n/ 袋	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M/ 元	80	160	240	316	392	468	544	620	696	772

例 2 甲、乙两个通信公司分别制定了一种移动电话的收费办法 . 甲公司规定：每月收取月租费 50 元，每通话 1 分钟再收费 0.4 元；乙公司规定：不收取月租费，每通话 1 分钟收费 0.6 元 . 那么，应当怎样选择通信公司才能节省电话费？（通话不到 1 分钟按 1 分钟收费）

分析： 据题意，可写出通话费与通话时间的函数关系，在同一坐标系中画出它们的图象，观察图象并通过计算可以得到答案 .

解： 设按照甲、乙两个通信公司的收费标准通话 t 分钟的话费分别为 y_1 元和 y_2 元，则这两个函数的表达式分别为

$$y_1 = 0.4t + 50 \quad (t \geqslant 0,\ t \text{ 为整数})$$

和

$$y_2 = 0.6t \quad (t \geqslant 0,\ t \text{ 为整数}).$$

在同一坐标系中画出它们图象的示意图（图 14－15），两图象的交点为 A，交点处有相同的纵坐标，意味着此时两公司的收费相同．

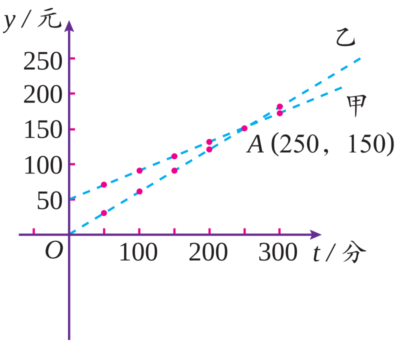


图 14－15

令 $y_1 = y_2$，有

$$0.4t + 50 = 0.6t.$$

解这个方程，得

$$t = 250.$$

由此可以得到如下结论：

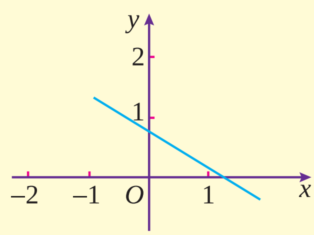
（1）当每月通话时间为 4 小时 10 分时，两公司的收费相同；

（2）当每月通话时间少于 4 小时 10 分时，应选择乙公司；

（3）当每月通话时间多于 4 小时 10 分时，应选择甲公司．

练习

1. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示，那么 k________0，b________0.



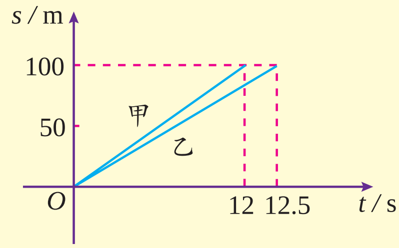
（第 1 题）

2. 某种液化石油气罐储存液态石油气 10 kg，点燃石油气炉后，每分钟消耗 0.02 kg 石油气，那么液化石油气罐内剩余石油气的质量 W（kg）是点燃时间 t（min）的函数．
   （1）请写出函数的表达式，画出它的图象．
   （2）这个函数的自变量 t 的取值范围是什么？
   （3）点燃半小时时，罐内剩余液态石油气的质量为多少千克？
   （4）点燃几小时后，罐内剩余液态石油气的质量正好是原质量的十分之一？
3. 甲、乙两人赛跑时，路程 s（m）和时间 t（s）的关系如图所示，请你观察图象并回答：
   （1）这次赛跑的总路程有多少米？

(2) 甲、乙两人中谁最先到达终点?

(3) 计算出甲、乙两人在这次比赛中的速度.

(4) 写出甲、乙两人赛跑时路程 s(m) 和时间 t(s) 的函数表达式及自变量 t 的取值范围.



(第 3 题)

探索

1. 回忆一次函数的作图过程，说明二元一次方程 $2x-y+3=0$ 的解与一次函数 $y=2x+3$ 及其图象的关系.

2. 利用上面的关系，判断下列方程组的解的个数.

$$\begin{cases} x+2y=0, \\ x+2y+4=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-2=0, \\ 3x-y+1=0. \end{cases}$$

3. 根据上面的经验，探索一元一次方程 $2x+3=0$ 的解，一元一次不等式 $2x+3>0$ 的解与一次函数 $y=2x+3$ 之间的关系.

由此我们发现一次函数与二元一次方程的联系：每个二元一次方程都对应一个一次函数，且以它的每一个解为坐标的点均在相应的一次函数图象上；反之，任意一个一次函数图象上的每一个点的坐标均是相应的二元一次方程的解.

习　题　14－2

★基础★

1. 在同一坐标系内画出下列函数的图象：

(1) $y=2x+5$；　　(2) $y=-\frac{1}{2}x+4$；　　(3) $y=3-\frac{1}{2}x$.

2. 在同一坐标系内画出下列函数的图象，并回答问题.

(1) $y=3x-5$；　　(2) $y=-2x+3$；　　(3) $y=\frac{3}{2}x$.

对于每一个函数：

①图象与 x 轴、y 轴的交点坐标是什么？

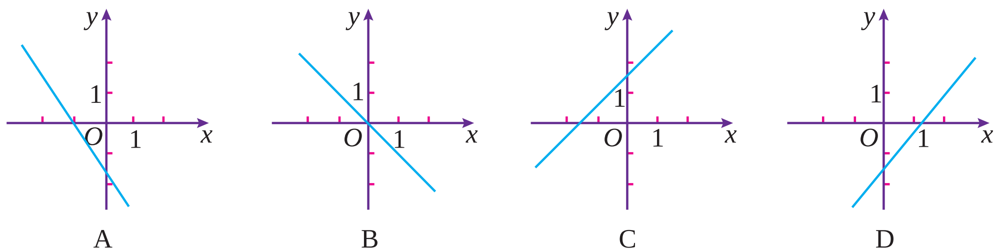
②图象经过哪几个象限？

③随着 x 值的增大，y 的值是增大还是减小？

④分别求出 $y<-2$，$y\geqslant 3$ 时 x 的取值范围 .

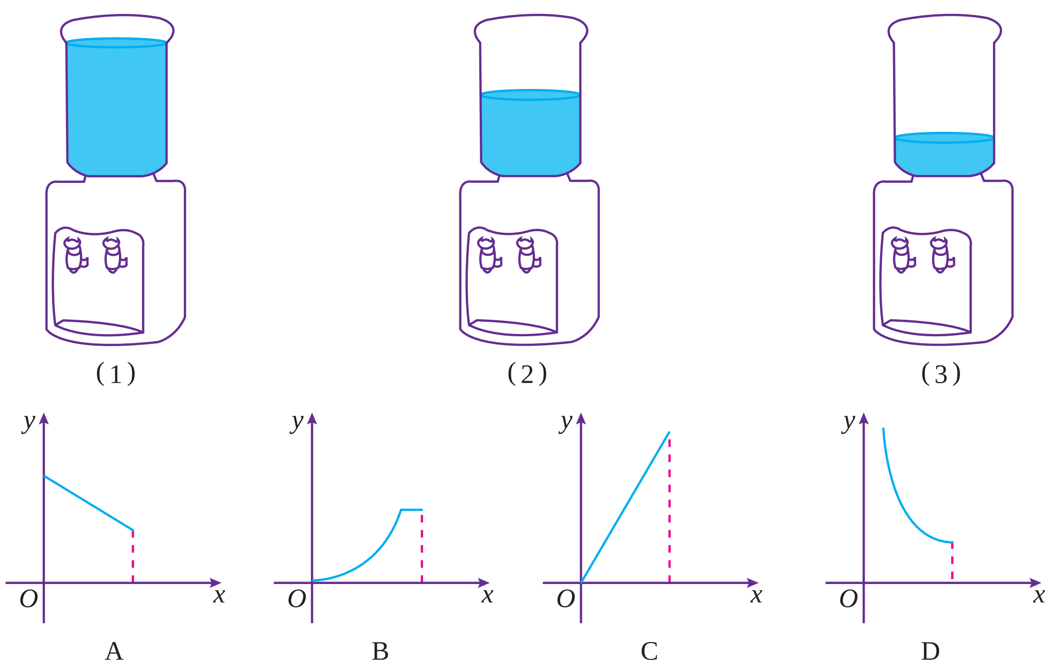
3. 函数 $y=(2k+6)x-k$ 是关于 x 的一次函数，且 y 随 x 的增大而减小，求 k 的取值范围，并指出图象经过哪几个象限 .

4. 在一次函数 $y=kx+b$ 中，已知 $k\cdot b<0$，那么在下面它的图象的示意图中，正确的是(　　).



(第 4 题)

5. 图(1)是饮水机的图片 .打开出水口，饮水桶中水面由图(1)的位置下降到图(3)的位置的过程中，如果水减少的体积是 y，水面下降的高度是 x，那么能够表示 y 与 x 之间函数关系的图象可能是(　　).



(第 5 题)

6. 如果一次函数 $y=(m-1)x+2n-3$ 的图象经过原点，请确定 m，n 应满足的条件 .

7. 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，当 $x=3$ 时，$y=-7$；当 $x=-5$ 时，$y=1$. 求当 $x=-12$ 时 y 的值 .

8. $A(1,\ 3)$，$B(-2,\ 0)$，$C(-4,\ -2)$ 三点是否在同一条直线上？为什么？

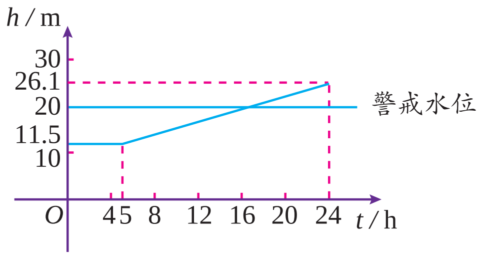
9. 如图所示是某水库一天的水位记录示意图 . 观察图象，回答下列问题：

(1) 在哪一段时间内，水位不变？在哪一段时间内，水位不断上升？

(2) 在哪一段时间内，水位处于警戒水位 (20 m) 之上？

(3) 水位为 22 m 时，约是在几时？

(4) 晚上 12 时的水位是多少？



（第 9 题）

★★提升★★

1. 在下列条件下，求出一次函数的表达式，并画出图象：

(1) 图象和 y 轴的交点的纵坐标为 -3，和 x 轴的交点的横坐标为 -1；

(2) 图象经过点 $(3,\ -1)$，和 x 轴正半轴相交成 $45°$ 角 .

2. 已知一次函数 $y=k_1x-4$ 与正比例函数 $y=k_2x$ 的图象都经过点 $(2,\ 1)$.

(1) 分别求出这两个函数的表达式；

(2) 求这两个函数的图象与 x 轴围成的三角形的面积 .

3. 已知在平面直角坐标系中，点 Q 的坐标为 $(4,\ 0)$，点 P 是直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 上在第一象限内的一点 . 设 $\triangle OPQ$ 的面积为 S.

(1) 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，用含 y 的代数式表示 S，并写出 y 的取值范围 .

(2) 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，用含 x 的代数式表示 S，并写出 x 的取值范围 .

(3) 当点 P 的坐标为何值时，$\triangle OPQ$ 的面积等于直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 与坐标轴围成的三角形面积的一半？

4. 一个一次函数的图象经过点 $A(-3,\ 0)$，且和 y 轴相交于点 B. 当函数图象与坐标轴围成的三角形的面积为 6 时，求这个一次函数的表达式 .

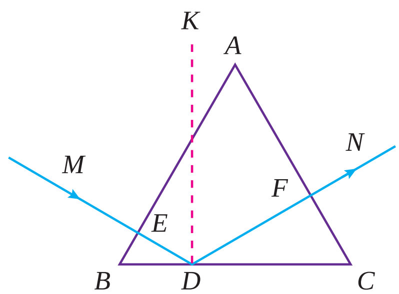
5. 如果两条直线 $y=ax+2$ 与 $y=bx-3$ 都经过 x 轴上的同一点，求 $\frac{a}{b}$ 的值 .

★★★拓展★★★

1. 如图所示，边长为 2 的等边△ABC 是三棱镜的一个横截面．一束光线 ME 沿着与 AB 边垂直的方向射入到 BC 边上的点 D 处（点 D 与 B，C 两点不重合），反射光线沿 DF 的方向射出去，DK 和 BC 垂直，且入射光线和反射光线使 $\angle MDK=\angle FDK$．设 BE 的长为 x，AF 的长为 y.

   （1）求 y 和 x 之间的函数关系，并写出自变量 x 的取值范围；

   （2）在平面直角坐标系中画出该函数的图象．



（第 1 题）

2. 我们都见过测量体温的水银温度计．测量体温时，温度计的水银柱的长短会随体温的高低变化．设体温为 x ℃时，水银柱长为 y cm．请你通过观察实验，求出 y 与 x 之间的函数表达式．

阅读理解

揭开一幅算图的奥秘

某个学校规定，取学生期中测评成绩的 40% 与期末测评成绩的 60% 的和，作为这个学生的学期总成绩．

为了迅速算出学生学期的总成绩，一位同学创造了一幅奇妙的算图（图 14－16）．

这张算图是这样应用的：学生的期中测评成绩用 y 轴上的点的纵坐标表示，期末测评成绩用直线 AB 上的点的纵坐标表示，学期总成绩用直线 PQ 上的点的纵坐标表示．

如果一位学生的期中测评成绩

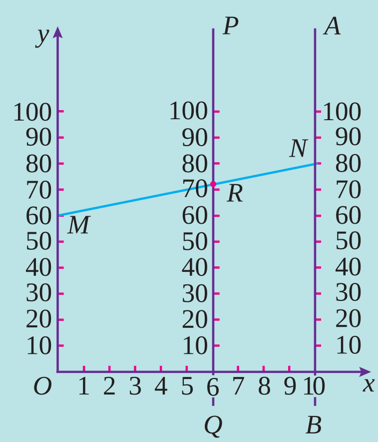


图 14－16

是 60 分，我们就用 y 轴上的点 $M(0, 60)$ 表示；期末测评成绩是 80 分，我们就用直线 AB 上的点 $N(10, 80)$ 表示．连接 MN，MN 与直线 PQ 相交于点 R（图 14－16），那么点 R 的纵坐标“72”就是这位学生的学期总成绩．你来算一算，的确是这样吗？

如此简单实用的算图，它的奥秘在哪里呢？

事实上，算图上过 M，N 两点的直线可以看做是一个一次函数的图象（图 14－17）．设这个一次函数的表达式为

$$y = kx + b\ (k \neq 0).$$

如果某学生期中测评成绩为 m，期末测评成绩为 n，那么，学期总成绩 A 应为

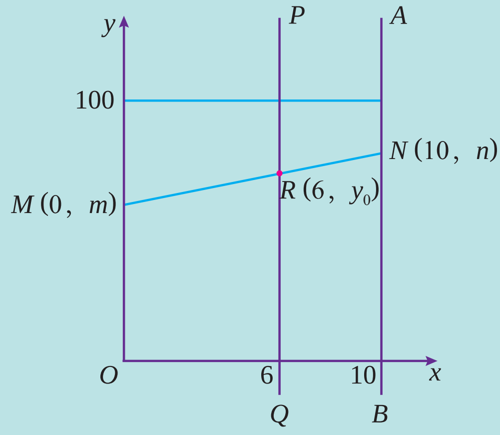


图 14－17

$$A = m \times 40\% + n \times 60\% = 0.4m + 0.6n.$$

那么，利用算图所得到的结果和它相同吗？

不难知道，M，N 的坐标分别是 $(0, m)$ 和 $(10, n)$，由于 M，N 都在函数 $y = kx + b\ (k \neq 0)$ 的图象上，所以有

$$\begin{cases} m = k \times 0 + b, \\ n = k \times 10 + b. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b = m, \\ k = \dfrac{n - m}{10}. \end{cases}$$

所以，函数的表达式为

$$y = \frac{n - m}{10}x + m.$$

由于所取的期末成绩和期中成绩的比是 6∶4，应取 $x = 6$，这时，

点 R 的纵坐标 y_0 为

$$y_0=\frac{n-m}{10}\times 6+m=0.4m+0.6n.$$

不难看到，这个结果与前面用算术方法计算的结果是一致的，证明了利用算图方法的正确性．一次函数的知识帮助我们揭开了这张算图的奥秘！

同学们不妨想一想，这张算图在哪里还可以得到更实际的应用？

回顾与整理

知识要点

1. 常量和变量、自变量和因变量以及函数的概念．
2. 函数的主要表示方法：解析法、列表法和图象法．
3. 平面直角坐标系、函数图象的意义和函数图象的画法．
4. 一次函数（包括正比例函数）的意义、表达式的确定方法、图象的画法和函数的性质．

(1) 形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的函数是一次函数，当 $b=0$ 时是正比例函数．

(2) 一次函数 $y=kx+b$ 的图象是通过 $(0,\ b)$ 和 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$ 的一条直线，正比例函数 $y=kx$ 的图象是通过 $(0,\ 0)$ 和 $(1,\ k)$ 的一条直线．

(3) 一次函数 $y=kx+b$ 中，当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

5. 利用待定系数法确定一次函数的表达式．
6. 一次函数与二元一次方程（组）的联系．
7. 应用一次函数、正比例函数的知识解决实际生活中的一些问题．

学习指导

1. 要学会联系生活实际，感受变量、函数的概念，理解函数和函数的自变量取值范围的意义．

2. 平面直角坐标系的建立和函数图象的画法是学习函数的基础，也是数形结合思想的体现，要学会画图、读图、用图．

3. 应该在广泛联系生活实际的事例中理解函数的一般概念，理解一次函数、正比例函数的意义．

4. 应认真掌握一次函数、正比例函数的表达式的确定方法，以及表达式和函数图象的关系，熟悉表达式中的系数对图象位置、变化趋势的影响，能根据表达式正确画出函数的示意图，会通过观察图象归纳出函数的性质．

5. 借助计算机或图形计算器等信息技术，通过对动态图形的观察、归纳、抽象、概括，研究函数的图象，发现函数的性质．

6. 学会把某些生活实际问题归结为一次函数、正比例函数问题，借助于一次函数的图象和性质解决．

7. 学习函数可以使我们进一步体会辩证唯物主义的基本思想，进一步运用转化、数形结合、待定系数法等数学方法，不断提高思维能力．

复习题

★基础★

1. 选择题：

(1) 点 P 的坐标为 (a, b)，其中 $a<0$，$b>0$，那么点 P 在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(2) 点 (a, b) 关于 y 轴对称的点的坐标是 (　　).

A. $(-a, -b)$　　B. (b, a)

C. $(-a, b)$　　D. $(a, -b)$

2. 在平面直角坐标系内分别作出下列函数的图象：

(1) $y=-3x+2$；　　(2) $y=\frac{1}{3}x+4$.

3. 在同一坐标系内作出下列一次函数的图象，并回答问题：

(1) $y=2x-3$；　　(2) $y=-2x+3$.

对于每一个函数：

① 图象经过原点吗？为什么？

② 图象和 x，y 轴有没有交点，交点坐标是什么？

③ 图象经过哪几个象限？随着 x 的增大，y 是增大还是减小？

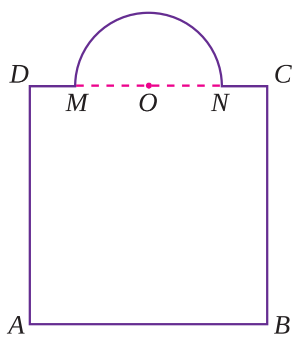
④ 根据图象写出 $y>1$, $y<-3$, $0<y\leqslant 3$ 时 x 的取值范围，并在坐标系内表示出这些范围.

4. 判断下列每两个变量间是否构成函数关系. 如果是，写出函数的表达式和它的自变量的取值范围.

(1) 菱形的边长 a 和它的周长 C.

(2) 三角形一边的长 m 不变，这边上的高 h 和三角形的面积 S.

(3) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 10 cm，半圆 O 的直径 MN 在边 DC 上，O 是 DC 的中点. 设半圆 O 的半径为 r cm，图形的周长为 P cm，变量 r 和变量 P.



[第 4(3) 题]

5. 画出下列两组一次函数的图象，并求出每组中两图象的交点坐标：

(1) $y=2x-1$ 和 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$；

(2) $y=-\frac{3}{2}x+2$ 和 $y=\frac{3}{2}x+5$.

6. 在下列条件下，求出一次函数的表达式，并画出图象：

(1) 图象经过点 $(-5, 1)$ 和 $(2, 4)$；

(2) 图象经过点 $(2\sqrt{3}, -3\sqrt{2})$ 的正比例函数；

(3) 图象和 x 轴的交点的横坐标为 5，和 y 轴的交点的纵坐标为 $-\sqrt{3}$；

(4) 图象经过点 $(1, 2)$ 和 x 轴相交成 45° 角.

7. 已知一次函数和正比例函数的图象交点为 $(2, -1)$，一次函数的图象还经过点 $(0, 5)$，回答下列问题：

(1) 画出图象，求出这两个函数的表达式；

(2) 求出使一次函数的值比正比例函数的值大时，x 的取值范围；

(3) 求出当 $-25 \leqslant x < -1$ 时，两函数对应因变量 y 的取值范围 .

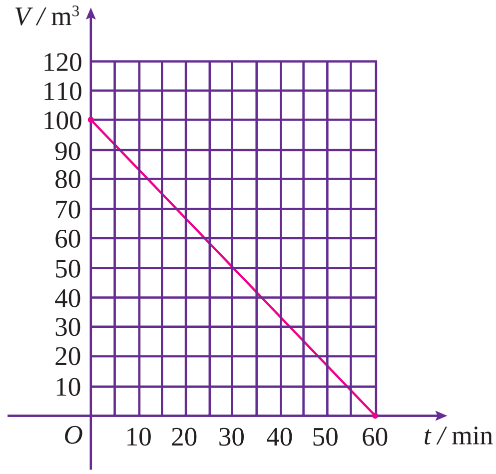
8. 如图,是用图象反映储油罐内的油量 V 与输油管开启时间 t 的函数关系 . 观察这个图象，回答：

(1) 随着输油管开启时间的增加，储油罐内的油量是增加还是减少？

(2) 输油管开启 25 min 时，储油罐内的油量约是多少立方米？

(3) 如果储油罐内至少存油 40 m^3，那么输油管最多可以开启多少分钟？

(4) 输油管开启几分钟后，储油罐内的油量只有原油量的一半？



(第 8 题)

9. 甲、乙两辆卡车匀速行驶在某公路上 .

(1) 如果甲车以 60 km/h 的速度从某地出发，写出它行驶的路程 s_1(km) 和它的行驶时间 t(h) 之间的函数表达式，并画出它的图象；

(2) 如果乙车在甲车出发 2 h 后从同一地点出发，沿同一方向以 80 km/h 的速度行驶，它行驶的路程 s_2(km) 也是甲车出发后的行驶时间 t(h) 的函数，写出它的表达式，并在前一个坐标系中画出它的图象；

(3) 求出两图象交点的坐标，并说明交点坐标的实际意义 .

★★提升★★

1. 选择题：

(1) 如果点 $M(2a+4, a-1)$ 在 y 轴上，那么点 M 的坐标是 (　　).

A. $(-2, -3)$　　B. $(0, -3)$

C. $(-3, 0)$　　D. $(0, 1)$

(2) 点 $N(x, y)$ 在第三象限内，且 $|x|=1$，$|y|=2$，那么点 N 关于 x 轴的对称点的坐标是 (　　).

A. $(-1, 2)$　　B. $(-2, 1)$

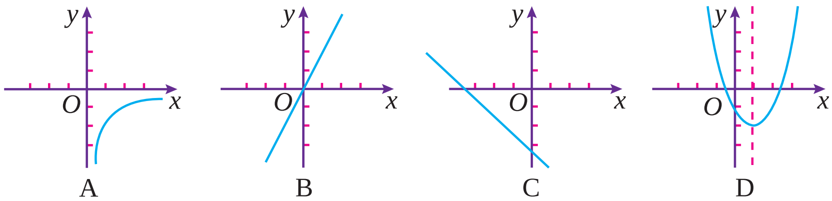
C. $(2, -1)$　　D. $(-1, -2)$

(3) 点 $A(x, y)$ 的坐标满足 $xy>0$，$x+y<0$，那么点 A 在 (　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

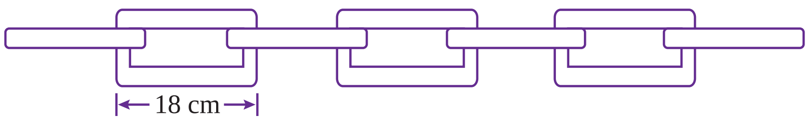
（4）在如图所示的四个函数图象中，y 的值随 x 的增大而减小的是（　　）.



[第 1(4) 题]

2. 一个一次函数的图象经过点（-3，7），当与坐标轴围成的直角三角形有两边相等时，求这个一次函数的表达式.

3. 建造铁索桥用的铁链是由许多个直径为 16 mm 的铁条制成的环形圈（如图）套接而成的. 如果每一个环形圈的长度为 18 cm，那么，铁链的总长度 y（cm）是环形圈的个数 x 的函数吗？若是，求出这个函数的表达式，并求出铁链长 100 m 时，需要制作多少个环形圈.



（第 3 题）

4. 某电脑公司经营 A，B 两种台式电脑. 分析过去的销售记录可以知道：
（1）每台 A 型电脑可盈利 200 元，每台 B 型电脑可盈利 300 元；
（2）在同一时期内，A 型电脑的销售量不小于 B 型电脑销售量的 4 倍.
这个公司的库房最多可存放这两种电脑（它们的包装箱尺寸相同）共 210 台，那么要使公司总利润最大，进货时两种电脑应各购进多少台？

★★★ 拓展 ★★★

甲、乙两个体育用品商店都销售同种乒乓球拍和乒乓球，乒乓球拍每副 38 元，乒乓球每盒 18 元. 由于商业竞争，甲、乙两个体育用品商店都搞促销活动. 甲店规定：每买一副乒乓球拍，都赠送乒乓球半盒；乙店规定：购买乒乓球和乒乓球拍一律 9 折. 现八年级要买乒乓球拍 4 副，乒乓球 4 盒.

（1）在哪个体育用品商店购买比较省钱？

（2）如果八年级要买乒乓球拍 n 副，乒乓球 n 盒，你能运用有关函数的知识探求出一个一般的结论吗？

（3）如果体育设备科要买乒乓球拍 8 副，那么买多少盒乒乓球时，在甲店购买比较省钱？

第十五章
四 边 形

丰富多彩的世界蕴含着各式各样的图形．无论是蜜蜂营造的蜂房，还是平整、无缝隙地铺满地面的地砖；无论是形状迥异的建筑物，还是规划井然的农田……我们从中不仅能看到三角形，而且还能看到四边形、五边形、六边形等图形．

在这一章，我们将走进四边形的世界，学习各种四边形的性质与判定，分析它们之间的关系，并运用四边形的有关知识解决一些新问题．

一、多边形

15.1 多边形

探索

我们已经知道什么叫三角形，你能说出什么叫四边形、五边形、六边形吗？

交流

1. 图 15－1 中各实物的哪些部分呈现出四边形、五边形、六边形的形状？

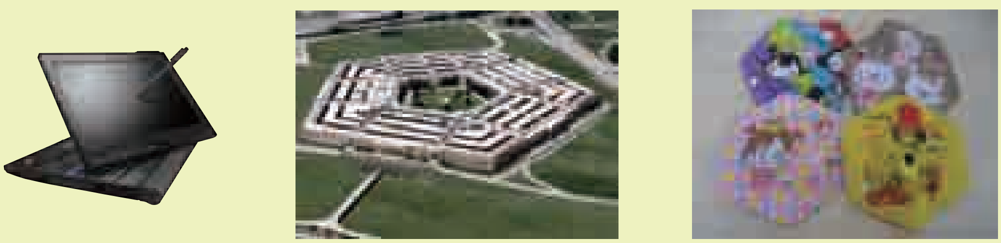


图 15－1

2. 这些图形从构成来看有什么共同特点？

一般地，由 n 条线段首尾顺次相接组成的平面图形称为 n 边形，又称为**多边形**．

我们常把表示多边形各个顶点的字母顺次排列在一起，来表示这个多边形．如图 15－2 中的四边形、五边形可分别记作四边形 $ABCD$、五边形 $ABCDE$ 等．

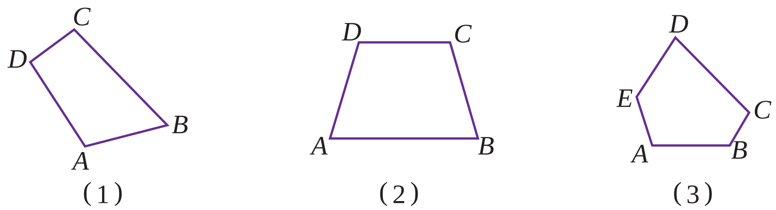


图 15－2

把多边形的任何一边向两个方向延长，如果其他各边都在延长所得直线的同一旁，这样的多边形叫凸多边形，如图 15－3(1)，而图 15－3(2) 就不是凸多边形．现在我们只研究凸多边形．

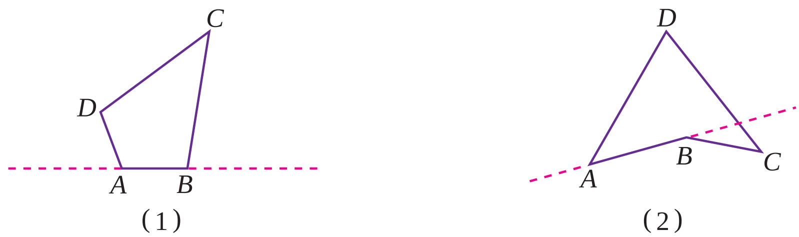


图 15－3

如图 15－4，四边形 $ABCD$ 的四条边分别是 AB，BC，CD，DA，四个顶点分别是点 A，B，C，D，四个内角 (简称角) 分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle DCB$，$\angle D$；$\angle DCE$ 和 $\angle BCF$ 都是与 $\angle DCB$ 相邻的外角，两者互为对顶角．

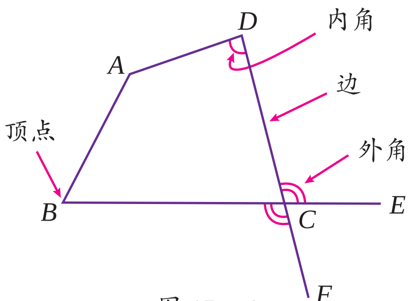
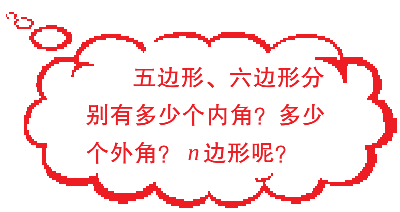


图 15－4



连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的**对角线**．如图 15－5 中的 AC，AD 就是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线．

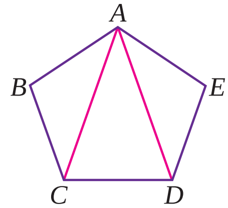


图 15－5

三角形可以看成是边数最少的多边形．

我们知道，正方形的各个角都相等，各条边都相

等．像正方形这样，各个角都相等，各条边都相等的多边形叫做**正多边形**．

在生活中我们经常见到正多边形，你能找出图 15－6 中的正多边形吗？它们各是正几边形？你还能举出正多边形的例子吗？

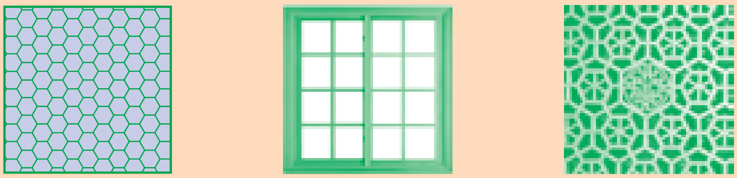
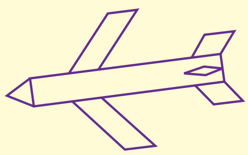


图 15－6

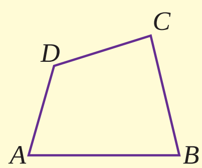
思考

练习

1. 观察图中有几个四边形．在其中一个四边形的顶点处标上字母，并用字母把这个四边形表示出来．

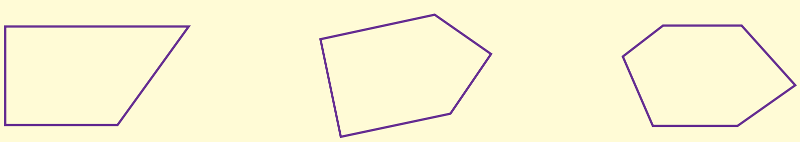


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 图中的四边形可以记作四边形 $ADBC$ 吗？
3. 用字母标注出下列多边形的全部顶点，写出它们的各边和各内角，并画出每个多边形的全部对角线；任意延长一个多边形的一条边，标注出字母，写出它的一个外角．



（第 3 题）

4. 四边形的一条对角线将四边形分成几个三角形？从五边形的一个顶点出发，可以画出几条对角线？它们将五边形分成几个三角形？六边形呢？七边形呢？……

不难发现，四边形的一条对角线把四边形分割成为两个三角形[图 15－7(1)]. 由于三角形内角和等于 180°，所以可知，四边形的内角和是 360°.

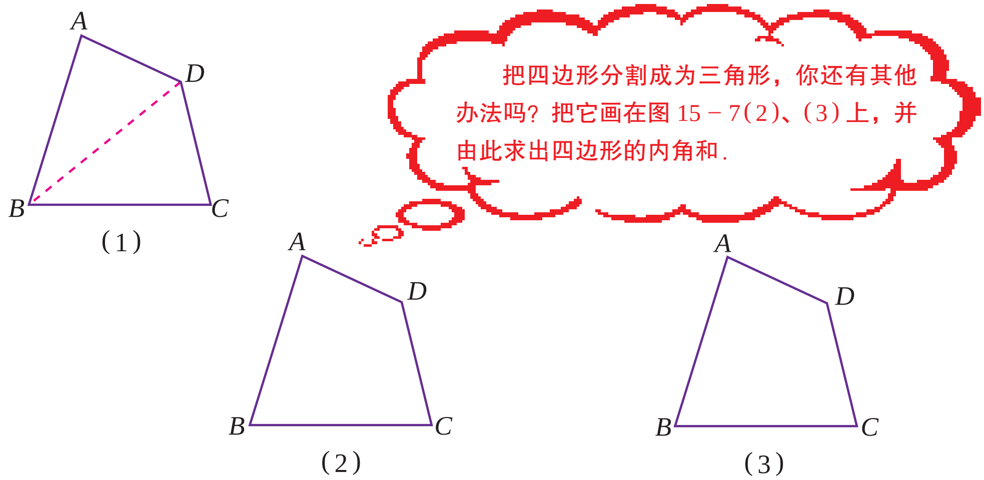


图 15－7

探索

设计一个实验(如剪纸、拼图)，说明四边形的内角和是 360°.

思考

四边形的内角可能都是锐角吗？可能都是直角吗？最多有几个钝角？

交流

如图 15－8，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 是四个外角，怎样求出它们的和呢？

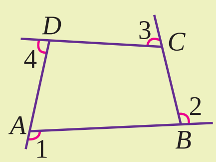


图 15－8

容易看出：

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$
$=(180°-\angle BAD)+(180°-\angle ABC)+(180°-\angle BCD)+(180°-\angle CDA)$
$=720°-(\angle BAD+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA)$
$=720°-360°$
$=360°$.

所以，四边形的外角和等于 360°.

在多边形的每个顶点处取多边形的一个外角，它们的和叫做多边形的外角和.

交流

1. 你能利用把多边形分割为三角形的办法，推导出五边形、六边形……的内角和吗？

2. 把一个多边形分割为若干个三角形来求多边形的内角和，有几种分割方法？分割出的三角形的个数与多边形的边数有什么关系？

3. 多边形的内角和与多边形的边数有什么关系？你能写出由多边形的边数 n 来计算多边形的内角和的计算公式吗？

4. 你能根据“n 边形的每一个内角与和它相邻的外角互为补角”这一关系，推导出 n 边形的外角和是多少吗？

由此得到：

n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，外角和为 360°.

如图 15－9，设想多边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 向 A_1 “收缩”，图形虽然越来越小，但各个外角均保持不变，你能用这个方法探索出多边形的外角和吗？

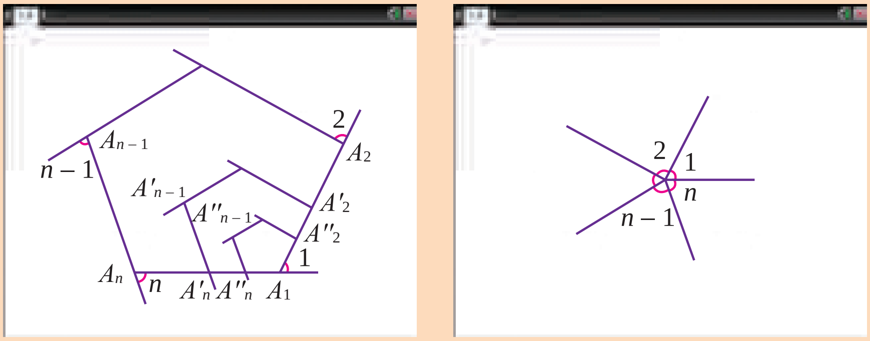


图 15－9

思考

例 如果一个多边形的每个内角都相等，它的一个外角等于一个内角的三分之二，这个多边形是几边形？

解：设这个多边形的边数为 n. 由多边形的内角和与外角和公式，得出这个多边形的

$$\text{一个内角}=\frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n},$$

$$\text{一个外角}=\frac{360^{\circ}}{n}.$$

由已知，得 $\dfrac{360^{\circ}}{n}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}$.

解得

$$n=5.$$

答：这个多边形是五边形 .

交流

多边形的内角和 Q 可以看做是这个多边形的边数 n 的函数吗？为什么？

要学会从不同角度看问题 .

实践

如图 15－10，用四根木条做一个四边形，使两根木条的连接处可以转动 . 做好之后，用手轻轻推拉，你发现了什么？

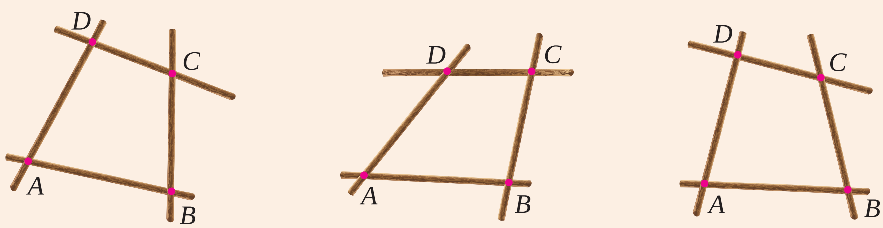


图 15－10

从操作中可以发现，虽然四边形的边长不变，但它的形状却不断改变，这说明四边形具有不稳定性．

四边形的不稳定性在生活中有广泛的应用．观察如图 15 − 11 所示的电动伸缩门，你会发现电动伸缩门就是由许许多多小四边形组成的，它就是利用了四边形的不稳定性．

图 15 − 11

探索

以 $AB = 20$ mm，$BC = 30$ mm，$CD = 18$ mm，$DA = 21$ mm 为边，画出四边形 $ABCD$．和同学们比较一下，大家画出的四边形的形状一样吗？如果使 $\angle ABC = 60°$，再画这个四边形，大家画的形状一样吗？

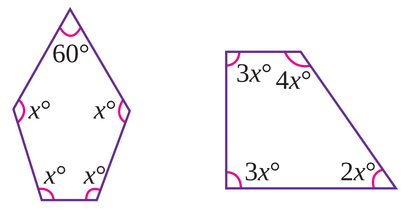
练习

1. 计算下列多边形的内角和：
   (1) 五边形；　　(2) 八边形；　　(3) 十边形．
2. 已知一个多边形的每一个外角都为 36°，求这个多边形的边数．
3. 正三角形、正四边形（正方形）、正五边形、正六边形、正八边形的每个内角分别是多少度？

习　题　15－1

★基础★

1. 求出各图中 x 的值.
2. (1) 一个多边形的内角和是外角和的一半，它是几边形？
   (2) 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形？
3. 一个多边形的每个内角都等于与它相邻的外角，这个多边形是几边形？你能确定它的每个外角的度数吗？

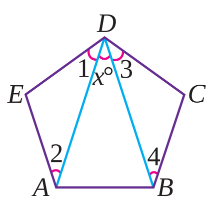


(1)　　(2)
(第 1 题)

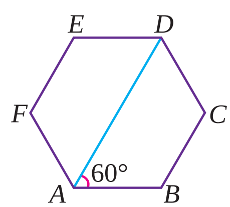
4. 是否存在一个多边形，它的每个外角都等于相邻内角的 $\frac{1}{5}$？简述你的理由.
5. 如果两个多边形的边数相差 1，那么它们的内角和、外角和分别有什么异同？

★★提升★★

1. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，且 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，求 x 的值.



(第 1 题)

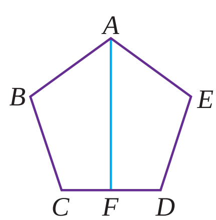


(第 2 题)

2. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$\angle DAB = 60°$. AB 与 DE 有什么关系？ BC 与 EF 有这种关系吗？这些结论是怎么得出的？

★★★拓展★★★

如图，$AB = AE$，$\angle ABC = \angle AED$，$BC = ED$，点 F 是 CD 的中点.
(1) 求证：$AF \perp CD$.
(2) 在你连接 BE 后，还能得到什么新的结论？请写出三个.



阅读理解

换个角度看问题

美籍华人数学家陈省身教授（1911—2004）是当代举世闻名的数学家．他十分关心我国数学科学的发展，人们称赞他是“中国青年数学学子的总教练”．

1980 年，陈教授在北京大学的一次讲学中语惊四座：“人们常说，三角形内角和等于 180°，但是，这是不对的！”

大家愕然！怎么回事？三角形内角和是 180°，这不是数学常识吗？

接着，这位老教授对大家的疑问作了精辟的解答：“‘三角形内角和为 180°’不对，不是说这个事实不对，而是说这种看问题的方法不对，应当说‘三角形外角和是 360°’！”

把眼光盯住内角，只能看到：三角形内角和是 180°，四边形内角和是 360°，五边形内角和是 540°……n 边形内角和是 $(n-2)\times 180°$. 这就找到了一个计算内角和的公式，公式里出现了边数 n.

如果看外角呢？

三角形的外角和是 360°，四边形的外角和是 360°，五边形的外角和是 360°……任意 n 边形的外角和都是 360°. 这就把多种情形用一个十分简单的结论概括出来了，用一个与 n 无关的常数代替了与 n 有关的公式，找到了更一般的规律．

探求问题的本质，寻找事物的规律，用最简单的形式表达，是数学家的追求！

二 平行四边形

15.2 平行四边形和特殊的平行四边形

平行四边形是随处可见的图形，如图 15－12 中的篱笆、道闸、衣帽架等，都具有平行四边形的形象 .

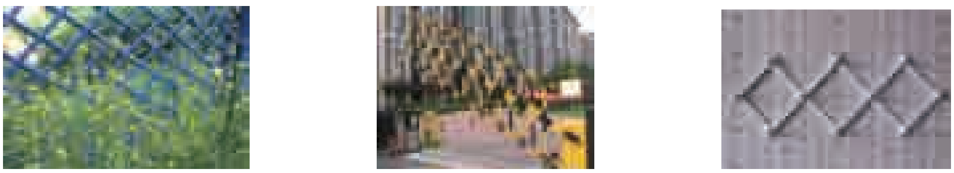


图 15－12

两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形** .

平行四边形是特殊的四边形 . 如图 15－13，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$，那么四边形 $ABCD$ 就是平行四边形 . 平行四边形用符号“▱”表示，“平行四边形 $ABCD$”可以记作“▱ $ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”.

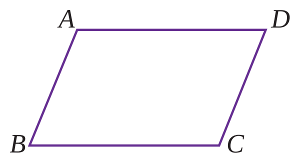


图 15－13

如果改变平行四边形内角的大小或边的长短，就能得到一些特殊的平行四边形 .

交流

如图 15－14，用计算机或图形计算器画一个平行四边形 $ABCD$，拖动点 A，使其在线段 AD 所在的直线上运动，度量 $\angle DAB$ 的大小，你发现平行四边形 $ABCD$ 的形状有什么变化?

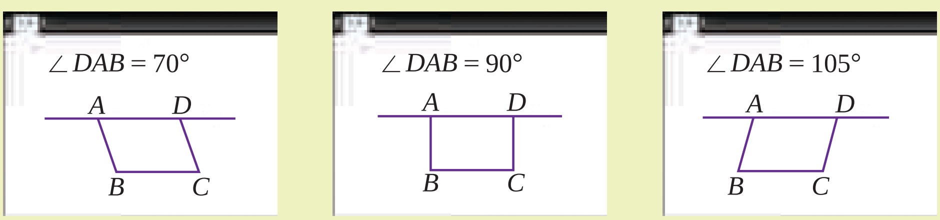


图 15－14

可以发现，随着点 A 的运动，它仍然保持平行四边形的形状，但 $\angle DAB$ 的大小却在不断地改变，它的变化范围是 $0°\sim180°$．当 $\angle DAB$ 是直角时，就得到一种特殊的平行四边形——矩形．

你在什么地方见到过矩形的形象？

有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**．

交流

如图 15－15，用计算机或图形计算器画一个平行四边形 $ABCD$，拖动 AB，使点 A、点 B 分别在线段 AD、线段 BC 所在直线上运动，度量一组邻边 AB，BC 的长，你发现平行四边形 $ABCD$ 的形状有什么变化？

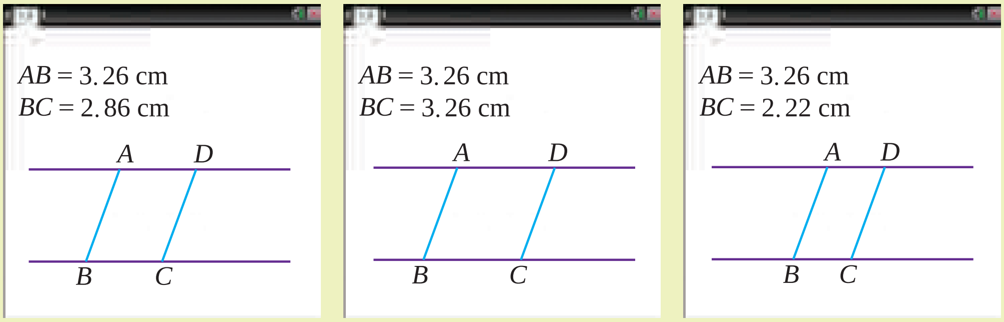


图 15－15

可以发现，随着 AB 的运动，它仍然保持平行四边形的形状，但 BC 的长度却在不断地改变，当 BC 恰好与 AB 相等时，就得到一种特殊的平行四边形——菱形．

有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**．

你在什么地方见到过菱形的形象？

思考

平行四边形是否可能有一组邻边相等并且有一个角是直角呢？这时，平行四边形演变成什么图形？

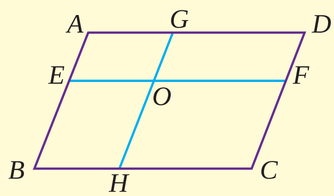
有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做**正方形**．

探索

正方形、矩形、菱形和平行四边形之间存在“特殊”和“一般”的关系，矩形、菱形和正方形之间也存在“特殊”和“一般”的关系，你能用一张图来表示它们之间的这种关系吗？把你设计的图和同学讨论，并把你认为最好的设计方案写在下面的空白处：

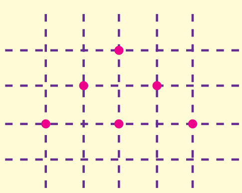
练习

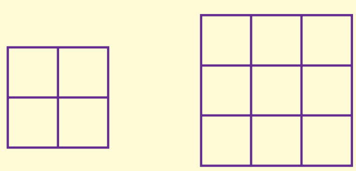
1. 如图，在▱ $ABCD$ 中，$EF \parallel BC$，$GH \parallel AB$，EF，GH 相交于点 O. 试找出图中的平行四边形，与你的同伴比一比，看看谁找出的多 .

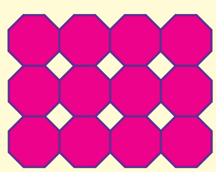


（第 1 题）

2. 矩形、菱形各是怎样特殊的平行四边形？
3. 填空题：
   （1）正方形是__________________的四边形；
   （2）正方形是__________________的平行四边形；
   （3）正方形是__________________的矩形；
   （4）正方形是__________________的菱形 .
4. 如图，以红色格点为顶点，你能画出多少个平行四边形？


（第 4 题）


（1）　（2）
（第 5 题）


（第 6 题）

5. 图中分别有多少个正方形？有多少个矩形？
6. 如图，是以正八边形为主构成的一种图案 . 图中的空白部分所形成的图形的轮廓是怎样的四边形？

15.3 平行四边形的性质与判定

1. 平行四边形的性质

平行四边形是一种特殊的四边形，它除具有四边形的性质外，还有一些特殊的性质 .

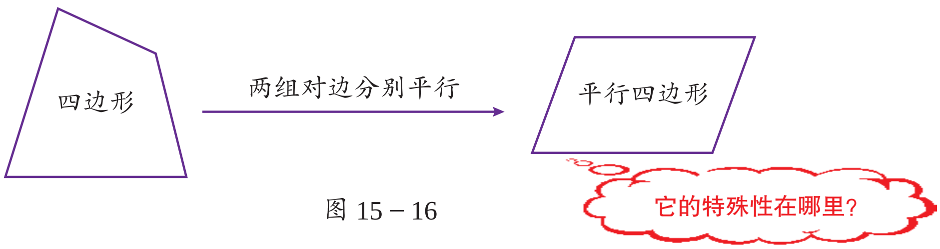


图 15 − 16

交流

如图 15 − 17，用计算机或图形计算器画平行四边形，研究一下：

(1) 平行四边形的对边在长短上有什么关系？为什么？

(2) 平行四边形的对角在大小上有什么关系？为什么？

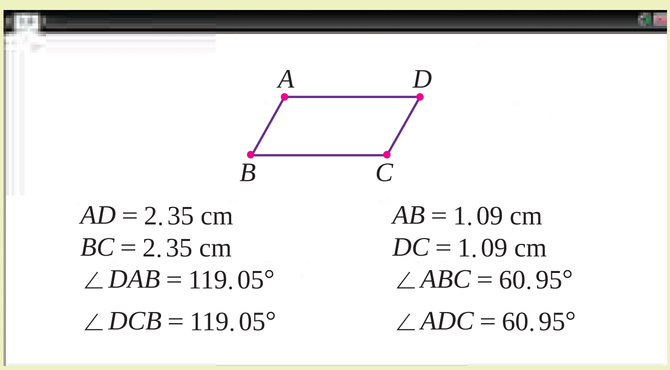


图 15 − 17

可以发现并能证明：

平行四边形性质定理 1　平行四边形的对边相等 .

平行四边形性质定理 2　平行四边形的对角相等 .

下面给出性质定理 1 的证明，性质定理 2 由同学们自己证明 .

已知：如图 15－18，▱$ABCD$.

求证：$AB=CD$，$AD=BC$.

你会运用全等三角形的知识证明吗？

证明： 连接 AC，AC 把▱$ABCD$ 分成$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$.

$\because\quad AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，

$\therefore\quad \angle BAC=\angle DCA$，$\angle BCA=\angle DAC$.

又$\because\quad AC=CA$，

$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore\quad AB=CD$，$AD=BC$.

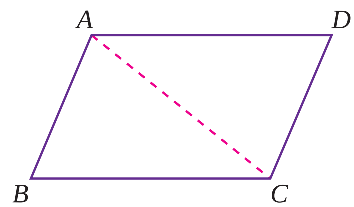
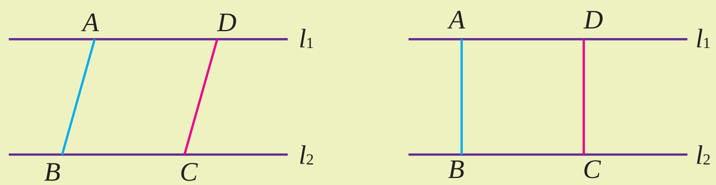


图 15－18

交流

1. 如图 15－19(1)，$l_1 \parallel l_2$，AB 和 CD 是夹在 l_1，l_2 之间的平行线段，AB 和 CD 的长度有什么关系？为什么？



(1)　　(2)

图 15－19

2. 如图 15－19(2)，$l_1 \parallel l_2$，A，D 是 l_1 上不同的两点，线段 AB 和 CD 的长度分别是点 A，D 到 l_2 的距离，AB 与 CD 的长度有什么关系？为什么？

于是得到：

夹在两条平行线间的平行线段相等．

两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离叫做这两条平行线间的距离．由此可得：

平行直线间的距离处处相等．

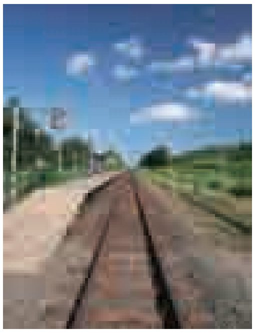


图 15－20

想一想，夹在两根笔直的铁轨之间的枕木是否一样长？为什么？

例 1 如图 15－21，E，F 是▱ $ABCD$ 的对角线 AC 上两点，且 $AE=CF$. 请你写出图中的一对全等三角形，并对此加以证明 .

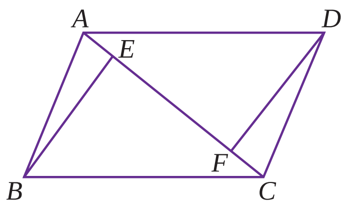


图 15－21

解： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$.

证明如下：$\because$ 在▱ $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，

$\therefore$ $\angle BAE = \angle DCF$.

又 $\because$ $AB=CD$，$AE=CF$，

$\therefore$ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$.

你发现图中有几对全等三角形？

思考

如果已知平行四边形一个内角的度数，你能确定其他三个内角的度数吗？说说理由 .

练习

1. 在▱ $ABCD$ 中，$\angle A=72°$，那么 $\angle B=$_______，$\angle C=$_______，$\angle D=$_______.
2. 已知▱ $ABCD$ 的周长为 60 cm，$AB=12$ cm，那么 $CD=$______________ cm，$BC=$______________ cm.

探索

如图 15－22，如果直线 $l_1 // l_2$，那么 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle DBC$ 的面积是相等的．你能说出理由吗？你还能在这两条平行线 l_1，l_2 之间画出其他与 $\triangle ABC$ 面积相等的三角形吗？

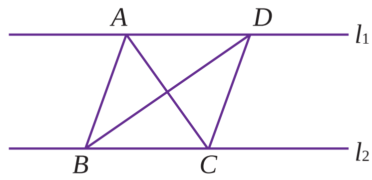


图 15－22

交流

如图 15－23，用计算机或图形计算器画出▱ $ABCD$，它的两条对角线 AC，BD 相交于点 O．观察图形，你能发现并猜想出平行四边形的两条对角线有什么性质吗？能证明你的猜想吗？

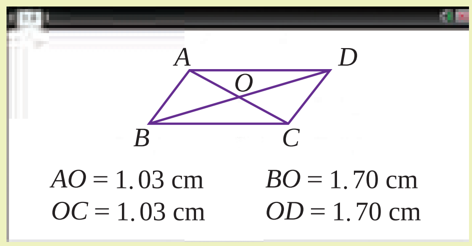


图 15－23

可以发现并能证明：

平行四边形性质定理 3　平行四边形的对角线互相平分．

例 2 如图 15－24，在▱ $ABCD$ 中，已知对角线 AC 和 BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 的周长为 15，$AB=6$，那么对角线 AC 与 BD 的和是多少？

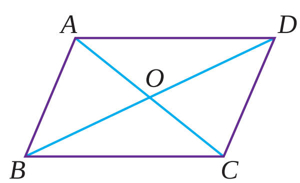


图 15－24

解： $\because\ AO+BO+AB=15$，$AB=6$，

$\therefore\ AO+BO=15-6=9.$

在▱ $ABCD$ 中，

$\because\ AO=OC$，$BO=OD$，

$\therefore\ AC+BD=2AO+2BO=2(AO+BO)=2\times 9=18.$

即▱ $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的和为 18.

练习

1. ▱ $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，OA，OB，AB 的长度分别为 3 cm，4 cm，

5 cm. 求其他各边以及两条对角线的长度 .

2. 如果平行四边形的两条对角线互相垂直，那么这个平行四边形的两条邻边有什么关系？为什么？

2. 平行四边形的判定

交流

为了制作平行四边形木框，小亮找了长度依次为 30 cm，40 cm，30 cm，40 cm 的四根木条，并按这个顺序将其固定为一个四边形 .

你能说出这样做的道理吗？

已知：如图 15－25，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$BC=AD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

分析： 连接 AC，把四边形分成 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$.

证明： 如图 15－25，连接 AC.

$\because$ $AB=CD$，$BC=AD$，$AC=AC$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

$\therefore$ $AB \parallel CD$，$BC \parallel AD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

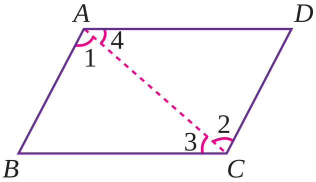


图 15－25

于是得到：

平行四边形判定定理 1　两组对边分别相等的四边形是平行四边形 .

交流

小亮的爸爸在制作平行四边形木框时，将两根木条 AC，BD 的中点重叠，并用钉子固定，然后连接 AB，BC，CD，AD，那么四边形 $ABCD$ 就是平行四边形（图 15－26）.

你能说出这样做的道理吗？

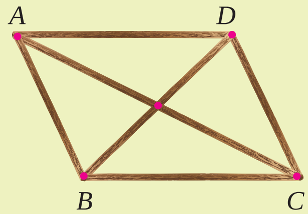


图 15－26

通过证明，可以得到：

平行四边形判定定理 2　对角线互相平分的四边形是平行四边形 .

例 3　已知：如图 15－27，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 E，F 分别是 AO，OC 的中点 .

求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形 .

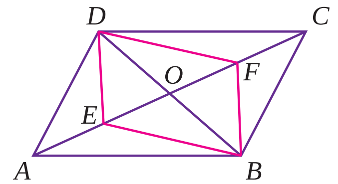


图 15－27

证明： ∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$OA = OC$，$OB = OD$.

又∵　E，F 分别是 AO，OC 的中点，

∴　$OE = \frac{1}{2}AO$，$OF = \frac{1}{2}CO$.

∴　$OE = OF$.

∴　四边形 $BFDE$ 是平行四边形 .

实践

如图 15－28，已知▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，E，F，G，H 分别是 AO，BO，CO，DO 的中点 . 以图中标有字母的点为顶点，你能画出几个平行四边形？并说明理由 .

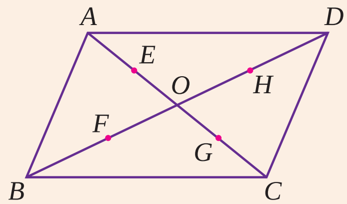
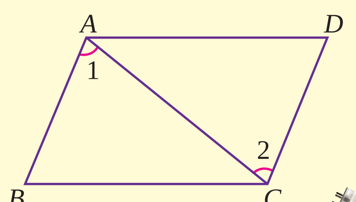


图 15－28

练习

1. 把两个不等边的全等三角形，按不同方法拼成四边形，最多可以拼成几个不同的四边形？它们都是平行四边形吗？为什么？
2. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle B = \angle D$，$\angle 1 = \angle 2$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？为什么？
3. 延长△ABC 的中线 AD 至 E，使 $DE = AD$，四边形 $ABEC$ 是平行四边形吗？为什么？



（第 2 题）

交流

两组对边分别相等的四边形是平行四边形，这是根据两组对边的关系来判定一个四边形是平行四边形．你能否只根据一组对边的关系来判定一个四边形是平行四边形呢？它应满足什么条件？

怎样证明你的猜想？

已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AB \underline{\parallel} DC$.

$AB \parallel DC$ 且 $AB = DC$ 可简记为 $AB \underline{\parallel} DC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

分析： 通过连接 AC，把四边形 $ABCD$ 分成 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$.

证明： 连接 AC，如图 15－29.

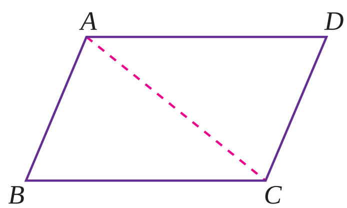


图 15－29

$\because\ AB \parallel DC$，

$\therefore\ \angle BAC = \angle DCA$.

又 $\because\ AB = CD$，$AC = CA$，

$\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore\ \angle ACB = \angle CAD$.

$\therefore\ AD \parallel BC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

你还有其他的证明方法吗？

可以得到：

平行四边形判定定理 3　一组对边平行且相等的四边形是平行四边形．

例 4 已知：如图 15－30，▱$ABCD$ 中，E，F 分别是边 AD，BC 的中点．

求证：$EB = DF$.

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

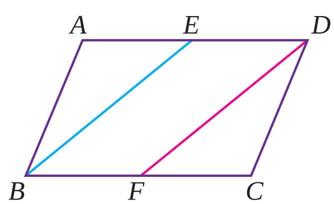


图 15－30

$\therefore\ AD \underline{\parallel} BC$.

又 $\because\ E$，F 分别是边 AD，BC 的中点，

$\therefore\ ED = \frac{1}{2}AD$，$BF = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore\ ED \underline{\parallel} BF$.

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形．

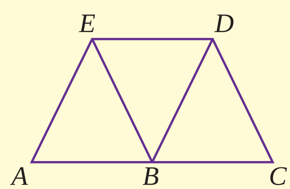
$\therefore\ EB = DF$.

思考

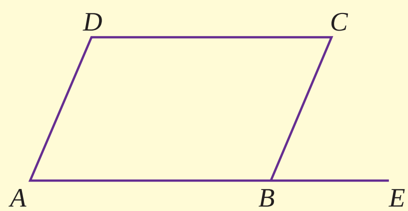
根据对角之间的关系能否判定一个四边形是平行四边形?

练习

1. 如图，$AC \parallel ED$，点 B 在 AC 上，且 $AB = ED = BC$. 找出图中的平行四边形，并说说你的理由 .



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，A，B，E 在一条直线上，$AB = DC$，$\angle C = \angle CBE$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？说说你的理由 .

3. 画一个▱ $ABCD$，使 $AB = 2$ cm，$BC = 3$ cm，$AC = 4$ cm.

交流

1. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

2. 一组对边平行，一组对角相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

3. 一组对边相等，一组对角相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

习 题 15－2

★基础★

1. 填空：

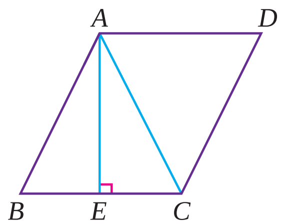
(1) 在▱$ABCD$ 中，$\angle A-\angle B=60°$，那么$\angle A=$________，$\angle B=$________；

(2) 在▱$ABCD$ 中，$\angle A+\angle C=120°$，那么$\angle A=$________，$\angle B=$________；

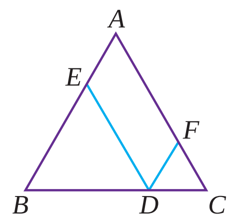
(3) 如果▱$ABCD$ 的周长为 35 cm，$AB:BC=3:4$，那么 $AB=$______cm，$BC=$______cm；

(4) 在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，那么其中相等的线段有__________对 .

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于 E，且 $BE=CE$，▱$ABCD$ 的周长为 3.6 cm，$\triangle ABC$ 的周长为 2.8 cm，求▱$ABCD$ 的各边长及 AE 的长 .



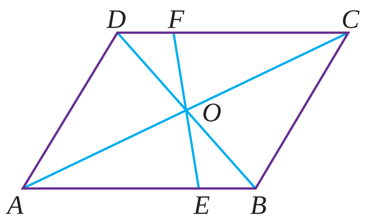
（第 2 题）



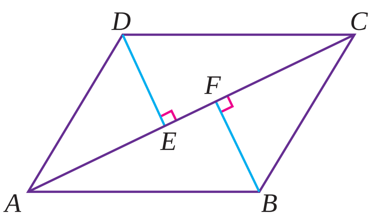
（第 3 题）

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$DE\parallel AC$，$DF\parallel AB$，求证：$DE+DF=AB$.

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 的直线 EF 分别交 AB，CD 于点 E，F. 请写出图中三对全等的三角形，并任选其中的一对加以证明 .



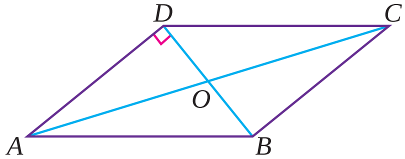
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，$DE\perp AC$ 于 E，$BF\perp AC$ 于 F，且 $AF=CE$. 求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形 .

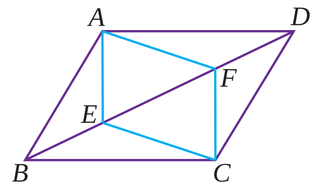
6. 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$AD=12$，$DO=OB=5$，$AC=26$，$\angle ADB=90°$，求 BC 的长和四边形 $ABCD$ 的面积 .



（第 6 题）

★★ 提升 ★★

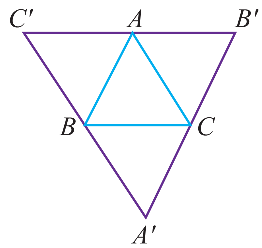
1. 如图，E，F 是▱$ABCD$ 对角线 BD 上的两点，请你添加一个适当的条件：________________，使四边形 $AECF$ 是平行四边形．



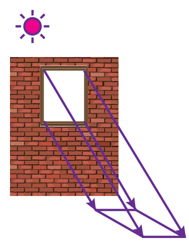
（第 1 题）

2. 在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，如果只给出条件"$AB \parallel CD$"是不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的．给出以下六个说法：
① 如果再加上条件"$AD \parallel BC$"，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；
② 如果再加上条件"$AB = CD$"，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；
③ 如果再加上条件"$\angle DAB = \angle DCB$"，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；
④ 如果再加上条件"$BC = AD$"，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；
⑤ 如果再加上条件"$AO = CO$"，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；
⑥ 如果再加上条件"$\angle DBA = \angle CAB$"，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形．
其中正确的说法有 ________ 个，它们是 ____________．

3. 如图，$A'B' \parallel BA$，$B'C' \parallel CB$，$C'A' \parallel AC$，$\angle ABC$ 与 $\angle B'$ 有什么关系？线段 AB' 与线段 AC' 呢？为什么？



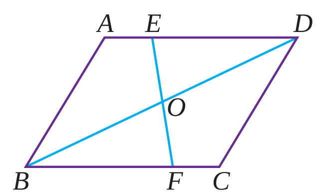
（第 3 题）


（第 4 题）

4. 如图，阳光透过矩形玻璃窗投射到地面上，地面上出现了一个明亮的四边形．小明用量角器量出这个四边形的一个锐角恰好是 45°，又用直尺量出一组邻边的长分别是 40 cm 和 55 cm. 小明说："用这三个数据，就能够计算出地面上的四边形的面积和周长．"你知道小明是如何计算的吗？这样计算的根据是什么？

★★★ 拓展 ★★★

如图，在▱$ABCD$ 中，E 为 AD 上一点，F 为 BC 上一点，EF 与对角线 BD 交于点 O. 有以下三个条件：① $AE = CF$；② $EO = OF$；③ O 为 BD 中点．从中选取一个作为题设，余下的两个作为结论，组成一个正确的命题，并加以证明．



15.4 特殊的平行四边形的性质与判定

1. 特殊的平行四边形的性质

我们知道，矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们不仅具有平行四边形的性质，而且还具有各自的特殊性质 .

交流

如图 15－31，用计算机或图形计算器画一个▱ $ABCD$.

1. 拖动点 A，使其在线段 AD 所在的直线上运动，当▱ $ABCD$ 变为矩形时，它的四个角和两条对角线有什么变化?

2. 当矩形的大小不断变化时，前面发现的结论是否仍然成立? 猜想矩形具有什么特殊的性质，怎样证明你的猜想?

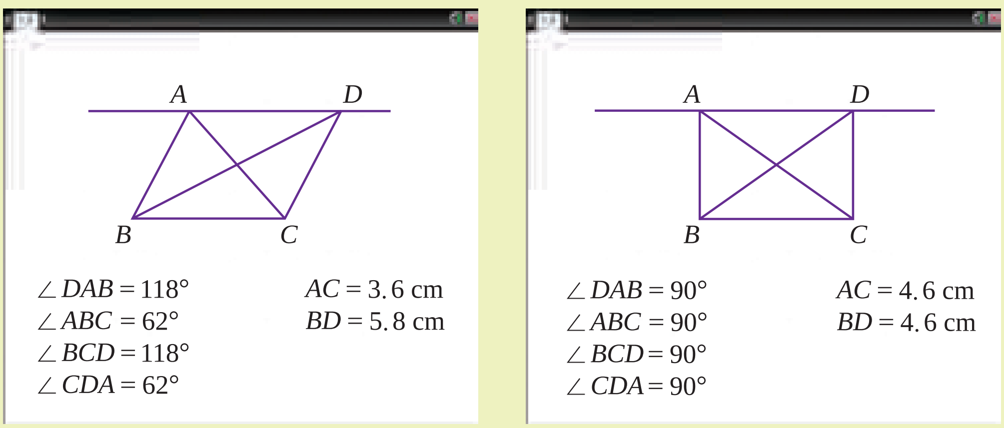


图 15－31

可以发现，矩形还有下面的性质:

矩形性质定理 1　矩形的四个角都是直角 .

矩形性质定理 2　矩形的对角线相等 .

请你证明这两个性质定理 .

思考

如图 15－32，在矩形 $ABCD$ 中，找出相等的线段与相等的角，并说明理由 .

例 1 如图 15 − 32，在矩形 $ABCD$ 中，两条对角线 AC，BD 相交于点 O，$AB = OA = 4$ cm．求 BD 与 AD 的长．

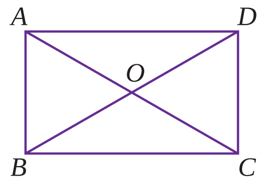


图 15 − 32

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore$ $BD = AC$，$\angle BAD = 90°$．

又 $\because$ $AC = 2OA$，

$\therefore$ $BD = 2OA = 2 \times 4 = 8$(cm)．

在 Rt $\triangle BAD$ 中，

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}\ (\text{cm}).$$

交流

1. 如图 15 − 32，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，那么 BO 是 Rt $\triangle ABC$ 中一条怎样的特殊线段？它与 AC 有怎样的大小关系？为什么有这样的大小关系？

2. 在这里，我们可以从矩形对角线的性质得到关于直角三角形的一个性质，应当怎样叙述这个性质？

利用矩形的性质定理 2，可以证明直角三角形的一个性质：

定理　直角三角形斜边的中线等于斜边的一半．

练习

1. 判断题：

(1) 矩形的四个角都相等；（　）

(2) 矩形的四条边都相等；（　）

(3) 矩形的对角线相等，且互相垂直；（　）

(4) 矩形的两条对角线不一定互相平分．（　）

2. 已知矩形的一条对角线长为 8 cm，两条对角线的一个夹角为 60°，求矩形的长和宽．

交流

如图 15－33，用计算机或图形计算器画一个▱$ABCD$.

1. 拖动线段 AB，使点 A、点 B 分别在线段 AD、线段 BC 所在的直线上运动，当▱$ABCD$ 变为菱形时，它的四条边和两条对角线的夹角有什么变化？由此你还能发现什么？

2. 当菱形的形状、大小不断变化时，前面发现的结论是否仍然成立？这说明菱形还有什么特殊的性质，怎样证明你的猜想？

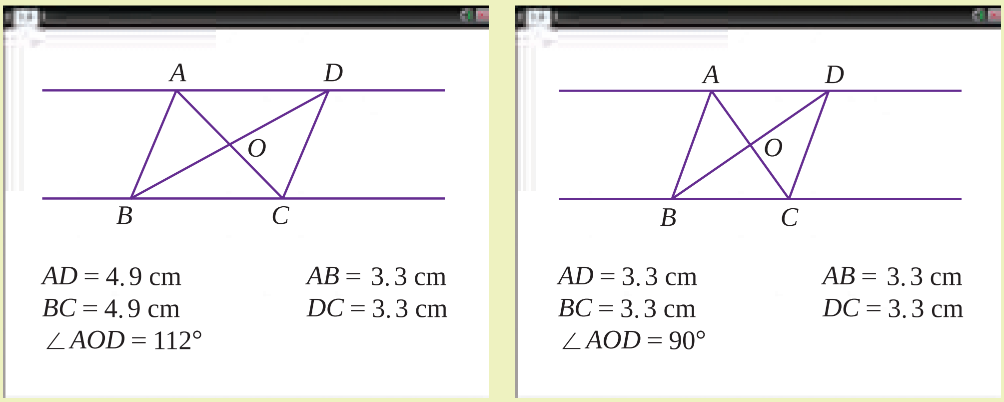


图 15－33

可以发现，菱形还有下面的性质：

请你证明这两个性质定理.

菱形性质定理 1　菱形的四条边都相等.

菱形性质定理 2　菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角.

例 2　已知菱形的两条对角线的长分别为 l_1，l_2，求该菱形的面积.

解： 如图 15－34，菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AC=l_1$，$BD=l_2$.

∵　四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴　$AC \perp BD$.

∴　$S_{\text{菱形}ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$

$$=\frac{1}{2}BD\cdot AO+\frac{1}{2}BD\cdot CO$$

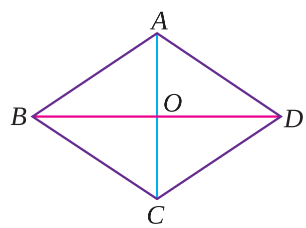


图 15－34

$$=\frac{1}{2}BD\cdot(AO+CO)$$

$$=\frac{1}{2}BD\cdot AC$$

$$=\frac{1}{2}l_1l_2.$$

例 3 如图 15 − 35，在平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，点 A 坐标为 $(0,2)$．求 B，C，D 各点的坐标．

解： ∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $OC=OA=2$.

∴ 点 C 的坐标为 $(0,-2)$.

又∵ $\angle ABC=60°$，

∴ $AB=BC=AC=4$.

∴ $OD=OB=\sqrt{AB^2-OA^2}$

$=\sqrt{4^2-2^2}$

$=2\sqrt{3}$.

∴ 点 B 的坐标为 $(-2\sqrt{3},0)$，点 D 的坐标为 $(2\sqrt{3},0)$.

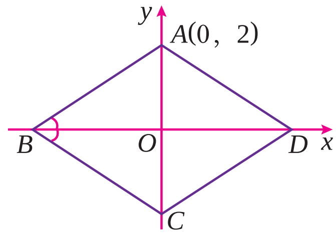


图 15 − 35

练习

1. 菱形 $ABCD$ 中，$AB=4$ cm，$\angle ABC=60°$，求菱形 $ABCD$ 的面积．
2. 已知一个菱形的两条对角线的长分别为 5 cm 和 12 cm，求该菱形的周长和面积．

交流

1. 我们知道，有一组邻边相等，且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形．有的同学说，“有一组邻边相等的矩形是正方形”、“有一个角是直角的菱形是正方形”．这些说法正确吗？为什么？

2. 你认为正方形具有什么性质？它为什么具有这些性质？

探索

请归纳正方形的全部性质，有条理地加以叙述，并写在下面的空白处：

例 4 如图 15－36，四边形 $ABCD$ 是正方形，两条对角线相交于点 O，求 $\angle AOB$，$\angle OAB$ 的度数．

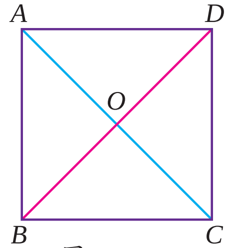


图 15－36

解： $\because$ 正方形 $ABCD$ 也是菱形，

$\therefore$ $AC \perp BD$.

$\therefore$ $\angle AOB = 90°$.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 既是矩形，又是菱形，

$\therefore$ $\angle BAD = 90°$，且 $\angle BAC = \angle DAC$.

$\therefore$ $\angle OAB = 45°$.

你还有其他解法吗？

思考

图 15－36 中有多少个等腰直角三角形？说说你的理由．

练习

1. 已知正方形的一条边长为 2 cm，求它的周长、对角线长和面积．
2. 已知正方形的一条对角线长为 4 cm，求它的边长和面积．

探索

要用 200 m 长的篱笆围成一个矩形花园，当矩形的长和宽各是多少米时，花园面积最大？

2. 特殊的平行四边形的判定

思考

木工师傅在做门窗框架、桌面、椅面等物件时，需要检测做出的物件是否为矩形．这时，木工师傅通常不仅要测量它们的两组对边的长度是否分别相等，而且还要测量它们的两条对角线是否相等．你能说出其中的道理吗？

已知：如图 15－37，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=BC$，$AC=BD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是矩形．

分析： 要证明一个四边形是矩形，可以依据矩形的定义，证明所给的四边形是平行四边形且有一个角是直角．

证明： $\because$　$AB=CD$，$AD=BC$，

$\therefore$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

又 $\because$　$AC=BD$，$AD=BC$，$DC=CD$，

$\therefore$　$\triangle ADC \cong \triangle BCD$.

$\therefore$　$\angle ADC=\angle BCD$.

又 $\because$　在▱$ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，

$\therefore$　$\angle ADC+\angle BCD=180°$.

$\therefore$　$\angle ADC=90°$.

$\therefore$　四边形 $ABCD$ 为矩形．

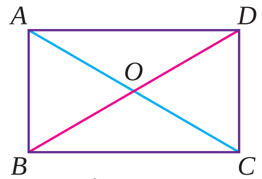


图 15－37

由此得到：

矩形判定定理 1　对角线相等的平行四边形是矩形．

思考

如图 15－38，用直尺、三角尺按“边—直角、边—直角、边—直角、边”这样四步画出一个四边形，这个四边形是矩形吗？为什么？

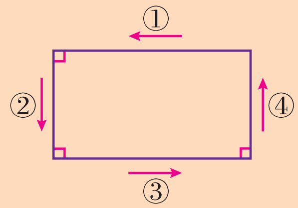


图 15－38

通过证明，可以得到：

矩形判定定理 2　有三个角是直角的四边形是矩形．

例 5　已知：如图 15－39，▱ $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 是等边三角形，$AB=4$ cm，求这个平行四边形的面积．

解： ∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

∴　$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

∵　$\triangle AOB$ 是等边三角形，

∴　$AO=BO$.

∴　$AC=BD$.

∴　▱ $ABCD$ 是矩形．

在 Rt $\triangle ABC$ 中，

∵　$AB=4$，$AC=8$，

∴　$BC=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$．

∴　$S_{▱ABCD}=AB\cdot BC=4\times 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$.

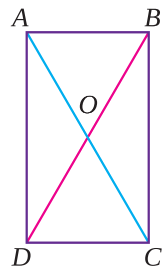


图 15－39

练习

1. 四个角都相等的四边形是矩形吗？为什么？
2. 已知：▱ $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 是等边三角形，求 $\angle ADC$ 的度数．

思考

木工师傅在做菱形的窗格时，只要保证窗格的四条边框一样长就行了．你能说出其中的道理吗？

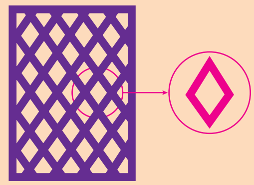


图 15－40

通过证明，可以得到：

菱形判定定理 1　四条边都相等的四边形是菱形．

交流

根据对角线之间的关系能否判定一个平行四边形是菱形？

菱形判定定理 2　对角线互相垂直的平行四边形是菱形．

请你给出证明．

例 6　已知：如图 15－41，▱ $ABCD$ 的对角线 AC 的垂直平分线与边 AD，BC 分别交于点 E，F，四边形 $AECF$ 是菱形吗？为什么？

解： 四边形 $AECF$ 是菱形．

理由如下：

$\because$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$　$AE \parallel FC$.

$\therefore$　$\angle EAO = \angle FCO$.

又 $\because$　$\angle AOE = \angle COF$，$AO = CO$，

$\therefore$　$\triangle AOE \cong \triangle COF$.

$\therefore$　$EO = FO$.

$\therefore$　四边形 $AECF$ 是平行四边形．

又 $\because$　$EF \perp AC$，

$\therefore$　▱ $AECF$ 是菱形．

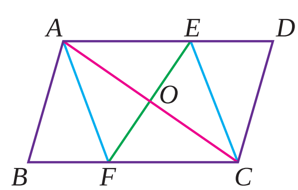


图 15－41

探索

将一张矩形的纸对折，旋转 90° 后再对折，然后沿着图 15 − 42 中的虚线剪下，打开，你发现这是一个什么样的图形呢？说说你的理由，并与同伴交流．

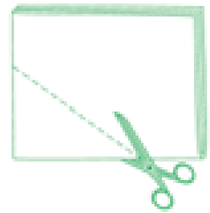


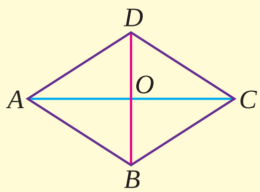
图 15 − 42

练习

1. 画一个菱形，使它的两条对角线长分别为 6 cm 和 8 cm.
2. 如图，▱$ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，$AB=\sqrt{5}$，$AO=2$，$OB=1$.

   (1) AC，BD 互相垂直吗？为什么？

   (2) 四边形 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？



（第 2 题）

实践

设计一个由菱形组成的花边图案，花边的长为 15 cm，宽为 4 cm．这个花边图案由有一条对角线在同一条直线上的四个菱形组成，前一个菱形的对角线的交点是后一个菱形的一个顶点．

交流

怎样判定一个四边形或一个平行四边形是正方形呢？它可以有几种不同的途径？

从正方形与平行四边形、矩形、菱形的关系可以看出，要判断一个四边形是正方形可以有以下几种思路：

(1) 先判定四边形是菱形，再确定这个菱形有一个角是直角；

(2) 先判定四边形是矩形，再确定这个矩形有一组邻边相等；

(3) 先判定四边形是平行四边形，再确定这个平行四边形有一个角是直角，并且有一组邻边相等；

(4) 判定一个四边形的对角线相等，并且互相垂直平分 .

例 7 如图 15－43，在平面直角坐标系中，顺次连接点 $A(-2, 0)$，$B(0, -2)$，$C(2, 0)$，$D(0, 2)$ 所得到的四边形 $ABCD$ 是怎样的四边形？并说明理由 .

解： 四边形 $ABCD$ 是正方形 .

理由如下：

$\because$ $A(-2, 0)$，$B(0, -2)$，$C(2, 0)$，$D(0, 2)$，

$\therefore$ $OA = OB = OC = OD = 2.$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

又 $\because$ $AC = BD$，且 $AC \perp BD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 .

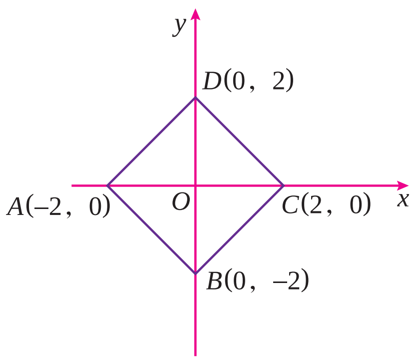


图 15－43

实践

如图 15－44，将一张菱形纸片，沿两条对角线剪开，得到四个全等的直角三角形，将这四个直角三角形按图中所示的方法就能拼成正方形 . 想一想这是为什么 .

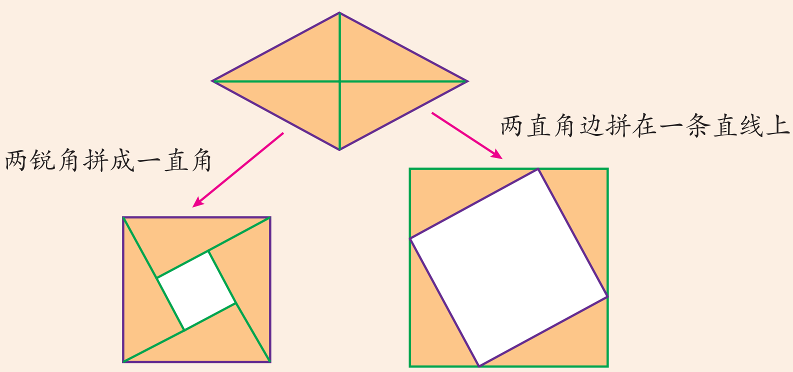


图 15－44

练习

1. 判断满足下列条件的四边形是否为正方形，并说明理由：
   (1) 对角线互相垂直且相等的平行四边形；
   (2) 对角线互相垂直的矩形；
   (3) 对角线相等的菱形；
   (4) 对角线互相垂直平分且相等的四边形 .
2. (1) 以 2 cm 长的线段为边，画一个正方形；
   (2) 以 4 cm 长的线段为对角线，画一个正方形 .

15.5 三角形中位线定理

在三角形的基础上，我们研究了平行四边形的性质 . 现在，我们利用平行四边形的性质进一步研究三角形的性质 .

在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 的中点，如图 15 − 45，试研究线段 DE 具有什么性质 .

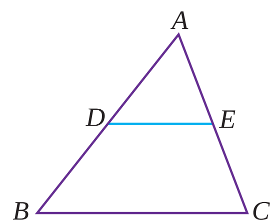


图 15 − 45

交流

如图 15 − 46，用计算机或图形计算器画几个连接各类三角形两边中点的图形，观察图中连接三角形两边中点的线段，与第三边在长度、位置上有怎样的关系，说出你的猜想 .

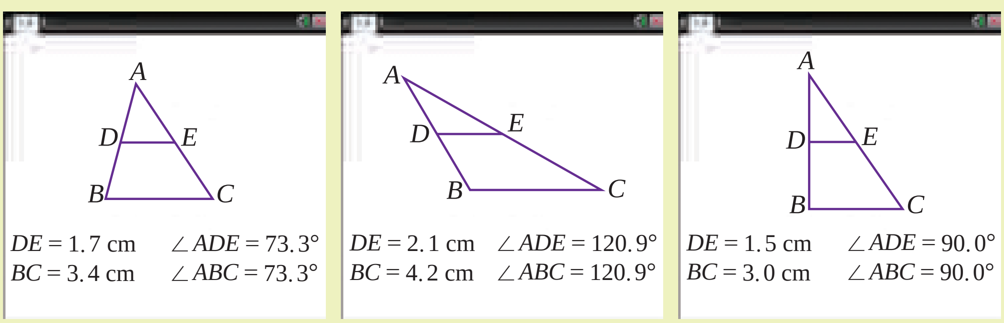


图 15 − 46

我们猜想：

连接三角形两边中点的线段平行于第三边，并且等于第三边的一半 . 也就是说：$DE \parallel BC$ 且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

分析： 要证明 $DE=\frac{1}{2}BC$，可以证明 $2DE=BC$，所以，延长 DE 到 F，使 $DF=2DE$，证明它与 BC 相等；要证明 $DE \parallel BC$，只要证明四边形 $BCFD$ 是平行四边形 .

证明： 如图 15－47，延长 DE 到点 F，使 $EF=DE$，连接 FC.

又 ∵ $AE=CE$，$\angle AED=\angle CEF$，

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CFE$.

∴ $\angle F=\angle ADE$，$CF=DA$.

∴ $CF \parallel DA$.

又 ∵ $BD=DA$，

∴ $CF \mathrel{\underline{\parallel}} BD$.

∴ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形 .

∴ $DF \mathrel{\underline{\parallel}} BC$.

∴ $DE \parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

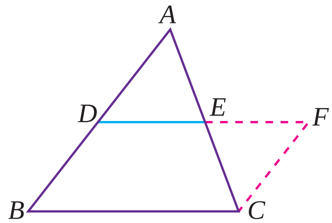


图 15－47

连接三角形两边中点的线段，叫做**三角形的中位线** .

三角形中位线定理　三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半 .

思考

如图 15－48，A，B 两地被池塘隔开，在没有任何测量工具的情况下，小明通过下面的方法估测出 A，B 间的距离：先在 AB 外选一点 C，然后步测出 AC，BC 的中点 M，N，并测出 MN 的长，由此他就知道了 A，B 间的距离 . 你能说说其中的道理吗？

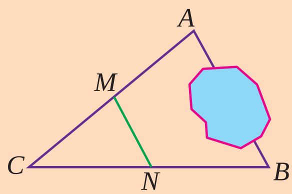


图 15－48

例 已知：如图 15－49，在△ABC 中，$AD=DB$，$BE=EC$，$AF=FC$. 求证：AE，DF 互相平分.

证明： 连接 DE，EF.

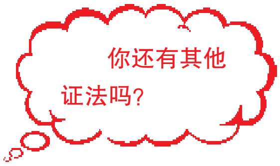
$\because$ $AD=DB$，$BE=EC$，

$\therefore$ $DE \parallel AC$.

同理 $FE \parallel AB$.

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

$\therefore$ AE，DF 互相平分.



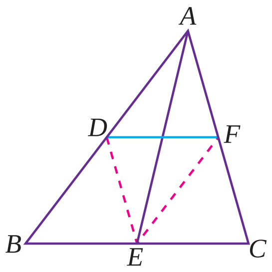


图 15－49

练习

1. 画出△ABC 的中线、中位线，并说出它们的区别.
2. 已知三角形的各边长分别是 6 cm，8 cm 和 10 cm，求连接各边中点所成的三角形的周长.

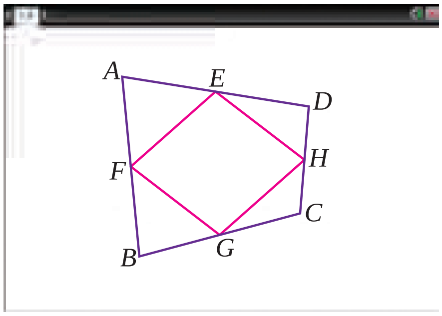
探索

你能将任意一个三角形分成四个全等的三角形吗?

探究学习

“中点四边形”

用计算机或图形计算器画一个任意四边形 $ABCD$（图 15－50），顺次连接各边中点 E，F，G，H，所得到的新四边形 $EFGH$ 称为中点四边形. 拖动原四边形中的一个顶点，改变原四边形的形状，观察图形的变化，你有什么发现？并说明理由.



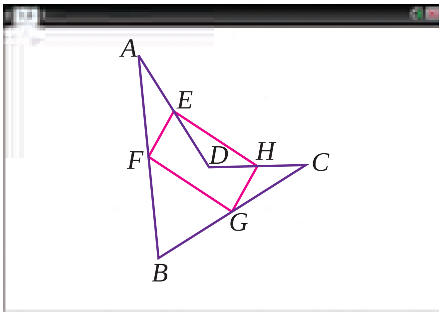


图 15－50

随着原四边形一个顶点的移动，原四边形的形状会发生相应的变化，将有可能不再是我们常见的凸四边形，此时你发现的结论是否还成立？并说明理由．

我们发现，不论四边形 $ABCD$ 怎样变化，其中点四边形 $EFGH$ 都是平行四边形．但是四边形 $EFGH$ 有没有可能是一些特殊的平行四边形呢？现在请你探索下列问题：

当原四边形 $ABCD$ 是什么形状时，中点四边形 $EFGH$ 会变成：

(1) 一个矩形？

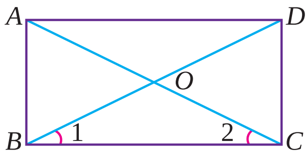
(2) 一个菱形？

(3) 一个正方形？

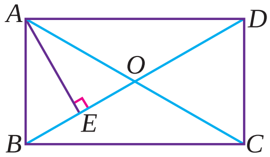
习 题 15－3

★基础★

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，AC，BD 相交于点 O，$\angle 1=\angle 2$．它是一个矩形吗？为什么？

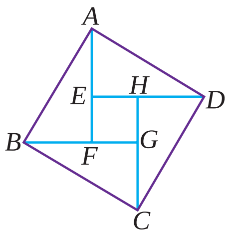


（第 1 题）

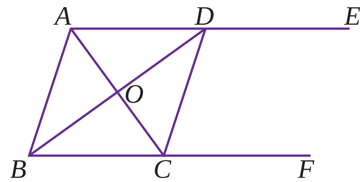


（第 2 题）

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AE \perp BD$ 于点 E，$\angle DAE = 2\angle BAE$，求 $\angle EAC$ 的大小 .
3. 从菱形的钝角顶点向对边引垂线，如果垂线平分对边，求菱形的钝角度数 .
4. 如图，是 2002 年 8 月在北京召开的第 24 届国际数学家大会会标中的图案，其中四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 都是正方形 . 求证：$\triangle ABF \cong \triangle DAE$.



（第 4 题）

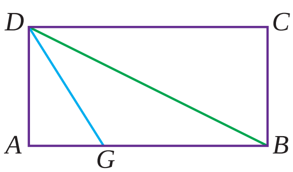


（第 5 题）

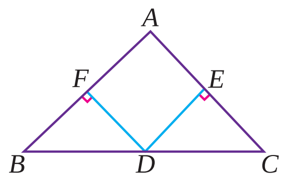
5. 如图，$AE \parallel BF$，AC 平分 $\angle BAD$，交 BF 于点 C，BD 平分 $\angle ABC$，交 AE 于点 D，连接 CD. 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形 .
6. 求证：连接四边形对边中点的两条线段互相平分 .

★★ 提升 ★★

1. 如果四边形 $ABCD$ 满足条件（1）________，或（2）________，或（3）________时，这个四边形的对角线 AC 和 BD 互相垂直 .
2. 如图，折叠矩形纸片 $ABCD$，先折出折痕（对角线 BD），再折叠使 AD 与对角线 BD 重合，得折痕 DG. 已知 $AB = 2$，$BC = 1$，求 AG 的长 .



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点，$DE \perp AC$，$DF \perp AB$，垂足分别是 E，F，且 $BF = CE$.
（1）求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形；
（2）当 $\angle A = 90°$ 时，试判断四边形 $AFDE$ 是怎样的四边形，证明你的结论 .

★★★ 拓展 ★★★

在正方形 $ABCD$ 中，点 F 是 AB 上一点，点 E 是 AD 延长线上一点 . 对于
① $CE \perp CF$ ；② $CE = CF$ ；③ $DE = BF$.
把其中一个作为条件，另外两个是否成立？为什么？

阅读理解

完美正方形

20 世纪 30 年代，在英国剑桥大学的一间学生宿舍里，塔特、斯东、史密斯、布鲁克斯四名大学生聚在一起，共同研究一个有趣的数学问题——完美正方形.

什么是完美正方形呢？如果一个大的正方形是由若干个大大小小各不相同的正方形构成，最外面这个大的正方形就叫做完美正方形.

许多人认为，这样的正方形是根本不存在的，假如有，为什么没有人把它画出来呢？可是，这四名大学生相信，完美正方形是存在的. 这次聚会虽然没讨论出一个结果，但他们下定决心要突破这个难题.

几年后，四个人再一次相聚，每一个人都有收获. 其中，布鲁克斯发现了一种“完美正方形”，史密斯和斯东发现了另一种，而塔特找到了进一步研究的途径.

又过了几年，他们又发现了一个由 39 个大小不等的正方形组成的完美正方形. 重要的是，这个完美正方形不是碰运气找到的，而是在理论指导下完成的.

接下来，数学家又提出了一个新问题：是否存在由最少数目的正方形组成的完美正方形呢？1978 年，借助于计算机，人们找到了这个由最少数目正方形组成的完美正方形(图 15－51). 它的边长为 112 个单位长，由 21 个小正方形组成，这些小正方形的边长依次为：2，4，6，7，8，9，11，15，16，17，18，19，

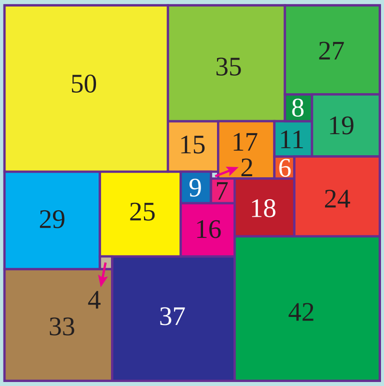


图 15－51

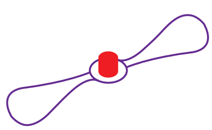
24，25，27，29，33，35，37，42，50 个单位长．

当年四名研究完美正方形的大学生，后来都成了组合数学和图论专家．他们的研究成果被应用到物理、化学、计算机技术、运筹学、语言学、建筑学等许多领域．

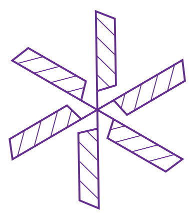
三、中心对称图形

15.6 中心对称图形

我们曾学习过轴对称图形，下面我们学习另外一类对称图形——中心对称图形．

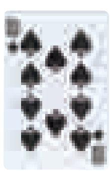


(1) 飞机的螺旋桨



(2) 风车的风轮

(3) 太极图



(4) 扑克牌中的黑桃 10

(5)《东方时空》标志

图 15－52

实践

在图 15－52 中的图形有怎样的共同特点呢？以风车的风轮为例，如图 15－53，绕点 O 旋转风轮，使得 A_1 移动到 A_2 的位置．思考下面的问题：

(1) 旋转后的风轮与原来位置上的风轮是否重合？

(2) 旋转中心在哪里？旋转角的度数是多少？

对于图 15－52 中的其他四个图形，请你也像这样进行研究．

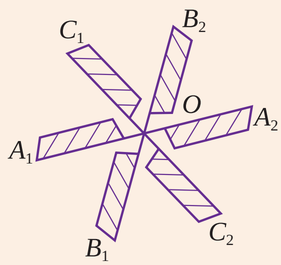


图 15－53

一般地，在同一平面内，一个图形绕某一个点旋转 180°，如果旋转前、后的图形相互重合，那么这个图形叫做**中心对称图形**，这个点叫做它的**对称中心**．

你在什么地方还见到过中心对称图形？

思考

在我们学习过的图形中，如线段、圆、等边三角形、平行四边形（图 15－54）等，哪些是中心对称图形？哪些不是中心对称图形？


图 15－54

例如，图 15－55 中的线段绕它的中点旋转 180° 后，它的两个端点互换了位置，旋转后的线段和原线段重合．因此，线段是中心对称图形，线段的中点是它的对称中心．

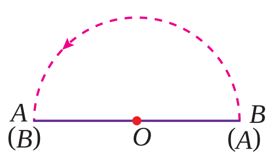


图 15－55

又如，图 15－56 中的▱$ABCD$，点 O 是对角线的交点，因为 $OA=OC$，$OB=OD$，所以图形绕点 O 旋转 180° 后，点 A 与点 C、点 B 与点 D 分别互换了位置，旋转后的图形和原来的图形重合．因此，平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心．

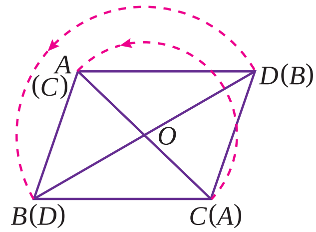


图 15－56

交流

如图 15－57，点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心．

（1）指出这个轴对称图形的全部对称轴．

（2）这个正六边形绕点 O 旋转多少度后能和原来的图形重合？对于其他的正多边形能得到什么类似的结论？

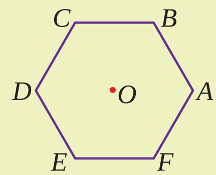


图 15－57

探索

如图 15－58 所示为等边三角形 ABC，你能从该三角形中剪去一部分，使它剩余的部分成为一个中心对称图形吗？如果原三角形的边长是 1，那么你得到的中心对称图形的面积是多少？

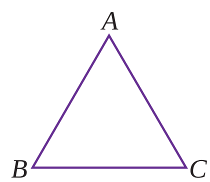


图 15－58

练习

1. 射线是不是中心对称图形？为什么？
2. 五角星是不是中心对称图形？为什么？

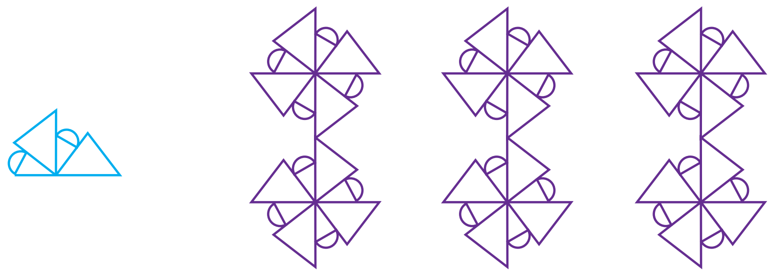
问题解决

简单的图案设计

已知图 15－59(1)，怎样作出图 15－59(2)？

通过观察，你发现图 15－59(1)与(2)之间有何关系？

由图 15－59(1)，你还能设计出其他图案吗？



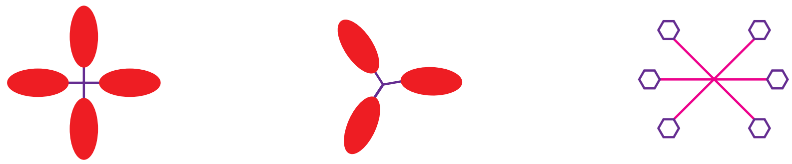
(1)　　　　(2)

图 15－59

习　题　15－4

★基础★

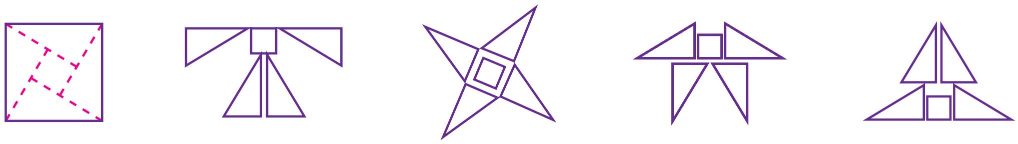
1. 正方形是中心对称图形吗？正方形绕两条对角线的交点旋转多少度后能与原来的图形重合？能由此验证正方形的一些特殊性质吗？
2. 下图中，哪个“风轮”是中心对称图形？



(1)　　　　(2)　　　　(3)

（第 2 题）

3. 如图，将一张正方形纸片沿图中虚线剪开后，能拼成下列四个图形．是中心对称图形的是（　　）．



A　　B　　C　　D

（第 3 题）

4. 我国一些银行的行标设计都融入了中国古代钱币的图案．下图所示是我国四大银行的行标图案，其中是轴对称图形而不是中心对称图形的是（　　）．

A　　B　　C　　D

（第 4 题）

★★提升★★

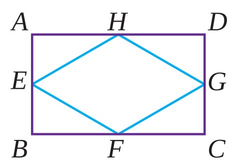
1. 如图，顺次连接矩形 $ABCD$ 各边中点，得到菱形 $EFGH$，这个由矩形和菱形组成的图形（　　）．

A. 是轴对称图形但不是中心对称图形

B. 是中心对称图形但不是轴对称图形

C. 既是轴对称图形又是中心对称图形

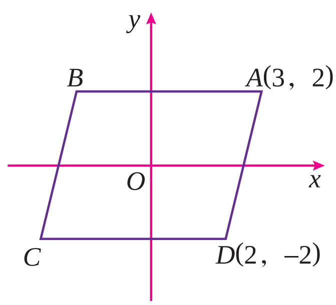
D. 没有对称性



（第 1 题）

2. 如果一个四边形是中心对称图形，那么这个四边形一定是平行四边形吗？为什么？

3. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的中心在原点 O，顶点 $A(3，2)$，$D(2，-2)$，求点 B，C 的坐标．

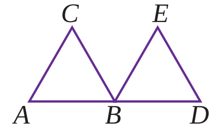


（第 3 题）

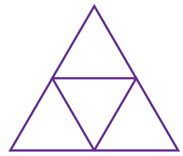
★★★ 拓展 ★★★

(1) 用 6 根一样长的小棒搭成如图 (1) 所示的图形．试移动 AC，BC 这两根小棒，使 6 根小棒成为中心对称图形．如果移动 AC，DE 这两根小棒，能否达到要求？请画出图形．

(2) 如果用 9 根一样长的小棒搭成如图 (2) 所示的图形．移动两根小棒，使这 9 根小棒搭成的图形成为中心对称图形，你能做到吗？请画出图形．



(1)


(2)

阅读理解

对称的世界

自然界中动物、植物的形状千姿百态，各不相同．然而，如果仔细观察一下，你会惊奇地发现，它们往往具有一个共同的特点，那就是——对称．

首先，人体自身就是一个高度的对称体．人体的大部分器官都是以脊柱所在的这条线为轴左右对称的．例如，左手和右手、左脚和右脚、左眼和右眼、左耳和右耳……鼻子虽然只有一个，但是两个鼻孔却是左右对称的．

再看看我们周围的花草树木、鸟类，水中的海星、鱼、龟背上的花纹，不胜枚举，大多具有类似的对称特征 (图 15 - 60)．

图 15 - 60

在建筑方面，对称更是随处可见：雄伟的天安门，壮丽的天坛，

辉煌的故宫，古老的河南登封观星台(图 15－61)……

古代美学家曾研究过拉丁字母，发现它们也具有对称性．例如，A，H，M，B，E 是轴对称图形，N，S，Z 是中心对称图形．

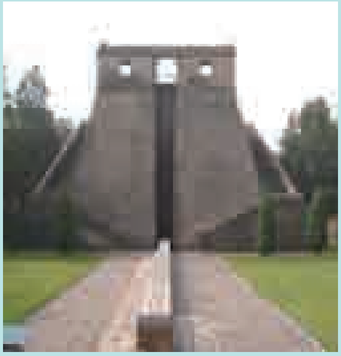


图 15－61

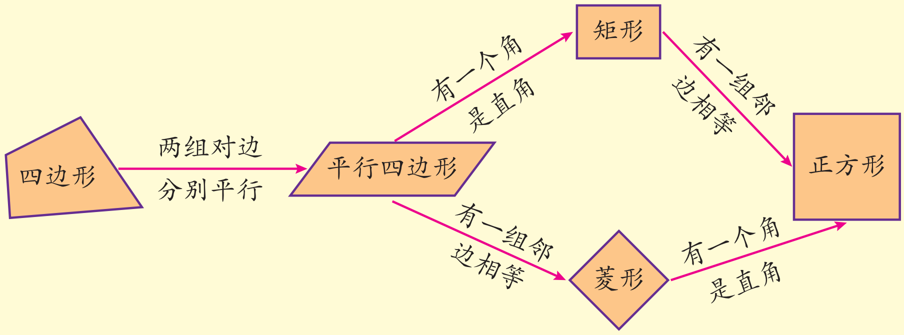
人类及其创造的建筑物、文化艺术作品，以及动物、植物这些生命体都具有对称性，那么无生命的自然世界又如何呢？

雪花具有惊人的对称性．晶体都有规则的几何外形，尽管不同的晶体形状不同，但有一点是相同的，即它们都呈对称分布．

回顾与整理

知识要点

1. 四边形和各种特殊四边形之间的关系．



从中，我们可以清楚地看到任意四边形向特殊四边形的化归过程和化归条件．

知识要点

2. 几种特殊四边形的性质.

	边	角	对角线	对称性
平行四边形	对边平行且相等	对角相等	对角线互相平分	中心对称
矩　形	对边平行且相等	四个角都是直角	两条对角线互相平分且相等	轴对称，中心对称
菱　形	对边平行，四边都相等	对角相等	两条对角线互相垂直平分，每条对角线平分一组对角	轴对称，中心对称
正方形	对边平行，四边都相等	四个角都是直角	两条对角线互相垂直平分且相等，每条对角线平分一组对角	轴对称，中心对称

3. 几种特殊四边形的常用判定方法.

平行四边形	(1) 两组对边分别平行；(2) 两组对边分别相等；(3) 两条对角线互相平分；(4) 一组对边平行且相等
矩　形	(1) 是平行四边形，并且有一个角是直角；(2) 是平行四边形，并且两条对角线相等；(3) 有三个角是直角
菱　形	(1) 是平行四边形，并且有一组邻边相等；(2) 四条边都相等；(3) 是平行四边形，并且两条对角线互相垂直
正方形	(1) 是矩形，并且有一组邻边相等；(2) 是菱形，并且有一个角是直角

4. 中心对称图形.

在同一平面内，一个图形绕某一个点旋转 180°，如果旋转前、后的图形相互重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点叫做它的对称中心.

5. 多边形的内角和与外角和.

n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，外角和为 360°.

6. 三角形中位线定理.

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

学习指导

1. 抓住特殊与一般的对立统一关系，把握不同几何图形的共性和特性．

2. 学会运用转化的数学方法．例如，把四边形问题转化为三角形问题．

3. 学会运用运动的观点看问题．例如，改变菱形的角，当有一个角是直角时，菱形就成为正方形；改变矩形的边，当矩形的邻边相等时，矩形就成为正方形．因此，正方形既有菱形的性质，又有矩形的性质．

4. 四边形在日常生活和生产中应用很广，学习中要注意联系实际，借助实例理解所学的知识，注意所学知识的实际运用．学习中要勤于动手画图、实际测量和观察，要把知识学活．

复习题

★基础★

1. 选择题：

(1) 一个四边形的内角中，锐角的个数(　　).

A. 最少有一个　　B. 最少有两个

C. 最多有四个　　D. 可能没有

(2) 在下列条件中，能判定一个四边形是平行四边形的是(　　).

A. 一组对边平行，另一组对边相等

B. 一组对边平行，一组对角相等

C. 一组对边平行，一组邻角互补

D. 一组对边相等，一组对角相等

(3) 菱形具有而一般平行四边形所没有的性质是(　　).

A. 两组对边分别相等　　B. 两条对角线相等

C. 四个内角都是直角　　　　　　　　D. 对角线平分对角

(4) 下列所说的图形中，是中心对称图形的是(　　).

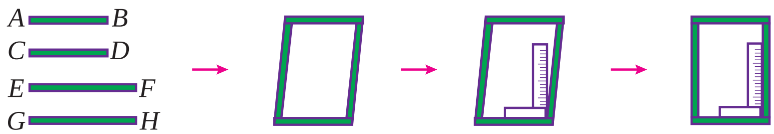
A. 线段　　　　　　　　　　　　　　B. 射线

C. 三角形　　　　　　　　　　　　　D. 等边三角形

2. 工人师傅做铝合金窗框时，分下面三个步骤进行：

(1) 先截出两对符合规格的铝合金窗料[图(1)]，使 $AB = CD$，$EF = GH$；

(2) 摆成如图(2)所示的四边形，这时窗框的形状是__________形，依据的数学原理是________________；



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

(第 2 题)

(3) 将直角尺紧靠窗框的一个角[图(3)]，调整窗框的边框，当直角尺的两条直角边与窗框无缝隙时[图(4)]，说明窗框合格，这时窗框是________形，依据的数学原理是____________________________________.

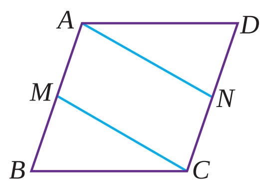
3. 等边三角形的边长为 8 cm，由一边上的任意一点引另两边的平行线，求所得的平行四边形的周长.

4. (1) 如图，在▱$ABCD$ 中，$AM = \frac{1}{2}AB$，$CN = \frac{1}{2}CD$. 求证：四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

(2) 当 $AM = \frac{1}{3}AB$，$CN = \frac{1}{3}CD$ 时，四边形 $AMCN$ 是平行四边形吗?

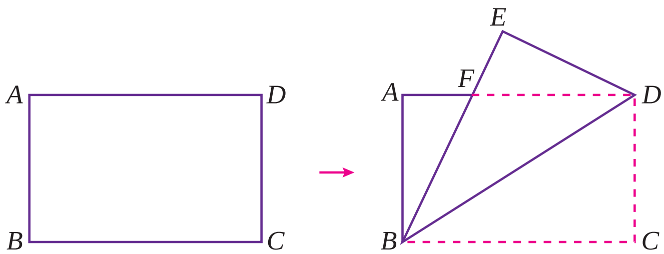
(3) 如果 $AM = \frac{1}{m}AB$，$CN = \frac{1}{m}CD$ 呢?

你能得出一个一般性的结论吗?



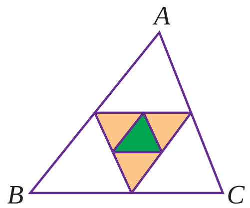
(第 4 题)

5. 如图，把一张矩形纸片沿对角线折叠，重合部分是什么图形? 试说明理由.

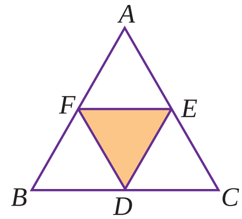


(第 5 题)

6. 如图，$\triangle ABC$ 的三边长分别是 a，b，c，以它的三边中点为顶点组成一个新三角形，以这个新三角形三边中点为顶点又组成一个小三角形．求这个小三角形的周长．



（第 6 题）



（第 7 题）

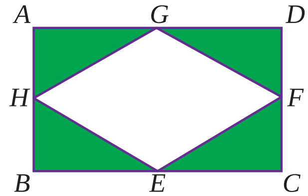
7. 如图，在等边三角形 ABC 中，D，E，F 分别是三边 BC，CA，AB 的中点，看一看，数一数，在整个图形中，有多少个等边三角形？多少个平行四边形？多少个菱形？

★★提升★★

如图，是一种长 30 cm、宽 20 cm 的矩形瓷砖，E，F，G，H 分别是矩形的边 BC，CD，DA，AB 的中点．现有一面长 4.2 m、高 2.8 m 的墙壁准备贴这种瓷砖．试问：

（1）这面墙壁最少要贴这种瓷砖多少块？

（2）全部贴满瓷砖后，这面墙壁最多会出现多少个面积相等的菱形？其中绿色的菱形有多少个？

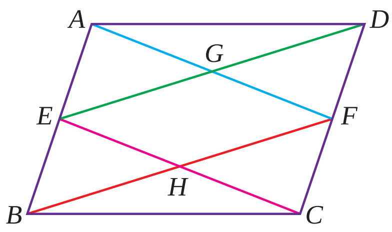


★★★拓展★★★

如图，在▱ $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，CD 的中点，AF 与 DE 相交于点 G，CE 与 BF 相交于点 H.

（1）证明：四边形 $EHFG$ 是平行四边形；

（2）想一想，什么情况下四边形 $EHFG$ 会成为一个菱形．



第十六章
一元二次方程

我们曾学习了一元一次方程和它的解法，并且应用它解决了一些实际问题．但是，在列方程解决实际问题时，所列的方程却不一定是一元一次方程．所以，我们对方程的学习还没有结束，我们还要学习各式各样的方程和它们的解法，才能不断提高解决实际问题的能力．

在本章中，我们将要学习一元二次方程和它的解法．

一、一元二次方程和它的解法

16.1 一元二次方程

实践

根据下面的问题，设一个未知数，列出方程：

(1) 如图 16－1，要使一个边长为 8 米的正方形花坛的面积增加 80 平方米后仍为正方形，边长应延长多少米？

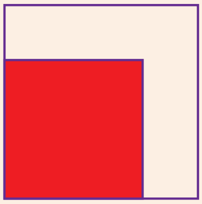


图 16－1

(2) 小亮、小明、小刚三名同学中，小亮的年龄比小明的年龄小 7 岁，小刚的年龄比小明的年龄大 5 岁，并且小亮与小刚的年龄的乘积是 160. 你知道这三名同学的年龄各是多少岁吗？

(3) 给木质器具表面刷油漆时，每平方米需用油漆 100 克．当我们把一个正方体表面刷满油漆时，恰好用掉油漆 2 400 克，那么这个正方体的棱长是多少呢？

我们把问题 (1) 中边长应延长的部分设为 m 米，根据题意，得方程

$$(m+8)^2=8^2+80\ ;$$

对于问题 (2)，设小明的年龄为 x 岁，根据题意，得方程

$$(x-7)(x+5)=160\ ;$$

对于问题 (3)，设正方体的棱长为 a 米，根据题意，得方程

$$6a^2=\frac{2\,400}{100}.$$

经过整理，这些方程可以分别写成

$$m^2+16m-80=0,\qquad x^2-2x-195=0,\qquad a^2-4=0.$$

它们都是只含有一个未知数，而且未知数的最高次数是 2 的方程．一般地，这样的方程都能整理成形如

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

为什么 a 必须不为零，而 b 和 c 却可以为零？

的一般形式，我们把这样的方程叫做**一元二次方程**．其中 ax^2，bx，c 分别叫做一元二次方程的二次项、一次项和常数项，a，b 分别是二次项和一次项的系数．

例 判断下列方程是不是一元二次方程，如果是，分别指出它们的各项系数和常数项：

(1) $2x(x-3)=10$；　(2) $3m^2+2=2(2m+1)$；

(3) $x(3+x^2)+1=5$；　(4) $3y-5=4(2-y)$；

(5) $(2k-3)(k+5)=7k$；　(6) $2x(x+3)=6x$.

解： 方程分别整理为

(1) $x^2-3x-5=0$；　(2) $3m^2-4m=0$；

(3) $x^3+3x-4=0$；　(4) $7y-13=0$；

(5) $2k^2-15=0$；　(6) $x^2=0$.

其中，(1)、(2)、(5)、(6) 都是一元二次方程，它们的二次项系数、一次项系数和常数项分别为：(1) 1，−3，−5；(2) 3，−4，0；(5) 2，0，−15；(6) 1，0，0. 而 (3) 的最高次项的次数是 3，(4) 的最高次项的次数是 1，它们都不是一元二次方程．

交流

方程 $(a-1)x^2+ax-5=0$ 中，x 是未知数，a 表示一个已知的实数，那么，可以认为它是一元二次方程吗？为什么？怎样判断这个方程的类型？

练习

1. 判断下列方程是不是一元二次方程，如果是，指出它们的各项系数和常数项：

(1) $3y=4y(2-y)$；　(2) $2a(a+5)=10$；

(3) $x^2(3+x)+1=5x$；　(4) $3+2m^2=2(2m-3)$.

2. 判断下列关于 x 的方程的类型，确定方程的各项系数和常数项：

(1) $2x(3x-2)=3(2x^2-1)$；　　(2) $23-5x=x(2-ax)(a\neq 0)$；

(3) $3x^2-5=x(mx-7)+2x$.

16.2 一元二次方程的解法

1. 开平方法

在 16.1 节的“实践”中，我们得到了三个一元二次方程．把它们分别整理为

$$(m+8)^2=144,\quad (x-7)(x+5)=160,\quad a^2-4=0.$$

现在我们研究怎样去求这些方程的解．

思考

在这些方程中，你认为哪几个方程根据曾经学习过的知识就可以求出解来？说说你的解法．

可以看到，方程 $a^2-4=0$ 可以转化为 $a^2=4$，方程的解就是 4 的平方根；对于方程 $(m+8)^2=144$，如果把 $m+8$ 看做一个整体，它就是 144 的平方根．所以只需直接开平方，就能求出这两个方程的解．如：

(1) 解方程 $a^2-4=0$.

解：方程化为

$$a^2=4.$$

开平方，得

$$a=\pm 2.$$

所以，这个方程的解是

$$a=2 \quad 或 \quad a=-2.$$

(2) 解方程 $(m+8)^2=144$.

解：开平方，得

$$m+8=\pm 12.$$

由 $m+8=+12$ 得

$$m=4.$$

由 $m+8=-12$ 得

$$m=-20.$$

所以，这个方程的解为

$$m=4 \quad 或 \quad m=-20.$$

由此可见，凡是形如 $x^2=m(m\geqslant 0)$ 的方程都可以用开平方的方法求出它的解，这种解法称为**开平方法**.

练习

1. 用开平方法解下列方程：

(1) $x^2=121$；　(2) $9y^2=25$；　(3) $3a^2-27=0$.

2. 用开平方法解下列方程：

(1) $(x-3)^2=16$；　(2) $4(t+4)^2=9$；　(3) $2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1=0$.

2. 配方法

探索

我们来研究方程 $x^2+4x-2=0$ 的解法.

(1) 这个方程能用开平方法求解吗?

(2) 这个方程能转化为形如 $(x+n)^2=m(m\geqslant 0)$ 的方程而用开平方法求解吗? 如果能，怎样确定 n 的值?

(3) 试用这种设想去求这个方程的解.

通过对方程的变形，完成 $x^2+4x-2=0$ 向形如 $(x+n)^2=m(m\geqslant 0)$ 的方

程转化：

移项，得

$$x^2+4x=2.$$

方程两边同时加 4，得

$$x^2+4x+4=2+4.$$

整理得

$$(x+2)^2=6.$$

用开平方法求解，得

$$x+2=\pm\sqrt{6}\ .$$

当 $x+2=+\sqrt{6}$ 时，有

$$x=-2+\sqrt{6}\ .$$

当 $x+2=-\sqrt{6}$ 时，有

$$x=-2-\sqrt{6}\ .$$

所以原方程的解为 $x=-2+\sqrt{6}$ 或 $x=-2-\sqrt{6}$.

我们把这种组成完全平方式的变形过程叫做配方，用配方求方程的解的方法称为**配方法**.

在这里，进行配方的变形时，变形的步骤有规律吗？

思考

我们知道，在对形如 x^2+px 的式子进行配方时，加上的一项应是$\left(\frac{p}{2}\right)^2$，也就是加上的一项应是“原式一次项系数的一半的平方”.

想一想，一次项系数的符号对配方的结果有影响吗？

练习

用配方法解下列方程：

（1）$x^2-2x-2=0$；（2）$a^2-5a-2=0$；（3）$x^2-\frac{3}{4}x=0$.

下面我们来研究方程 $2x^2-12x+7=0$ 的解法 .

探索

1. 当二次项的系数不是 1 时，配方法应当怎样进行呢？
2. 用配方法求出方程 $2x^2-12x+7=0$ 的解 .

事实上，对于这个方程，我们只需在方程两边同时除以二次项的系数 2，就能把二次项的系数转化为 1，得

$$x^2-6x+\frac{7}{2}=0.$$

配方时，应加上的项是 3^2，得

$$x^2-6x+3^2=-\frac{7}{2}+3^2.$$

$$(x-3)^2=\frac{11}{2}.$$

开平方，得

$$x-3=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}=\pm\frac{\sqrt{22}}{2}.$$

所以，方程的解为

$$x_1=\frac{6+\sqrt{22}}{2}，\quad x_2=\frac{6-\sqrt{22}}{2}.$$

例 1 用配方法解方程 $3x^2+2x-9=0$.

解： 方程两边同时除以 3，得

$$x^2+\frac{2}{3}x-3=0.$$

配方，得

$$x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=3+\left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{28}{9}.$$

开平方，得

$$x+\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{7}.$$

所以，方程的解为

$$x_1=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7},\quad x_2=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}.$$

练习

1. 用配方法解下列一元二次方程：

(1) $3x^2+6x-4=0$；　　(2) $5x^2-15x+11=0$.

2. 解下列一元二次方程：

(1) $2x^2-4\sqrt{3}x+5=0$；　　(2) $\frac{3}{4}x^2-x-\frac{1}{2}=0$.

3. 公式法

交流

1. 用配方法解一元二次方程时，主要的步骤是什么？

2. 能按照这个步骤，推导出一个用来求一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

的根的公式吗？

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，由于 $a\neq 0$，可以在方程两边同时除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

由于 $a\neq 0$，有 $4a^2>0$，所以，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，可以用开平方法，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，原方程的解为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由此，我们得到了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant 0).$$

运用这个公式求一元二次方程的解时，首先要把方程整理为一般形式，以便正确地确定方程中的各项系数和常数项．

例 2 利用求根公式解方程 $2x^2-8x+3=0$.

解： 由于 $a=2$，$b=-8$，$c=3$，所以

$$b^2-4ac=(-8)^2-4\times 2\times 3=40>0.$$

代入公式，得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{40}}{2\times 2}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}.$$

所以，方程的根是

$$x_1=\frac{4+\sqrt{10}}{2},\quad x_2=\frac{4-\sqrt{10}}{2}.$$

利用求根公式求一元二次方程的解的方法称为**公式法**.

思考

用公式法求一元二次方程的解时，应按照怎样的步骤进行?

正确使用求根公式求解，应按照以下的步骤进行:

(1) 把方程整理为一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，确定 a，b，c 的值;

(2) 计算式子 b^2-4ac 的值;

(3) 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，把 a，b 和 b^2-4ac 的值代入求根公式计算，就可以求出方程的解.

例 3 用公式法解下列方程:

(1) $x(x+2\sqrt{3})=4$;　　　　(2) $2\left(x^2-\dfrac{3}{2}\right)=2(\sqrt{2}x-2)$.

解: (1) 整理原方程，得

$$x^2+2\sqrt{3}x-4=0.$$

因为　$a=1$，　$b=2\sqrt{3}$，　$c=-4$，

所以　$b^2-4ac=(2\sqrt{3})^2-4\times 1\times(-4)=28>0$.

代入求根公式，得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{28}}{2\times 1}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}.$$

所以，方程的解为

$$x_1=-\sqrt{3}+\sqrt{7},\quad x_2=-\sqrt{3}-\sqrt{7}.$$

(2) 原方程整理为

$$2x^2-2\sqrt{2}x+1=0.$$

因为　$a=2$，　$b=-2\sqrt{2}$，　$c=1$，

所以　$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 2\times 1=0$.

代入求根公式，得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{0}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以，方程的解为

$$x_1=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

应当注意，如果求出的一元二次方程的两个实数根相等，我们就说，这个一元二次方程有两个相等的实数根．

练习

1. 用公式法解下列方程：

   (1) $x^2-x-1=0$；　　(2) $2x^2+2x-1=0$.

2. 用公式法解下列方程：

   (1) $2(x^2-1)-1=4x$；　　(2) $y(y-3)=2+y(1-3y)$.

利用图形计算器求方程 $0.372x^2-1.24x-0.245=0$ 的近似解（精确到 0.001）.

解： 因为 $a=0.372$，$b=-1.24$，$c=-0.245$，所以

$$\begin{aligned}x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-(-1.24)\pm\sqrt{(-1.24)^2-4\times 0.372\times(-0.245)}}{2\times 0.372}.\end{aligned}$$

用图形计算器的操作过程如下：

[开机] [1] [1] [菜单] [3] [1] [0] [.] [3] [7] [2] [×] [X] [^]
[2] [▶] [−] [1] [.] [2] [4] [×] [X] [−] [0] [.] [2] [4] [5] [=] [0]
[,] [X] [enter]

如图 16 − 2（答略）.

图 16 − 2

练习

1. 用公式法解方程：$3x^2-10x-5=0$.
2. 用计算器解方程：$3.25x^2-6.79x+0.832=0$（精确到 0.01）.

思考

能否不解方程而判断出一元二次方程是否有实数解？怎样做出这种判断？

我们在用公式法求一元二次方程的解时知道，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，才能求得方程的实数根，当 $b^2-4ac<0$ 时方程没有实数根．所以，我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是否有实数根的判别式，记作

$$\Delta=b^2-4ac.$$

思考

当一个一元二次方程有实数根时，这两个实数根在什么情况下相等，在什么情况下不相等？

观察一元二次方程的求根公式可以知道，当判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，有

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a},$$

这两个实数根相等；当判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，这两个实数根不相等．

例 4 判断下列方程是否有实数根．有实数根时，两个实数根是否相等？

(1) $x^2-5x-12=0$；　　(2) $8y(2y-5)=-25$；

(3) $3x(x-3)+7=5(1-x)$.

解：(1) 因为 $b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times(-12)=73>0$，
所以方程 $x^2-5x-12=0$ 有两个不相等的实数根．

(2) 原方程整理为

$$16y^2-40y+25=0.$$

因为 $b^2-4ac=(-40)^2-4\times16\times25=0$，
所以方程 $8y(2y-5)=-25$ 有两个相等的实数根．

(3) 原方程整理为

$$3x^2-4x+2=0.$$

因为 $b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times2=16-24<0$，
所以方程 $3x(x-3)+7=5(1-x)$ 没有实数根．

思考

如果 x_1，x_2 是一元二次方程 $2x^2+3x-7=0$ 的两个实数根，那么不解方程你能知道 x_1+x_2，x_1x_2 的值吗？

如果一元二次方程有两个实数根，那么这两个实数根的和及这两个实数根的积与此方程的系数之间有怎样的关系呢？

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，设 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，由求根公式得 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

所以

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

因此，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，它的两个实数根 x_1，x_2 满足

$$*\quad x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

我们称这两个等式为一元二次方程的根与系数的关系．

练习

1. 不解方程，判断下列方程是否有实数根．如果有实数根，请判断两个实数根是否相等．

(1) $4x^2-5x-7=0$；　　(2) $2y(y-3)=-5$；

(3) $k^2+5=2\sqrt{5}k$；　　(4) $4m(m-1)=m-2$.

*2. 设 x_1，x_2 是一元二次方程 $3x^2-x-4=0$ 的两个根，不解方程，求下列代数式的值．

(1) $(x_1+5)(x_2+5)$；　　(2) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

4. 因式分解法

我们知道，配方法和公式法是一元二次方程的一般解法，但是，某些特殊的一元二次方程除了可以用这些方法求解外，还存在更简捷的特殊解法．

交流

观察、分析下列一元二次方程的特点，有什么其他的方法能求出它们的解？

(1) $x^2-3x=0$；　　(2) $(y-1)^2+3(y-1)=0$.

我们发现，这两个一元二次方程都是等号右边为零，左边的代数式都可以作因式分解的方程．因而，可以根据“使两个数的乘积为零”的条件来求方程的解．

思考

“使两个数的乘积为零”的条件是什么？怎样用简洁的语言来表述这个条件？怎样用这个条件求方程的解？

“使两个数的乘积为零”的条件可以表述为“只需两个数中有一个数为零”，由此可以得到某些一元二次方程的另一种解法．

例如，方程 $x^2-3x=0$ 可以化为

$$x(x-3)=0.$$

由于 x 和 $(x-3)$ 的乘积为零时，只需 x 为零或 $(x-3)$ 为零，也就是

$$x=0 \quad \text{或} \quad x-3=0.$$

于是，可得方程的解为

$$x_1=0, \quad x_2=3.$$

又如，方程 $(y-1)^2+3(y-1)=0$ 可以化为

$$(y-1)[(y-1)+3]=0.$$

所以，有

$$(y-1)(y+2)=0.$$

$$y-1=0 \quad \text{或} \quad y+2=0.$$

于是，可得方程的解为

$$y_1=1, \quad y_2=-2.$$

这就是说，对于某些等号一边为零、另一边的代数式可以作因式分解的一元二次方程，都可以用这种方法来求解，这种方法称为**因式分解法**.

例 5 用因式分解法解下列方程：

(1) $(x-3)^2=5(x-3)$；　　(2) $(y-7)^2-3y(7-y)=0$.

解：(1) 移项，得

$$(x-3)^2-5(x-3)=0.$$

因式分解，得

$$(x-3)[(x-3)-5]=0.$$

$$(x-3)(x-8)=0.$$

所以

$$x_1=3, \quad x_2=8.$$

(2) 原方程可以化为

$$(y-7)^2+3y(y-7)=0.$$

提取公因式，得

$$(y-7)[(y-7)+3y]=0.$$

$$(y-7)(4y-7)=0.$$

所以

$$y_1=7, \quad y_2=\frac{7}{4}.$$

例 6 用因式分解法解下列方程：

(1) $(t-3)(t+5)=-15$； (2) $(y-4)^2=(y-4)(3y-1)$；

*(3) $x^2-2x-24=0$.

解：(1) 去括号，整理，得

$$t^2+2t=0.$$

因式分解，得

$$t(t+2)=0.$$

所以

$$t_1=0,\quad t_2=-2.$$

(2) 移项，作因式分解，得

$$(y-4)^2-(y-4)(3y-1)=0.$$

$$(y-4)[(y-4)-(3y-1)]=0.$$

$$(y-4)(-2y-3)=0.$$

所以

$$y_1=4,\quad y_2=-\frac{3}{2}.$$

*(3) 运用公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$，原方程可以变形为

$$(x-6)(x+4)=0.$$

所以

$$x_1=6,\quad x_2=-4.$$

练习

用因式分解法解下列方程：

(1) $3x^2+2x=0$； (2) $4(2x-1)+3x(2x-1)=0$；

(3) $4(x-5)^2=5(x-5)$； *(4) $x^2-6x+8=0$；

*(5) $x^2-9x-10=0$.

思考

在解一元二次方程时，应当按照怎样的思路来选择解法？

例 7 选择适当的方法解下列方程：

(1) $x^2+2x=3x(x+1)$；

(2) $y(y-4)=4(y-1)$；

(3) $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$.

解：(1) 整理，得

$$2x^2+x=0.$$

因式分解，得

$$x(2x+1)=0.$$

所以

$$x_1=0,\quad x_2=-\frac{1}{2}.$$

(2) 整理，得

$$y^2-8y+4=0.$$

配方，得

$$y^2-8y+4^2=-4+4^2.$$

$$(y-4)^2=12.$$

开平方，得

$$y-4=+2\sqrt{3}\quad 或 \quad y-4=-2\sqrt{3}\ .$$

所以

$$y_1=4+2\sqrt{3},\quad y_2=4-2\sqrt{3}.$$

(3) 用公式法求解 .

因为 $a=2$， $b=-2\sqrt{6}$ ，$c=3$，

所以

$$b^2-4ac=\left(-2\sqrt{6}\right)^2-4\times 2\times 3=0.$$

代入，得

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2\sqrt{6}}{2\times 2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

练习

选择适当的方法解下列方程：

（1）$x(x-3)=3x-9$；

（2）$(3x-4)^2-5=0$；

（3）$4x^2-4x-1=0$；

（4）$x^2-4ax-4a^2=0\ (a>0)$.

习　题　16－1

★基础★

1. 用开平方法解下列方程：

（1）$x^2-289=0$；

（2）$3x^2-75=0$；

（3）$3(a-1)^2-2=0$；

（4）$121-25\left(y+\frac{4}{5}\right)^2=0$.

2. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2-2x-4=0$；

（2）$t^2-3t-1=0$；

（3）$2a^2+8a-5=0$；

（4）$2p^2+3p-4=0$.

3. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-3x+1=0$；

（2）$x(3x-4)=2+x$；

（3）$\sqrt{2}x^2+3x-\sqrt{2}=0$.

4. 用公式法解下列方程（利用计算器，结果精确到 0.01）：

（1）$2x^2-\sqrt{5}x-2=0$；

（2）$3x^2+4\sqrt{3}x=2$.

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2=3x$；　(2) $4(3x-1)^2=3(3x-1)$；

*(3) $p(p-8)-3p+24=0$；　*(4) $m^2+7m+6=0$；

*(5) $5p^2-12p-9=0$.

6. 选择适当的方法解下列方程：

(1) $2x^2=5x$；　(2) $x(x+7)=60$；

(3) $x^2-4x-2=0$；　(4) $3(x-7)^2=24$；

(5) $x(x+3)=1$；　(6) $2(x^2-5)=x(1-x)$；

(7) $x^2-2nx+n^2=m^2$（x 是未知数）.

7. 不解方程，判断下列方程是否有实数根．如果有实数根，请判断两个实数根是否相等．

(1) $x^2-4x+5=0$；　(2) $3x^2+5x+2=-1$；

(3) $x(x+3)=7$；　(4) $2(x^2-5)=x(1-x)$；

(5) $\sqrt{5}x^2-(4-\sqrt{2})x+\sqrt{10}=0$.

8. 解方程 $(x-5)(x+2)=18$ 时，下面的解法正确吗？如果不正确，错误在哪里？正确的解法是什么？

解：原方程化为 $(x-5)(x+2)=3\times 6$，那么由 $x-5=3$，得

$$x=8.$$

由 $x+2=6$，得

$$x=4.$$

所以，原方程的根为

$$x_1=8，x_2=4.$$

★★提升★★

1. 解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2-\sqrt{m}x-n^2=0$；　(2) $x^2-mx-1=0$.

2. 是否存在 x 的实数值，使代数式 $\dfrac{3x^2-5x+1}{4}$ 与 $\dfrac{x^2-x-1}{2}$ 的值相等？

3. 解关于 x 的方程 $nx^2-(m-2n)x-m+n=0\ (n\neq 0)$.

4. 已知关于 x 的方程 $ax^2-(2a+b)x+2b=0$ 的根是实数，解这个方程．

5. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2+2x-1=0$ 有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围．

6. 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2-3x-2=0$ 有实数根，求 m 的取值范围．

★★★ 拓展 ★★★

1. 有人说：“当一元二次方程的二次项和常数项的系数之积是负数时，这个方程一定有两个不相等的实数根 .”这个说法正确吗？如果你认为不正确，请举出反例；如果你认为正确，请加以证明 .

2. 像 $\sqrt{2x^2+7x}-x=2$ 这样的二次根号下含有未知数的方程叫做无理方程 .你能根据二次根式的意义和方程解法的一般思路来求这个方程的解吗？你求出的解确实是原方程的解吗？

3. 解下列方程：

(1) $2(x^2-7x)^2-21(x^2-7x)+10=0$；

(2) $(2x^2+3x)^2-4(2x^2+3x)-5=0$.

二、一元二次方程的应用

16.3 列方程解应用问题

我们已经学习了用列方程的方法解一些应用问题，现在又学习了一元二次方程，使得更多的应用问题可以用列方程来求解 .

例 1 用 80 m 长的篱笆在墙边围一个矩形的草坪（图 16－3），当矩形面积是 750 m^2 时，它的长和宽应是多少？

图 16－3

解： 设矩形的宽 AC 为 x m，那么长 CD 为 $(80-2x)$ m. 据题意，可得方程

$$x(80-2x)=750.$$

整理，得

$$x^2-40x+375=0.$$

用配方法，得

$$(x-20)^2=25.$$

开平方，得

$$x-20=\pm 5.$$

于是，方程的解为

$$x_1=25,\quad x_2=15.$$

所以，矩形草坪的长为 30 m 或 50 m.

答：矩形草坪的宽 AC 为 25 m、长 CD 为 30 m，或宽 AC 为 15 m、长 CD 为 50 m.

例 2 有一块长 25 cm、宽 15 cm 的长方形铁皮，如果在铁皮的四个角上截去四个相同的小正方形，然后把四边折起来，做成一个底面面积为 231 cm^2 的无盖的盒子，求这个盒子的容积 .

分析： 如图 16－4，要求盒子的容积，只需求出盒子的高，而小正方形的边长和盒子的高相等 .

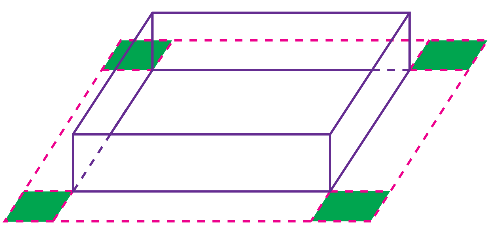


图 16－4

解： 设盒子的高为 x cm. 根据题意列方程，得

$$(25-2x)(15-2x)=231.$$

整理，得

$$x^2-20x+36=0.$$

解得

$$x_1=18,\quad x_2=2.$$

这里，虽然 $x=18$ 是方程的解，但小正方形的边长必须小于 $\frac{15}{2}$ cm 才有意义，所以 $x=18$ 不合题意，应舍去，那么符合题意的解为

$$x=2.$$

于是可知，当盒子的高为 2 cm 时，盒子的容积是

$$2\times 231=462(\text{cm}^3).$$

答：这个盒子的容积为 462 cm^3.

例 3 某工厂由于管理水平提高，生产成本逐月下降．原来每件产品的成本是 1 600 元，两个月后，降至 900 元．求产品成本的月平均降低率．

分析： 如果原每件成本为 a 元，每月成本的平均降低率为 x，那么一个月后的每件成本就是

$$a-ax=a(1-x).$$

两个月后的每件成本是

$$\begin{aligned}&a(1-x)-a(1-x)\cdot x\\=&a(1-x)(1-x)\\=&a(1-x)^2.\end{aligned}$$

解： 设产品成本的月平均降低率为 x．根据题意，得

$$1\,600\times(1-x)^2=900.$$

$$(1-x)^2=\frac{9}{16}.$$

解这个方程，得

$$1-x=\frac{3}{4} \quad 或 \quad 1-x=-\frac{3}{4}.$$

$$x_1=\frac{1}{4},\quad x_2=\frac{7}{4}.$$

其中 $x_2=\frac{7}{4}$ 不合题意，舍去，所以

$$x=\frac{1}{4}=25\%.$$

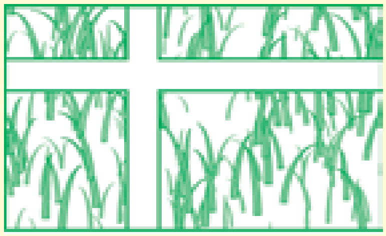
答：产品成本的月平均降低率为 25%.

练习

列方程解下列应用题：

(1) 两个数的差是 5，积是 176．求这两个数．

（2）在宽为 20 m、长为 32 m 的长方形地面上铺 540 m^2 的草坪，并留出如图所示的宽度相同的甬道．求甬道的宽度是多少．



［第（2）题］

（3）某产粮大户今年产粮 20 万千克，计划后年产粮达到 28.8 万千克．如果每年粮食增产的百分数相同，求平均每年增产的百分数．

习　题　16－2

★基础★

列方程或方程组解下列应用问题：

（1）已知两个数的差是 7，积为 228．求这两个数．

（2）在有理数中，能被 2 整除的负数也叫做偶数．那么，有 5 个连续偶数，如果第 1 个与第 5 个偶数的乘积是 308，求这 5 个偶数．

（3）一个圆形花坛的周围铺了一条宽为 2 m 的圆环形甬路．甬路和花坛的总面积为 200 m^2，那么甬路的中心线的周长是多少米（π 取 3.14，计算结果精确到 0.1 m）？

（4）某工厂一月份生产塑料颗粒 5 000 t，三月份增加到 7 200 t，求这个工厂的月平均增长率．

（5）某印刷厂第一季度共印了 182 万册书，一月份印了 50 万册，那么这个印刷厂印数的月平均增长率是多少？

★★提升★★

列方程或方程组解下列应用问题：

(1) 在长是 10 cm 的矩形上，以此矩形的宽为边长，截出一个正方形，使矩形的剩余面积为 16 cm^2，求此矩形的宽．

(2) 直角三角形的面积为 96 cm^2，两直角边的和为 28 cm．求它各边的长．

★★★拓展★★★

某校组织 360 名学生去看足球比赛，如果租用 n 辆中型客车（每辆租金 400 元），刚好坐满．已知大型客车比中型客车多 20 个座位，如果要租用大型客车（每辆租金 480 元），虽然可以少租一辆，但有 40 个空位．请你设计一种租金最少的租车方案，并说明理由．

阅读理解

古代数学家对一元二次方程的贡献

关于一元二次方程的知识，最早出现在公元前两千年左右古巴比伦人的泥板文书中．它记载了这样的问题：“求一个数，使它与它的倒数之和等于一个已知数．”列出的方程就是

$$x^2-bx+1=0\ (b\text{ 是已知数}),$$

并给出了它的解是

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}\quad\text{或}\quad\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}.$$

虽然他们当时还不能接受负数，但这也足以说明古巴比伦人已开始接触一元二次方程，并致力于研究一元二次方程的求根公式．

古埃及的“纸草文书”中也涉及如 $ax^2=b$ 这样的最简单的一元二次方程．

希腊的丢番图(246—330)只承认一元二次方程的一个正根，即使两根都是正的他也只取一个.

公元628年，印度的婆罗摩笈多写成的《婆罗摩修正体系》中，给出了一元二次方程

$$x^2+px-q=0$$

的一个求根公式

$$x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}.$$

阿拉伯的花拉子米(约783—850)的《代数学》中讨论了方程的解法，解出了一元一次、一元二次方程，其中包含一元二次方程的几种不同的形式：$ax^2=bx$，$ax^2=c$，$ax^2+c=bx$，$ax^2+bx=c$，$ax^2=bx+c$，但他限定了 a，b，c 总是正数. 他的伟大贡献在于第一次给出一元二次方程的一般解法，并且承认方程有两个根，还允许有无理根的存在，这在当时已是巨大的进步了!

我国对一元二次方程的研究历史悠久，约公元1世纪成书的《九章算术》“勾股”一章中的第20题，就是相当于求方程

$$x^2+34x-71\ 000=0$$

的正根的问题.

我国南北朝时期的《张丘建算经》(大约成书于466—485)中，提出了一个用文字写出的，相当于

$$x^2+cx=c^2-36\frac{a}{b}$$

的一元二次方程.

近代法国数学家韦达(1540—1603)指出一元二次方程在实数范围内无解时，实际上在复数(复数的知识将在高中阶段学习)范围内有解，并且给出了根与系数的关系.

回顾与整理

知识要点

1. 形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程叫做一元二次方程．

2. 一元二次方程的解法主要包括：

(1) 某些一次项系数为零的一元二次方程可以用开平方法求解；

(2) 某些易于作配方变形的一元二次方程可以通过配方，再用开平方法求解；

(3) 任何一个一元二次方程都可以用求根公式法求解，对于作配方变形时计算烦琐的，更宜于应用求根公式法求解；

(4) 某些等号一边为零、另一边可以作因式分解的一元二次方程，可以通过因式分解，把一元二次方程转化为两个一元一次方程来求解，这种特殊的解法由于方便快捷，可以在求解时优先选择；

(5) 在解一元二次方程时可以使用计算器作计算，有条件的也可以用图形计算器直接求解．

3. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 是否有实数根可以由判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 来判定：

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根．

4. 在掌握了一元二次方程的解法以后，就可以在已掌握多种类型的方程和方程组的解法的基础上，解决更多类型的实际问题．

学习指导

1. 学好一元二次方程首先应做到的是：

(1) 会把方程整理成一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0$；

(2) 正确识别一元二次方程，掌握方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的条件是 $a\neq 0$；

学习指导

(3) 正确确定一元二次方程各项的系数和常数项.

2. 应注意学会合理地选择一元二次方程的解法. 其思路顺序应当是认真观察方程的特点，考虑:

(1) 是否能用开平方法求解;

(2) 是否能用因式分解法求解;

(3) 是否适宜用配方法求解;

(4) 用公式法求解.

3. 应认真掌握方程合理的变形和正确的计算技能. 合理的变形就要注意保持方程的相等关系；正确的计算则依赖于算法的准确和认真的态度. 所以，一元二次方程的求解既需要对有关知识有正确的理解，还需要有熟练的运算技能，除了深化理解、掌握知识外，认真练习是必不可少的.

4. 和一元一次方程不同，一元二次方程并不一定有实数解. 利用判别式 b^2-4ac 就可以在不解方程的情况下，确定方程是否有实数解. 在有实数解的条件下，还能判定两个实数解是否相等. 应当注意，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有实数解的条件是

$$b^2-4ac\geqslant 0.$$

5. 应注意继续加强方程的应用意识，不断提高用方程思想分析实际问题和运用方程的知识解决实际问题的能力.

复 习 题

★基础★

1. 把下列一元二次方程化成一般形式：

(1) $(3x-2)^2-3x=x(x+4)$；　　(2) $(2t-3)(t+2)=4t-5$.

2. 写出下列各个方程的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $3x(x-2)=4x-1$；　　(2) $(y-3)(2y+5)=2-y$；

(3) $5x^2-2=2(x-1)$；　　(4) $5a(a-2)=10a$.

3. 下列方程中哪些是一元二次方程？哪些不是一元二次方程？

(1) $(p-3)^2=(p-1)(p+1)$；　　(2) $2x^2-3x=x(x-3)$；

(3) $(4z-3)(z+1)=5z^2-3$；　　(4) $2x(3+x^2)=2x(3x-5)$.

4. 把一元二次方程 $3x^2+5x-7=0$ 改写成 $-3x^2-5x+7=0$，可以吗？为什么？

5. 把下列方程化为最简整系数，并且二次项的系数是正数的一元二次方程：

(1) $\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$；　　(2) $0.25x^2-1.6x-2=0$.

6. 解下列方程：

(1) $9x^2-121=0$；　　(2) $4(x-3)^2-169=0$；

(3) $18(a-5)^2-169=2(a-5)^2-25$；　　(4) $4(p-\sqrt{3})^2-48=0$.

7. 解下列方程：

(1) $x^2-6x+6=0$；　　(2) $y^2+12y-62=0$；

(3) $x^2-5x-2=0$；　　(4) $x^2-11x+5=0$.

8. 解下列方程：

(1) $x^2-4x+3=0$；　　(2) $3y^2+5y-2=0$.

9. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-5x+2=0$；　　(2) $2p^2-4p-3=0$；

(3) $3t^2-4t-5=0$；　　(4) $2.4x^2-4.2x-2.3=0$（结果精确到 0.01）.

10. 解下列方程：

(1) $x^2-8x+12=0$；　　(2) $x^2-6x-16=0$；

(3) $a^2-29a-30=0$；　　(4) $m^2-38m+361=0$.

11. 解下列方程：

(1) $3r^2-r-10=0$；　　(2) $6x^2-5x-21=0$；

(3) $4p^2=5p$；　　(4) $5m(m+2)-2(m+2)=0$.

12. 填空题：

(1) 如果某两位数的十位数字是方程 $x^2-8x=0$ 的解，那么它的十位数字是________；如果某两位数的个位数字是方程 $x^2-8x=0$ 的解，那么其个位数字是________.

(2) 两个数的和为 12，积为 32，那么这两个数是________.

(3) 如果两个连续正整数的平方和是 313，那么这两个连续正整数是________.

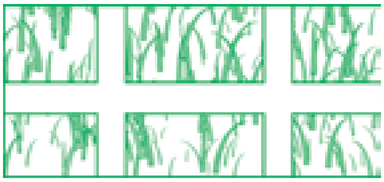
(4) 三个连续正整数中，前两个数的平方和等于第三个数的平方，那么这三个数从小到大依次是________.

(5) 为了绿化学校，需移植草皮到操场．如果矩形操场的长比宽长 14 m，面积是 3 200 m^2，那么操场的长为________m，宽为________m.

13. 要在一个 8 cm × 12 cm 相片外侧的四周镶上宽度相同的银边，并且要使银边的面积和相片的面积相等，那么银边的宽应该是多少？

14. 一间会议厅的地面是矩形，面积为 224 m^2. 其左面墙壁的面积为 126 m^2，后面墙壁的面积为 144 m^2. 求该会议厅的长和宽各是多少米．

15. 在一块长为 32 m、宽为 20 m 的长方形草坪上，要修筑宽度相同的 3 条甬道(如图). 若要保证剩余的草坪面积为 570 m^2，甬道的宽度应是多少米？



(第 15 题)

16. 生产某电器，原来每件的成本是 300 元，由于技术革新，连续两次降低成本，现在的成本是 192 元．每次降低成本时，成本的平均降低率是多少？

17. 某钢厂今年一月份钢产量为 4 万吨，第一季度共生产 13.24 万吨，二、三月份平均每月的增长率是多少？

★★ 提升 ★★

1. 指出下列关于 x 的方程在什么条件下才是一元二次方程．

(1) $(m-3)x^2+3mx+2-m=0$；　　(2) $(a^2-3)x^2-5ax+3a=0$.

2. 解下列方程：

(1) $4(2x+1)^2+1=6(2x+1)^2-5$；　　(2) $\dfrac{(3-2x)^2}{12}+1=\dfrac{2(3-2x)^2}{15}$.

3. 用配方法解下列关于 x 的方程：

(1) $4x^2-4ax-3a^2=1-4a$；　　(2) $(5x-3)^2-2(5x-3)-3=0$.

4. 用公式法解下列方程：

(1) $y(y-3)=2+y(1-3y)$；　　(2) $ax^2-2bx-a=0\ (a\neq 0)$.

5. 解下列方程：

(1) $2x^2-3x=\dfrac{1}{2}(x^2-6x)$；　　(2) $(x-7)^2+(x+7)^2=4x(x-7)+196$.

6. 有四个连续整数，已知它们的和等于其中最大的与最小的两个数的积，求这四个数 .
7. 某工厂计划用两年的时间把上缴利税提高 44%，如果每年比前一年提高的百分数相同，求这个百分数 .
8. 某厂有甲、乙两个车间，一月份的产值分别为 70 万元和 80 万元，到三月份甲车间比乙车间的产值多 4 万元 . 已知甲车间这两个月的平均增长率是乙车间这两个月的平均增长率的 2 倍，求甲、乙两车间这两个月的平均增长率各是多少 .
9. 矩形的面积是 120 cm^2，对角线的长是 17 cm . 求矩形的长和宽 .

★★★ 拓展 ★★★

1. 桶内盛满酒精 40 L，第一次倒出若干升后，注满水；第二次倒出同样多的酒精溶液，再注满水，这时桶内纯酒精为 10 L. 求每次倒出的液体是多少升 .
2. 为了合理利用水资源，某城市对一工厂的生产用水做出限额，超过限额则要加价收费（办法见表）. 现该厂用水 160 万吨，需缴水费 175 万元，求限额单价 M.

用水量 / 万吨	1 ~ 100	101 ~ 150	151 以上
吨单价 / 元	M	$\frac{1.2}{M}$	$\frac{1.5}{M}$

如果答案不是唯一的，就会有不同的实施方案，请分析每个实施方案的优劣，说说你的观点 .

第十七章
方差与频数分布

小明、小华两位同学在射击选拔比赛中，各射击10次．他们两个人的最高成绩、平均数、中位数都相同，那么，还可以从哪些方面分析，从而判断选派谁参加比赛更为合适呢？

期中测验的数学成绩公布了，应从哪些方面对全班的成绩做出分析和评估呢？

在这一章，我们将进一步学习数据的描述和整理，从而获得更多的统计信息，帮助我们更深刻地认识一组数据．

一、数据的波动

17.1 方差

在章前页的问题中，小明和小华的 10 次射击成绩如下表所示：

小明和小华的射击成绩表

环数 顺序 / 参赛人员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
小　明	7	4	9	8	10	7	8	7	8	7
小　华	7	6	10	5	9	8	10	9	5	6

可以发现，他们两个人的最高成绩都是 10 环，中位数都是 7.5 环，经过计算，平均成绩都是 7.5 环，也就是说，他们的最高水平和平均水平都相同 .

思考

还可以从哪些方面分析，来说明这两个人射击成绩的差异？从而判断究竟选派哪位同学参加比赛更合适呢？

首先，从两个人 10 次射击成绩变化范围的大小看 .

小明的成绩变化范围是

$$\text{最高成绩}-\text{最低成绩}=10-4=6(\text{环})；$$

小华的成绩变化范围是

$$\text{最高成绩}-\text{最低成绩}=10-5=5(\text{环}).$$

这说明，小华的成绩变化范围比较小，如果只从成绩的变化范围看，选派小华参加比赛较合适 .

通常，我们称一组数据中的最大值减去最小值所得的差为极差 . 极差表示了一组数据变化范围的大小，但由于只考虑了它的两个极端数据

的变化，因此用它来表示一组数据的波动还比较粗略．

为了更合理地确定派谁参加比赛，我们还要全面深入地分析他们的成绩．

实践

分别画出两个人 10 次射击成绩的折线图，再作出一条表示平均数(7.5)的水平直线(图 17－1).

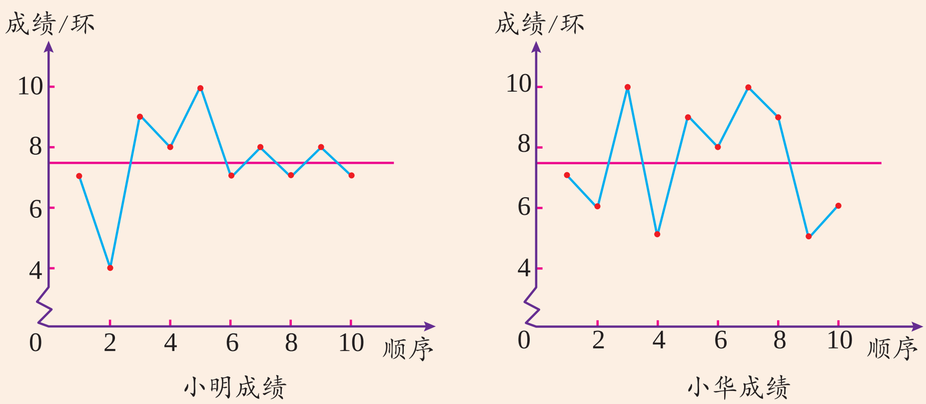


图 17－1

观察折线图，你能发现两个人射击成绩波动的差异吗？谁的成绩中偏离平均数较大的次数较少？

不难看到，在 10 次射击中，小明的成绩中偏离平均数较大的次数较少，更多的成绩接近于平均数．

我们分别计算两个人的成绩偏离平均数的平均距离，来比较成绩波动的大小．由于每个数据与平均数的差有正有负，它们的平均值是零．因此，要计算每个数据与平均数的差的绝对值的平均值，得

为什么平均值是零?

$$\text{小明：}\frac{1}{10}(|7-7.5|+|4-7.5|+\cdots+|7-7.5|)=1.1\text{；}$$

$$\text{小华：}\frac{1}{10}(|7-7.5|+|6-7.5|+\cdots+|6-7.5|)=1.7.$$

由于 $1.1<1.7$，说明小明的成绩偏离平均数的平均距离较小，波动较小，成绩更稳定．

偏离平均数的平均距离比极差更全面地反映了一组数据波动的大小，但是在计算时要取绝对值，使用不便，统计中很少应用．因此，我们通常先取每个数据与平均数的差的平方数，再求平均值．从而有

小明：$\frac{1}{10}[(7-7.5)^2+(4-7.5)^2+\cdots+(7-7.5)^2]=2.25$；

小华：$\frac{1}{10}[(7-7.5)^2+(6-7.5)^2+\cdots+(6-7.5)^2]=3.45.$

这里，由于 $2.25<3.45$，也说明了小明的成绩偏离平均数的平均波动较小，成绩更稳定．

虽然小华的 10 次成绩变化范围较小，但是从成绩波动情况看，小明的成绩波动较小，更稳定，选派小明参加比赛更为合适．

实践

如果用 x_1，x_2，x_3，…，x_n 表示一组数据，用 $\bar{x}$ 表示这组数据的平均数，用 s^2 表示每个数据与平均数的差的平方数的平均值．你能写出 s^2 的计算公式吗？

s^2 的计算公式是：

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2].$$

我们把 s^2 叫做这组数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n 的**方差**．它描述了一组数据波动的大小．方差的值越小，数据波动越小、越整齐．因此，常用方差来比较平均数相同的两组数据波动的大小，也用它描述数据的离散程度．

例 某地区某年 12 月中旬前、后 5 天的最高气温记录如下（单位：℃）：

前 5 天	5	5	0	0	0
后 5 天	−1	2	2	2	5

比较哪 5 天中最高气温的变化范围较小，哪 5 天中最高气温的波动较小．

解： 要比较最高气温变化范围的大小，只需计算并比较它们的极差.

前 5 天：极差$_1 = 5 - 0 = 5$；

后 5 天：极差$_2 = 5 - (-1) = 6$.

因为极差$_1$ < 极差$_2$，所以前 5 天中最高气温的变化范围较小.

要比较最高气温波动的大小，只需计算并比较它们的方差的大小. 计算方差步骤如下：

(1) 先求这两组数据的平均数.

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = 2.$$

(2) 再把数据代入方差计算公式计算.

前 5 天：$s_1^2 = \frac{1}{5}[(5-2)^2 + (5-2)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2] = 6$；

后 5 天：$s_2^2 = \frac{1}{5}[(-1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (5-2)^2] = 3.6$.

因为 $s_2^2 < s_1^2$，所以后 5 天中最高气温的波动较小，比较稳定.

练习

1. 比较下列两组数据，哪组数据的变化范围较小，哪组数据的波动较小、比较整齐.

甲　组	1	3	5	7	9
乙　组	−1	2	9	10	—

2. 某工厂招聘技工，甲、乙两个人应聘. 在两个人其他条件相同的情况下，考核他们各加工 5 个零件的加工质量. 他们加工零件的实际长度与设计长度的误差如下表所示（精确到 1 mm）：

编　号	1	2	3	4	5
甲的误差 /mm	−3	2	1	−4	5
乙的误差 /mm	1	2	−1	−2	1

试问：

(1) 就加工零件的误差而言，谁的变化范围较小，谁的波动较小？

(2) 如果你是厂长，会聘谁，为什么？

17.2 用科学计算器计算方差

用公式求方差时，通常计算量很大，而用科学计算器计算，就很简便了．

例 1 用科学计算器分别计算下列两组数据的平均数和方差：

(1) 3 005，3 005，3 003，3 000，2 994；

(2) 5，5，3，0，－6.

解：(1)

	具体操作	结　果
A型计算器	[2nd] [⇔] [enter] [⇔] 3005 [enter] 3005 [enter] 3003 [enter] 3000 [enter] 2994 [enter] [▷] [2nd] [⇔] [enter] [∨] [∨] [enter]	5
	2 [enter]	3 001.4
	[2nd] [⇔] 34 [x^2] [enter]	17.04
B型计算器	[MODE] 21 3005 [=] 3005 [=] 3003 [=] 3000 [=] 2994 [=] [AC] [SHIFT] 142 [=]	$\bar{x}$ 3 001.4
	[SHIFT] 143 [x^2] [=]	σx^2 17.04

所以，平均数 $\bar{x}=3\,001.4$，方差 $s^2=17.04$.

(2) 计算过程略．

平均数 $\bar{x}=1.4$，方差 $s^2=17.04$.

请你完成计算过程！

思考

1. 例 1 中 (1) 和 (2) 两组数据之间的关系是什么？为什么这两组数据的平均数不相等而方差却相等？

2. 当一组数据的每个数都在某个常数附近波动时，能简化计算方差的过程吗？应怎样简化？

当一组数据的每个数据都在某一个常数附近波动时，可以将这组数据的每个数都减去这个常数，得到一组简化的数据，再计算简化数据的方差，从而简化输入数据的过程 .

例 2 用科学计算器计算 501，503，498，500 这组数据的方差 .

分析： 这组数据的每个数都在常数 500 附近波动，每个数都减去 500，就得到一组简化的数据 .

解： 简化原来的数据，得 1，3，-2，0. 用科学计算器计算可得

$$s^2 = 3.25.$$

即原来这组数据的方差为 3.25.

请你完成计算过程！

练习

1. 用科学计算器分别计算下列各组数据的方差：
   (1) 1，2，3，4，5，6；
   (2) -2，-2，0，0，0，6.
2. 先简化数据，再用科学计算器分别计算下列各组数据的方差：
   (1) 8 241，8 250，8 248，8 253，8 245；
   (2) 12 341，12 340，12 349，12 349，12 344.

思考

怎样比较两块地里的西瓜大小的均匀程度？

例 3 从甲、乙两块良种西瓜地中，随机各摘取 20 个成熟的西瓜一一过秤，数据如下表（精确到 0.01 kg）：

西瓜质量 /kg	5.50	5.40	5.00	4.90	4.60	4.30
甲地的西瓜个数	2	3	6	5	2	2
乙地的西瓜个数	1	6	7	2	2	2

请估计哪块地里成熟的西瓜大小比较均匀 .

分析：只需分别计算从甲、乙两块地中所摘取西瓜质量的平均数和方差，由此来估计哪块地里的西瓜大小比较均匀 .

解：用科学计算器分别计算这两组数据的平均数和方差，得

$\bar{x}_{甲}=4.975$，$s_{甲}^2=0.116$；

$\bar{x}_{乙}=5.025$，$s_{乙}^2=0.126$.

由于 $\bar{x}_{甲}\approx\bar{x}_{乙}$，而 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$，所以甲地里的西瓜大小比较均匀 .

请你完成计算过程！

练习

为了考查东、西两块小麦地中麦苗的长势，分别从两块地的麦苗中随意抽出 50 株苗，测得麦苗株高数据，整理如下表：

东块地的麦苗株高 /cm	11	12	13	14	15	16	17	18
东块地的麦苗数 / 株	7	10	16	7	4	2	2	2
西块地的麦苗株高 /cm	9	10	11	12	13	14	15	16
西块地的麦苗数 / 株	2	2	3	4	17	11	7	4

试估计这两块麦地的小麦中，哪块地的麦苗长势较整齐均匀 .

习　题　17－1

★基础★

1. 选择题：

（1）方差是表示一组数据的（　　）.

A. 变化范围　　B. 平均水平

C. 波动大小　　D. 数据个数

（2）方差的统计含义：表示一组数据的每个数（　　）.

A. 偏离它的平均数的差的平均值

B. 偏离它的平均数的差的绝对值的平均值

C. 偏离它的中位数的差的平方数的平均值

D. 偏离它的平均数的差的平方数的平均值

(3) 某少年军校准备从甲、乙、丙三位同学中选拔一人参加全市射击比赛．在选拔比赛中，三个人 10 次射击成绩的统计结果如下表．

同　学	最高水平 / 环	平均数 / 环	中位数 / 环	方　差
甲	10	8.3	8.5	1.5
乙	10	8.3	8.5	2.8
丙	10	8.3	8.5	3.2

经比较，推荐甲参加比赛，理由是甲的（　　）.

A. 最高水平较高　　B. 平均水平较高

C. 成绩好的次数较多　　D. 射击技术稳定

(4) 甲、乙两个患者在 10 天中测量每天体温的统计结果是 $\bar{x}_{甲}=36.1$℃，$s_{甲}^2=0.50$；$\bar{x}_{乙}=36.1$℃，$s_{乙}^2=1.00$. 那么 10 天中甲、乙的体温稳定情况是（　　）.

A. 甲较为稳定　　B. 乙较为稳定

C. 两个人一样稳定　　D. 不能确定

2. 填空题：

在一次外语测验中，同年级人数相同的甲、乙两个班的成绩统计如下表：

班　级	平均分	中位数	方　差
甲　班	82.5	85.5	40.25
乙　班	82.5	80.5	35.06

一位同学对此做出如下评估：

① 这次外语测验成绩甲、乙两个班的平均水平相同；

② 甲班学生中成绩优秀（85 分及以上）的多；

③ 乙班学生的成绩比较整齐，分化较小．

上述评估，正确的是________（填序号）.

3. 用公式计算方差：

(1) -1，0，1，4；

(2) -3，-2，-1，1，4.

★★提升★★

小华在一次运动员集训前、后的各 5 次百米跑中，测验成绩如下表（单位：s）：

集训前	11.3	11.2	11.4	11.5	11.7
集训后	11.6	11.3	11.4	11.2	11.3

请你用数据说明，这次集训对小华的百米跑成绩的提高是否有效果，如果有效果，效果表现在哪些方面．

★★★ 拓展 ★★★

用科学计算器分别计算下面各组数据的平均数和方差：

甲　组	1	2	3	4	5
乙　组	100	200	300	400	500

(1) 比较这两组数据，它们的对应关系是什么？它们的平均数和方差各有什么关系？

(2) 如果用科学计算器计算 0.01，0.02，0.03，0.04，0.05 的平均数和方差，你能根据 (1) 的结论，用简化数据的方法计算吗？请你试一试 .

二、数据的分布

17.3 频数分布表与频数分布图

在章前页中的另一个问题是分析评价某班学生的数学测验成绩 . 下面登录的是他们的成绩 (单位：分).

87，77，68，92，67，77，74，84，98，84，
59，77，80，77，76，94，82，65，60，56，
87，82，70，74，68，90，95，92，82，70，
70，82，80，82，89，82，85，85，58，78.

思考

对这次数学测验成绩，你已经能够用哪些数据进行分析和评估？你还希望知道哪些数据，以便对这次数学测验成绩作更深入的分析和评估？

对这次数学测验成绩，我们能够统计出的数据如下．

最高分：__________；最低分：__________；平均分：__________；及格率：__________；优秀率（85 分及以上）：__________；方差：__________．

我们还希望知道这次成绩更具体的分布．例如，哪个分数段的人数最多，哪个分数段的人数最少，分别占总人数的百分比是多少，等等．

1. 数据的分组整理

要解决这个问题，就需要统计各分数段的人数，先画出分数段，再统计各分数段的分数个数．

实践

以 10 分为一段，画出如下表左列的分数段．

各分数段中的分数，通常包括分数段的最低分，不包括最高分．累计时，可以按选举唱票的方法画“正”字．

某班数学成绩分段统计表

分数段	分数个数累计	分数个数	与总个数的比值
50 ~ 60			
60 ~ 70			
70 ~ 80			
80 ~ 90			
90 ~ 100			
合　计			

请你累计各分数段中分数的个数，并计算它与分数总个数的比值，将结果填在上表中．

分数分段统计就是数据的分组整理．它是按数值的大小，把一组数据分成若干个小组，累计各小组的数据个数．其中每个分数段是一个“组区间”，分数段两端的数值是“组限”，分数段的最大值与最小值的差是“组距”，分数段的个数是“组数”．

2. 频数、频率与频数分布表

回顾上面的统计结果，累计出每个小组的数据的个数（在这里也就是每个分数段的分数的个数），称为这组的**频数**；这组的频数与数据总个数的比值称为这组的**频率**．频率的计算公式是：

$$每组的频率=\frac{这组的频数}{数据的总个数}.$$

数据分组整理的结果通常用频数分布表表示．

某班数学成绩频数分布表

分组 / 分	频数累计	频　数	频　率
50 ~ 60	下	3	0.075
60 ~ 70	正	5	0.125
70 ~ 80	正正一	11	0.275
80 ~ 90	正正正	15	0.375
90 ~ 100	正一	6	0.150
合　计		40	1.000

交流

在上表中：

（1）组数是多少？举例说明组区间是什么？

（2）在“80 ~ 90”这一组中，组限各是什么？哪个是下限，哪个是上限？组距是多少？频数是多少？频率有多大？

（3）假设在“70 ~ 80”这一组中，如果频数已知，频率漏掉，怎样补上？如果频率已知，频数漏掉，怎样补上？如果频数、频率都漏掉，又怎样补上？

观察上表，我们可以看出：

“80 ~ 90”这组的频数（15）最大，数据最集中；“50 ~ 60”这组的频数（3）最小，数据分布最少．由此可知，这次测验的成绩在 80 ~ 90（分）这个分数段的人数最多，最集中；成绩在 50 ~ 60（分）这个分数段的人数最少．

从“50 ~ 60”组到“80 ~ 90”组，随着组区间中数值增大，频数增加；从“80 ~ 90”组到“90 ~ 100”组，随着组区间中数值增大，频数减少．由此可知，这次测验的成绩呈现出“两头少中间多”的分布．

80 分以上各组(含“80 ~ 90”组)的频数之和是 21，80 分以下各组的频数之和是 19，而平均分数(78.38)在 80 分以下．由此可知，这次测验的成绩高于平均分的人数多，低于平均分的人数少，成绩属偏高分布．

练习

某班级 30 名男生身高数据如下(单位：cm)：

155，158，161，162，164，165，170，171，167，164，
163，161，159，156，161，163，166，168，172，166，
164，160，156，160，165，168，174，175，165，178.

(1)以 5(cm)为组距，第 1 组为“155 ~ 160”，分 5 组整理身高数据；

(2)列出频数分布表，表示分组整理的结果．

3. 频数分布图

我们根据上页“某班数学成绩频数分布表”，以每小组的组距为宽，频数为高，画出各小组的频数条形图，从而画出一个频数分布直方图(图 17－2).

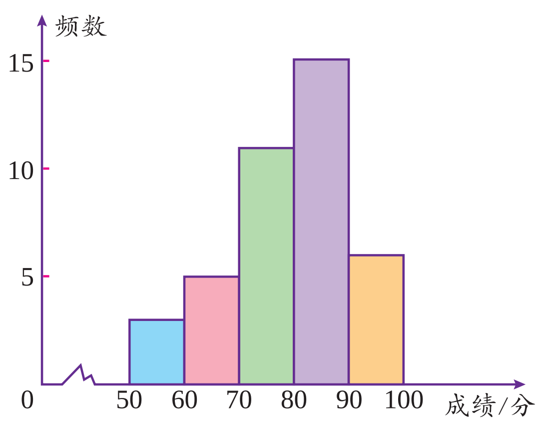


图 17－2 频数分布直方图

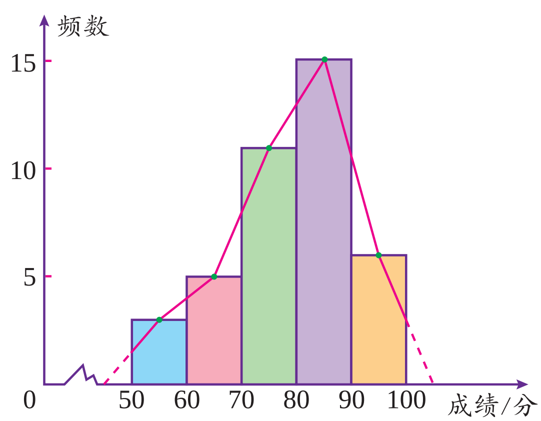


图 17－3 频数分布折线图

把“频数分布直方图”中的每个条形图的上边中点依次连接成折线段，就画成了频数分布折线图(图 17－3).

频数分布直方图直观形象地表示了一组数据在各小组分布的多少；频数分布折线图直观形象地表示了一组数据在各小组分布的变化趋势和整体分布形态.

也可以用计算机编制频数分布表和绘制频数分布图.

练习

下表是某年级 50 名同龄女生身高数据：

身高 /cm	146	151	153	154	156	157	158	159	160
人　数	1	2	2	2	3	4	8	4	4
身高 /cm	161	162	163	164	165	166	167	169	
人　数	2	4	3	2	3	4	1	1	

(1) 按下表左列的分组方法整理，列出频数分布表.

分组 /cm	频数累计	频　数	频　率
145 ~ 150			
150 ~ 155			
155 ~ 160			
160 ~ 165			
165 ~ 170			
合　计			

(2) 根据频数分布表画出频数分布直方图和折线图.

(3) 观察频数分布表和频数分布直方图，并回答问题：

① 身高在哪段高度的人数最多、最集中，在哪段高度的人数最少？各占总人数的比值是多少？

② 这 50 人的平均身高是 159.6 cm，比平均身高高的人数较多还是较少？

习　题　17－2

★基础★

1. 选择题：

（1）把一组数据分组整理，就是（　　）.

A. 把数据按大小排成一列

B. 把数据写在各个小组里

C. 把数据按大小分成若干个小组，累计各小组的数据个数

D. 把数据的平均数、中位数和方差求出来

（2）频数 m、频率 p 和数据总个数 n 的关系是（　　）.

A. $n=mp$　　　　B. $p=mn$

C. $n=m+p$　　　　D. $m=np$

（3）对频数分布直方图的下列认识，不正确的是（　　）.

A. 每小组条形图的横宽等于这组的组距

B. 每小组条形图的纵高等于这组的频数

C. 每小组条形图的面积等于这组的频率

D. 所有小组条形图的个数等于数据分组整理的组数

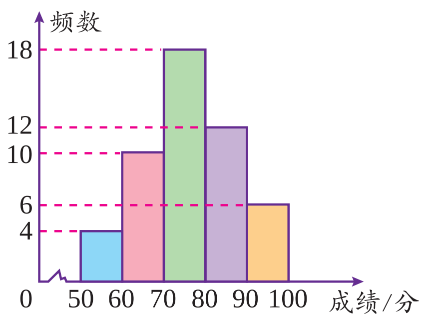
2. 填空题：

某班的一次数学测验成绩，经分组整理后，各分数段的人数如图所示（满分 100 分）. 请观察统计图，填空并回答下列问题：

（1）这个班有________名学生；

（2）成绩在________分数段的人数最多、最集中，占全班总人数的比值是________；

（3）成绩在 60 分以上（含 60 分）为及格，这次测验全班的及格率是________.



（第 2 题）

3. 某班 20 名男生在一次投掷标枪测验中，测验的成绩由甲、乙两人合作进行分组整理. 现已完成前 15 个数据的整理，还有后 5 个数据尚未累计（单位：m）：

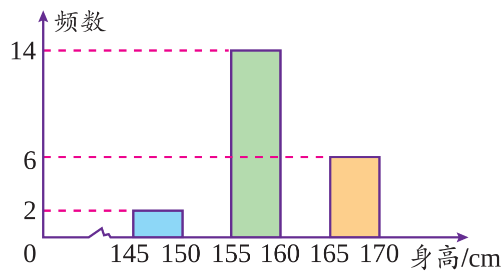
26.0，29.0，25.4，26.0，28.3.

请你将剩余的 5 个数据累计在下表中，填上各组的频数与频率，并画出频数分布直方图.

分组 /m	频数累计	频　数	频　率
20.0 ~ 22.0	一		
22.0 ~ 24.0	丅		
24.0 ~ 26.0	正		
26.0 ~ 28.0	止		
28.0 ~ 30.0	下		
合　计		20	1.00

4. 从某年级随意抽出 40 名同龄女生的身高数据，经分组整理后的频数分布表与频数分布直方图如下所示：

分组 /m	频　数	频　率
145 ~ 150	2	0.05
150 ~ 155	*A*	0.15
155 ~ 160	14	0.35
160 ~ 165	*B*	*C*
165 ~ 170	6	0.15
合　计	40	1.00



（第 4 题）

但在列表和画图时，遗漏了频数分布表中 *A*，*B*，*C* 三处的数据和频数分布直方图中的相应的条形图 .

（1）请你补全表中的 *A*，*B*，*C* 数据：$A=$ ________ ，$B=$ ________ ，$C=$ ________ .

（2）请你补全图中相应的条形图 .

（3）如果小丽的身高在 160 ~ 165（cm）这组中，她的身高可能是多高（精确到 1 cm，列出所有可能的身高数据）?

（4）估计该年级同龄女生的身高在________高度范围内的人数最多、最集中 .

★★ 提升 ★★

1. 红星养猪场准备出售 500 头猪，从中随意抽出若干头一一过秤，数据经分组整理，由频数分布表表示如下，其中有许多数据漏填 .

分组 /kg	45.5 ~ 50.5	50.5 ~ 55.5	55.5 ~ 60.5	60.5 ~ 65.5	65.5 ~ 70.5	70.5 ~ 75.5	合　计
频　数		8	16	8			
频　率	0.100			0.200	0.075		1.000

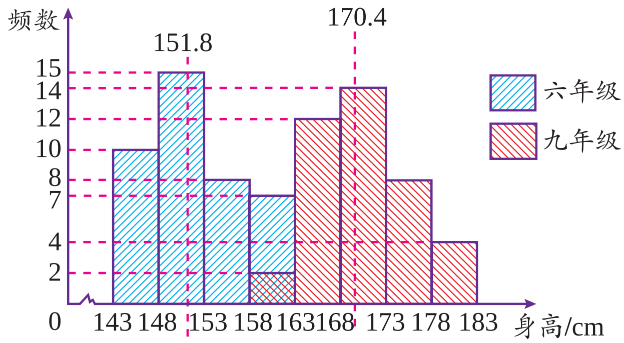
（1）请你补填表中漏填的数据 .

（2）根据补填后的频数分布表，画出频数分布直方图 .

(3) 根据频数分布表或频数分布直方图回答：随意抽出的这些猪的质量在什么范围内的头数最多、最集中，在什么范围内的头数最少？

(4) 根据 (3) 的结论，估计这批出售的 500 头猪的质量，在什么范围内的头数最多、最集中，占这批出售猪总数的百分比约为多少？

2. 某地区在六年级和九年级的男生中分别随机抽取 40 名学生测量他们的身高，经数据分组整理后，绘制的频数分布直方图如下：



（第 2 题）

其中两条纵向虚线上端的数值分别是每个年级抽出的 40 名男生身高的平均数．观察频数分布直方图回答：

(1) 六年级和九年级被抽取的 40 名男生身高的中位数分别各在哪个高度组？

(2) 估计这个地区九年级男生的平均身高比六年级男生的平均身高高出多少．

(3) 估计这个地区六年级、九年级这两个年级的全体男生中，身高不低于 153 cm 但低于 163 cm 的男生所占的百分比各约为多大．

★★★ 拓展 ★★★

小明在分组整理某班 50 人的一次数学测验成绩时，不小心把整理结果丢失了．经回忆他想起了分组如下表，且自左至右 5 个小组的频数比依次为 1 : 3 : 7 : 9 : 5.

分组 / 分	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90	90 ~ 100	合　计
频　数						
频　率						

请你根据小明想起的 5 个小组的频数比，解答下列问题：

(1) 求出上表中各组的频数和频率（填在表中）；

(2) 根据填上的频数分布表，指出这次测验成绩最集中的组是哪个分数段，中位数在哪个分数段；

(3) 如果从该班中随意找出一名学生，他的成绩在哪个分数段的可能性最小，可能性是多大？

综合与实践

空气质量状况调查

调查你所在城市某段时期内空气质量的状况，经历一次统计实践的全过程．

（1）抽样调查，收集数据．

（2）分组整理，用计算机或手工绘制频数分布表和频数分布图．

（3）计算出平均数、中位数和方差．

（4）做出统计分析和评估．

探究学习

本班同学主要学科学习分化的调查与分析

在数据统计时，常用方差的算术平方根 σ 来表示一组数据的波动大小．

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}\ .$$

我们把 σ 叫做一组数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n 的标准差．

方差和标准差适用于比较平均数相等的两组数据波动的大小．当两组数据的平均数相差较大，或单位不同时，就要消除平均数的影响，计算变异系数：

$$V_\sigma=\frac{\sigma}{\overline{x}}\times 100\%.$$

用比较变异系数 V_σ 的大小，来比较两组数据相对波动的大小．变异系数 V_σ 越小，数据相对波动就越小．

下面，运用变异系数作比较，来探究学习成绩分化的大小．变异系数越小，成绩分化越小．

一、探究目的

了解本班同学主要学科（语文、数学、外语）的八年级学习成绩和七年级同期的成绩，进行各学科成绩的比较，探究哪些学科成绩分化较小、比较稳定，哪些学科成绩分化较大．

二、活动方式

从任课教师或从班主任教师那里收集七年级、八年级第一学期期末考试全班同学的语文、数学和外语成绩．将全班同学分成三个小组，分别作语文、数学、外语的成绩统计，再分别计算两次考试成绩的平均分、标准差和变异系数，填在下面的表中，并在各组交流．

各科成绩平均分、标准差和变异系数统计表（精确到 0.01）

	七年级第一学期			八年级第一学期		
	平均分	标准差	变异系数（%）	平均分	标准差	变异系数（%）
语　文						
数　学						
外　语						

三、探究方法

每位同学根据表中的数据进行探究：

1. 比较同一学科不同学期成绩的变异系数的大小，探究八年级比七年级各学科成绩分化的情况；

2. 比较同一学期不同学科成绩的变异系数的大小，探究七年级、八年级各学科成绩分化的情况．

四、探究结果

将探究结果分别填在下表中：

各学科成绩分化情况比较（七、八年级）

学　科	变异系数的大小关系	做出结论
语　文	八年级________七年级	
数　学	八年级________七年级	
外　语	八年级________七年级	

各学科成绩分化情况比较（同时期）

学　期	各学科成绩变异系数大小关系	分化最大的学科
七年级第一学期	______ < ______ < ______	
八年级第一学期	______ < ______ < ______	

将上述探究结果在全班交流，并提供给教师参考．

阅读理解

平均数趣谈

在日常生活中，大家爱关心平均数——平均工资、平均年龄、平均亩产、平均收入，等等．不过，有时平均数也会骗人的．比如，由 5 人组成的家庭篮球队，平均年龄 23 岁，该是一帮生龙活虎的小伙子吧？上场一看，原来是一位七旬老人领着 4 个十一二岁的娃娃！又如，某公司招聘员工，招聘广告说，“本公司员工月平均工资 2 500 元”，收入很不错吧？详细一打听，原来是经理、副经理月工资七八千元，其他 6 位员工才八九百元！

可见，平均数不一定能代表一般的情况．知道了平均年龄是 23 岁，还应当看这几个人的年龄是不是接近平均年龄；广告说月平均工资 2 500 元，还要看全体员工的月工资是否接近于平均工资．也就是要考查它们与平均数的偏离程度．

标准差的大小，反映了数据与平均数的偏离程度．在上面的例子中，如果 5 个人的年龄分别是 70，12，11，11，11（岁），平均年龄是 23 岁，经计算，标准差是 23.5 岁，比平均数本身还大！假如另一支球队 5 个人的年龄分别是 30，25，24，19，17（岁），平均年

龄也是 23 岁，经计算，标准差是 4.6 岁．根据平均数 23 与标准差 4.6，我们就知道这的确是一支年轻力壮的队伍！

如果那个公司 8 个人的月工资分别是 8 000，7 000，900，900，800，800，800，800（元），平均工资是 2 500 元，经计算，标准差是 2 897.8 元，比平均工资大得多！假如另一个公司 8 个人的月工资分别是 3 500，3 000，2 500，2 500，2 200，2 200，2 100，2 000（元），平均工资也是 2 500 元，经计算，标准差是 479.6 元．根据平均数 2 500 与标准差 479.6，我们可以确信第二个公司的员工月收入的确还不错．

根据标准差还可以判断测量数据的可靠程度．设甲、乙两人用一根米尺测量同一段距离，各测 4 次，测得数据（单位：m）如下．

甲：105.20，106.05，104.90，105.85；

乙：104.10，107.25，103.85，106.80.

两组数据的平均数都是 105.50 m，但是甲测得的数据的标准差为 0.47 m，而乙测得的数据的标准差为 1.54 m，这表明甲的测量技术较好．如果两组数的平均值不同的话，甲测得的数据更为可信．

回顾与整理

知识要点

本章主要内容是：方差与频数分布，以及由本章内容反映的用样本估计总体的统计推断思想方法．

1. 数据的波动．

数据的波动大小，也就是数据的离散程度．

（1）方差．方差全面地、平均地反映了一组数据偏离它的平

知识要点

均数的波动大小，计算公式是：

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2].$$

(2) 用科学计算器计算方差．

当一组数据在某个常数附近波动时，可以减去这个常数用简化数据计算方差．

(3) 比较事物的整齐性、均匀性或稳定性、均衡性，就是比较事物的数据的方差．还常用样本的方差来估计总体的方差．

2. 数据的分布．

频数分布表和频数分布图，分别以表和图的形式表示数据分布的情况．

(1) 数据的分组整理．就是把一组数据按数值的大小分成若干个小组，同时累计各小组的数据个数．

(2) 频数与频率．每个小组的数据个数，称为频数；频数与数据总个数的比值，称为频率．频率的计算公式是：

$$频率=\frac{频数}{数据总个数}.$$

(3) 频数分布表．用列表的方式表示数据分组整理的结果．

(4) 频数分布图．用条形图表示每个小组的频数，各小组频数的条形图组合成一个图，就是频数分布直方图；用线段把频数分布直方图中各条形图的上边中点连接起来，就得到频数分布折线图．

(5) 用计算机绘制频数分布表和频数分布图．

(6) 统计实践活动．

学习指导

1. 本章学习数据的分布．对一组数据的分布可以从两个方面认识：一是大范围概括的认识；二是小范围内具体的认识．

学习指导

2. 一组数据分布的范围有多大，可以用极差表示．

一组数据偏离它的平均数的波动有多大，可以用计算每个数据与平均数的差的平方数的平均值得到的方差加以表示，在此过程中获得方差的统计方法和知识．

掌握用计算器计算方差的技能．

用样本的方差估计对应总体的特征，从中感受用样本估计总体的统计推断的思想方法．

3. 数据分组整理的方法和知识．由每个小组的数据个数，获得频数知识；由数据的个数（频数）占数据总个数的比值有多大，获得频率的计算方法和知识．

从分组整理的结果用列表或画图表示的方法中，获得频数分布表与频数分布图的绘制方法和知识，并从中获得数据分布的信息．

用样本数据的分布估计相应总体的分布特征，进一步体验统计推断的思想方法．

4. 从统计实践活动的实例中，经历统计实践的全过程，体会统计的作用．

5. 通过本章的学习，逐步养成用数据说话的求实作风，体会统计在解决实际问题中的作用和价值．

复　习　题

★基础★

1. 填空题：

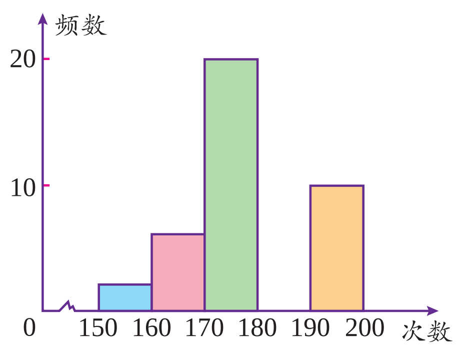
为了了解学生的体能情况，某校从八年级学生中抽取 50 名学生进行了一分钟跳绳测试．将测试数据分组整理后，画出部分组的频数条形图，如图所示．已知条形图的组的频率自左向右分别为 0.04，0.12，0.40，x，0.16. 根据已知条件填空、补图：

(1) 未画出频数条形图的组的频率 $x=$__________；

(2) 直方图中，从左向右各组的频数依次是__________，__________，__________，__________，__________；

(3) 补齐频数分布直方图；

(4) 这次跳绳测试中，跳绳次数的中位数所在组的次数范围是__________.



(第 1 题)

2. 甲、乙两个企业，连续六年每年向国家上缴的利税如下表：

年　份	2006	2007	2008	2009	2010	2011
甲上缴利税 / 万元	450	460	450	425	455	460
乙上缴利税 / 万元	445	480	475	425	430	445

试问，六年来：

(1) 哪个企业上缴的利税变化范围较大?

(2) 哪个企业上缴利税的波动更小?

3. 在一次学生演讲比赛中，五名评委对两名学生演讲的评分如下表：

评委代号	A	B	C	D	E
甲的评分 / 分	79	90	91	60	60
乙的评分 / 分	62	62	81	83	92

请回答：

(1) 五位评委对谁的演讲评分变化范围较小？

(2) 五位评委对谁的演讲评价比较一致？

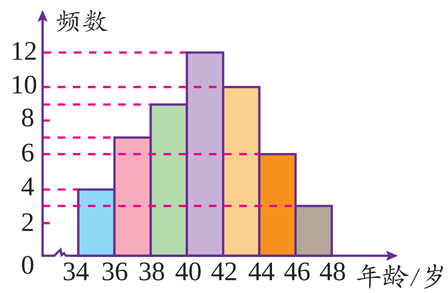
4. 下面的频数分布直方图表示的是某单位全部职工年龄（取整岁数）分组整理的结果．根据频数分布直方图提供的信息，回答下列问题：

(1) 该单位职工共有多少人？

(2) 不小于 38 岁但小于 44 岁的职工人数占职工总人数的百分比是多少？

(3) 哪个年龄段的职工最多，占职工总人数的百分比是多少？

(4) 如果 42 岁的职工有 4 人，那么年龄在 42 岁以上的职工有多少人？



（第 4 题）

5. 某鱼塘里放养了 500 尾草鱼，经过一段时间饲养后未流失．现从鱼塘里随机捞出 20 尾草鱼一一过秤，数据按尾数乘鱼的质量的形式表示，初步整理如下（单位：kg）：

$$1\times0.90，1\times0.95，2\times1.00，1\times1.05，3\times1.10，$$
$$4\times1.15，2\times1.20，3\times1.25，2\times1.30，1\times1.35.$$

(1) 以 0.90 ~ 1.00 kg 为第 1 组，以 0.10 kg 为组距分 5 组整理，列出频数分布表，并画出频数分布直方图；

(2) 根据频数分布表和分布直方图指出，捞出的 20 尾草鱼在哪个组的数量最多，与捞出总鱼数的比值有多大；

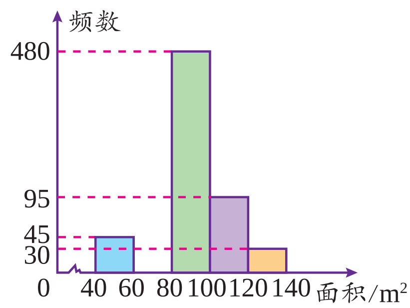
(3) 以捞出的 20 尾草鱼质量为样本，估计该鱼塘放养的草鱼在哪个质量范围内的数量最多，大约为多少，约占所放养草鱼总数的百分比有多大．

★★提升★★

随着人民生活水平的提高，购房者对住房面积的要求有了新的变化．现对从某地区随机抽取的 1 000 户近期购房居民进行调查，不同户型（购房面积）的购房户数资料分组整理如图所示．

（1）购买面积为 60 ~ 80 m^2 住房的有多少户？补齐条形图．

（2）购买面积在哪个范围内住房的户数最多、最集中？估计约占全部购房户数的比值是多大．



★★★拓展★★★

下表列举的是历史上的科学家蒲丰等人做过的成千上万次掷一枚钱币的实验记录：

掷币次数	2 048	4 040	4 092	10 000	12 000	24 000	80 640
“正面朝上”的频率	0.518 1	0.506 9	0.500 5	0.497 9	0.501 6	0.500 5	0.492 3

（1）分别求掷币次数在 1 万次以内（不含 1 万次，即前 3 组）和 1 万次以上（含 1 万次，即后 4 组）时，“正面朝上”的频率的平均值和方差．

（2）比较掷币 1 万次以内和 1 万次以上时，“正面朝上”频率的方差的大小；说明哪部分的频率更稳定在平均值附近．

附　录

部分中英文词汇索引

绿色印刷　保护环境　爱护健康

亲爱的同学：

你手中的这本教科书采用绿色印刷方式印刷，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志。从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷。

按照国家环境标准（HJ2503-2011）《环境标志产品技术要求　印刷　第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求。

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程