普 通 高 中 教 科 书

数学

选择性必修

第三册

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

人民教育出版社
·北京·

B版

主　　编：高存明
副 主 编：王殿军　龙正武　王旭刚
本册主编：李启寨　王人伟
其他编者：杨　静　李华英　包　虎　白　雪　刘　超

普通高中教科书　数学（B版）　选择性必修　第三册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

出　　版　人民教育出版社
　　　　　（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
重　　印　×××出版社
发　　行　×××新华书店
印　　刷　×××印刷厂
版　　次　2020年7月第1版
印　　次　　年　月第　次印刷
开　　本　890毫米×1240毫米　1/16
印　　张　7.5
字　　数　158千字
印　　数　　　册
书　　号　ISBN 978-7-107-34530-2
定　　价　8.75元
定价批号：××号

前 言

人们喜欢音乐，是因为它拥有优美和谐的旋律；人们喜欢美术，是因为它描绘了人和自然的美；人们喜欢数学，是因为它用空间形式和数量关系刻画了自然界和人类社会的内在规律，用简洁、优美的公式与定理揭示了世界的本质，用严谨的语言和逻辑梳理了人们的思维……

我国著名数学家华罗庚先生曾经指出：数学是一切科学的得力助手和工具；任何一门科学缺少了数学这一工具便不能确切地刻画出客观事物变化的状态，更不能从已知数据推出未知的数据来，因而就减少了科学预见的可能性，或者减弱了科学预见的准确度.

事实上，任何一项现代科学技术的出现与发展，背后都一定有数学知识的支撑. 互联网的普及、共享经济的繁荣、网络支付的便利、物联网的兴起、人工智能的发展、大数据的应用，离开了数学知识都是不可能的！并且，现代生活中，类似“逻辑”“函数”“命题”“线性增长”“指数增长”“概率”“相关性”等数学术语，在政府文件、新闻报道中比比皆是.

正如《普通高中数学课程标准（2017 年版）》（以下简称“课程标准”）所指出的：数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用. 数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养. 高中生学习必需的数学知识，能为自身的可持续发展和终身学习奠定基础.

为了帮助广大高中生更好地学习相关数学知识，我们按照课程标准的要求编写了这套高中数学教材. 在编写过程中，我们着重做了以下几项工作.

1. 关注学生成长，体现时代特征

教材在选取内容的背景素材时，力图从学生熟悉的情境出发，着力体现时代特征，并为学生的成长提供支撑. 例如，以下内容在本套教材中都有所体现：利用数学知识破解魔术的“秘密”，用生活中的例子说明学习逻辑知识以及理性思考的重要性，从数学角度理解报刊上有关人工智能、新兴媒体等报道中出现的“线性增长”“爆炸式增长”等名词.

教材中还提到了“网络搜索”“人工智能”“自主招生”“环境保护”“大数据”“按揭贷款”“电子商务”“创业创新”等. 我们相信，这些能引起大家的共鸣.

此外，教材中多处出现了借助现代信息技术学习数学知识的内容，包括怎样借助数学软件解方程、不等式，怎样借助信息技术呈现统计结果、展示模拟过程，等等.

在体现时代特征的同时，我们也特别注重对中华优秀传统文化的展示. 例如，教材中精选了多道我国古代数学名题，启发大家从数学角度去理解“失败乃成功之母”“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”等语句的含义，呈现了与二十四节气、古典诗词等有关的调查数据，介绍了《九章算术》在代数上的成就以及我国古代的统计工作，等等.

2. 吸收先进理念，改变呈现方式

在教材编写过程中，编者认真学习和讨论了当前教育学、心理学等学科的先进理念，并通过改变教材呈现方式来加以体现，力图真正做到“以学习者为中心”.

例如，教材每一章都引用了一段名人名言，旨在为大家的数学学习提供参考和指引；通过“情境与问题”栏目，展示相关数学知识在现实生活等情境中的应用；利用“尝试与发现”栏目，鼓励大家大胆尝试，并在此基础上进行猜想、归纳与总结；通过填空的方式，培养大家学习数学的信心；

选择与内容紧密联系的专题，设置拓展阅读，以拓宽大家的知识面，了解数学应用的广泛性；等等.

3. 遵循认知规律，力求温故知新

数学学习必须循序渐进是一种共识. 基础不扎实是很多人学不好数学的重要原因，本套教材在编写时特别考虑了这一点.

事实上，教材一方面按照课程标准的要求，讲解和复习了高中数学必备的集合、等式、不等式等内容；另一方面，在呈现新知识时，教材注重从已有知识出发，在回顾的基础上通过实际例子逐步引入，尽力展现新旧知识的联系，以达到温故知新的效果.

例如，教材在复习了变量以及初中函数概念的基础上介绍了函数中的对应关系，在回顾了整数指数幂、二次根式等后引入了分数指数幂，等等.

正因为如此，即使是初中数学基础比较薄弱的同学，使用本套教材也能顺利地进行学习，并最终达到理想的效果. 这在本套教材试教过程中已得到印证.

4. 揭示内容本质，重视直观理解

数学知识具有客观性，但数学知识的理解有多种方式与途径. 揭示内容本质，培养大家对数学内容的直观理解，是我们编写本套教材时特别注意的方面之一.

首先，教材内容的安排突出主线，强调“通性通法”. 例如，多次强调了配方法的使用，自始至终贯彻函数的研究应从特殊到一般、从性质到图像，等等.

其次，尽量自然地引入新内容或新方法. 例如，通过实例说明学习中位数、百分位数的必要性，通过对比说明用样本估计总体的合理性，等等.

最后，注重培养大家的数学学科核心素养. 课程标准提出的数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，在教材中都得到了落实. 仅以数学抽象为例，教材处处强调了自然语言与符号语言之间的相互转化等.

总的来说，“引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界”并不容易. 为此，我们在编写教材时做了很多新的尝试，力图给大家提供一套有时代特色、易教易学的数学教材，以帮助大家学习.

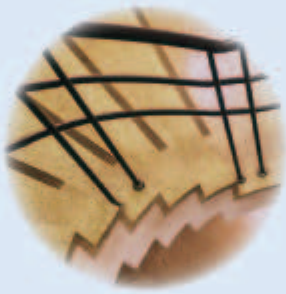
本书是这套教材选择性必修部分的第三册，呈现了数列和导数及其应用的内容. 通过本书的目录与每章的“本章导语”，可以大致了解本书的全貌，这里不再重复.

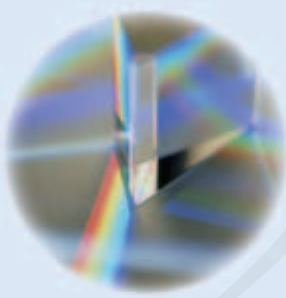
由于编写时间有限等原因，书中难免会有疏漏之处，敬请大家多提宝贵意见，以使教材日臻完善.

编者

2019 年 4 月

目录





本书拓展阅读目录

理解一个概念，意味着要理解它的准确定义、直观内容，以及为何需要这个概念、在什么背景下它会发生作用；理解一个技巧，意味着要清楚地理解它的操作方法、使用背景、证明方法和发现动机，并会在不同情况下正确使用它.

——伍鸿熙

第五章

数　列

本章导语

发现规律的能力是各行各业的人都需要具备的，因此，很多职业测试中都会有数字推理的考查内容．例如，以下是“行政职业能力测验”中的一道题，你能快速地做出来并说明理由吗？

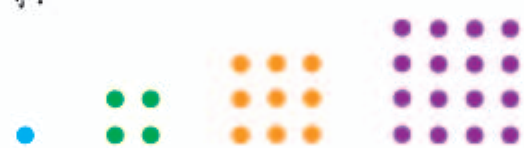
根据

$$1，2，4，7，(\quad)，16$$

中各数字之间的关系，填出括号中的数．

解答此类题目的关键无疑是要找出其中数字出现的规律．事实上，很久以前人们就开始了对类似问题的研究．

例如，古希腊的毕达哥拉斯学派将1，4，9，16等数称为正方形数，因为这些数目的点可以摆成一个正方形，如下图所示．依据这一规律，我们很容易就能知道，下一个正方形数应该是25，再下一个是36，等等．



你知道吗？通过寻找数字出现的规律，可以产生新的发现．

19世纪的时候，为了总结出已有化学元素之间的规律，门捷列夫尝试将元素按照原子量的大小进行了排序，结果成功地修正了一些元素的原子量，而且准确地预言了一些未知元素的存在．

例如，门捷列夫将当时已有的原子量约为7至14的元素按从小到大的顺序排列后，得到了如下结果．

元素	锂	硼	碳	铍	氮
原子量	7	11	12	13.5	14
化合价	+1	+3	+4	+2	+5

门捷列夫发现，上述表格中，原子量的那一行数，每个数是按从小到大的顺序排列的，但这些元素化合价的那一行数，却出现了不“和谐”的地方：+2出现在了+4与+5之间！而且，相对其他元素来说，铍的原子量与其后面元素的原子量差距（仅为0.5）太小了，锂的原子量与其后面元素的原子量差距（为4）又太大了．因此，门捷列夫猜测，铍的原子量可能不是13.5，而应该约为9，这一猜想后来在实验室得到了验证！

数学上，通常将按一定次序排列的数称为数列．本章我们要学习的就是数列的基础知识，以及两种规律比较常见的数列．

5.1 数列基础

5.1.1 数列的概念

1. 数列

日常生活中，人们经常用数来描述事物的某种属性，从中可以得到很多按照一定次序排列的数.

例如，我国古代哲学著作《庄子》中有一句话：“一尺之捶，日取其半，万世不竭.”这句话的意思是：一尺长的木棍，每天截去一半，永远也截不完. 从数学上来说，如果木棍初始长度为 1，则每天截去一半之后木棍的长度分别为

$$\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\cdots， \qquad ①$$

“万世不竭”的意思指的是上面的每一个数都不可能为 0.

2009 年至 2015 年，我国每年的专利申请受理数（精确到万）分别为

$$98，122，163，205，236，238，280. \qquad ②$$

为了方便资金暂时不足的人购物，有些购物网站推出了分期付款服务，如图 5-1-1 所示是标价为 3 000 元的电脑可以享受的分期服务，不同的付款方式所对应的付款总金额数分别为

$$3\,000，3\,045，3\,090，3\,180，3\,360. \qquad ③$$

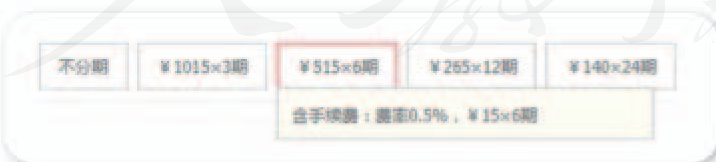


图 5-1-1

像①②③这样按照一定次序排列的一列数称为**数列**. 数列中的每一个数都称为这个数列的项，各项依次称为这个数列的第 1 项（或**首项**），第 2 项……例如$\frac{1}{2}$是数列①的首项，163 是数列②的第 3 项，3 360 是数列③的

第 5 项.

组成数列的数的个数称为数列的**项数**. 例如，数列①由无穷多个数组成，因此它的项数为无穷大（也称项数无限）；而数列②由 7 个数组成，因此它的项数为 7（也说成数列②共有 7 项）；类似地，数列③的项数为 5.

一般地，项数有限的数列称为**有穷数列**，项数无限的数列称为**无穷数列**. 因此，上述数列①②③中，②③为有穷数列，①为无穷数列. 有穷数列的最后一项一般也称为这个数列的**末项**.

2. 数列的通项

因为数列从首项起，每一项都与正整数对应，所以数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中 a_n 表示数列的第 n 项（也称 n 为 a_n 的序号，其中 n 为正整数，即 $n\in\mathbf{N}_+$），称为数列的**通项**. 此时，一般将整个数列简记为 $\{a_n\}$，这里的小写字母 a 也可以换成其他小写英文字母.

例如，如果用 $\{a_n\}$ 表示由正整数 1，2，3，…的倒数排成的数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \qquad ④$$

则 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=$ 1 ______；

如果用 $\{b_n\}$ 表示当 n 分别等于 1，2，3，…时，$(-1)^n$ 的值排成的数列

$$-1, 1, -1, \cdots, \qquad ⑤$$

则 $b_1=-1$，$b_2=1$，$b_3=-1$.

尝试与发现

你能写出数列④中 a_n 与 n 的关系吗？数列⑤中 b_n 与 n 的关系呢？

因为数列④中 a_n 是 n 的倒数，所以

$$a_n=\text{2 ______};$$

数列⑤中 b_n 是 -1 的 n 次方，所以

$$b_n=\text{3 ______}.$$

一般地，如果数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用

$$a_n=f(n)$$

来表示，其中 $f(n)$是关于 n 的不含其他未知数的表达式，则称上述关系式为这个数列的一个**通项公式**.

显然，根据数列的通项公式，能够写出这个数列的任意一项.

例 1 根据以下数列的通项公式，写出对应数列的第 2 项和第 5 项.

(1) $a_n=\dfrac{n^2-1}{2n-1}$；　　(2) $b_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

解 (1) 由通项公式可知

$$a_2=\frac{2^2-1}{2\times2-1}=1,$$

$$a_5=\frac{5^2-1}{2\times5-1}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}.$$

(2) 由通项公式可知

$$b_2=\sin\frac{2\pi}{2}=\sin\pi=0,$$

$$b_5=\boxed{4}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

例 2 写出以下各数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

(1) 2，4，6，8，10，…；

(2) 1，3，5，7，9，…；

(3) 0，2，0，2，0，…；

(4) $-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{4}{15}$，$-\dfrac{6}{35}$，$\dfrac{8}{63}$，$-\dfrac{10}{99}$，….

解 (1) 观察数列的前 5 项可知，每一项都是序号的 2 倍，因此数列的一个通项公式为

$$a_n=2n.$$

(2) 因为这个数列每一项都比(1)中数列的对应项小 1，因此数列的一个通项公式为

$$a_n=\boxed{5}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(3) 因为数列的第 1，3，5，…项都是 0，而第 2，4，…项都是 2，因此它的一个通项公式为

$$a_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ 2, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

想一想

你能写出(3)中数列其他形式的通项公式吗?

(4) 忽略正负号时，数列每一项的分子构成的数列是

$$2, 4, 6, 8, 10, \cdots,$$

其中每一个数都是序号的 2 倍；数列每一项的分母都是分子的平方减去 1. 又因为负号、正号是交替出现的，因此它的一个通项公式为

$$a_n=(-1)^n\frac{2n}{4n^2-1}.$$

3. 数列与函数的关系

尝试与发现

(1) 已知函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，你能根据这个函数构造出一个数列吗?

(2) 你能总结出一般数列与函数的关系吗?

在函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 中，分别令 $x=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$，就可以得到数列

$$2, \frac{3}{2}, 1, \cdots, -\frac{1}{2}n+\frac{5}{2}, \cdots, \quad ⑥$$

即这个数列的通项公式是

$$a_n=f(n)=-\frac{1}{2}n+\frac{5}{2}.$$

事实上，数列 $\{a_n\}$ 可以看成定义域为正整数集的子集的函数，数列中的数就是自变量从小到大依次取正整数值时对应的函数值，而数列的通项公式也就是相应函数的解析式．这就提示我们，数列也可以用平面直角坐标系中的点来直观地表示．例如，数列⑥可以用图 5-1-2 表示.

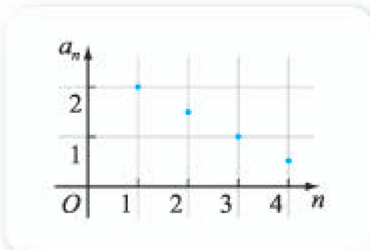


图 5-1-2

正因为如此，我们也可以用类似函数性质的术语来描述数列．例如，从第 2 项起，每一项都大于它的前一项的数列称为**递增数列**；从第 2 项起，每一项都小于它的前一项的数列称为**递减数列**；各项都相等的数列称为**常数数列**（简称为**常数列**).

前面的数列中，①④⑥是递减数列，②③是递增数列.

例 3 已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{x}$，设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=f(n)$，其中 $n\in\mathbf{N}_+$.

(1) 求证：$0\leqslant a_n<1$；

(2) 判断 $\{a_n\}$ 是递增数列还是递减数列，并说明理由.

解 (1) 由题意可知

$$a_n=f(n)=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n},$$

又因为 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 $0<\frac{1}{n}\leqslant 1$，因此 $0\leqslant 1-\frac{1}{n}<1$，即 $0\leqslant a_n<1$.

（2）因为

$$a_{n+1}-a_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n(n+1)},$$

又因为 $n+1>n\geqslant 1$，所以$\frac{1}{n(n+1)}>0$，从而 $a_{n+1}-a_n>0$，即 $a_{n+1}>a_n$.

因此$\{a_n\}$是6＿＿＿＿数列.

例 3 中的(2)也可以从 $f(x)=\frac{x-1}{x}$在$(0，+\infty)$上是增函数看出来．请读者自行尝试.

另一方面，当我们研究实际生活中两个变量的函数关系时，因为测得的都是一个个数据，因此我们常常借助数列来得出函数关系.

例如，为了解地高辛（一种用来治疗心脏病的药物）在病人血液中的含量 y mg 与时间 x d 之间的函数关系，可以每天检测一次，假设得到的结果是

0.5，0.345，0.238，0.164，0.113，0.078.

则可以根据这些数据作出图 5-1-3，从而观察出 y 与 x 的关系可以近似地用

$$y=\frac{k}{x+b}$$

或其他关系式来刻画，然后再根据已知的数据确定 k 和 b 的值，就可以给出函数的近似表达式．整个过程与我们在必修的函数部分或选择性必修的概率统计部分学习的类似，这里不再赘述.

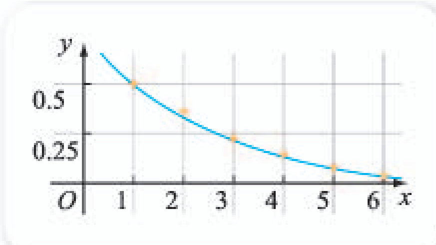


图 5-1-3

练习A

1. 已知数列$\{a_n\}$为 2，4，8，16，…，写出 a_1，a_2，a_3.
2. 分别根据下列数列$\{a_n\}$的通项公式，写出数列的前 3 项.

   （1）$a_n=n^2$；　（2）$a_n=(-1)^n\times 2n$；　（3）$a_n=\frac{n-1}{n(n+1)}$.
3. 写出以下数列的一个通项公式.

   （1）2，3，4，5；　（2）-3，-6，-9，-12.
4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-3$，判断这个数列是递增数列还是递减数列.

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$，设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=f(n)$，其中 $n\in\mathbf{N}_+$.

(1) 求证：$1\leqslant a_n<2$；

(2) 判断 $\{a_n\}$ 是递增数列还是递减数列，并说明理由.

练习B

1. 根据数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，分别写出数列的第 10 项.

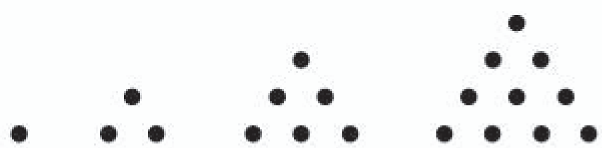
(1) $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{2n-1}$；　　(2) $a_n=1+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2}$.

2. 写出以下各数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式，并根据你写的通项公式求出各数列的第 10 项.

(1) $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{16}$，…；　　(2) 1，-3，5，-7，….

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2+2n$，则 168 是不是这个数列中的项？如果是，求出是第几项；如果不是，说明理由.

4. 古希腊的毕达哥拉斯学派将 1，3，6，10 等数称为三角形数，因为这些数目的点总可以摆成一个三角形，如下图所示. 把所有的三角形数按从小到大的顺序排列，就能构成一个数列 $\{a_n\}$，写出 a_5，a_6 以及 a_n.



（第 4 题）

5. 分别写出满足下列条件的数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式.

(1) 从第 2 项起，每一项都比它的前一项大 2；

(2) $\{a_n\}$ 是无穷递减数列，且从第 2 项起，每一项都是它前一项的 3 倍.

1 $\dfrac{1}{3}$　2 $\dfrac{1}{n}$　3 $(-1)^n$　4 $\sin\dfrac{5\pi}{2}=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$　5 $2n-1$　6 递增

5.1.2 数列中的递推

1. 数列的递推关系

尝试与发现

如下是某次智力测试中的一道题，你能做出来吗？你能用数列的语言来描述有关问题吗？

观察

$$1，3，6，10，15，\cdots$$

中数字出现的规律，写出第 8 个数.

尝试与发现中的问题，如果将给定的数列记作数列$\{a_n\}$，那么就相当于给出了数列的前 5 项，要求写出数列的第 8 项 a_8. 因为

$$a_2-a_1=3-1=2,$$
$$a_3-a_2=6-3=3,$$
$$a_4-a_3=10-6=4,$$
$$a_5-a_4=15-10=5,$$

所以，可以猜测，数列$\{a_n\}$应该满足

$$a_{n+1}-a_n=n+1,$$

即 $a_{n+1}=a_n+n+1$. 从而可知

$$a_6=a_5+6=15+6=21,$$
$$a_7=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad},$$
$$a_8=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}.$$

显然，上述数列$\{a_n\}$可以由

$$a_1=1，a_{n+1}-a_n=n+1$$

完全确定.

像上面一样，如果已知数列的首项（或前几项），且数列的相邻两项或两项以上的关系都可以用一个公式来表示，则称这个公式为数列的**递推关系**（也称为**递推公式**或**递归公式**）.

例 1 分别写出下列数列$\{a_n\}$的一个递推关系，并求出各个数列的第 7 项.

(1) $1，2，4，7，11，\cdots$；

(2) $-1，2，5，8，11，\cdots$；

(3) $1，-2，4，-8，16，\cdots$.

解 （1）因为

$$a_2-a_1=2-1=1,$$
$$a_3-a_2=4-2=2,$$
$$a_4-a_3=7-4=3,$$
$$a_5-a_4=11-7=4,$$

所以

$$a_{n+1}-a_n=n,$$

即 $a_{n+1}=a_n+n$.

从而

$$a_6=a_5+5=11+5=16,\ a_7=a_6+6=16+6=22.$$

（2）因为

$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=a_5-a_4=3,$$

所以

$$a_{n+1}-a_n=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_,$$

即 $a_{n+1}=a_n+3$.

从而

$$a_7=a_6+3=a_5+3+3=11+6=17.$$

（3）因为

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}=-2,$$

所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\boxed{4}\_\_\_\_\_\_.$$

即 $a_{n+1}=-2a_n$.

从而

$$a_7=(-2)a_6=(-2)^2a_5=(-2)^2\times16=64.$$

一般来说，根据数列的首项（或前几项）以及数列的递推关系，可以求出这个数列中的每一项.

例 2 意大利数学家斐波那契在 13 世纪初提出了一个关于兔子繁殖的问题：假设每对新生的小兔子 2 个月后就长成大兔子，且从第 3 个月起每个月都生 1 对小兔子，兔子均不死亡. 由 1 对新生的小兔子开始，记每个月的兔子对数构成的数列为 $\{F_n\}$. 试写出 F_1，F_2，F_3，F_4，F_5，F_6 以及数列 $\{F_n\}$ 的递推关系.

解 根据题意可知，前 2 个月内，小兔子都还没有长成大兔子，因此

$$F_1=F_2=1.$$

第 3 个月时，第 1 个月的那对小兔子会生 1 对小兔子，因此

$$F_3=1+1=2.$$

第 4 个月时，第 1 个月的那对小兔子还会再生 1 对小兔子，因此

$$F_4=2+1=3.$$

第 5 个月时，除了第 1 个月的那对小兔子会再生 1 对小兔子外，第 3 个月出生的那对小兔子也会生 1 对小兔子，因此

$$F_5=3+2=5.$$

第 6 个月时，第 1 个月的那对小兔子、第 3 个月出生的那对小兔子以及第 4 个月出生的那对小兔子，都会生 1 对小兔子，因此

$$F_6=5+3=8.$$

一般地，当 $n\geqslant 3$ 时，第 n 个月的兔子对数 F_n，应该等于第 $n-1$ 个月的兔子对数 F_{n-1} 加上新生的兔子对数，又因为第 $n-2$ 个月的那对兔子到了第 n 个月都能生 1 对兔子，因此有

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}.$$

例 2 中的数列，通常称为斐波那契数列．可以证明，斐波那契数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots$$

的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

因为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，恰好是黄金分割比，所以斐波那契数列也称为黄金数列．令人惊奇的是，斐波那契数列在很多领域都有广泛的应用，而且自然界处处都有斐波那契数列的影子，现代金融技术分析方法中，还有专门的斐波那契分析法，有兴趣的读者请查阅资料进一步了解相关内容吧！

2. 数列的前 n 项和

尝试与发现

已知某电子书今年上半年每个月的销售量构成数列

$$220,\ 530,\ 950,\ 1\ 360,\ 1\ 820,\ 2\ 350.$$

假设你是该电子书的销售人员，关于上述数列，除了每一个数字的大小和增长趋势外，你还会关心什么？

作为销售人员，一般来说还会关心上半年电子书的总销售量，即

$$220+530+950+1\ 360+1\ 820+2\ 350=7\ 230.$$

一般地，给定数列 $\{a_n\}$，称

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．

例如，对于尝试与发现中的数列来说，

$$S_1=a_1=220,$$
$$S_2=a_1+a_2=220+530=750,$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3=S_2+a_3=750+950=1\ 700,$$

等等.

尝试与发现

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为

$$S_n=2n+1.$$

你能写出a_1，a_2，a_3吗？你能总结出一般规律吗？

因为$S_1=2\times1+1=3$，又因为$S_1=a_1$，所以

$$a_1=3.$$

因为$S_2=2\times2+1=5$，又因为$S_2=a_1+a_2$，所以

$$a_2=S_2-a_1=5-3=2.$$

因为$S_3=2\times3+1=7$，又因为$S_3=a_1+a_2+a_3=S_2+a_3$，所以

$a_3=$ 5 ________.

一般地，如果数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，那么当$n\geqslant2$，有

$$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1},$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$

所以

$$S_n=S_{n-1}+a_n.$$

因此

$$a_n=\begin{cases}S_1,\ n=1,\\ S_n-S_{n-1},\ n\geqslant2.\end{cases}$$

对于尝试与发现中的数列来说，因为$n\geqslant2$时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1-[2(n-1)+1]=2,$$

所以

$$a_n=\begin{cases}3,\ n=1,\\ 2,\ n\geqslant2.\end{cases}$$

例 3 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 由题意可知$a_1=S_1=$ 6 ________.

当$n\geqslant2$时，有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1.$$

又因为$2\times1-1=1$，所以$n=1$时$a_n=2n-1$也成立，因此

$$a_n=2n-1.$$

练习A

1. 分别写出下列数列$\{a_n\}$的一个递推关系，并求出各个数列的第 7 项.

(1) 4，5，7，10，14，…；　　(2) 7，9，11，13，15，…；

(3) 2，6，18，54，162，….

2. 根据以下信息，分别写出数列$\{a_n\}$的前 5 项.

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$；　　(2) $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2$.

3. 已知斐波那契数列$\{F_n\}$满足$F_1=F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，写出这个数列的第 7 项和第 8 项，以及前 5 项的和.

4. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=-\frac{1}{4}$，$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$，试写出这个数列的前 5 项以及前 3 项、前 5 项的和.

5. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=3n$，求$\{a_n\}$的通项公式.

练习B

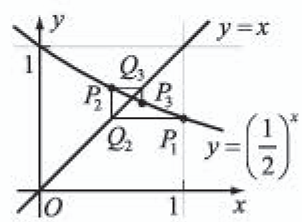
1. 根据以下信息，分别写出数列$\{a_n\}$的前 5 项以及前 3 项、前 5 项的和.

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$；　　(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$.

2. 满足$a_{n+1}=2a_n$的数列$\{a_n\}$一定是递增数列吗？为什么？

3. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2-n$，求$\{a_n\}$的通项公式.

4. 如图，已知直线l：$y=x$与曲线C：$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，设$P_1$为曲线$C$上横坐标为 1 的点. 过$P_1$作$x$轴的平行线交$l$于$Q_2$，过$Q_2$作$x$轴的垂线交曲线$C$于$P_2$；再过$P_2$作$x$轴的平行线交$l$于$Q_3$，过$Q_3$作$x$轴的垂线交曲线$C$于$P_3$……设点$P_1$，$P_2$，…，$P_n$，…的纵坐标分别为$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，…，试求数列$\{a_n\}$的前两项以及递推关系.



(第 4 题)

1 $a_6+7=21+7=28$　　2 $a_7+8=28+8=36$　　3 3　　4 -2

5 $S_3-S_2=7-5=2$　　6 $1^2=1$

习题5-1A

1. 分别写出下列各题中的数列.

(1) $\sqrt{2}$精确到1，0.1，0.01，0.001，…的近似值构成的数列；

(2) 0到20之间的质数按照从小到大的顺序构成的数列.

2. 根据以下数列$\{a_n\}$的通项公式，写出数列的前5项以及前5项的和.

(1) $a_n=10+2n$； (2) $a_n=5\times(-1)^{n-1}$； (3) $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

3. 根据以下数列$\{a_n\}$的通项公式，写出数列的第7项、第10项、第$n-1$项及第$n+1$项.

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^3}$； (2) $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$； (3) $a_n=-2^n+3$.

4. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$. 设数列的前$n$项和为$S_n$，写出$S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_4$，$S_5$.

5. 写出以下数列的一个通项公式.

(1) 0，-2，-4，-6； (2) $\dfrac{6}{5}$，$\dfrac{7}{6}$，$\dfrac{8}{7}$，$\dfrac{9}{8}$；

(3) -1，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{16}$.

6. 观察以下各数列的特点，用适当的数填空，并对每个数列各写出一个通项公式.

(1) 2，4，____，8，10，12；

(2) 2，4，____，16，32，____，128，____；

(3) ____，4，3，2，1，____，-1，____；

(4) ____，4，9，16，25，____，49.

7. 观察下列各式.

$$1+3=4$$
$$1+3+5=9$$
$$1+3+5+7=16$$
$$\cdots\cdots$$

请写出第4个、第5个等式，并归纳出第n个等式.

习题5-1B

1. 将下列表格补充完整.

n	1	2	…	5	…		…	n
a_n			…		…	195	…	n^2-2n

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n(n+2)$，

(1) 求这个数列的第 10 项、第 15 项及第 21 项；

(2) 判断 440 是不是这个数列中的项，222 呢？如果是，求出是第几项；如果不是，说明理由.

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}$，它的前 30 项中最大项是第几项？最小项是第几项？

4. 已知函数$f(x)=\dfrac{1-2x}{x+1}$，构造数列$a_n=f(n)$.

(1) 求证：$a_n>-2$；

(2) 数列$\{a_n\}$是递增数列还是递减数列？为什么？

5. 写出数列 1，2，2，4，3，8，4，16，5，…的一个通项公式.

6. 已知数列$\{a_n\}$中，前n项和$S_n=\dfrac{n+1}{n}$，求$\{a_n\}$的通项公式.

5.2 等差数列

5.2.1 等差数列

1. 等差数列的定义

情境与问题

观察下列现实生活中的数列，回答后面的问题.

我国有用 12 生肖纪年的习惯，例如，2017 年是鸡年，从 2017 年开始，鸡年的年份为

$$2\,017,\ 2\,029,\ 2\,041,\ 2\,053,\ 2\,065,\ 2\,077,\ \cdots; \qquad ①$$

我国确定鞋号的脚长值以毫米为单位来表示，常用确定鞋号脚长值按从大到小的顺序可排列为

$$275,\ 270,\ 265,\ 260,\ 255,\ 250,\ \cdots; \qquad ②$$

2019 年 1 月中，每个星期日的日期为

$$6,\ 13,\ 20,\ 27. \qquad ③$$

(1) 数列①②③在数学中都称为等差数列，它们有什么共同点？你能给等差数列下一个定义吗？

(2) 你能分别总结出数列①②③的通项公式并得出一般等差数列的通项公式吗？

不难看出，上述数列①②③的共同点是：从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都等于同一个常数. 具体地说，数列①从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都等于 12；数列②从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都等于 -5；数列③从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都等于 7.

一般地，如果数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都等于同一个常数 d，即

$$a_{n+1}-a_n=d$$

恒成立，则称 $\{a_n\}$ 为**等差数列**，其中 d 称为等差数列的**公差**.

因此，①②③都是等差数列，且公差分别为 12，1 ______，2 ______.

记数列①为 $\{a_n\}$，可以看出，a_2 等于 a_1（即 2 017）加上公差 12；a_3

等于 a_2 加上公差 12，因此 a_3 也等于 a_1 加上 2 个公差 12；同样，a_4 等于 a_1 加上 3 个公差 12……由此可知，数列①的通项公式为

$$a_n=2\,017+(n-1)\times12=12n+2\,005.$$

类似地，可知数列②的通项公式为

$$a_n=275+(n-1)\times(-5)=-5n+280;$$

数列③的通项公式为

$$a_n=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad}.$$

一般地，如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，那么根据等差数列的定义有

$$a_{n+1}-a_n=d,$$

即 $a_{n+1}=a_n+d$，从而

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
……

由此可归纳出等差数列的通项公式为

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

另外，由等差数列的定义可得

$$a_n-a_{n-1}=d,$$
$$a_{n-1}-a_{n-2}=d,$$
……
$$a_3-a_2=d,$$
$$a_2-a_1=d,$$

将这 $n-1$ 个式子两边分别相加，则有

$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

因此同样可以得到等差数列的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$.

等差数列的通项公式说明，只要确定了等差数列的首项与公差，就可以写出等差数列中的每一项.

例 1 判断以下数列是否是等差数列？如果是，指出公差；如果不是，说明理由.

(1) 7，13，19，25，31；　　(2) 2，4，7，11；

(3) -1，-3，-5，-7.

解 (1) 因为

$$13-7=19-13=25-19=31-25=6,$$

所以是等差数列，且公差为 6.

(2) 因为

$$4-2=2,\ 7-4=3,$$

$4-2\neq 7-4$，所以不是等差数列.

(3) 因为

$$-3-(-1)=-5-(-3)=-7-(-5)=-2,$$

所以是等差数列，且公差为 4 ______.

又因为

$$a_{n+1}-a_n=d \Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+d,$$

所以也可通过检查 $a_{n+1}=a_n+d$ 是否恒成立来判断数列是否是等差数列. 例如，例 1 的(3)中，因为除首项外，每一项都可由其前一项加上-2 得到，因此是公差为-2 的等差数列.

例 2 已知等差数列 10，7，4，…，

(1) 求这个数列的第 10 项；

(2) -56 是不是这个数列中的项？-40 呢？如果是，求出是第几项；如果不是，说明理由.

解 (1) 记数列为$\{a_n\}$，则由题意知 $a_1=10$，$d=7-10=-3$，因此数列的通项公式为

$$a_n=10+(n-1)\times(-3)=-3n+13.$$

当 $n=10$ 时，有

$$a_{10}=-3\times 10+13=-17,$$

因此第 10 项为-17.

(2) 设-56 是数列中的第 n 项，则$-3n+13=-56$，解得 $n=23$，所以-56 是数列的第 5 ______ 项.

设-40 是数列中的第 n 项，则$-3n+13=-40$，解得 $n=\frac{53}{3}$，由此可知-40 不是数列中的项.

尝试与发现

在等差数列的通项公式中，a_n 与 n 的关系与以前所学过的什么函数有关？

因为

$$a_n=a_1+(n-1)d=nd+a_1-d,$$

所以，如果记

$$f(x)=dx+a_1-d,$$

则可以看出 $a_n=f(n)$，而且

(1) 当公差 $d=0$ 时，$f(x)$是常数函数，此时数列$\{a_n\}$是常数列（因此，公差为 0 的等差数列是常数列）；

(2) 当公差 $d\neq 0$ 时，$f(x)$是一次函数，而且 $f(x)$的增减性依赖于公

差 d 的符号，因此，当 $d>0$ 时，$\{a_n\}$是递增数列；当 $d<0$ 时，$\{a_n\}$是递减数列.

这也说明，当用直角坐标系中的点来表示等差数列时，所有的点一定在一条直线上.

例 3 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-5$，判断这个数列是否是等差数列. 如果是，求出公差；如果不是，说明理由.

解 因为

$$a_{n+1}-a_n=3(n+1)-5-(3n-5)=3,$$

所以数列$\{a_n\}$是等差数列，且公差为 6 ________.

事实上，可以证明，数列$\{a_n\}$是等差数列的充要条件是

$$a_n=kn+b,$$

其中 k，b 是常数. 证明留作练习.

例 4 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，求证：对于任意的正整数 m，n，有

$$a_n=a_m+(n-m)d.$$

证明 设等差数列的首项为 a_1，则

$$\begin{cases}a_n=a_1+(n-1)d,\\ a_m=a_1+(m-1)d,\end{cases}$$

两式相减，整理可得

$$a_n-a_m=(n-m)d,$$

即 $a_n=a_m+(n-m)d$.

想一想

当 $n\neq m$ 时，由例 4 可得
$$\frac{a_n-a_m}{n-m}=d,$$
据此你能找出 d 的几何意义吗？

例 5 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=3$，$a_7=9$，求 a_{10}.

解 设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，则

$$\begin{cases}3=a_1+4d,\\ 9=a_1+6d,\end{cases}$$

解得 $a_1=-9$，$d=3$. 因此

$$a_{10}=-9+9\times3=18.$$

例 5 也可以借助例 4 的结论求解，请读者自行尝试.

2. 等差数列的性质

如果 x，A，y 是等差数列，那么称 A 为 x 与 y 的**等差中项**.

尝试与发现

如果 A 为 x 与 y 的等差中项，那么 A 能用 x 与 y 表示出来吗？

根据等差中项与等差数列的定义可知 $A-x=y-A$，因此

$$A=\frac{x+y}{2}.$$

例如，2 与 8 的等差中项是$\frac{2+8}{2}=5$.

容易看出，在一个等差数列中，中间的每一项（既不是首项也不是末项的项，下同）都是它的前一项与后一项的等差中项.

想一想

等差中项的表达式与数轴上两点之间的中点坐标公式有什么联系？

例 6 已知数列$\{a_n\}$中，

$$a_{n-1}=\frac{a_n+a_{n-2}}{2}$$

在 $n\geqslant 3$ 时恒成立，求证：$\{a_n\}$是等差数列.

证明 因为

$$a_{n-1}=\frac{a_n+a_{n-2}}{2}\Leftrightarrow 2a_{n-1}=a_n+a_{n-2}\Leftrightarrow a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2},$$

所以

$$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}=a_{n-2}-a_{n-3}=\cdots=a_2-a_1.$$

因此，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都相等，所以$\{a_n\}$是等差数列.

例 6 说明，如果一个数列中，中间的每一项都是它的前一项与后一项的等差中项，那么这个数列一定是等差数列.

尝试与发现

设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-1$，求出a_2+a_7，a_3+a_6，并比较它们的大小. 你能由此总结出一个一般的结论并给出证明吗？

因为

$$a_2+a_7=3\times 2-1+3\times 7-1=25,$$
$$a_3+a_6=3\times 3-1+3\times 6-1=25,$$

所以 $a_2+a_7=a_3+a_6$.

一般地，如果$\{a_n\}$是等差数列，而且正整数 s，t，p，q 满足 $s+t=p+q$，则

$$a_s+a_t=a_p+a_q.$$

特别地，如果 $2s=p+q$，则

$$2a_s=a_p+a_q.$$

结论的证明只需先将各项全部用首项与公差表示出来，然后计算即可，留作练习.

例 7 如图 5-2-1 所示，已知某梯子共有 5 级，从上往下数，第 1 级的宽为 35 cm，第 5 级的宽为 43 cm，且各级的宽度从小到大构成等差数列$\{a_n\}$，求其余 3 级的宽度.

解 （方法一）依题意，$a_1=35$，$a_5=43$.

设公差为 d，则 $35+4d=43$，解得 $d=2$.

从而

$$a_2=35+2=37,$$
$$a_3=37+2=39,$$
$$a_4=39+2=41.$$

因此，其余 3 级的宽度分别为 37 cm，39 cm，41 cm.

图 5-2-1

（方法二）因为等差数列为 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，共 5 项.

又因为 $2\times3=1+5$，所以

$$2a_3=a_1+a_5=35+43=78,$$

即 $a_3=39$.

类似地，有

$$2a_2=a_1+a_3=35+39=74,\ 2a_4=a_3+a_5=39+43=82,$$

所以 $a_2=37$，$a_4=41$.

因此，其余 3 级的宽度分别为 37 cm，39 cm，41 cm.

练习A

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

   (1) 已知 $a_5=6$，$a_7=16$，求首项 a_1 与公差 d；

   (2) 已知 $a_3=20$，$a_{10}=-1$，求 a_{15}.

2. 求下列各题中两个数的等差中项.

   (1) 30 与 18；　　(2) -13 与 9.

3. (1) 求等差数列 2，5，8，…的第 4 项与第 10 项；

   (2) 求等差数列 12，7，2，…的第 15 项.

4. 100 是不是等差数列 3，7，11，…中的项？79 呢？如果是，指出是第几项；如果不是，说明理由.

5. 根据下列等差数列的通项公式，求数列的首项与公差.

   (1) $a_n=3n+5$；　　(2) $a_n=12-2n$.

练习B

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 17，公差为 -0.6，则此等差数列从第几项开始出现负数？

2. 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充要条件是 $a_n=kn+b$，其中 k，b 是常数.

3. 如果$\{a_n\}$是等差数列，而且正整数 s，t，p，q 满足 $s+t=p+q$，求证：

$$a_s+a_t=a_p+a_q.$$

4. 已知安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，其中最大的与最小的皮带轮的直径分别为 216 mm 与 120 mm，求中间 3 个皮带轮的直径.

5. 已知一个无穷等差数列的首项为 a_1，公差为 d.

(1) 将数列的前 m 项去掉，其余各项依次构成的数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别为多少？

(2) 取出数列中的所有序号是奇数的各项，依次构成一个新的数列，这个数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别为多少？

(3) 取出数列中的所有序号是 7 的倍数的各项，依次构成一个新的数列，这个数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别为多少？

(4) 数列 $a_1+a_2+a_3$，$a_4+a_5+a_6$，$a_7+a_8+a_9$，…是等差数列吗？如果是，给出证明并求出首项与公差；如果不是，说明理由.

1 -5　2 7　3 $6+(n-1)\times7=7n-1$　4 -2　5 23　6 3

5.2.2 等差数列的前 n 项和

情境与问题

为了达到更好的音响和观赏效果，很多剧场的座位都是排成圆弧形的，如图 5-2-2 所示.

如果某公司要为一个类似的剧场定做椅子，而且剧场座位的排列规律是：第 1 排 36 个，以后每一排比前一排多 6 个，共有 8 排. 你能帮这个公司算出共需要多少椅子吗？

图 5-2-2

利用这一小节我们要学习的等差数列前 n 项和的公式，我们可以便捷地解答出上述情境中的问题.

尝试与发现

如图 5-2-3 所示，建筑工地上堆放着一些钢管，最上面一层有 4 根，下面每一层比上一层多放一根，共 8 层.

（1）在不逐个相加的前提下，你能想办法算出这些钢管共有多少根吗?

（2）你能得出一般等差数列前 n 项和的公式吗?

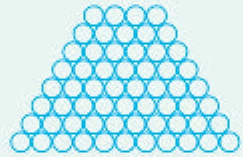


图 5-2-3

图 5-2-3 中的这些钢管，从上到下每一层的数量构成一个等差数列 $\{a_n\}$，这个数列的首项为 $a_1=4$，公差 $d=$ 1 ______，而且该数列共有 8 项，第 8 项为

$$a_8=4+(8-1)\times1=11.$$

设想在图 5-2-3 的钢管旁边再放同样多数量的钢管，但是倒过来放置，如图 5-2-4 所示.

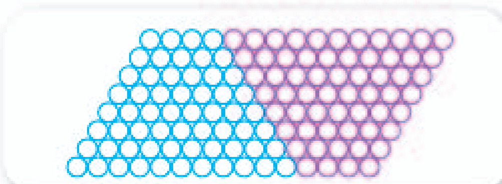


图 5-2-4

这时，每一层的钢管数是相同的，都是 4+11 根，因此图 5-2-3 中钢管的总数为

$$\frac{(4+11)\times8}{2}=60.$$

一般等差数列前 n 项的和可以用类似的方式得到.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n, \quad ①$$

显然，

$$S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1. \quad ②$$

又因为根据等差数列的性质有

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}=\cdots,$$

所以把①②两边分别相加，可得 $2S_n=n(a_1+a_n)$，因此

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

这就是等差数列的前 n 项求和公式.

尝试与发现

上述等差数列的前 n 项求和公式与首项和第 n 项有关，你能将其改写成与公差 d 有关的形式吗？

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以等差数列前 n 项求和公式也可以改写为

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}.}$$

由此可知，前述情境与问题中的椅子总数为

$$8\times 36+\frac{8\times(8-1)\times 6}{2}=456.$$

例 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，且 $a_{20}=29$，求这个等差数列前 20 项的和 S_{20}.

解 由等差数列的通项公式可得 $29=a_1+19\times 2$，由此可解得 $a_1=-9$. 因此

$$S_{20}=\frac{20\times(-9+29)}{2}=200.$$

例 2 求等差数列

$$5,\ 12,\ 19,\ 26,\ \cdots,\ 201,\ 208$$

的各项之和.

解 可以看出，所求数列是公差为 2 ________ 的等差数列.

设共有 n 项，则 $208=5+(n-1)\times 7$，解得 $n=$ 3 ________. 因此各项之和为

$$\frac{30\times(5+208)}{2}=3\ 195.$$

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n=2n^2-30n$，

（1）求出数列的通项公式，并判断这个数列是否是等差数列；

（2）求 S_n 的最小值，并求 S_n 取得最小值时 n 的值.

解 （1）当 $n=1$ 时，有 $a_1=S_1=$ 4 ________.

当 $n\geqslant 2$ 时，有

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-30n-[2(n-1)^2-30(n-1)]=$ 5 ________.

又因为 $4\times 1-32=-28$，所以 $n=1$ 时 $a_n=4n-32$ 也成立，因此数列的通项公式为

$$a_n=4n-32.$$

因为

$$a_{n+1}-a_n=4(n+1)-32-(4n-32)=4,$$

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

（2）（方法一）因为

$$S_n=2n^2-30n=2(n^2-15n)=2\left(n-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{225}{2},$$

又因为 n 是正整数，所以当 $n=7$ 或 8 时，S_n 最小，最小值是

$$2\times7^2-30\times7=-112.$$

（方法二）由 $a_n=4n-32$ 可知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列，而且首项

$$a_1=-28<0.$$

令 $a_n\leqslant0$，可得 $4n-32\leqslant0$，解得 $n\leqslant8$，而且 $a_8=$ 6 ________.

由此可知，$n=7$ 或 8 时，S_n 最小，最小值是

$$\frac{8\times(-28+0)}{2}=-112.$$

探索与研究

（1）等差数列中，S_n 与 n 的关系与以前学过的什么函数有关？

（2）如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式是

$$S_n=An^2+Bn+C,$$

其中 A，B，C 都是常数，那么 $\{a_n\}$ 一定是等差数列吗？为什么？

例 4 李先生为今年上高中的儿子办理了“教育储蓄”．从 8 月 1 日开始，每个月的 1 日都存入 1 000 元，共存入 3 年．

（1）已知当年“教育储蓄”存款的月利率为 2.7‰，则 3 年后李先生一次可支取本息共多少元？（设每月存款的利息不计入下月本金，下同．）

（2）已知当年同档次的“零存整取”储蓄的月利率是 1.725‰，则李先生办理“教育储蓄”比“零存整取”多收益多少元？

解 （1）每 1 000 元“教育储蓄”存一个月能得到的利息是

$$1\,000\times2.7‰=2.7(\text{元}).$$

第 1 个 1 000 元存 36 个月，得利息

$$2.7\times36(\text{元});$$

第 2 个 1 000 元存 35 个月，得利息

$$2.7\times35(\text{元});$$

……

第 36 个 1 000 元存 1 个月，得利息

$$2.7\times1(\text{元}).$$

因此，3 年后李先生获得利息

$$2.7\times36+2.7\times35+\cdots+2.7\times1$$
$$=\frac{(2.7\times36+2.7\times1)}{2}\times36$$

$=1\ 798.2$(元).

所以 3 年后李先生可支取的本息和为

$$1\ 000\times 36+1\ 798.2=37\ 798.2\text{(元)}.$$

(2) 每 1 000 元“零存整取”存一个月能得到的利息是

$$1\ 000\times 1.725‰=1.725\text{(元)},$$

因此，若是“零存整取”，3 年后李先生获得利息

$$\begin{aligned}&1.725\times 36+1.725\times 35+\cdots+1.725\times 1\\=&\frac{(1.725\times 36+1.725\times 1)}{2}\times 36\\=&1\ 148.85\text{(元)}.\end{aligned}$$

因此，李先生多收益

$$1\ 798.2-1\ 148.85=649.35\text{(元)}.$$

即李先生办理“教育储蓄”比“零存整取”多收益 649.35 元.

练习A

1. 根据下列各题中的条件，求相应等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.
   (1) $a_1=6$，$d=3$，$n=10$；　　(2) $a_1=2$，$a_n=16$，$n=8$.
2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_4=10$，$a_{10}=-2$，求 S_{12}.
3. 求下列各式的值.
   (1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$；　　(2) $2+4+6+\cdots+2n$.
4. 求等差数列 63，60，57，…，−12 的各项之和.
5. 求等差数列 4，3，2，1，…前多少项的和是 −18.

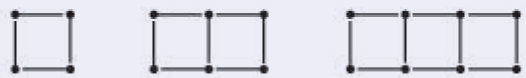
练习B

1. 等差数列 14，11，8，…前多少项的和最大？为什么？
2. 在两位数的正整数中，有多少个除以 3 余 1 的数？求它们的和.
3. 求下列各式的值.
   (1) $1+3+5+\cdots+(2n+3)$；　　(2) $1+4+7+\cdots+(3n+1)$.
4. 已知一个凸 n 边形内角的度数按从小到大构成等差数列，且最小角为 40°，公差为 20°，求 n 的值.
5. 北京市计划于 2017—2021 年的 5 年内供应 1 000 公顷集体土地，用于建设集体租赁住房. 如果这 5 年内每年供应的土地公顷数构成公差为 25 的等差数列，写出这个数列.

1 1　　2 7　　3 30　　4 $2-30=-28$　　5 $4n-32$　　6 0

习题5-2A

1. 如图，用 4 根火柴可以拼出 1 个正方形，用 7 根火柴可以拼出 2 个正方形……设用 a_n 根火柴可以拼出 n 个正方形，试分别写出 a_1，a_2，a_3 以及数列$\{a_n\}$的递推公式.



（第 **1** 题）

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，
   (1) 已知 $a_1=6$，$d=3$，求 a_8；
   (2) 已知 $a_7=\frac{1}{2}$，$d=-2$，求 a_1；
   (3) 已知 $a_4=10$，$a_{19}=4$，求 a_7 及 d.
3. 在 12 与 60 之间插入 3 个数，使这 5 个数成等差数列，求插入的 3 个数.
4. 求集合$\{m \mid m=7n，n\in\mathbf{N}，0<m<100\}$的元素的个数，并求所有元素的和.
5. 根据下列各题中的条件，求相应等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.
   (1) $a_1=2$，$d=5$，$n=10$；　　(2) $a_1=-2$，$a_n=6$，$n=12$.

习题5-2B

1. 如果一个三角形的 3 个内角的度数成等差数列，这个三角形 3 个内角的大小能确定吗？你能得到什么结论？
2. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$d=-5$，$a_{10}=-2$，求这个数列前 8 项的和.
3. 记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $S_9<0$，$S_{10}>0$，则此等差数列的前多少项和最小？
4. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_3+a_{11}=6$，求 S_{13}.
5. 已知函数 $f(n)=|n-1|+|n-2|+|n-3|+\cdots+|n-20|$，其中 n 是自然数.
   (1) 分别计算 $f(1)$，$f(5)$，$f(20)$的值；
   (2) 当 n 为何值时，$f(n)$取得最小值？最小值是多少？
6. 我国古代数学名著《算法统宗》中说：九百九十六斤棉，赠分八子做盘缠；次第每人多十七，要将第八数来言；务要分明依次第，孝和休惹外人传. 说的是，有 996 斤棉花要赠送给 8 个子女做旅费，从第 1 个孩子开始，以后每人依次多 17 斤，直到第 8 个孩子为止……你能根据这些信息算出每人分得了多少棉花吗？

5.3 等比数列

5.3.1 等比数列

1. 等比数列的定义

情境与问题

观察下列情境中的数列，回答后面的问题.

如图 5-3-1 所示，有些细胞在分裂时，会从 1 个变成 2 个，2 个变成 4 个，4 个变成 8 个……这里细胞的个数构成数列

$$1，2，4，8，16，32，\cdots. \qquad ①$$

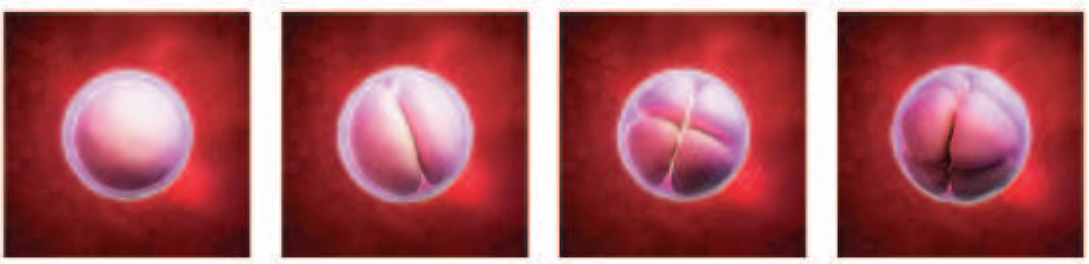


图 5-3-1

《庄子》中说："一尺之捶，日取其半，万世不竭." 其意思是：一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完. 如果记木棒的长度为 1，则不断取一半的过程中，每日截去一半之后木棒的长度构成数列

$$\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\cdots. \qquad ②$$

我们都知道，如果将钱存在银行里，就会获得利息. 例如，如果某年年初将 1 000 元钱存为年利率为 3% 的五年定期存款，且银行每年年底结算一次利息，则这五年中，每年年底的本息和构成数列

$$1\,000\times1.03，1\,000\times1.03^2，\cdots，1\,000\times1.03^5. \qquad ③$$

(1) 数列①②③在数学中都称为等比数列，它们有什么共同点？你能给等比数列下一个定义吗？

(2) 你能总结出数列①②③的通项公式并得出一般等比数列的通项公式吗？

不难看出，上述数列①②③的共同点是：从第 2 项起，每一项与它的前一项之比都等于一个常数．具体地，数列①从第 2 项起，每一项与它的前一项之比都等于 2；数列②从第 2 项起，每一项与它的前一项之比都等于$\frac{1}{2}$；数列③从第 2 项起，每一项与它的前一项之比都等于 1.03.

一般地，如果数列$\{a_n\}$从第 2 项起，每一项与它的前一项之比都等于同一个常数 q，即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

恒成立[①]，则称$\{a_n\}$为**等比数列**，其中 q 称为等比数列的**公比**.

因此，①②③都是等比数列，且公比分别为 2，1 ______，2 ______.

如果记数列①为$\{a_n\}$，则可以看出，a_2 等于 a_1（即 1）的 2 倍；a_3 等于 a_2 的 2 倍，因此 a_3 也等于 a_1 的 2^2 倍；同样，a_4 等于 a_1 的 2^3 倍……由此可知，数列①的通项公式为

$$a_n=2^{n-1}.$$

类似地，可知数列②的通项公式为

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

数列③的通项公式为

$$a_n=\text{3 \_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

一般地，如果等比数列$\{a_n\}$的首项是a_1，公比是 q，那么根据等比数列的定义可知

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

即 $a_{n+1}=a_nq$，从而

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$
$$\cdots\cdots$$

由此可归纳出等比数列的通项公式为

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}.}$$

另外，由等比数列的定义可得

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q,$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=q,$$

① 本书中，默认数列至少应该有 3 项，这时等比数列的公比 $q\neq0$.

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{a_3}{a_2}=q,$$

$$\frac{a_2}{a_1}=q,$$

将这 $n-1$ 个式子两边分别相乘，则有

$$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1},$$

因此同样可以得到等比数列的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$.

等比数列的通项公式说明，只要确定了等比数列的首项与公比，就可以写出等比数列中的每一项.

例 1 判断以下数列是否是等比数列．如果是，指出公比；如果不是，说明理由.

(1) 1，10，100，1 000，10 000；　　(2) 0，1，2，4，8；

(3) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16}$.

解 (1) 因为

$$\frac{10}{1}=\frac{100}{10}=\frac{1\,000}{100}=\frac{10\,000}{1\,000}=10,$$

所以是等比数列，且公比为 4 ______.

(2) 因为 $\frac{1}{0}$ 没有意义，因此不是等比数列.

(3) 因为

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1}=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{16}}{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2},$$

所以是等比数列，且公比为 5 ______.

因为 $a_n\neq 0$ 时，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \Leftrightarrow a_{n+1}=a_nq,$$

所以在已知每一项均不为 0 的前提下，可通过检查 $a_{n+1}=a_nq$ 是否恒成立来判断数列是否是等比数列．例如，例 1 的(3)中，因为每一项都不为 0，且除首项外，每一项都是前面一项的 $-\frac{1}{2}$ 倍，因此是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

例 2 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=27$，公比 $q=\frac{1}{3}$.

(1) 求 a_8；

(2) 判断 18 是否是这个数列中的项. 如果是，求出是第几项；如果不是，说明理由.

解 (1) 由等比数列的通项公式可知

$$a_8=a_1q^7=27\times\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{1}{81}.$$

(2) 设 18 是数列中的第 n 项，则 $27\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=18$，化简得 $3^{2-n}=2$，因为这个方程无正整数解，所以 18 不是数列中的项.

尝试与发现

在等比数列的通项公式中，a_n 与 n 的关系与以前学过的什么函数有关?

因为

$$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\times q^n,$$

所以如果记

$$f(x)=\frac{a_1}{q}\times q^x,$$

则可以看出 $a_n=f(n)$，而且

(1) 当公比 $q=1$ 时，$f(x)$是常数函数，此时数列$\{a_n\}$是常数列（因此，公比为 1 的等比数列是常数列）；

(2) 当公比 $q\neq 1$ 时，$f(x)$是$\frac{a_1}{q}$与 $y=q^x$ 的乘积，此时，$f(x)$的增减性既与 a_1 有关，也与 q 有关.

例 3 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3\times 2^n$，判断这个数列是否是等比数列. 如果是，求出公比；如果不是，说明理由.

解 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n}=2,$$

所以数列$\{a_n\}$是等比数列，且首项为 6，公比为 6 ________.

事实上，可以证明，数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件是

$$a_n=kq^n,$$

其中 k，q 都是不为 0 的常数. 证明留作练习.

另外，由任何一个非零实数的偶数次方一定是正数可知，等比数列中，所有序号为奇数的项的符号相同，所有序号为偶数的项的符号相同.

例 4 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，求证：对于任意的正整数 m，n，有

$$a_n=a_mq^{n-m}.$$

解 设等比数列的首项为 a_1，则

$$\begin{cases}a_n=a_1q^{n-1},\\ a_m=a_1q^{m-1},\end{cases}$$

两式相除，整理可得

$$\frac{a_n}{a_m}=q^{n-m},$$

即 $a_n=a_mq^{n-m}$.

例 5 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=9$，$a_6=-243$，求 a_8.

解 设等比数列的首项为 a_1，公比为 q，则

$$\begin{cases}9=a_1q^2,\\ -243=a_1q^5,\end{cases}$$

解得 $a_1=1$，$q=-3$. 因此

$$a_8=(-3)^{8-1}=-2\ 187.$$

例 5 也可以借助例 4 的结论求解，请读者自行尝试.

2. 等比数列的性质

如果 x，G，y 是等比数列，那么称 G 为 x 与 y 的**等比中项**.

尝试与发现

如果 G 为 x 与 y 的等比中项，那么 G 能用 x 与 y 表示出来吗？

根据等比中项与等比数列的定义可知$\frac{G}{x}=\frac{y}{G}$，因此 $G^2=xy$. 由此可知

$$G=\pm\sqrt{xy}.$$

例如，2 与 8 的等比中项是$\pm\sqrt{2\times8}=\pm4$.

容易看出，在一个等比数列中，中间的每一项都是它的前一项与后一项的等比中项.

想一想

G 为 x 与 y 的等比中项的充要条件是 $G^2=xy$ 吗？为什么？

例 6 如果数列$\{a_n\}$中，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

在 $n\geqslant3$ 时恒成立，求证：$\{a_n\}$是等比数列.

证明 根据题意有

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}=\cdots=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1},$$

因此，从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都相等，所以$\{a_n\}$是等比数列.

例 6 说明，如果一个数列中，中间的每一项都是它的前一项与后一项的等比中项，那么这个数列一定是等比数列.

尝试与发现

设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，求出 a_2a_7，a_3a_6，并比较它们的大小. 你能由此总结出一个一般的结论并给出证明吗?

因为

$$a_2a_7=2^{2-1}\times 2^{7-1}=2^7,\ a_3a_6=2^{3-1}\times 2^{6-1}=2^7,$$

所以 $a_2a_7=a_3a_6$.

一般地，如果 $\{a_n\}$ 是等比数列，而且正整数 s，t，p，q 满足 $s+t=p+q$，则

$$a_sa_t=a_pa_q.$$

特别地，如果 $2s=p+q$，则

$$a_s^2=a_pa_q.$$

结论的证明只需先将各项全部用首项与公比表示出来，然后计算即可，留作练习.

例 7 在 4 与 $\frac{1}{4}$ 之间插入 3 个数，使这 5 个数成等比数列，求插入的 3 个数.

解 (方法一) 依题意，$a_1=4$，$a_5=\frac{1}{4}$，由等比数列的通项公式，得 $\frac{1}{4}=4\times q^4$，解得 $q=\pm\frac{1}{2}$.

当 $q=\frac{1}{2}$ 时，插入的 3 个数分别为

$$4\times\frac{1}{2}=2,\ 2\times\frac{1}{2}=1,\ 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

当 $q=-\frac{1}{2}$ 时，插入的 3 个数分别为

$$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2,\ (-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1,\ 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

因此，插入的 3 个数分别为 2，1，$\frac{1}{2}$ 或 -2，1，$-\frac{1}{2}$.

(方法二) 因为等比数列共有 5 项，即

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5.$$

又因为 $2\times 3=1+5$，所以

$$a_3^2=a_1a_5=4\times\frac{1}{4}=1,$$

即 $a_3=\pm1$. 又因为 a_3 要与 a_1 同号，因此 $a_3=$ 7 ______.

类似地，有 $a_2^2=a_1a_3$，$a_4^2=a_3a_5$，而且 a_2 与 a_4 同号. 因此

当 $a_2=\sqrt{a_1a_3}=\sqrt{4\times1}=2$ 时，$a_4=\sqrt{a_3a_5}=\sqrt{1\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$；

当 $a_2=-\sqrt{a_1a_3}=-\sqrt{4\times1}=-2$ 时，$a_4=-\sqrt{a_3a_5}=-\sqrt{1\times\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$.

因此，插入的 3 个数分别为 2，1，$\frac{1}{2}$ 或 -2，1，$-\frac{1}{2}$.

探索与研究

已知 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是项数相同的两个等比数列，仿照下表中的例子填写表格，从中你能发现什么规律？证明你的结论.

	a_n	b_n	a_nb_n	$\{a_nb_n\}$ 是等比数列吗？	a_n+b_n	$\{a_n+b_n\}$ 是等比数列吗？
例子	2^{n-1}	5×3^n	$15\times6^{n-1}$	是	$2^{n-1}+5\times3^n$	不是
自选 1						
自选 2						

如果上述数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等差数列，其他条件不变，那么能得到相应的什么结论？

练习A

1. 判断下列数列是否为等比数列.

(1) 1，2，1，2，1；　　(2) -2，-2，-2，-2，-2；

(3) lg 3，lg 6，lg 12；　　(4) 1，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$-\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$.

2. 求下列等比数列的第 4 项和第 5 项.

(1) 4，-8，16，…；　　(2) 2，$\frac{4}{3}$，$\frac{8}{9}$，…；

(3) 11，3.3，0.99，…；　　(4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$，-1，$\sqrt{3}$，….

3. 求下列各组数的等比中项.

(1) 4，9；　　(2) $4-\sqrt{3}$，$4+\sqrt{3}$.

4 已知$\{a_n\}$为等比数列，填写下表.

序号	a_1	q	n	a_n
(1)	3	-2	5	
(2)		$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{16}$
(3)	-2		4	-32
(4)	3		5	48
(5)	3	2		24

5 信息技术产业中的摩尔定律预言，每隔 18 个月至 24 个月，计算机等 IT 产品的性能会翻一番. 1945 年，世界上第一台电子计算机每秒能完成 5 000 次运算，此后按照每 24 个月翻一番进行计算.

(1) 求到 2017 年时，计算机每秒能完成的运算次数（保留 2 位有效数字）;

(2) 2017 年 6 月，我国研制的超级计算机"神威·太湖之光"的运算速度已经达到了每秒 9.3×10^{16} 次，(1)中得到的预测值比这一值大吗?

练习B

1 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_5=20$，$a_{15}=5$，求a_{20}.

2 存在既是等差数列又是等比数列的数列吗? 如果存在，试举出实例；如果不存在，说明理由.

3 当等比数列的首项与公比满足什么条件时，这个数列是递增数列?

4 求证：$\{a_n\}$为等比数列的充要条件是$a_n=kq^n$，其中k，q都是不为 0 的常数.

5 如果$\{a_n\}$是等比数列，而且正整数s，t，p，q满足$s+t=p+q$，求证：

$$a_sa_t=a_pa_q.$$

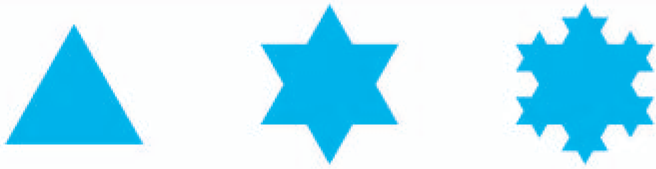
6 已知一个等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q.

(1) 将$\{a_n\}$的前m项去掉，其余各项依次构成的数列还是等比数列吗? 如果是，它的首项与公比分别为多少?

(2) 取出$\{a_n\}$的所有序号是奇数的各项，依次构成一个新的数列，这个数列还是等比数列吗? 如果是，它的首项与公比分别为多少?

(3) 取出$\{a_n\}$的所有序号为 5 的倍数的各项，依次构成一个新的数列，这个数列还是等比数列吗? 如果是，给出证明并求出首项与公比；如果不是，说明理由.

7 下图(1)是一个边长为 1 的正三角形，将每边 3 等分，以中间一段为边向外作正三角形，并擦去中间一段，得图(2)，如此继续下去，得图(3)……试求第n个图形的周长和面积.



（1）　　（2）　　（3）

（第 7 题）

1 $\frac{1}{2}$　　2 1.03　　3 $1\,000\times1.03^{n}$　　4 10　　5 $-\frac{1}{2}$　　6 2　　7 1

5.3.2 等比数列的前 n 项和

情境与问题

在信息技术高度发展的今天，人们可以借助手机、计算机等快速地传递有关信息．在这样的背景下，要求每一个人都要“不造谣，不信谣，不传谣”，否则要依法承担有关法律责任．你知道这其中的缘由吗?

如图 5-3-2 所示，如果一个人得到某个信息之后，就将这个信息传给 3 个不同的好友（称为第 1 轮传播）；每个好友收到信息后，又都传给了 3 个不同的好友（称为第 2 轮传播）……依此下去，假设信息在传播的过程中都是传给不同的人，则每一轮传播后，信息传播的人数就构成了一个等比数列

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \cdots.$$

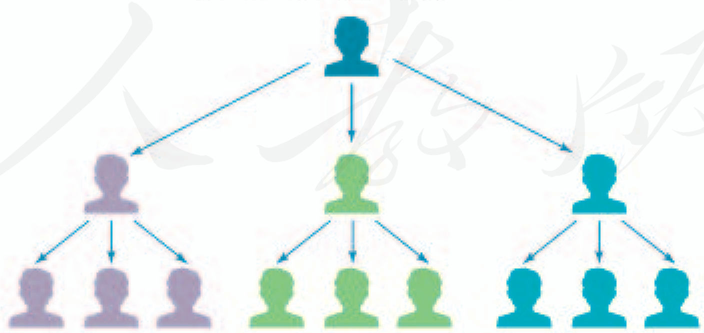


图 5-3-2

如果信息按照上述方式共传播了 19 轮，那么知晓这个信息的人数共有多少?

为了解决情境中的问题，我们需要计算出等比数列

$$1, 3, 9, 27, 81, \cdots$$

的前 20 项和，即要算出

$$S_{20}=1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{19} \quad ①$$

的值.

尝试与发现

你能想办法算出①式的值吗？你能得出一般等比数列前 n 项和的公式吗？

当在①式两边同时乘以 3 时，可得

$$3S_{20}=3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{20}. \quad ②$$

①－②可得 $-2S_{20}=$ 1 ________，因此

$$S_{20}=\frac{3^{20}-1}{2}\approx 1.7\times 10^9.$$

也就是说，经过 19 轮传播之后，知晓这个信息的人数约为 17 亿，比我国现有的总人口还多！

一般地，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，则

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \\ &= a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}. \quad ③ \end{aligned}$$

当 $q=1$ 时，由③可以看出，$S_n=na_1$.

当 $q\neq 1$ 时，在③两边同时乘以 q 可得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n, \quad ④$$

③－④可得 $(1-q)S_n=a_1-a_1q^n$，此时有

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

综上可得等比数列前 n 项和的公式为

$$\boxed{S_n=\begin{cases} na_1, & q=1, \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1. \end{cases}}$$

因为 $a_n=a_1q^{n-1}$，所以 $q\neq 1$ 时，等比数列前 n 项和的公式也可改写为

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}.$$

例 1 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\frac{1}{2}$，$a_8=1$，求这个数列前 8 项的和 S_8.

解 因为 $a_8=a_1q^7$，所以

$$a_1=\frac{a_8}{q^7}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^7}=2^7,$$

因此

$$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{2^7\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=2^8-1=255.$$

例 2 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=3$，$a_{10}=-384$，求这个数列前 10 项的和.

解 由已知可得

$$\begin{cases}3=a_1q^2,\\-384=a_1q^9,\end{cases}$$

解得 $q=$ 2 ________，$a_1=$ 3 ________.

因此前 10 项的和为

$$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{3}{4}\times\frac{[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)}=-\frac{1\ 023}{4}.$$

例 3 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=3\times2^n-1$，求出数列的通项公式，并判断这个数列是否是等比数列.

解 当 $n=1$ 时，有 $a_1=S_1=$ 4 ________.

当 $n\geqslant2$ 时，有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=3\times2^n-1-(3\times2^{n-1}-1)=3\times2^{n-1}.$$

因此数列的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}5,\ n=1,\\3\times2^{n-1},\ n\geqslant2.\end{cases}$$

又因为

$$a_2=3\times2^{2-1}=6,\ a_3=3\times2^{3-1}=12,$$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{5}$，$\frac{a_3}{a_2}=2$，可知$\{a_n\}$不是等比数列.

探索与研究

(1) 等比数列中，S_n 与 n 的关系与以前学过的什么函数有关?

(2) 如果数列$\{a_n\}$的前 n 项和的公式是

$$S_n=Aq^n+B,$$

其中 A，B，q 都是常数，且 $A\neq0$，$q\neq0$，那么$\{a_n\}$一定是等比数列吗? 为什么?

例 4 求值：$9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots99}_{n个9}$.

分析 数列 9，99，999，…不是等比数列，不能直接用公式计算，但将它转化成 10−1，100−1，1 000−1，…，就容易解决了.

解 原式$=(10-1)+(10^2-1)+\cdots+(10^n-1)$

$$=(10+10^2+\cdots+10^n)-n=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n$$

$$=\frac{10}{9}(10^n-1)-n.$$

例 5 某工厂去年 1 月份的产值为 a 元，且月平均增长率为 p（$p>0$），求这个工厂去年全年产值的总和.

解 设该工厂去年第 n 个月的产值为 b_n 元，由题意可知 $b_1=a$，且

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{b_n}=p,$$

即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=1+p$.

因此$\{b_n\}$是以 a 为首项，5 ________为公比的等比数列，这个数列共有 12 项，且

$$b_n=\text{6 ________},$$

从而这个数列所有项的和为

$$S_{12}=\frac{a[1-(1+p)^{12}]}{1-(1+p)}=\frac{a[(1+p)^{12}-1]}{p}.$$

因此可知该工厂去年全年的总产值为$\frac{a[(1+p)^{12}-1]}{p}$元.

拓展阅读

国际象棋与等比数列

一般认为，国际象棋起源于印度. 国际象棋的棋盘由 64 个格子组成，如右图所示. 据说国王为了奖赏发明者，让发明者提一个要求. 发明者说：我想在棋盘的第 1 个格子里放上 1 颗麦粒，在第 2 个格子里放上 2 颗麦粒，在第 3 个格子里放上 2^2 颗麦粒，在第 4 个格子里放上 2^3 颗麦粒……每个格子放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍，直到第 64 个格子，请国王给我足够的麦子. 国王觉得这个要求并不过分，欣然同意. 假设每 1 000 粒麦子的质量为 40 g，猜想一下，国王有能力满足发明者的要求吗？

根据等比数列前 n 项求和公式可知，发明者所要求的麦粒数为

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$$

$$=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1.$$

从而可知，发明者要求的麦子质量为

$$\frac{2^{64}-1}{1\ 000}\times 40\ \text{g}\approx 7.38\times 10^{14}\ \text{kg}.$$

也就是说，发明者要求的麦子质量约为 7.38×10^{11} 吨，即 7 380 亿吨．2016 年，我国大宗粮油作物（包括小麦、水稻）产量约为 5.4 亿吨，全球大宗粮油作物总产量约为 27.8 亿吨．古印度的那位国王能满足发明者的要求吗？

练习A

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

   (1) $a_1=3$，$q=2$，$n=6$；　　(2) $a_1=2.4$，$q=-1.5$，$n=5$；

   (3) $a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{2}$；　　(4) $a_1=-2.7$，$q=-\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{1}{90}$．

2. 求等比数列 $\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{2}$，1，…从第 6 项到第 10 项的和．

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=6$，$S_3=18$，求公比 q．

4. 某林场计划第 1 年造林 15 公顷，以后每年比前一年多造林 20%，该林场 5 年共造林多少公顷？

5. 某制糖厂第 1 年制糖 5 万吨．如果平均每年的产量比上一年增加 10%，那么从第 1 年起，约几年内可使总产量达到 30 万吨（结果保留到个位）？（参考数据：$\lg 2=0.301\ 0$，$\lg 3=0.477\ 1$，$\lg 1.6=0.20$，$\lg 1.1=0.041$．）

练习B

1. 计算．

   (1) $0.9+0.99+0.999+\cdots+0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$；

   (2) $(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$．

2. 如果一个等比数列前 5 项的和等于 10，前 10 项的和等于 50，那么这个数列前 15 项的和等于多少？

3. 已知等比数列的首项为 -1，前 n 项和为 S_n，如果 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，求 S_8．

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，点 (n, S_n) 在函数 $y=2-2\times 3^n$ 的图像上，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

❺ 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？意思是，一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，求塔顶层灯的数目．你能求出来吗？

1 $1-3^{20}$　2 -2　3 $\frac{3}{4}$　4 $3\times2-1=5$　5 $1+p$　6 $a(1+p)^{n-1}$

习题5-3A

1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_5=8$，$a_7=16$，求 a_1 与公比 q；

(2) 已知 $a_3=2$，公比 $q=-1$，求 a_{15}．

2 求 $a^4+a^2b^2$ 与 $b^4+a^2b^2$（其中 $ab\neq0$）的等比中项．

3 某市近 10 年的年国内生产总值从 2 000 亿元开始，以每年 8% 的速度增长，这个城市近 10 年的国内生产总值一共是多少？

4 假设某工厂生产某种产品，第 1 年产量为 a，以后每年该产品产量的增长率是 p（$p>0$），用 a_n 表示第 n 年该产品的产量，用 S_n 表示从开始到第 n 年该工厂生产这种产品的总量，分别求出 a_n 与 S_n 的表达式．

5 3 个数成等比数列，它们的和等于 14，它们的积等于 64，求这个等比数列．

6 某工厂产值的月平均增长率为 p，求该工厂产值的年增长率．

7 已知一个正三角形边长为 a，以此正三角形的高为边作第 2 个正三角形，以此类推继续作正三角形．求前 10 个正三角形的周长之和．

8 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n>0$，证明数列 $\{\lg a_n\}$ 是等差数列，并求出这个等差数列的首项与公差．

9 中国人民银行 2015 年 10 月 24 日公布的“人民币现行利率表”显示，金融机构人民币贷款 1～5 年（含 5 年）的基准利率为 4.75%．若某人年初时从某银行贷款了 100 000 元，贷款期为 5 年，贷款利率就是基准利率，银行每年年底结算一次利息．求到第 5 年年底时，此人欠银行的钱数（精确到 0.01）．

习题5-3B

1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1=-1.5$，$a_4=96$，求 q 和 S_n；

(2) 已知 $a_1=2$，$S_3=26$，求 q 和 a_3；

(3) 已知 $q=\frac{1}{2}$，$S_5=3\frac{7}{8}$，求 a_1 和 a_4；

(4) 已知 $a_3=-4$，$a_4=6$，求 q 和 S_5.

2. 数列 a，a，a，a，a 是等比数列吗？为什么？

3. 将公比为 q 的等比数列 a_1，a_2，a_3，a_4，…，依次取相邻两项的乘积组成新的数列 a_1a_2，a_2a_3，a_3a_4，a_4a_5，…，这个新数列是等比数列吗？说明理由.

4. 已知两个等比数列的公比不相等，但第 5 项相等，这两个等比数列中除第 5 项外，还有可能出现序号与数值都相等的项吗？

5. 如果等比数列 $\{a_n\}$ 中公比 $q>1$，那么 $\{a_n\}$ 一定是递增数列吗？为什么？

6. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$，且 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的积为 T_n，即 $T_n=a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n$，又已知 $a_1=4$，$q=\frac{1}{2}$，求 T_n，及 T_n 的最大值.

习题5-3C

1. 求 $1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$ 的值.

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$S_{n+1}=4a_n+2$，$a_1=1$.

(1) 设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(2) 设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}$，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和公式.

3. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若对于任意的正整数，都有 $S_n=2a_n-3n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项与递推关系；

(2) 证明：数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}=Ab_n+B$ 时（其中 $A\neq1$，$B\neq0$），数列 $\left\{b_n-\frac{B}{1-A}\right\}$ 是以 A 为公比的等比数列. 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

5.4 数列的应用

前面我们已经看到了数列的很多应用，这一节我们再通过几个实例来展示数列的应用.

1. 分期还款与数列

情境与问题

我们知道，当偿还银行贷款时，需要将本金和利息一起偿还. 分期还款是一种很常见的还款方式，其本质是将本金和利息分摊到每一期偿还. 目前，常见的分期还款方式有“等额本金还款法”“等额本息还款法”. 你能根据这两种还款方式的名称猜出它们的不同吗？如果向银行贷款本金 A_0 元，打算分成 m 期偿还，并且每一期的利率为 r（$r>0$），记每期还款的钱数构成的数列为

$$a_1，a_2，\cdots，a_m，$$

你能写出两种还款方法中，第 n 期所要还的钱数 a_n 的表达式吗？

顾名思义，“等额本金还款法”是将本金平均分配到每一期进行偿还，每一期的还款金额由两部分组成，一部分为每期本金，即贷款本金除以还款期数，另一部分是利息，即贷款本金与已还本金总额的差乘以利率. 因此这种方式中，

$$\text{每期还款金额}=\frac{\text{贷款本金}}{\text{还款期数}}+(\text{贷款本金}-\text{已还本金总额})\times\text{利率}.$$

利用情境中的符号有

$$a_n=\frac{A_0}{m}+\left[A_0-\frac{A_0}{m}(n-1)\right]\times r.$$

例 1 自主创业的大学生张华向银行贷款 200 000 元租赁了一处经营场所，因为预计前期经营状况会比较好，张华跟银行约定按照“等额本金还款法”分 10 年进行还款，贷款的年利率为 5%. 设第 n 年张华的还款金额为 a_n 元，求出 a_n 的表达式，并说出数列 $\{a_n\}$ 的特征.

解 因为每期所还本金为

$$\frac{200\ 000}{10}=20\ 000\ (\text{元})，$$

因此，第 n 年以前已还本金总额为 20 000$(n-1)$ 元，从而有

$$a_n=20\ 000+[200\ 000-20\ 000(n-1)]\times 5\%$$
$$=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

可以看出，$\{a_n\}$是一个递减的等差数列.

“等额本息还款法”是将本金和利息平均分配到每一期进行偿还，因此每一期所还钱数相等，即

$$a_1=a_2=\cdots=a_m.$$

为了较快地推导出这种方式中每一期所要还的钱数，我们先介绍资金的现值与未来值.

尝试与发现

假设你现在手中有 1 000 元钱，而且你打算一年以后再使用这笔钱．那么一年以后，这笔钱所能买到的东西价值最多只能是 1 000 元吗？为什么？由此你能得到什么启发？

因为可以将这笔钱存入银行中，而到期之后银行会支付利息，因此一年后使用这笔钱时，所能买到的东西价值是不止 1 000 元的．例如，假设一年定期的存款利率为 5%，不计利息税，则一年后的本息和为

$$1\ 000(1+5\%)=1\ 050\ (\text{元}).$$

即一年后可以买到价值 1 050 元的东西.

换句话说，现在的 1 000 元相当于一年后的 1 050 元．类似地，如果记现在的 A_0 元相当于 n 年后的 A 元，银行存款的年利率为 r（$r>0$）且每年结算一次利息（不计利息税，下同），则 $A_0(1+r)^n=A$，即

$$A_0=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}.$$

经济学上，一般称 A_0 为 A 的现值，而 A 为 A_0 的未来值．可以看出，现值的计算公式提供了不同时期资金换算的方法，因此在日常生活中有广泛应用.

在前面的情境中，如果用“等额本息还款法”进行还款，设贷款时的资金 A_0 元为现值，且每一期所还钱数为 x 元，则：

第 1 期所还钱的现值为$\dfrac{x}{1+r}$元；

第 2 期所还钱的现值为$\dfrac{x}{(1+r)^2}$元；

……

第 m 期所还钱的现值为$\boxed{3}\underline{\qquad\quad}$元.

因为最后还款的现值总和应为 A_0 元，因此

$$\frac{x}{1+r}+\frac{x}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+r)^m}=A_0,$$

又因为 $r>0$，所以由等比数列前 n 项求和公式可解得

$$x=\frac{A_0r(1+r)^m}{(1+r)^m-1}.$$

例 2 刚考入大学的小明准备向银行贷款 5 000 元购买一台笔记本电脑，然后上学的时候通过勤工俭学来分期还款．小明与银行约定：每个月还一次款，分 12 次还清所有的欠款，且每个月还款的钱数都相等，贷款的月利率为 0.5%. 试求出小明每个月所要还款的钱数（精确到 0.01 元).

解 可以看出，小明选择的还款方式为“等额本息还款法”，因此

$$x=\frac{5\,000\times0.5\%\times(1+0.5\%)^{12}}{(1+0.5\%)^{12}-1}\approx430.33\text{（元）}.$$

即小明每个月要还款约 430.33 元.

2. 政府支出的“乘数”效应与数列

经济学家凯恩斯在解释政府财政政策时指出，如果政府的支出增加，那么就会产生“乘数”效应.

例如，政府如果增加道路维修费用 300 亿元，那么这笔费用将会使部分居民收入增加. 假设这些居民将收入增加量的 75%用于国内消费，25%用于存储或国外消费，那么国内消费的金额将会产生第 2 轮影响，其也会使部分居民收入增加. 收入增加了的居民又会将一定比例的收入增加量用于国内消费，因此又会产生新的一轮影响……假设每一个受影响的居民消费理念都一样，那么经过 30 轮影响之后，最后的国内消费总额将会是 300 亿元的倍数（最初政府支出也算是国内消费)，也就是说有了“乘数”效应.

事实上，在这个例子中，如果设第 n 轮消费的金额为 a_n 元，则：

第 1 轮居民用于消费的金额为

$$a_1=300\times75\%\text{（亿元）};$$

第 2 轮居民用于消费的金额为

$$a_2=a_1\times75\%=300\times(75\%)^2\text{（亿元）};$$

……

第 30 轮居民用于消费的金额为

$$a_{30}=a_{29}\times75\%=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}\text{（亿元）}.$$

因此，经过 30 轮后，国内消费总额是

$$\begin{aligned}&300+300\times75\%+300\times(75\%)^2+\cdots+300\times(75\%)^{30}\\=&\frac{300[1-(75\%)^{31}]}{1-75\%}\\\approx&300\times4=1\,200\text{（亿元）}.\end{aligned}$$

政府的初始支出为 300 亿元，而国内消费最后约为 1 200 亿元，因此国内消费约是初始支出的 4 倍.

例 3 假设政府增加某项支出 100 亿元，每个受惠的居民会将 80%的额外收入用于国内消费. 求经过 30 轮影响之后，最后的国内消费总额（最初政府支出也算是国内消费，结果精确到 1 亿元）.

解 依题意可知，经过 30 轮影响之后，最后的国内消费总额为

$$100+100\times80\%+100\times(80\%)^2+\cdots+100\times(80\%)^{30}$$

$$=\frac{100[1-(80\%)^{31}]}{1-80\%}\approx500\ (亿元).$$

3. 其他

例 4 有些食物中含有一定量的微量元素，当人体摄入微量元素之后，微量元素会随着尿液、汗液等部分排出. 假设某人每天吃进某微量元素 10 mg，该微量元素每天以 10%的比率排出，则 30 天后在此人身体中积累了多少该微量元素？（设一开始某人体内该微量元素为 0，计算结果精确到 0.1 mg.）

解 设第 n 天时此人体内有微量元素 a_n mg，则：

第 1 天此人身体内的微量元素为

$$a_1=10\times(1-10\%)\ (\mathrm{mg});$$

第 2 天此人身体内的微量元素为

$$a_2=(a_1+10)(1-10\%)=10\times(1-10\%)+10\times(1-10\%)^2\ (\mathrm{mg});$$

第 3 天此人身体内的微量元素为

$$\begin{aligned}a_3&=(a_2+10)(1-10\%)\\&=10\times(1-10\%)+10\times(1-10\%)^2+10\times(1-10\%)^3\ (\mathrm{mg});\end{aligned}$$

……

第 30 天此人身体内的微量元素为

$$\begin{aligned}a_{30}&=(a_{29}+10)(1-10\%)\\&=10\times(1-10\%)+10\times(1-10\%)^2+\cdots+10\times(1-10\%)^{30}\\&=\frac{10(1-10\%)[1-(1-10\%)^{30}]}{1-(1-10\%)}\approx86.2\ (\mathrm{mg}).\end{aligned}$$

即 30 天后在此人身体中积累了约 86.2 mg 的该微量元素.

例 5 某企业为一个高科技项目注入了启动资金 1 000 万元，已知每年可获利 25%，但由于竞争激烈，每年年底需从利润中取出 200 万元资金进行科研、技术改造与广告投入，方能保持原有的利润增长率. 设经过 n 年之后，该项目的资金为 a_n 万元.

（1）写出 a_1 的值以及数列 $\{a_n\}$ 的递推公式；

（2）证明：$\{a_n-800\}$ 为等比数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 求出至少要经过多少年，该项目的资金才可以达到或超过翻两番（即为原来的 4 倍）的目标.（取 $\lg 2\approx 0.3$）

解 (1) 由题意知

$$a_1=1\ 000\times(1+25\%)-200=1\ 050,$$

而且

$$a_{n+1}=a_n\times(1+25\%)-200=\frac{5}{4}a_n-200.$$

(2) 由(1)可知

$$a_{n+1}-800=\frac{5}{4}a_n-200-800=\frac{5}{4}(a_n-800),$$

又因为 $a_1-800=1\ 050-800=250\neq 0$，所以可知 $a_n-800\neq 0$，从而可知$\{a_n-800\}$为等比数列.

因此

$$a_n-800=(a_1-800)\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}=250\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1},$$

所以 $a_n=250\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}+800.$

(3) 令 $a_n\geqslant 4\ 000$，可得 $\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}\geqslant\frac{64}{5}$，因此 $(n-1)\lg\frac{5}{4}\geqslant\lg\frac{64}{5}$，$(n-1)\lg\frac{10}{2^3}\geqslant\lg\frac{2^7}{10}$，所以

$$n-1\geqslant\frac{7\lg 2-1}{1-3\lg 2}\approx 11,$$

因此 $n\geqslant 12$.

即至少要经过 12 年，项目的资金才可以达到或超过翻两番的目标.

习题5-4A

1. “等额本金还款法”中，每一期还款数构成的数列一定是一个递减的等差数列吗？为什么？
2. “等额本息还款法”中，每一期还款数构成的数列是什么数列？
3. 一对夫妇为了 5 年后能购买一辆车，准备每年到银行去存一笔钱. 假设银行储蓄年利率为 5%，每年结算一次利息且不计利息税，为了使 5 年后本利和共有 10 万元，则他们每年约需存多少钱（精确到 1 元）？
4. 假设某人每天服用某种药物 20 mg，该药物每天以 20% 的比率排出，则 30 天后在此人身体中积累了多少该药物？
5. 我国古代数学名著《九章算术》中记载有“耗子穿墙”问题：今有垣厚五尺，两鼠对穿. 大鼠日一尺，小鼠亦日一尺. 大鼠日自倍，小鼠日自半. 问：

几何日相逢？各穿几何？你能解答此题吗？

习题5-4B

1. 网上购鞋常常能看到脚长 a mm 与鞋号 b_n 的对应表格.

a	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265
b	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

请解决下面的问题.

(1) 找出满足表中对应规律的计算公式，通过实际脚长 a 计算出鞋号 b；

(2) 根据计算公式，计算 30 号童鞋所对应的脚长是多少.

(3) 如果一个篮球运动员的脚长为 282 mm，根据计算公式，他该穿多大号的鞋？

2. 《莱因德纸草书》中曾记载有下面的数学问题：把 100 个面包分给 5 个人，使每个人所得的面包数成等差数列，且最大的 3 份之和的 $\frac{1}{7}$ 等于较小的 2 份之和，求最小的 1 份为多少. 你能求解此题吗？

3. 假设政府增加某项支出 200 亿元，而每个受惠的居民会将 50%的额外收入用于国内消费. 求政府此项支出经过 50 轮后的国内消费总金额.

4. 设某投资项目现在需投资 200 万元，且第 1 年年末开始，每一年的净利润是 15 万元，而且收益可以持续 50 年. 求年利率为 8%时所有收益的现值，并以此说明投资者是否应该投资这个项目（假设投资者现在有 200 万元资金）.

5. 假设某企业现在的净利润为 200 万元，且以后每年增长 4%. 但该企业今年遇到了资金困难的问题，所以企业管理人提出：如果有投资人现在出资 5 500 万元的话，该企业将现在和以后每年的净利润都无条件划归给投资人. 假设该企业可以无限生存下去，而银行的年利率为 8%，不考虑其他情况，你是否会同意该企业管理人的提议？(提示：将该企业未来利润的现值之和与 5 500 万元进行比较.)

6. 某人现有资金 172 500 元，恰好可以以每股 17.25 元的价格购进某种股票 10 000 股，预期一年后能以每股 18.96 元的价格卖出（股票交易税税率为 0.3%）；此人也可以将这笔资金存入银行，其中月利率为 0.8%，每月结算一次利息且不扣利息税. 你觉得该人应该用这笔资金买股票还是存银行？(取 $(1+0.8\%)^{12}=1.100\ 34$)

7. 从社会效益和经济效益出发，某地准备投入资金进行生态环境建设，以发展旅游产业. 根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少 $\frac{1}{5}$，本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 $\frac{1}{4}$.

(1) 设 n 年内（本年度为第 1 年）总投入为 a_n 万元，旅游业总收入为 b_n 万元，写出 a_n，b_n 的表达式；

(2) 经过多少年后，旅游的总收入就能超过总投入？

1 $-1\,000n+31\,000$　　2 $\dfrac{A}{(1+r)^n}$　　3 $\dfrac{x}{(1+r)^m}$　　4 $300\times(75\%)^{30}$

5.5 数学归纳法

尝试与发现

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且

$$a_{n+1}=\frac{4n^2-1}{a_n}.$$

求出这个数列的第 2、3、4、5 项，你能由此猜出数列的通项公式并给出证明吗？

由已知可得

$$a_2=\frac{4\times1^2-1}{a_1}=\frac{3}{1}=3,\quad a_3=\frac{4\times2^2-1}{a_2}=\frac{15}{3}=5,$$

$a_4=$ 1 __________，$a_5=$ 2 __________，

这就是说，数列$\{a_n\}$的前 5 项分别为 1，3，5，7，9，因此，可以猜测$\{a_n\}$是一个等差数列，且通项公式为

$$a_n=2n-1. \quad ①$$

怎样才能证明这一点呢？我们已经知道，前面 5 项都是满足①式的，所以原则上需要对后面的每一项都进行验证，但因为后面有无穷多项，所以一一验证是不可能的. 不过，用下述方法可以给出后面的每一项也满足①式的严格证明.

假设$n=k$时，①式成立，即$a_k=2k-1$.

根据已知条件和假设可知

$$a_{k+1}=\frac{4k^2-1}{a_k}=\frac{4k^2-1}{2k-1}=2k+1=2(k+1)-1,$$

即$n=k+1$时，①式也成立.

这就能够说明①式对任何正整数都成立了：我们已经知道①式对$n=1$，2，3，4，5 都是成立的，而且我们证明了“如果$n=k$时成立，那么$n=k+1$也成立”，因此$n=6$也是成立的；由于$n=6$是成立的，因此$n=6+1=7$也是成立的……

上面这个说理过程的一般化，就是**数学归纳法**：

一个与自然数有关的命题，如果

(i) 当$n=n_0$时，命题成立；

(ii) 在假设$n=k$（其中$k\geqslant n_0$）时命题成立的前提下，能够推出$n=$

$k+1$ 时命题也成立.

那么，这个命题对大于等于 n_0 的所有自然数都成立.

探索与研究

有人认为，可以借助多米诺骨牌来理解数学归纳法．如图 5-5-1 所示，一列排好的多米诺骨牌，如果推倒第一张，而且后续的每一张倒下时，能够导致下一张也倒下，则所有的骨牌都能倒下.

你觉得这种理解方式怎么样?

图 5-5-1

例 1 用数学归纳法证明，对任意的正整数 n，都有

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证明 (i) 当 $n=1$ 时，

$$左边=1^2=1，右边=\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=1,$$

所以此时等式成立.

(ii) 假设 $n=k$ $(k\geqslant1)$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

则

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\=&\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\=&\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

所以，此时 $n=k+1$ 也成立.

根据(i)和(ii)可知，等式对任何正整数都成立.

尝试与发现

以下是某人给出的关于

$$2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+1 \qquad ②$$

对所有正整数都成立的证明，这个证明有问题吗？由此你能得到什么启发？

证明　假设 $n=k$ 时，②式成立，即

$$2+4+6+\cdots+2k=k^2+k+1.$$

则

$$\begin{aligned}&2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)\\=&k^2+k+1+2(k+1)\\=&(k+1)^2+(k+1)+1,\end{aligned}$$

所以，此时 $n=k+1$ 也成立.

因此②式恒成立.

显然，②式是不成立的，因为当 $n=1$ 时，②式

左边$=2$，右边$=$ 3 ______，

此时②式不成立．事实上，尝试与发现中给出的证明，只是数学归纳法证明中的第(ii)部分.

这就说明，用数学归纳法证明时，(i)与(ii)缺一不可．事实上，(i)是(ii)的基础，即只有确定了 $n=n_0$ 时命题成立，后续的推导才会有意义.

例 2 求证：平面上 n 个圆把平面最多分成 n^2-n+2 个区域.

证明 (i) 显然，一个圆将平面分成 2 个区域．当 $n=1$ 时，

$n^2-n+2=$ 4 ______.

所以当 $n=1$ 时结论成立.

(ii) 假设当 $n=k$ $(k\geqslant1)$ 时，结论成立，即 k 个圆最多把平面分成 k^2-k+2 个区域.

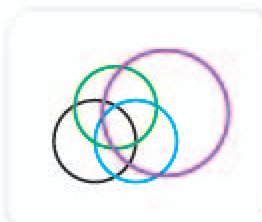


图 5-5-2

在此基础上增加一个圆，为使区域最多，应使新增的圆与前 k 个圆都交于两点，如图 5-5-2 所示．于是新增了 $2k$ 个交点，这 $2k$ 个交点将新圆分成 $2k$ 段弧，这 $2k$ 段弧将所经过的区域一分为二，因此新增了 $2k$ 个区域，这样 $k+1$ 个圆最多把平面分成

$$(k^2-k+2)+2k=(k+1)^2-(k+1)+2$$

个区域.

即当 $n=k+1$ 时结论也成立.

所以，结论对任何正整数都成立.

例 3 求证：当 n 是大于或等于 5 的正整数时，$2^n>n^2$.

证明 (i) 当 $n=5$ 时，$2^5=32$，$5^2=25$，显然 $2^5>5^2$，所以此时命题成立.

(ii) 假设 $n=k$（其中 $k\geqslant5$）时命题成立，即 $2^k>$ 5 ______.

因为 $k\geqslant5$，所以 $k^2\geqslant5k>2k+1$，因此

$$2^{k+1}=2\times2^k>2\times k^2\geqslant k^2+5k>k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

可知不等式当 $n=k+1$ 时也成立.

综上可知，不等式对任何大于或等于 5 的正整数 n 都成立.

习题5-5A

1. 一个与自然数有关的命题，如果已知 $n=3$ 时，命题成立，而且在假设 $n=k$（其中 $k\geqslant3$）时命题成立的前提下，能够推出 $n=k+1$ 时命题也成立.

   (1) $n=90$ 时命题成立吗?

   (2) $n=2$ 时命题一定成立吗? 举例说明.

2. 用数学归纳法证明：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

3. 用数学归纳法证明：$-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$.

4. 用数学归纳法证明：当 $n\geqslant2$ 时，

   $$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n).$$

5. 用数学归纳法证明 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

6. 已知 $x>1$，且 n 是正整数，用数学归纳法证明：$(1+x)^n\geqslant1+nx$.

习题5-5B

1. 一个与自然数有关的命题，如果 $n=k+1$ 时命题不成立，能够推出 $n=k$ 时命题也不成立（其中 k 为正整数）. 若已知 $n=6$ 时，命题不成立；$n=7$ 时，命题成立.

   (1) $n=3$ 时命题成立吗?

   (2) $n=8$ 时命题一定成立吗?

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0$，且 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$. 猜测这个数列的通项公式，并给出证明.

3. 已知数列

   $$\frac{1}{1\times3},\ \frac{1}{3\times5},\ \frac{1}{5\times7},\ \cdots,\ \frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)},\ \cdots,$$

   记这个数列前 n 项和为 S_n. 计算 S_1，S_2，S_3，S_4，根据计算的结果，猜想 S_n 的表达式，并用数学归纳法进行证明.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，记这个数列前 n 项和为 S_n. 计算 S_1，S_2，S_3，S_4，根据计算的结果，猜想 S_n 的表达式，并用数学归纳法进行证明.

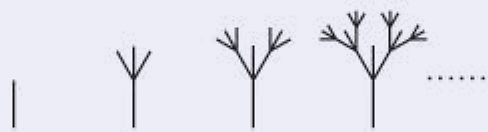
5 证明 $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 能被 13 整除，其中 n 为任意正整数.

6 观察下列各式.

$$1^3=1^2,$$
$$1^3+2^3=3^2,$$
$$1^3+2^3+3^3=6^2,$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2,$$
$$\cdots\cdots$$

总结出一般规律，并用数学归纳法证明你所得到的结论.

7 下面是按照一定规律画出的一列“树型”图.



（第 7 题）

其中，第 2 个图比第 1 个图多 2 个“树枝”，第 3 个图比第 2 个图多 4 个“树枝”，第 4 个图比第 3 个图多 8 个“树枝”. 假设第 n 个图的“树枝”数为 a_n，写出数列 $\{a_n\}$ 的递推公式和通项公式，并用数学归纳法证明通项公式.

1 $\dfrac{4\times3^2-1}{a_3}=\dfrac{35}{5}=7$ 2 $\dfrac{4\times4^2-1}{a_4}=\dfrac{63}{7}=9$ 3 $1^2+1+1=3$

4 $1^2-1+2=2$ 5 k^2

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们首先学习了数列的概念，包括数列的通项公式、递增数列、递减数列、数列的前 n 项和；然后学习了等差数列，包括等差数列的定义、通项公式与性质；接下来学习了等比数列，包括等比数列的定义、通项公式与性质；最后还学习了一种新的数学证明方法——数学归纳法，了解了数学归纳法在证明与自然数有关的命题中的作用.

依照知识之间的联系，我们可以作出如下的知识结构图.

数列

首项　末项　项数　有穷数列　无穷数列　通项公式　递推公式

$$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2\end{cases}$$

等差数列

$$a_{n+1}-a_n=d$$

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

等比数列

数学归纳法

请依据自己的理解，在知识结构图上补充更多的内容吧！你能作出其他形式的知识结构图吗？

02 课题作业

在本章学习的过程中，我们已经看到，我国古代数学中包含有很多数列的研究成果．实际上，早在元代数学家朱世杰所著的《四元玉鉴》中，就已经给出了“高阶等差数列”前 n 项求和公式．试查阅有关文献和互联网，了解我国古代数学中数列的研究成果，从你感兴趣的角度撰写小论文，然后与其他同学交流、分享.

03 复习题

A 组

1. 观察数列的特点，在每个空白处填入一个适当的数，并写出每个数列的一个通项公式.

(1) 1，3，7，____，31，____，127；

(2) 2，5，____，17，26，____，50；

(3) $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$，____，$-\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$，____，$\frac{1}{128}$；

(4) 1，$\sqrt{2}$，____，2，$\sqrt{5}$，____，$\sqrt{7}$.

2. 观察数列 0，3，8，15，24，…中各项的规律，求数列的一个通项公式.

3. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_3=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，试写出这个数列的前 10 项以及前 5 项的和.

4. 已知 $a_n=2n-1$，求证：$S_n=\frac{(a_n+1)^2}{4}$.

5. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-1+2^{n-1}$，S_n 为其前 n 项和.

(1) 求 S_4，S_5；　　(2) 求 S_n.

6. 已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，记 $b_n=a_n+1$，证明：$\{b_n\}$是等比数列，并求 a_n.

7. 早在公元前 1 世纪左右，我国古代著名的《周髀算经》中就出现了与等差数列有关的内容：凡八节二十四气，气损益九寸九分六分分之一；冬至晷长一丈三尺五寸，夏至晷长一尺六寸. 问：次节损益寸数长短各几何？这指的是二十四节气可以通过特定标记的日影长度来确定，每相邻两个节气之间的日影长度差为 $99\frac{1}{6}$ 分；且冬至时日影长度最大，为 1 350 分；夏至时日影长度最小，为 160 分. 问每个节气的日影各为多少. 设二十四节气的日影长按从大到小的顺序排成的数列为$\{a_n\}$，请依次写出这个数列中的各项.

8. 用数学归纳法证明：$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

9. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

记这个数列前 n 项和为 S_n. 计算 S_1，S_2，S_3，S_4，并根据计算的结果，猜想 S_n 的表达式，并用数学归纳法进行证明.

10. 求证：对任意正整数 n，$x^{2n}-y^{2n}$ 都能被 $x-y$ 整除.

B 组

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_m=10$，$S_{2m}=30$，求 S_{3m} 的值.

2. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_m=10$，$S_{2m}=30$，求 S_{3m} 的值.

3. (1) 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n,\ S_{2n}-S_n,\ S_{3n}-S_{2n},\ S_{4n}-S_{3n},\ \cdots$$

成等差数列吗？证明你的结论.

(2) 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n,\ S_{2n}-S_n,\ S_{3n}-S_{2n},\ S_{4n}-S_{3n},\ \cdots$$

成等比数列吗？证明你的结论.

4. 是否存在一个各项都小于 5 的无穷递增数列？如果存在，写出一个满足条件的数列的通项公式；如果不存在，说明理由.

5. 如果 $a_4=\dfrac{1}{8}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，试写出数列$\{a_n\}$的前 3 项，并猜想它的一个通项公式，然后给出证明.

6. 已知$\{a_n\}$中，$S_n+S_m=S_{n+m}$，$a_1=1$，求 a_{10} 的值.

7. 已知$\{a_n\}$中，$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，求 S_8 的值.

8. 已知$\{a_n\}$满足 $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n=n^2$，求 a_n.

9. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=3n^2$，求 a_n.

10. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且 $b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $c_n=a_nb_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和.

11. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 A_n，等差数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 B_n，且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{2n+3}{3n+2}$，求$\dfrac{a_8}{b_8}$.

12. 已知 $n\geqslant 2$，且平面内有 n 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不过同一点，证明：这些直线的交点的个数为

$$f(n)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

C 组

1. 甲、乙、丙、丁 4 人做传球练习，球首先由甲传出，每个人得到球后都等可能地传给其余 3 人之一，设 P_n 表示经过 n 次传递后球回到甲手中的概率.

(1) 求 P_1，P_2；

(2) 用 n 表示出 P_n.

2. 计算 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

3. 将正整数数列 1，2，3，4，5，…的各项按照上小下大、左小右大的原则写成如下的三角形数表.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ & \cdots\cdots & \end{array}$$

(1) 写出数表的第 4 行、第 5 行；

(2) 写出数表中第 10 行的第 5 个数；

(3) 设数表中每行的第 1 个数依次构成数列 $\{a_n\}$，数表中每行的最后一个数依次构成数列 $\{b_n\}$，试分别写出数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的递推公式，并求出它们的通项公式.

我一直觉得，像音乐一样，数学也是一门语言．为了系统地学习它，有必要一小块一小块地慢慢吸收，最终达到浑然天成的效果．从某种意义上说，数学又像古代汉语——非常典雅而优美．听一个精彩的数学讲座就好比听一场精彩的歌剧．万事齐全，一切都趋向问题的中心，我享受数学！

——张圣容

第六章

导数及其应用

本章导语

我们从物理学中已经知道，物体运动的位移 x、速度 v、加速度 a（均指大小，下同）之间具有紧密的联系. 速度描述了位移变化的快慢，加速度描述了速度变化的快慢，即

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t},\ a=\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

其中 t 表示时间，Δt 表示时间的变化量.

特别地，当物体做的是初速度为 v_0 的匀加速直线运动时，a 是一个常数，此时

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2,\ v=v_0+at.$$

你知道吗？如果从本章我们要学习的导数知识来看的话，上述速度就是位移关于时间的导数，而加速度就是速度关于时间的导数，即

$$v=x'=v_0+at,\ a=v',$$

其中 x' 与 v' 分别表示 x 与 v 对时间 t 的导数.

事实上，导数是研究变化率问题不可或缺的工具.

另一方面，我们知道，物体在做曲线运动时，速度的方向是与运动轨迹相切的. 例如，如图所示的砂轮打磨下来的微粒，是沿着飞轮的切线飞出去的. 这也就意味着，求切线是研究曲线运动时经常要做的事情.

我们在平面解析几何中已经知道怎样求圆锥曲线的切线. 不过，可能会让你感到意外的是，那种求切线的方法并不适用于一般的曲线. 然而，借助于导数来讨论曲线的切线具有一般性.

导数还是研究函数性质和解决众多实际问题的重要工具.

本章我们将通过实际问题理解导数的概念，并了解怎样利用导数来研究变化率、曲线的切线、函数的性质等.

6.1 导数

6.1.1 函数的平均变化率

日常生活中，我们经常需要关注量的变化快慢的问题，也就是变化率的问题.

1. 函数的平均变化率

情境与问题

药物在动物体内的含量随时间变化的规律，是药学与数学之间的边缘学科——药物动力学的研究内容，相关的规律是确定药物的使用量和用药时间间隔的依据. 他克莫司是一种新型免疫抑制剂，在器官移植临床中的应用非常广泛. 已知某病人服用他克莫司 t h 后血药浓度 w μg/L 的一些对应数据如下表所示.

t	0	0.5	1	1.5	2	3	5	8
w	0	6.6	28.6	39.1	31	22.7	8.8	8.3

(1) 当 $t\in[0.5, 1]$ 和 $t\in[1, 1.5]$ 时，w 都是增加的，哪个时间段 w 的增加更快?

(2) 当 $t\in[3, 5]$ 时，平均每小时 w 的变化量为多少? 这里的平均每小时的变化量有什么实际意义?

由所给数据不难看出，当 $t\in[0.5, 1]$ 和 $t\in[1, 1.5]$ 时，w 的增加量分别为

$$28.6-6.6=22,\ 39.1-28.6=10.5,$$

因为时间间隔都是 0.5 h，所以 $t\in[0.5, 1]$ 时，w 增加更快.

当 $t\in[3, 5]$ 时，w 的变化量为

1 ________________,

又因为共有 $5-3=2$ (h)，所以平均每小时的变化量为 $\frac{-13.9}{2}=$

-6.95. 这说明，在 $[3, 5]$ 这段时间内，任意 1 个小时血药浓度平均减少 $6.95\ \mu g/L$，此时，任意 h ($h \in [0, 2]$) 个小时血药浓度平均减少 $6.95h\ \mu g/L$.

一般地，若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，且

$$x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, y_1=f(x_1), y_2=f(x_2),$$

则称

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

为**自变量的改变量**；称

$$\Delta y = y_2 - y_1 \text{（或 } \Delta f = f(x_2)-f(x_1) \text{）}$$

为相应的**因变量的改变量**；称

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(\text{或}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)$$

为函数 $y=f(x)$ 在以 x_1，x_2 为端点的闭区间上的平均变化率，其中“以 x_1，x_2 为端点的闭区间”，在 $x_1<x_2$ 时指的是 $[x_1, x_2]$，而 $x_1>x_2$ 时指的是 2 ____________.

平均变化率的实际意义是，在以 x_1，x_2 为端点的闭区间上，自变量每增加 1 个单位，因变量平均将增加 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 个单位. 因此，如果自变量增加 h 个单位，那么因变量将增加 3 ____________ 个单位.

值得注意的是，上述 Δx 在 $x_1<x_2$ 时是大于 0 的，在 $x_1>x_2$ 时是小于 0 的，而且 x_2 总可以用 x_1 和 Δx 表示，即 $x_2=x_1+\Delta x$，此时“以 x_1，x_2 为端点的闭区间”也可表述为“以 x_1，$x_1+\Delta x$ 为端点的闭区间”，而且 $f(x_2)=f(x_1+\Delta x)$，因此平均变化率

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{(x_1+\Delta x)-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}.$$

依照定义可知，函数在一个区间内的平均变化率，等于这个区间端点对应的函数图像上两点连线的斜率. 例如，图 6-1-1 中函数 $y=f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的平均变化率，等于直线 AB 的斜率，其中

$$A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)).$$

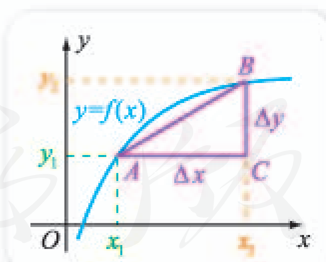


图 6-1-1

因此，平均变化率近似地刻画了函数对应的曲线（即函数图像）在某一区间上的变化趋势，是曲线倾斜程度的“数量化”，曲线的倾斜程度是平均变化率的“直观化”.

例 1 求函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间上的平均变化率.

(1) $[1, 3]$；

(2) 以 1 和 $1+\Delta x$ 为端点的闭区间.

解 (1) 依定义可知

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{2}=4,$$

即 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的平均变化率为 4.

(2) 依定义可知

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=2+\Delta x,$$

$f(x)$ 在以 1 和 $1+\Delta x$ 为端点的闭区间上的平均变化率为 4 ______.

例 1(2)的计算结果说明，函数 $f(x)=x^2$ 在以 1 和 $1+\Delta x$ 为端点的闭区间上的平均变化率与 Δx 有关：Δx 增大时，平均变化率 5 ______.

从几何上来看就是，当 Δx 增大时，函数 $f(x)=x^2$ 的图像上，连接 $(1, f(1))$ 与 $(1+\Delta x, f(1+\Delta x))$ 的直线的斜率将不断增大. 如图 6-1-2 所示的图中，直线 AB 的斜率小于直线 AO 的斜率，且直线 AO 的斜率小于直线 AC 的斜率.

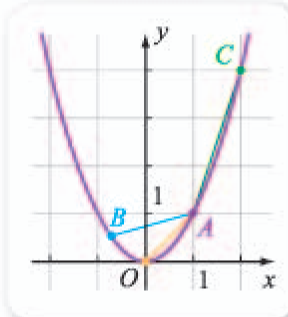


图 6-1-2

2. 以直代曲

前述情境与问题中的数据可以用图 6-1-3 表示.

值得注意的是，若将 w 作为时间 t 的函数，除了根据已知数据得到的点以外，函数图像上的其他点我们是不知道的. 例如，函数的图像有可能是图 6-1-3 中黄色的曲线，也有可能是绿色的曲线.

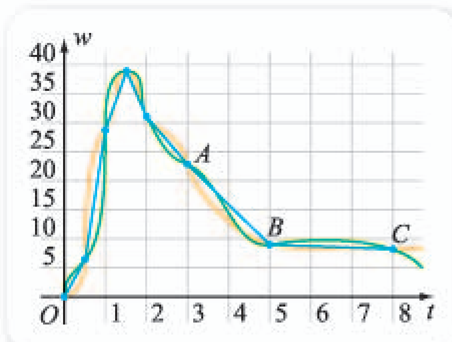


图 6-1-3

尝试与发现

观察前述情境与问题中的数据与图 6-1-3，思考怎样才能估计出 $t=4$ 时 w 的值.

不难想到，此时我们可以将图 6-1-3 中的线段 AB 近似地看成 w 在 $[3, 5]$ 上的图像，从而由 AB 的方程可以算出 $t=4$ 时 w 的估计值：因为直线 AB 的斜率为 -6.95，且 $B(5, 8.8)$，所以由直线的点斜式可知 AB 的方程为

$$w-8.8=-6.95(t-5),$$

代入 $t=4$，可以算得 $w=15.75$，也就是说 w 的估计值为 15.75.

想一想

你能利用 3，4，5 成等差数列来算出 w 的估计值吗?

上述求出 w 估计值的关键是用直线段代替了曲线段，这在数

学中简称为“以直代曲”.

3. 平均速度与平均变化率

从物理学中我们知道，平均速度可以刻画物体在一段时间内运动的快慢. 如果物体运动的位移 x m 与时间 t s 的关系为 $x=h(t)$，则物体在 $[t_1, t_2]$（$t_1<t_2$ 时）或 $[t_2, t_1]$（$t_2<t_1$ 时）这段时间内的平均速度为

$$\frac{h(t_2)-h(t_1)}{t_2-t_1}\ (\text{m/s}).$$

这就是说，物体在某段时间内的平均速度等于 $x=h(t)$ 在该段时间内的平均变化率.

例 2 已知某物体运动的位移 x m 是时间 t s 的函数，而且 $t=0.1$ 时，$x=0.25$；$t=0.5$ 时，$x=2.25$.

(1) 求这个物体在时间段 $[0.1, 0.5]$ 内的平均速度；

(2) 估计出 $t=0.2$ 时物体的位移.

解 (1) 所求平均速度为

$$\frac{2.25-0.25}{0.5-0.1}=\frac{2}{0.4}=5\ (\text{m/s}).$$

(2) 将 x 在 $[0.1, 0.5]$ 上的图像看成直线，则由(1)可知，直线的斜率为 6 ________，且直线通过点 $(0.1, 0.25)$，因此，x 与 t 的关系可近似地表示为

$$x-0.25=5(t-0.1).$$

在上式中令 $t=0.2$，可求得 $x=$ 7 ________，即 $t=0.2$ 时物体的位移可以估计为 0.75 m.

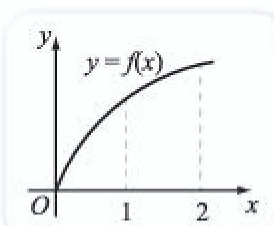
练习A

1. 分别求函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的平均变化率.

2. 试指出正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的平均变化率中，哪一个较大.

3. 分别求函数 $y=x^2$ 在区间 $\left[1, \frac{4}{3}\right]$，$\left[2, \frac{7}{3}\right]$，$\left[\frac{8}{3}, 3\right]$ 上的平均变化率，并指出它们的大小关系.

4. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示，设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 与 $[1, 2]$ 上的平均变化率为 a，b，比较 a，b 的大小.



（第 4 题）

5. 地高辛是用来治疗心脏病的一种药物，若某病人血液中地高辛的初始剂量为 0.5 mg，且 x 天后血液中剩余的剂量为 y mg，y 与 x 的部分数据如下表所示.

x	0	1	2	3	4	5
y	0.5	0.345	0.238	0.164	0.113	0.078

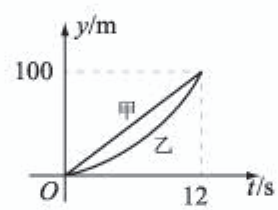
将 y 看成 x 的函数，分别求函数在 $[0,2]$ 和 $[3,5]$ 上的平均变化率.

练习B

1. 已知二次函数 $f(x)=x^2-2x+a$，
   (1) 比较 $f(0)$ 与 $f(3)$ 的大小；
   (2) 比较 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 与 $[1,3]$ 上的平均变化率的大小.
2. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上都有定义，且 $\forall x\in(0,1)$，$f(x)<g(x)$，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均变化率一定不相等吗？为什么？
3. 已知某物体运动的位移 x m 是时间 t s 的函数，而且 $t=0.3$ 时，$x=0.38$；$t=0.6$ 时，$x=5.06$.
   (1) 求这个物体在时间段 $[0.3,0.6]$ 内的平均速度；
   (2) 估计出 $t=0.5$ 时物体的位移.
4. 已知 w 是 t 的函数，部分函数值如下表所示，且 $[5,8]$ 是这个函数的定义域的子集，试估计 $t=6$ 和 $t=7$ 时 w 的值.

t	2	3	5	8
w	31	22.7	8.8	8.3

5. 已知甲、乙两人百米赛跑路程与时间的关系如图所示.
   (1) 甲、乙两人的平均速度各是多少？
   (2) 在接近终点时，甲乙两人谁的速度更快？



（第 5 题）

1 $8.8-22.7=-13.9$　2 $[x_2, x_1]$　3 $\frac{\Delta y}{\Delta x}h$　4 $2+\Delta x$　5 增大
6 5　7 0.75

6.1.2 导数及其几何意义

情境与问题

从物理学中我们知道，如果物体运动的轨迹是一条曲线，那么该物体在每一个点处的瞬时速度的方向是与曲线相切的. 例如，若物体的运动轨迹如图 6-1-4 所示，而且物体是顺次经过 A，B 两点的，则物体在 A 点处的瞬时速度的方向与向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同.

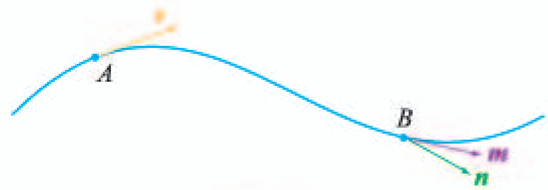


图 6-1-4

那么，到底什么是瞬时速度呢？怎样才能确定一般曲线在某一点的切线？例如，图 6-1-4 中物体在 B 处的速度方向与向量 $\boldsymbol{m}$ 还是 $\boldsymbol{n}$ 的方向相同？

学习完本小节的内容后，上述问题我们都能给出明确的答案.

1. 瞬时变化率与导数

尝试与发现

已知物体运动的位移 x m 与时间 t s 的关系为

$$x=h(t)=0.5t^2.$$

(1) 分别求出物体在 $[1, 2]$ 与 $[2, 3]$ 这两段时间内的平均速度；

(2) 思考物体在 $t=2$ 时的速度该如何定义，并指出这一速度的实际意义.

根据平均速度等于平均变化率可知，在 $[1, 2]$ 内，物体的平均速度为

$$\frac{0.5\times2^2-0.5\times1^2}{2-1}=1.5\ (\text{m/s});$$

在 $[2, 3]$ 这段时间内，物体的平均速度为

$$\frac{0.5\times3^2-0.5\times2^2}{3-2}=2.5\ (\text{m/s}).$$

不难想到，如果记 $t=2$ 时物体的速度为 v m/s，那么当 Δt 很小时，物体在以 2 和 $2+\Delta t$ 为端点的闭区间上的平均速度应该是 v 的近似值，即

$$v \approx \frac{0.5\times(2+\Delta t)^2-0.5\times 2^2}{\Delta t}= \boxed{1}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

而且当 Δt 无限接近于 0 时，近似会越来越精确，此时，可以看出 $2+0.5\Delta t$ 是无限接近于 2 的，如下表所示.

Δt	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
区间	[1.9, 2]	[1.99, 2]	[1.999, 2]	[2, 2.001]	[2, 2.01]	[2, 2.1]
平均速度 $2+0.5\Delta t$	1.95	1.995	1.999 5	2.000 5	2.005	2.05

因此，可以认为 $t=2$ 时，物体的速度

$$v=2\ (\text{m/s}).$$

这个速度通常称为瞬时速度（简称为速度）. 这一速度的实际意义是，在 $t=2$ 附近的任意一小段时间 Δt s 内，物体运动的位移的近似值为 $v\Delta t=2\Delta t$ m.

瞬时速度在日常生活中随处可见. 例如，汽车在行驶时，速度表盘上显示的就是瞬时速度，如图 6-1-5 所示，而且该瞬时速度也是按照类似上述方法得出的近似值.

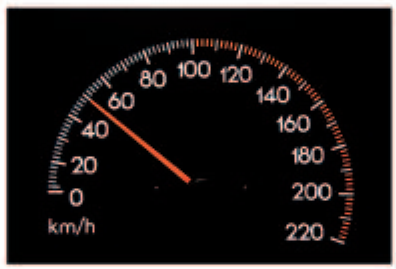


图 6-1-5

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近①有定义，自变量在 $x=x_0$ 处的改变量为 Δx，当 Δx 无限接近于 0 时，若平均变化率

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

无限接近于一个常数 k，那么称常数 k 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**瞬时变化率**. 此时，也称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并称 k 为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**，记作

$$f'(x_0)=k.$$

为了简单起见，"当 Δx 无限接近于 0 时，$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限接近于常数 k" 也常用符号"$\rightarrow$"（读作"趋向于"）表示为

$$当\ \Delta x\rightarrow 0\ 时，\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\rightarrow k,$$

或者写成 $\lim\limits_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=k$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad ①$$

由①式还可以看出，当 Δx 很小时，$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，从而

① "x_0 附近"是指存在区间 (a, b)，使得 $x_0\in(a, b)$，且 (a, b) 是 $f(x)$ 定义域的子集，下同.

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

由此能得到瞬时变化率 $f'(x_0)$ 的实际意义：当自变量在 $x=x_0$ 处的改变量 Δx 很小时，因变量对应的改变量的近似值为 $f'(x_0)\Delta x$.

前面的尝试与发现中，$t=2$ 时的瞬时速度实际上就是函数 $h(t)=0.5t^2$ 在 $t=2$ 处的导数 $h'(2)$，即

$$h'(2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(2+0.5\Delta t)=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}.$$

例 1 已知函数 $f(x)=-x^2$，求 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的导数 $f'(3)$.

解 当自变量在 $x=3$ 处的改变量为 Δx 时，平均变化率

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\frac{-(3+\Delta x)^2-(-3^2)}{\Delta x}=-6-\Delta x.$$

可以看出，当 Δx 无限接近于 0 时，$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 无限接近于 -6，因此

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-6-\Delta x)=-6.$$

例 2 在生产过程中，产品的总成本 C 一般来说是产量 Q 的函数，记作 $C=f(Q)$，称为总成本函数. 为了方便起见，经济学家一般假设 Q 能在某一区间内连续地取值，并将总成本函数在 Q_0 处的导数 $f'(Q_0)$ 称为在 Q_0 处的边际成本，用 $MC(Q_0)$ 表示，即 $MC(Q_0)=f'(Q_0)$.

已知某产品的总成本函数为 $C=Q^2$，求边际成本 $MC(300)$，并说明其实际意义.

解 设 $Q=300$ 时产量的改变量为 ΔQ，则

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\frac{(300+\Delta Q)^2-300^2}{\Delta Q}=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad}.$$

令 $\Delta Q\to 0$，可得 $MC(300)=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}$.

因此，产量为 300 时的边际成本为 600. 其实际意义是：此时多生产 1 件产品，成本要增加 600.

例 3 某正方形铁板在 0℃时，边长为 10 cm. 当温度在很小的范围内变化时，由于热胀冷缩，铁板的边长也会发生变化，而且已知温度为 t ℃时正方形的边长为 $10(1+at)$ cm，其中 a 为常数. 设此时正方形的面积为 S cm²，且 $S=f(t)$，求 $f'(0)$ 并解释其实际意义.

解 依题意可知

$$f(t)=[10(1+at)]^2=100(1+at)^2.$$

设 $t=0$ 时温度的改变量为 Δt，则

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta t}&=\frac{f(0+\Delta t)-f(0)}{\Delta t}\\&=\frac{100[1+a(0+\Delta t)]^2-100(1+a\times 0)^2}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$=200a+100a^2\Delta t.$$

令 $\Delta t\to 0$，可得 $f'(0)=200a$.

这表示在 0 ℃时，铁板面积对温度的瞬时变化率为 $200a$．实际意义是，在 0 ℃时，温度的改变量 Δt ℃很小时，铁板面积的改变量的近似值为 $200a\Delta t\ \text{cm}^2$.

2. 导数的几何意义

尝试与发现

已知函数 $f(x)=x^2+x$，设自变量在 $x=0$ 处的改变量为 Δx.

(1) 依照定义求出 $f'(0)$；

(2) 设 $M(0+\Delta x, f(0+\Delta x))$ 为函数图像上一点，探讨 Δx 无限接近于 0 时，直线 OM 具有什么样的性质.

显然，平均变化率

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{[(0+\Delta x)^2+(0+\Delta x)]-(0^2+0)}{\Delta x}=1+\Delta x.$$

可以看出，当 Δx 无限接近于 0 时，$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 无限接近于 1，因此

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)=1.$$

从几何上来看，如图 6-1-6 所示，点 A，B 对应的 Δx 都小于 0，而且 B 对应的 Δx 更加接近于 0，这也就是说，直线 OA，OB 的斜率都小于 1，且 OB 的斜率更接近于 1；类似地，点 C，D 对应的 Δx 都大于 0，而且 C 对应的 Δx 更加接近于 0，直线 OC，OD 的斜率都大于 1，且 OC 的斜率更接近于 1.

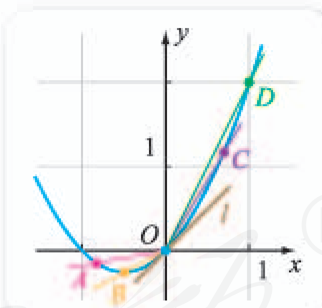


图 6-1-6

因此，若 $M(0+\Delta x, f(0+\Delta x))$ 为函数图像上一点，则 Δx 无限接近于 0 时，直线 OM 的斜率将无限接近于 1，直线 OM 将无限接近于过 O 点且斜率为 1 的直线 l. 这里的直线 l 就是曲线 $y=x^2+x$ 在 (0，0) 处的切线.

一般地，如图 6-1-7 所示，设 S 是平面上的一条曲线，P_0 是曲线 S 上的一个定点，P 是曲线 S 上 P_0 附近的点，则称直线 PP_0 为曲线 S 的割线，如果 P 无限接近于 P_0 时，割线 PP_0 无限接近于通过 P_0 的一条直线 l，则称直线 l 为曲线 S 在点 P_0 处的**切线**.

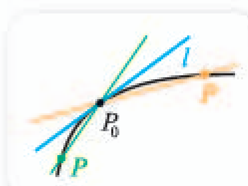


图 6-1-7

依照切线的定义可知，如果将函数 $y=f(x)$ 的图像看成曲线（称为曲线 $y=f(x)$，下同），而且曲线在点 $A(x_0,\ f(x_0))$ 处的切线为 l，则 Δx 很小时，$B(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$ 是 A 附近的一点，割线 AB 的斜率是

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

则当 Δx 无限接近于 0 时，割线的斜率将无限趋近于切线 l 的斜率.

这就是说，$f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,\ f(x_0))$ 处（也称在 $x=x_0$ 处）的切线的斜率，从而根据直线的点斜式方程可知，切线的方程是

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).}$$

例 4 已知函数 $f(x)=x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,\ f(1))$ 处切线的斜率与方程.

解 因为

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)\\&=\text{5 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_},\end{aligned}$$

因此所求切线的斜率为 2.

又因为 $f(1)=1^2=1$，所以切线的方程为

$$y-1=2(x-1),$$

即 $y=2x-1$.

例 5 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(2,\ f(2))$ 处切线的方程.

解 因为

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2+\Delta x}-\dfrac{1}{2}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{2(2+\Delta x)}\\&=\text{6 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_},\end{aligned}$$

又因为 $f(2)=\dfrac{1}{2}$，所以所求切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2),$$

即 $y=-\frac{1}{4}x+1$.

借助曲线的切线，我们还可以从几何上来理解瞬时变化率的实际意义，并可以利用某一点的导数来估计这一点附近的函数值，具体过程如下.

如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数为 $f'(x_0)$，且在 x_0 处自变量的改变量为 Δx，对应的函数值改变量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

则

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta y.$$

如图 6-1-8 所示，此时曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处的切线 l 的斜率为 $f'(x_0)$，因此

$$AC=\Delta x,\ CD=f'(x_0)\Delta x.$$

又因为 $BC=\Delta y$，可以看出，当 Δx 很小时，Δy 可用 $f'(x_0)\Delta x$ 来近似表示，即

$$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x,$$

因此

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

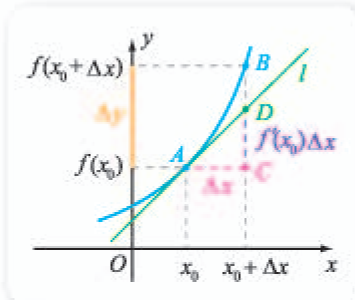


图 6-1-8

这就说明，在 $x=x_0$ 的附近，自变量的改变量 Δx 很小时，因变量改变量的近似值为 $f'(x_0)\Delta x$，这与前面所说的瞬时变化率的实际意义是相同的. 此时，也就能用 $f(x_0)$，$f'(x_0)$ 和 Δx 的值来得到 $f(x_0+\Delta x)$ 的近似值，而且 Δx 越小，近似效果越好. 这种求近似值的方法，本质上是用 $x=x_0$ 处的切线代替了 $x=x_0$ 附近的曲线 $y=f(x)$，因此也是使用了"以直代曲"的方法.

以例 5 中的函数为例，如果我们要计算 $f(2.03)=\frac{1}{2.03}$ 的近似值，可以借助 $f(2)=\frac{1}{2}=0.5$，$f'(2)=-\frac{1}{4}=-0.25$ 和 $\Delta x=0.03$ 来实现，即

$$\begin{aligned}f(2.03)&=f(2+0.03)\\&\approx f(2)+f'(2)\times0.03\\&=0.5+(-0.25)\times0.03\\&=0.4925.\end{aligned}$$

事实上，$\frac{1}{2.03}=0.492\,610\,837\cdots$，因此，近似效果是比较好的.

探索与研究

将这一节中切线的定义同解析几何中圆锥曲线的切线定义进行比较，说出两者的区别与联系.

练习A

1. 已知 Δx 无限接近于 0 时，下列各式都无限接近于某个常数，分别求出对应的常数.

   (1) $3-2\Delta x$；　　(2) $(\Delta x)^2$；　　(3) $(\Delta x)^2-2\Delta x+1$.

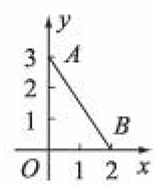
2. 已知函数 $f(x)=x^2-x$，求 $f'(0)$.

3. 求圆的面积在半径为 2 时关于半径的瞬时变化率，并指出这一瞬时变化率的实际意义.

4. 已知某产品的总成本函数为 $C=Q^2+2Q$，总成本函数在 Q_0 处导数 $f'(Q_0)$ 称为在 Q_0 处的边际成本，用 $MC(Q_0)$ 表示. 求边际成本 $MC(500)$ 并说明它的实际意义.

练习B

1. 如图，函数 $f(x)$ 的图像是线段 AB，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ 的值.



（第 1 题）

2. 已知函数 $y=ax^2+bx+c$，其中 a，b，c 为常数，求这个函数在 $x=1$ 和 $x=2$ 处的导数.

3. 求球的体积在半径为 3 时关于半径的瞬时变化率，并指出这一瞬时变化率的实际意义.

4. 求下列曲线在给定点的切线的方程.

   (1) $y=3x-5$，$(2,1)$；　　(2) $y=x^2+1$，$(1,2)$；　　(3) $y=\dfrac{1}{x}$，$(1,1)$.

5. 已知 $f(x)=x^2$，利用 $f(1)=1^2=1$，$f'(1)=2$，$\Delta x=0.03$，求 $f(1.03)$ 的近似值.

1 $2+0.5\Delta t$　　2 2　　3 $600+\Delta Q$　　4 600　　5 2　　6 $-\dfrac{1}{4}$

6.1.3 基本初等函数的导数

1. 常数函数与幂函数的导数

尝试与发现

已知函数 $f(x)=x^2$，任取一实数 x_0，判断 $f(x)$ 在 x_0 处是否可导. 如果可导，求出 $f'(x_0)$，并观察 $f'(x_0)$ 与 x_0 的关系.

设自变量在 $x=x_0$ 附近的改变量为 Δx，则函数在以 x_0，$x_0+\Delta x$ 为端点的闭区间上的平均变化率为

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

可以看出，当 Δx 无限接近于 0 时，平均变化率无限接近于 1 ______，因此 $f(x)$ 在 x_0 处可导，而且

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$

显然，$f'(x_0)$ 随 x_0 的变化而变化，而且 x_0 的值确定之后，$f'(x_0)$ 也就确定了. 例如，$x_0=2$ 时，$f'(2)=2\times 2=4$；$x_0=-3$ 时，$f'(-3)=2\times(-3)=-6$.

这就说明，$f'(x_0)$ 是 x_0 的函数.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域内的每一点 x 都**可导**，则称 $f(x)$ 可导. 此时，对定义域内的每一个值 x，都对应一个确定的导数 $f'(x)$. 于是，在 $f(x)$ 的定义域内，$f'(x)$ 是一个函数，这个函数通常称为函数 $y=f(x)$ 的**导函数**，记作 $f'(x)$（或 y'，y'_x），即

$$f'(x)=y'=y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

导函数通常也简称为**导数**. 本书后续内容中，除了特别声明指的是求某一点的导数之外，“求导数”均指的是“求导函数”. 当然，如果已知函数 $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$，那么可以方便地求得这个函数在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$：只要将 $x=x_0$ 代入导函数的表达式即可. 这也说明，如果函数 $f(x)$ 的导函数存在，那么曲线 $y=f(x)$ 在每一点处的切线都存在.

前面的尝试与发现说明，当 $f(x)=x^2$ 时，其导函数

$$f'(x)=2x.$$

为了求得 $f'(-1)$ 的值，只要将 $x=-1$ 代入导函数的表达式即可，即

$$f'(-1)=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_.$$

例 1 分别求出下列函数的导数.

(1) $f(x)=C$，其中 C 是常数；　　(2) $f(x)=x$；

(3) $f(x)=x^3$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；

(5) $f(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$.

解 (1) 根据定义可知

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

(2) 根据定义可知

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_.$$

(3) 根据定义可知

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]\\&=3x^2.\end{aligned}$$

(4) 根据定义可知

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}\\&=\boxed{4}\_\_\_\_\_\_.\end{aligned}$$

(5) 根据定义可知

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\&=\boxed{5}\_\_\_\_\_\_.\end{aligned}$$

上述结果表明，例 1 中的函数在它们的定义域或指定的范围内都是可导的，这也就说明对应的曲线在各点处都存在切线. 我们还能根据导函数来分

析不同点的切线有什么联系或不同.

例如，由 $f(x)=x^3$ 的导函数 $f'(x)=3x^2$ 是偶函数可知，在曲线 $y=x^3$ 上，自变量互为相反数的两点，它们的切线的斜率相等；又因为 $x>0$ 时，$f'(x)=3x^2$ 是增函数，这就说明曲线 $y=x^3$ 在 $x>0$ 的那一部分，自变量越大，切线的斜率越大，如图 6-1-9 所示.

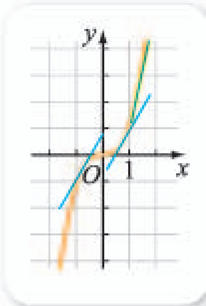


图 6-1-9

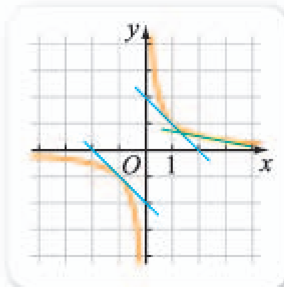


图 6-1-10

同样，由 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导函数为 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ 也能得到类似的结论．例如，曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x>0$ 的那一部分，自变量越大，切线的斜率越大，如图 6-1-10 所示.

为了简单起见，前面我们得到的有关导函数的结论通常简写为

$$C'=0,$$
$$x'=1,$$
$$(x^2)'=2x,$$
$$(x^3)'=3x^2,$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},$$
$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

尝试与发现

观察上述导函数的结论，归纳出 $f(x)=x^\alpha$（$\alpha\neq 0$）的导函数具有的形式（即写出 $(x^\alpha)'$ 的结果）.

因为 $\frac{1}{x}=x^{-1}$，$\frac{1}{x^2}=x^{-2}$，所以 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ 可以改写为

$$(x^{-1})'=-x^{-2};$$

类似地，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 可以改写为

$$(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

结合 $(x^2)'=2x$ 和 $(x^3)'=3x^2$，可以归纳出

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

事实上，可以证明上式对任意不为 0 的实数 α 都成立，这里从略. 在以后的学习中，我们可以直接应用这一结论.

例 2 已知 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$，求 $f'(4)$ 以及曲线 $y=f(x)$ 在点 $(4, f(4))$ 处的切线的方程.

解 因为

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

所以 $f'(4)=\frac{3}{2}\times 4^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\times 2=3$. 又因为 $f(4)=4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$，所以所求切线方程为

$$y-8=3(x-4),$$

即 $y=3x-4$.

2. 导数公式表

在科学研究和工程计算中，经常要使用一些初等函数的导数. 为了方便并减少重复的劳动，数学工作者制作出了常用函数的求导公式表，供大家使用. 下表列出了一些常用函数的求导公式，其中 C，α，a 均为常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$.

$$\boxed{\begin{aligned}&C'=0,\\&(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\\&(a^x)'=a^x\ln a,\\&(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\\&(\sin x)'=\cos x,\\&(\cos x)'=-\sin x.\end{aligned}}$$

例 3 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=\ln x$，求 $f'(x)$，$g'(x)$.

解 在 $(a^x)'=a^x\ln a$ 中令 $a=\mathrm{e}$，可得

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x\ln \mathrm{e}=\mathrm{e}^x,$$

因此 $f'(x)=\mathrm{e}^x$.

在 $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ 中令 $a=\mathrm{e}$，可得 $(\log_\mathrm{e} x)'=\frac{1}{x\ln \mathrm{e}}$，即

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},$$

因此 $g'(x)=\frac{1}{x}$.

例 3 的结论以后也可直接使用.

例 4 求曲线 $y=\sin x$ 在 $(0,\ \sin 0)$ 处的切线方程.

解 因为 $(\sin x)'=\cos x$，因此所求切线的斜率为 $\cos 0=1$，又因为 $\sin 0=0$，因此所求切线方程为

$$y-0=1(x-0),$$

即 $y=x$.

例 5 已知函数 $f(x)=x^2$，而 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，且 l 经过点 $(2,\ 3)$.

(1) 判断 $(2,\ 3)$ 是否是曲线 $y=f(x)$ 上的点；

(2) 求 l 的方程.

解 (1) 因为 $f(2)=2^2=4\neq 3$，所以点 $(2,\ 3)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 上的点.

(2) 设切点为 $(x_0,\ f(x_0))$.

因为

$$f'(x)=\boxed{6}\underline{\qquad\qquad},$$

所以切线的斜率为 $f'(x_0)=2x_0$，又因为 $f(x_0)=x_0^2$，所以直线 l 的方程为

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0),$$

将 $(2,\ 3)$ 代入上式并整理，可得

$$x_0^2-4x_0+3=0,$$

由此可解得 $x_0=1$ 或 $x_0=3$.

因此，切点为 $(1,\ 1)$ 或 $(3,\ 9)$，切线方程为

$$y-1=2(x-1) \text{ 或 } y-9=6(x-3).$$

即 l 的方程为 $y=2x-1$ 或 $y=6x-9$.

例 5 说明，在利用导数求曲线的切线时，关键是要确定切点.

探索与研究

(1) 利用单位圆理解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x}=1$，并在此基础上得出

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\cos x,$$

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=-\sin x.$$

(2) 根据(1)的结论，探索引入弧度制的必要性.

练习A

1. 试说明 $C'=0$ 和 $x'=1$ 的几何意义.
2. 写出下列幂函数的导函数.

   (1) $y=x^{15}$；　　(2) $y=x^{-3}$；

   (3) $y=x^{\frac{5}{4}}$；　　(4) $y=x^{\frac{2}{3}}$.
3. 写出函数的导数：$y=\cos x$，$y=\sin x$，$y=2^x$，$y=\ln x$，$y=e^x$.
4. 求函数 $f(x)=x^5$ 在 $x=2$ 处的导数.
5. 设某质点的位移 x m 与时间 t s 的关系是 $x=2t^2+4t$，求

   (1) 质点开始运动后 3 s 内的平均速度；

   (2) 质点在 2 s 到 3 s 内的平均速度；

   (3) 质点在第 3 s 时的瞬时速度.

练习B

1. 求下列函数在给定点处的导数.

   (1) $y=x^{\frac{1}{4}}$，$x=16$；　　(2) $y=\sin x$，$x=\dfrac{\pi}{2}$；

   (3) $y=\dfrac{1}{x}$，$x=\dfrac{1}{2}$.
2. 求余弦曲线 $y=\cos x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ 处的切线方程.
3. 已知 $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$，求 $f'(8)$ 以及曲线 $y=f(x)$ 在点 $(8, f(8))$ 处的切线的方程.
4. 已知函数 $f(x)=x^2$，而 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，且 l 经过点 $(3, 5)$.

   (1) 判断 $(3, 5)$ 是否是曲线 $y=f(x)$ 上的点；

   (2) 求 l 的方程.
5. 求函数 $y=ax+b$ 的导数，其中 a，b 为常数.

1 $2x_0$　　2 $2\times(-1)=-2$　　3 1　　4 $-\dfrac{1}{x^2}$　　5 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　　6 $2x$

6.1.4 求导法则及其应用

我们知道，由基本初等函数经过加、减、乘、除等运算可以构造出新的函数．例如，由 $f(x)=x^3$ 与 $g(x)=x$ 相加可以得到新函数

$$f(x)+g(x)=x^3+x.$$

那么，构造出的新函数的导函数与原有函数的导函数之间是否有联系呢？这就是这一小节我们要讨论的问题．

1. 函数和与差的求导法则

尝试与发现

设 $f(x)=x^2$，$g(x)=x$，且 $h(x)=f(x)+g(x)=x^2+x$，猜测 $h'(x)$ 与 $f'(x)$，$g'(x)$ 的关系，并尝试给出证明．

直觉上可以猜测得出

$$h'(x)=f'(x)+g'(x)=(x^2)'+x'=2x+1.$$

一般地，如果 $f(x)$，$g(x)$ 都可导，则

$$\boxed{[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x).}$$

即**两个函数之和的导数，等于这两个函数的导数之和．**

事实上，设 $h(x)=f(x)+g(x)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\Delta h}{\Delta x}&=\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\\&=\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}\\&=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)+[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}\\&=\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x},$$

即 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$．

类似地，如果 $f(x)$，$g(x)$ 都可导，则

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x).$$

即**两个函数之差的导数，等于这两个函数的导数之差.**

上述法则可以推广到任意有限个函数，即

$$[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]'=f'_1(x)\pm f'_2(x)\pm\cdots\pm f'_n(x).$$

例如，

$$(x^3+x^2)'=(x^3)'+(x^2)'=3x^2+2x,$$

$$(\sin x-\cos x+2)'=(\sin x)'-(\cos x)'+2'=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_.$$

2. 函数积的求导法则

尝试与发现

如果 $f(x)$，$g(x)$ 都可导，你认为 $f(x)g(x)$ 的导数与 $f'(x)$，$g'(x)$ 有什么关系？用实例验证你的猜想.

需要注意的是，一般来说，

$$[f(x)g(x)]'\neq f'(x)g'(x).$$

例如，当 $f(x)=x$，$g(x)=x^2$ 时，$f(x)g(x)=x^3$，因此

$$[f(x)g(x)]'=(x^3)'=3x^2,\ f'(x)=1,\ g'(x)=2x,$$

即 $[f(x)g(x)]'\neq f'(x)g'(x)$.

事实上，可以证明，当 $f(x)$，$g(x)$ 都可导时，有

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

即**两个函数之积的导数，等于第一个函数的导数乘以第二个函数，加上第一个函数乘以第二个函数的导数.**

例如，

$$(x^2\cdot x)'=(x^2)'x+x^2\cdot x'=2x\cdot x+x^2\times 1=3x^2,$$

$$(\sin x\cos x)'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x,$$

$$(x^2e^x)'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_.$$

特别地，当 $g(x)$ 是常数函数，即 $g(x)=C$ 时，因为 $C'=0$，所以由上述法则立即可以得出

$$[Cf(x)]'=Cf'(x).$$

即**常数与函数之积的导数，等于常数乘以函数的导数.**

例如，

$$(3x^2)'=3(x^2)'=3\times 2x=6x,$$

$$(5\cos x)'=5(\cos x)'=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_.$$

3. 函数商的求导法则

尝试与发现

如果 $f(x)$，$g(x)$ 都可导，且 $g(x)\neq 0$，你认为 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的导数与 $f'(x)$，$g'(x)$ 有什么关系？用实例验证你的猜想.

同样要注意的是，一般来说，

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'\neq\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例如，当 $f(x)=x^2$，$g(x)=x$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2}{x}=x$，因此

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=x'=1,\ \frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x}{1}=2x,$$

即 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'\neq\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

事实上，可以证明，当 $f(x)$，$g(x)$ 都可导，且 $g(x)\neq 0$ 时，有

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

其中 $g^2(x)$ 表示的是 $[g(x)]^2$. 特别地，当 $f(x)=1$ 时，因为 $1'=0$，所以

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

例如，

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{(e^x)'x-e^x x'}{x^2}=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{0-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}.$$

例 1 求下列函数的导数.

(1) $f(x)=2x^3+3x-1$；　　(2) $y=x\sin x$.

解 (1) $f'(x)=(2x^3)'+(3x)'-1'$

$=2(x^3)'+3x'$

$=2\times 3x^2+3\times 1$

$=6x^2+3$.

(2) $y'=x'\sin x+x(\sin x)'=$ 4 ______.

例 2 求曲线 $y=\tan x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\ \tan\frac{\pi}{4}\right)$ 处的切线方程.

解 因为

$$\begin{aligned}(\tan x)'&=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'\\&=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},\end{aligned}$$

所以所求切线的斜率为 $\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=$ 5 ________，又因为 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以切点为 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$，从而可知所求切线方程为

$$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

即 $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$.

4. 简单复合函数的求导法则

假设某商品的利润 y 是销售量 u 的函数，销售量 u 是销售价格 x 的函数，且

$$y=f(u)=60u-u^2,\ u=g(x)=60-3x,$$

那么，不难看出，利润 y 是销售价格 x 的函数，且有

$$y=60u-u^2=60(60-3x)-(60-3x)^2=180x-9x^2,$$

上式也可这样得到

$$f(g(x))=60g(x)-[g(x)]^2=180x-9x^2.$$

一般地，已知函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$，给定 x 的任意一个值，就能确定 u 的值. 如果此时还能确定 y 的值，则 y 可以看成 x 的函数，此时称 $f(g(x))$ 有意义，且称

$$y=h(x)=f(g(x))$$

为函数 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的复合函数，其中 u 称为中间变量.

尝试与发现

已知 $h(x)=\sin 2x$，$f(u)=\sin u$，$g(x)=2x$.

(1) $h(x)$ 可以由 $f(u)$ 与 $g(x)$ 得到吗?

(2) 分别求出 $h'(x)$，$f'(u)$，$g'(x)$，并总结它们之间的关系.

如果在 $f(u)=\sin u$ 中，令 $u=g(x)=2x$，则有

$$f(g(x))=\sin(g(x))=\sin 2x=h(x).$$

另一方面，因为 $h(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$，所以

$$\begin{aligned}h'(x)&=(2\sin x\cos x)'\\&=2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'\\&=2\cos^2 x-2\sin^2 x\\&=2\cos 2x.\end{aligned}$$

又因为 $f'(u)=\cos u$，$g'(x)=2$，因此

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

一般地，如果函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数为

$$y=h(x)=f(g(x)),$$

则可以证明，复合函数的导数 $h'(x)$ 与 $f'(u)$，$g'(x)$ 之间的关系为

$$\boxed{h'(x)=[f(g(x))]'=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x).}$$

这一结论也可以表示为

$$\boxed{y'_x=y'_u u'_x.}$$

事实上，设 x 的改变量为 Δx，对应的 u，y 的改变量分别为 Δu，Δy，则形式上我们有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$，从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

即 $y'_x=y'_u u'_x$.

我们平常接触到的函数，很多都可以看成复合函数，因此也就能借助上述复合函数的求导法则去求导数．例如，$h(x)=(3x-1)^2$ 可以看成 $f(u)=u^2$ 与 $u=g(x)=3x-1$ 的复合函数，又因为

$$f'(u)=2u,\quad g'(x)=3,$$

所以

$$h'(x)=f'(u)g'(x)=2u\times 3=6u=6(3x-1)=18x-6.$$

例 3 求下列函数的导数．

(1) $h(x)=e^{5x-1}$；　　(2) $f(x)=\ln(2x+1)$；

(3) $y=\sqrt{2x-1}$；　　(4) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

解 (1) $h(x)=e^{5x-1}$ 可以看成 $f(u)=e^u$ 与 $u=g(x)=5x-1$ 的复合函数，因此

$$h'(x)=f'(u)g'(x)=(e^u)'(5x-1)'=e^u\times 5=5e^{5x-1}.$$

(2) $f(x)=\ln(2x+1)$ 可以看成 $h(u)=\ln u$ 与 $u=g(x)=2x+1$ 的复合函数，因此

$$h'(x)=f'(u)g'(x)=(\ln u)'(2x+1)'=\frac{1}{u}\times 2=\frac{2}{2x+1}.$$

(3) $y=\sqrt{2x-1}$ 可以看成函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=2x-1$ 的复合函数，因此

$$y'_x=y'_u u'_x=(\sqrt{u})'(2x-1)'=\underline{\boxed{6}\qquad\qquad\qquad}.$$

(4) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 可以看成函数 $y=\sin u$ 与 $u=2x+\frac{\pi}{3}$ 的复合函数，因此

$$y'_x=y'_u u'_x=(\sin u)'\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'=\underline{\boxed{7}\qquad\qquad\qquad}.$$

由例 3 可以看出，求复合函数的导数，关键是找出合适的中间变量，本质上也就是将函数的某些部分看成一个整体. 因此，当大家对复合函数的求导规则熟悉之后，也可不写出中间变量. 例如，求 $y=(2x-1)^5$ 的导数时，可以将 $2x-1$ 当成一个整体，从而有

$$y'=5(2x-1)^{5-1}\times(2x-1)'=5(2x-1)^4\times 2=10(2x-1)^4.$$

5. 用信息技术求函数的导数

利用计算机软件可以方便地求出函数的导数. 例如，在 GeoGebra 中，输入 “h(x)=e^(5x−1)”，然后再输入 “h′(x)”，GeoGebra 就能显示出函数 $h(x)=e^{5x-1}$ 以及它的导函数的表达式，并且给出它们的图像，如图 6-1-11 所示.

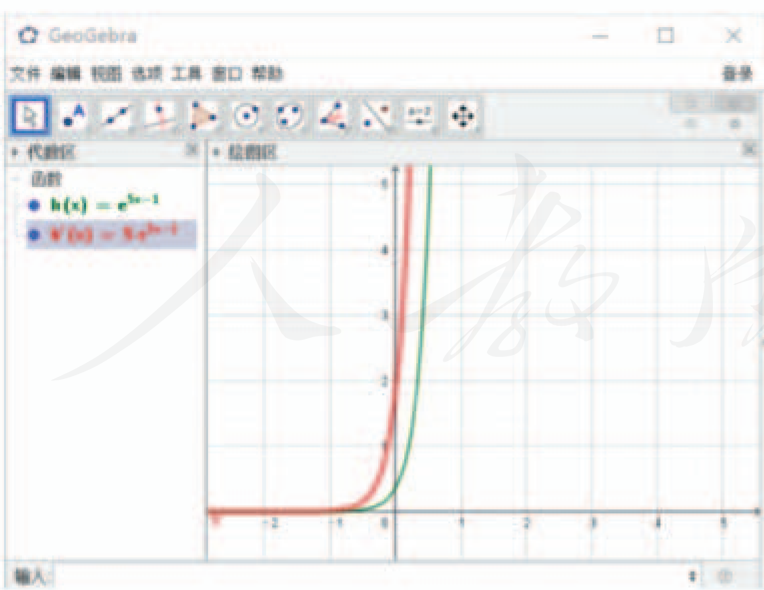


图 6-1-11

拓展阅读

利用导数由圆的周长得到圆的面积

我们知道，圆周长 l 是圆的半径 r 的函数，即

$$l=2\pi r.$$

你知道吗？利用前面我们学习过的导数知识，可以由圆的周长计算公式得到圆的面积计算公式！

如图 1 所示，设半径为 r 时圆的面积为 S，且半径增加 Δr 时，圆的面积增加 ΔS.

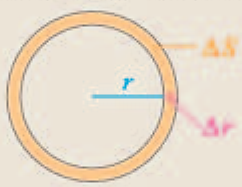


图 1

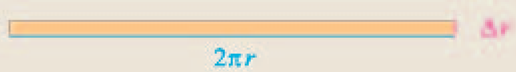


图 2

半径为 r 时圆的周长为 $2\pi r$，而且当 Δr 很小时，ΔS 近似地等于如图 2 所示的矩形的面积，因此

$$\Delta S\approx 2\pi r\Delta r,$$

从而可知

$$\frac{\Delta S}{\Delta r}\approx 2\pi r,$$

令 $\Delta r\to 0$，并注意到 Δr 越接近于 0，近似程度越高，由此可知

$$S'=2\pi r.$$

又由于 $(\pi r^2)'=2\pi r$，可知

$$(S-\pi r^2)'=0,$$

然后根据只有常数的导数才能恒为 0，以及半径为 0 时面积也应该为 0 可得

$$S=\pi r^2.$$

利用类似的方法可以解决很多能求出平均变化率的函数问题，例如由球的表面积计算公式得到球的体积计算公式等，请读者自行尝试.

练习A

1. 求下列函数的导数.

   (1) $y=e^x+\sin x$；　(2) $y=x+x^{-1}$；　(3) $y=2^x-\ln x$.

2. 求下列函数的导数.

   (1) $y=x^2\sin x$；　(2) $y=3^x\ln x$；　(3) $y=2^xe^x$.

3. 求下列函数的导数.

   (1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；　(2) $y=\dfrac{e^x}{x^2}$；　(3) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

4. 求下列函数的导数.

   (1) $y=\ln(3x)$；　(2) $y=e^{-x}$；　(3) $y=3^{2x}$.

5. 求下列函数的导数.

   (1) $y=(3x+5)^7$；　(2) $y=e^{5x-7}$；　(3) $y=\ln(-x+4)$；

   (4) $y=3^{2x-1}$；　(5) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$；　(6) $y=(3x-5)^{\frac{3}{4}}$.

练习B

1. 求下列函数的导数.

   (1) $y=x^7+x^6-3x^5$；　(2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$；　(3) $y=\cos 3x\sin 2x$；

   (4) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$；　(5) $y=(1+\cos x)\sin x$.

2. 求下列函数的导数.

   (1) $y=\sqrt{2x-5}$；　(2) $y=\dfrac{1}{(1-3x)^4}$；　(3) $y=(x^2+1)\sqrt{x}$.

3. 求函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{cx^2+d}$ 的导数，其中 a，b，c，d 都是常数.

4. 求下列函数在指定点的导数.

   (1) $y=x\sin x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$；　(2) $y=\dfrac{x}{e^x}$，$x=1$.

5. 求正弦型曲线 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$ 处的切线方程.

6. 求曲线 $y=5\sqrt{x}$ 的与直线 $y=2x-4$ 平行的切线方程.

1 $\cos x+\sin x$　2 $2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$　3 $-5\sin x$　4 $\sin x+x\cos x$

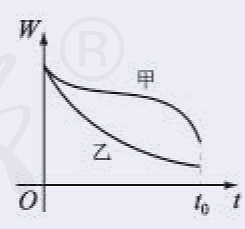
5 2　6 $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\times 2=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2x-1}$　7 $2\cos u=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

习题6-1A

1. 为了响应国家节能减排的号召，甲、乙两个工厂进行了污水排放治理，已知某月内两厂污水的排放量 W 与时间 t 的关系如图所示.

   (1) 该月内哪个厂的污水排放量减少得更多？

   (2) 在接近 t_0 时，哪个厂的污水排放量减少得更快？



（第 1 题）

2. 设质点 M 沿 x 轴作直线运动，在时刻 t s 时，质点所在的位置为 x m，且 $x=t^2-5t+6$.

   (1) 求 1 s 到 3 s 这段时间内质点 M 的平均速度；

   (2) 求出质点 M 在什么时刻的瞬时速度等于(1)中求出的平均速度.

3. 求下列函数的导数.

   (1) $y=x+x^3+x^5$；　(2) $y=x^2+2\cos x$；　(3) $y=2(5x-4)^2$.

4. 求曲线 $y=2x-x^3$ 在点$(-1,\ -1)$处的切线的倾斜角.

5. 分别求出曲线 $y=\sqrt{x}$ 在$(1,\ 1)$及$(2,\ \sqrt{2})$处的切线方程.

6. 如果某导体在 t s时的电荷量为 q C（库伦），且 $q=2t^2+3t$，则该导体在时刻 t 的电流强度为 q'_t A(安). 求第 5 s 与第 7 s 时的电流强度，并求出什么时候电流强度达到 43 A.

习题6-1B

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=(2+3x)(3-5x+x^2)$；　　(2) $y=(2x-1)^2(2-3x)^3$；

(3) $y=(3x+2)\sin 5x$；　　(4) $y=e^{2x}\cos 3x$.

2. 求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 内使 $f'(x)=0$ 的 x 的值，并说明曲线 $y=f(x)$ 在这些点的切线有什么特征.

3. 已知曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}-3\ln x+1$ 的一条切线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，求切点的横坐标.

4. 求 $f(x)=(x^2-3x+1)e^x$ 的导数，并求出曲线 $y=f(x)$ 的平行于 x 轴的切线的切点坐标.

5. 设 l 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条切线，证明 l 与坐标轴所围成的三角形的面积与切点无关.

6. 求满足下列条件的直线 l 的方程.

(1) 过原点且与曲线 $y=\ln x$ 相切；

(2) 斜率为 e 且与曲线 $y=e^x$ 相切.

7. 设曲线 $y=2x^3$ 在 $(a, 2a^3)$ 处的切线与直线 $x=a$，$y=0$ 所围成的三角形面积为 $\dfrac{1}{3}$，求 a 的值.

8. 已知函数 $f(x)=4x^2$，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 l，直线 m 平行于直线 l 且过点 $(0, -6)$.

(1) 求出直线 l 与 m 的方程；

(2) 指出曲线 $y=f(x)$ 上哪个点到直线 m 的距离最短，并求出最短距离.

9. 已知 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f(9.05)$ 的近似值.

习题6-1C

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^2(x+1)(x-2)$；　　(2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，而且 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$，求 $f'(2)$.

3. 已知抛物线 C_1：$y=x^2+2x$ 和 C_2：$y=-x^2+a$，如果直线 l 同时是 C_1 和 C_2 的切线，称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线，则 a 取什么值时，C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线？写出此公切线的方程.

6.2 利用导数研究函数的性质

导数是函数的瞬时变化率，因此导数必然与函数的增减性以及增减的快慢等有关，本节我们用导数来研究函数的性质，体会导数在研究函数性质中的作用.

6.2.1 导数与函数的单调性

尝试与发现

竖直上抛的一个小物体，其高度 h m 与时间 t s 之间的关系是

$$h=10t-5t^2\ (0<t<2).$$

求出这个函数的导函数 h'，作出这个函数的图像与导函数的图像，观察函数 $h=10t-5t^2$ 的单调性与导函数之间的关系，并总结出一般结论.

因为

$h'=10t'-5(t^2)'=$ 1 ________ $(0<t<2)$，

所以可以作出函数及导函数的图像，如图 6-2-1 所示. 其中，$h=10t-5t^2$ 是一个二次函数，而且这个函数的对称轴为 $t=1$.

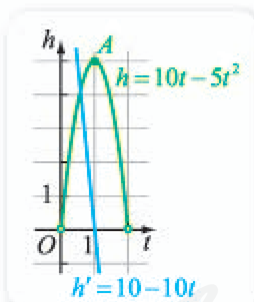


图 6-2-1

从图 6-2-1 可以看出，在区间 $(0,1)$ 上，

$$h'=10-10t>0,$$

这说明曲线 $h=10t-5t^2$ $(0<t<2)$ 在 $t=1$ 左边部分的每一点处的切线斜率都大于 0，曲线呈上升状态，因此函数在区间 $(0,1)$ 上是增函数；类似地，在区间 $(1,2)$ 上，

$$h'=10-10t<0,$$

这说明曲线 $h=10t-5t^2$ $(0<t<2)$ 在 $t=1$ 右边部分的每一点处的切线斜率都小于 0，曲线呈下降状态，因此函数在区间 $(1,2)$ 上是减函数.

事实上，函数 $h=10t-5t^2$ $(0<t<2)$ 在 $(0,1]$ 上是增函数，在 $[1,2)$ 上是减函数.

一般地，

(1) 如果在区间 (a, b) 内，$f'(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 对应的那一段上每一点处切线的斜率都大于 0，曲线呈上升状态，因此 $f(x)$ 在 (a, b) 上是增函数，如图 6-2-2(1) 所示；

(2) 如果在区间 (a, b) 内，$f'(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 对应的那一段上每一点处切线的斜率都小于 0，曲线呈下降状态，因此 $f(x)$ 在 (a, b) 上是减函数，如图 6-2-2(2) 所示.

想一想

如果将条件 $f'(x)>0$ 改成 $f'(x)\geqslant 0$，结论还成立吗？为什么？

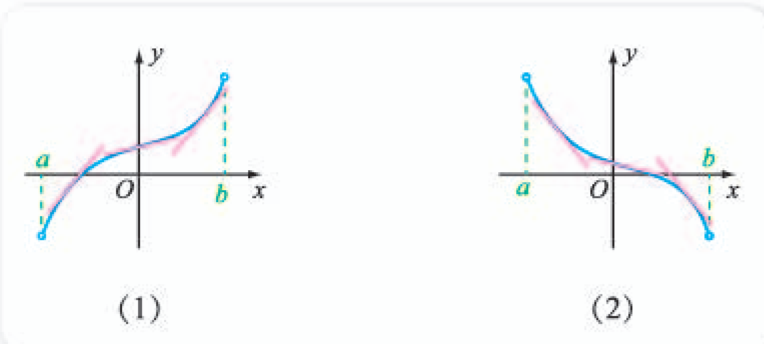


图 6-2-2

利用上述性质，我们可以求出函数的单调区间.

例 1 求函数 $y=x^2-2x+4$ 的单调区间.

解 据题意有

$$y'=2x-2.$$

令 $y'>0$，可得 $2x-2>0$，解得 $x>1$. 因此，函数在区间 $(1, +\infty)$ 上是增函数.

令 $y'<0$，可得 $2x-2<0$，解得 2 ________. 因此，函数在区间 3 ________ 上是减函数.

更进一步，可知函数 $y=x^2-2x+4$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 1]$，单调递增区间为 $[1, +\infty)$.

例 2 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 的单调区间.

解 据题意有

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3).$$

令 $f'(x)>0$，可得 $3(x+1)(x-3)>0$，解不等式可得

$$x<-1 \text{ 或 } x>3;$$

令 $f'(x)<0$，可得 $3(x+1)(x-3)<0$，解不等式可得

4 ________.

因此，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1]$ 和 $[3, +\infty)$，单调递减区间为 $[-1, 3]$.

例 3 求函数 $f(x)=xe^x$ 的单调区间.

解 据题意有

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x.$$

令 $f'(x)>0$，可得 $(x+1)e^x>0$，因为 $e^x>0$ 恒成立，所以 $x+1>0$，因此

$$x>-1;$$

令 $f'(x)<0$，可得 $(x+1)e^x<0$，解不等式可得

5__________.

因此，可知函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-1, +\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty, -1]$.

例 4 生物学上的种群研究表明，很多物种的数量 x 与时间 t 的关系都存在下述规律：一开始，由于物种数量较少，物种数量的增加比较慢；随着物种数量的增加，又因为有大量的资源可以利用，物种数量的增加会越来越快；到了一定程度之后，因为资源有限，再加上物种内部的竞争开始变得激烈，物种数量的增加将减缓. 假设 x 是时间 t 的函数，而且认为它们都能在某一区间内任意取值，则如图 6-2-3 所示的（1）（2）中，哪个能近似地表示上述规律？

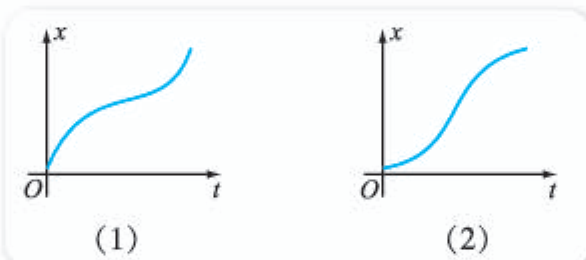


图 6-2-3

解 物种数量的增加比较慢，表示曲线在对应点的切线斜率比较小；增加越来越快，表示曲线在对应点的切线斜率越来越大. 因此，图 6-2-3（2）能近似地表示上述规律.

例 5 讨论函数 $f(x)=a\ln x+x$ 的单调性，其中 a 为实常数.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

因为 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+1$，令 $f'(x)>0$，可得 $\dfrac{a}{x}+1>0$，即 $x>-a$. 因此

当 $-a\leqslant 0$，即 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

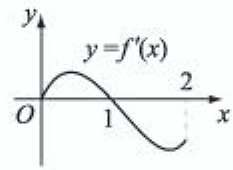
当 $-a>0$，即 $a<0$ 时，$f'(x)>0$ 的解为 $x>-a$，此时 $f(x)$ 在 $(0, -a]$ 上单调递减，在 $[-a, +\infty)$ 上单调递增.

探索与研究

结合函数 $f(x)=x^3$ 研究：如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增，那么在区间 (a, b) 内必有 $f'(x)>0$ 吗？

练习A

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$，且 $y=f'(x)$ 的图像如图所示，写出 $f(x)$ 的单调区间.



（第 1 题）

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=2x-1$，求 $f(x)$ 的单调区间.
3. 求下列函数的单调区间.

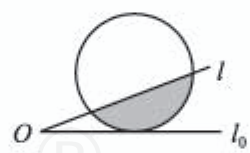
(1) $y=x^2-5x+6$；　　(2) $y=x^3-8x^2+13x-6$.

练习B

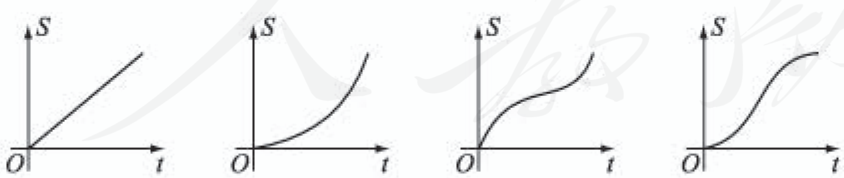
1. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f'(x)>0$ 在区间 $(-1, 2)$ 恒成立，判断 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的大小.
2. 求下列函数的单调区间.

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$；　　(3) $y=\dfrac{1}{x+1}$.

3. 求函数 $f(x)=\left(x^2-\dfrac{3}{2}x\right)e^x$ 的单调递增区间.
4. 求函数 $y=x\ln x$ 的单调递减区间.
5. 利用导数讨论函数 $y=\sin x$ 的单调性.
6. 如图，设有圆和定点 O，当 l 从 l_0 开始在平面内绕 O 点匀速旋转时（角速度不变且旋转角度不超过 $90°$），直线 l 扫过的圆内的面积 S 是时间 t 的函数，这个函数的图像只可能是（　　）.



（第 6 题）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

7. 分别讨论下列函数 $f(x)$ 的单调性，其中 a 为非零实常数.

(1) $f(x)=\ln x+ax$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+a\ln x-(a+1)x$.

1 $10-10t$　　2 $x<1$　　3 $(-\infty, 1)$　　4 $-1<x<3$　　5 $x<-1$

6.2.2 导数与函数的极值、最值

1. 函数的导数与极值

情境与问题

如图 6-2-4 所示，在群山之中，各个山峰的顶端虽然不一定是群山的最高处，但它却是其附近的最高点. 同样，各个谷底虽然不一定是群山之中的最低处，但它却是其附近的最低点.

观察图 6-2-5 中函数 $y=f(x)$ 的图像，指出其中是否有类似山峰、山谷的地方，如果有，尝试用数学语言描述.

图 6-2-4

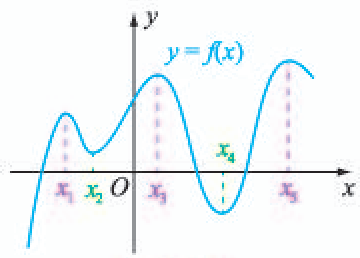


图 6-2-5

从图 6-2-5 中可以看出，函数 $y=f(x)$ 在 x_1，x_3，x_5 这三点对应的函数值，都是其附近的函数值中的最大者；而在 x_2，x_4 这两点对应的函数值，都是其附近的函数值中的最小者.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，设 $x_0\in D$，如果对于 x_0 附近的任意不同于 x_0 的 x①，都有

(1) $f(x)<f(x_0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个**极大值点**，且 $f(x)$ 在 x_0 处取**极大值**；

(2) $f(x)>f(x_0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个**极小值点**，且 $f(x)$ 在 x_0 处取**极小值**.

极大值点与极小值点都称为**极值点**，极大值与极小值都称为**极值**. 显然，极大值点在其附近函数值最大，极小值点在其附近函数值最小.

想一想

极大值一定比极小值大吗？

① "x_0 附近的任意不同于 x_0 的 x"，是指存在区间 $(a, b)\subseteq D$，使得 $x_0\in(a, b)$，$x\in(a, b)$ 且 $x\neq x_0$，下同.

下面我们来探讨可导函数的极值与导数之间的关系.

尝试与发现

从图 6-2-6 所示函数 $y=f(x)$ 的图像中可以看出，A，B，C，D 对应的横坐标 x_1，x_2，x_3，x_4 都是函数的极值点. 已知曲线 $y=f(x)$ 在 A，B，C，D 处都存在切线.

(1) A，B，C，D 处的切线具有什么特征? 这说明 $f(x)$ 在 x_1，x_2，x_3，x_4 处的导数具有什么特点?

(2) 曲线 $y=f(x)$ 在 A，B，C，D 附近的点处的切线具有什么特征?

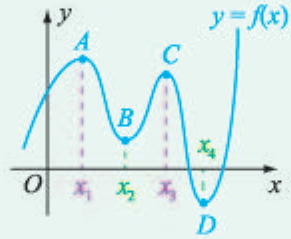


图 6-2-6

可以看出，曲线 $y=f(x)$ 在 A，B，C，D 处的切线都是水平的，这等价于

$$f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=f'(x_4)=0.$$

在 A 点与 C 点左侧的附近，曲线的切线的斜率都大于 0；在右侧的附近，曲线的切线的斜率都小于 0. 在 B 点与 D 点的附近则正好相反. 因此，$f'(x)$ 在 x_1，x_2，x_3，x_4 两侧附近的符号不一样.

一般地，如果 x_0 是 $y=f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必有

$$\boxed{f'(x_0)=0.}$$

例 1 已知 $f(x)=x^3$，求所有使得 $f'(x)=0$ 的 x，并判断所求得的数是否为函数的极值点.

解 因为

$$f'(x)=3x^2,$$

令 $f'(x)=0$，可知 $3x^2=0$，由此可解得 $x=0$.

但 0 不是 $f(x)=x^3$ 的极值点，因为 $f(0)=0$，而 0 左侧的点的函数值总是小于 0，且 0 右侧的点的函数值总是大于 0. 这也可以从图 6-2-7 中函数 $f(x)=x^3$ 的图像看出来.

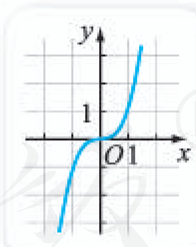


图 6-2-7

例 1 说明，若 $f'(x_0)$ 存在，则 “$f'(x_0)=0$” 是 “x_0 是 $y=f(x)$ 的极值点” 的 1 ________ 条件.

一般地，设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=0$.

(1) 如果对于 x_0 左侧附近的任意 x，都有 $f'(x)>0$，对于 x_0 右侧附近的任意 x，都有 $f'(x)<0$，那么此时 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

(2) 如果对于 x_0 左侧附近的任意 x，都有 $f'(x)<0$，对于 x_0 右侧附近的任意 x，都有 $f'(x)>0$，那么此时 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.

(3) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧附近与右侧附近均为正号（或均为负号），则 x_0 一定不是 $y=f(x)$ 的极值点.

事实上，这些结论成立的依据都是“$f'(x)>0$ 时，$f(x)$ 在 x 附近递增”以及“$f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 在 x 附近递减”.

例 2 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$，求函数的极值，并作出函数图像的示意图.

解 由题意可得

$$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2).$$

解方程 $f'(x)=0$，可得 $x=-2$ 或 2 ________.

解不等式 $f'(x)>0$，可得 $x<-2$ 或 3 ________，此时 $f(x)$ 递增.

解不等式 $f'(x)<0$，可得 $-2<x<2$，此时 $f(x)$ 4 ________.

因此，$f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上递增，在 $(-2, 2)$ 上递减，在 $(2, +\infty)$ 上递增，而且 $f'(-2)=f'(2)=0$.

从而可知 $x=-2$ 是函数的极大值点，极大值为

$$f(-2)=\frac{1}{3}\times(-2)^3-4\times(-2)+4=9\frac{1}{3};$$

$x=2$ 是函数的极小值点，极小值为

$$f(2)=\frac{1}{3}\times2^3-4\times2+4=-1\frac{1}{3}.$$

函数图像的示意图如图 6-2-8 所示.

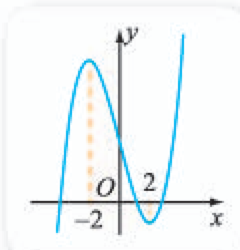


图 6-2-8

为了方便起见，也可以先将例 2 中的结论整理成如下表格的形式（↗ 表示递增，↘ 表示递减），然后再作示意图.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 $9\frac{1}{3}$	↘	极小值 $-1\frac{1}{3}$	↗

2. 函数最值的求法

尝试与发现

观察图 6-2-9 所示函数 $y=f(x)$，$x\in[-3, 2]$ 的图像，回忆函数最值的定义，回答下列问题.

(1) 图中所示函数的最值点与最值分别是多少？

(2) 图中所示函数的极值点与极值分别是多少？

(3) 一般地，函数的最值与函数的极值有什么关系？怎样求可导函数的最值？

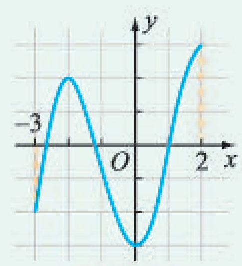


图 6-2-9

我们知道，函数的最大（小）值是函数定义域内最大（小）的函数值．因此，图 6-2-9 所示函数 $y=f(x)$，$x\in[-3,\ 2]$ 的最大值点为 2，最大值为 5 ________；最小值点为 0，最小值为 6 ________．函数的极大值点为 -2，极大值为 2；极小值点为 0，极小值为 -3．

由此可以看出，最值与极值是有区别的，最值点与极值点也有区别．

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在定义域内的每一点都可导，且函数存在最值，则函数的最值点一定是某个极值点；如果函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[a,\ b]$ 且存在最值，函数 $y=f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内可导，那么函数的最值点要么是区间端点 a 或 b，要么是极值点．

根据这一结论，有时可以在求出函数极值的基础上，求出函数的最值．

例 3 已知 $f(x)=x^2e^x$，$x\leqslant 1$，求 $f(x)$ 的极值点以及极值、最值点以及最值．

解 当 $x<1$ 时，

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x.$$

解方程 $f'(x)=0$，可得 $x=-2$ 或 $x=0$．

解不等式 $f'(x)>0$，可得 $x<-2$ 或 $0<x<1$，此时 $f(x)$ 递增．

解不等式 $f'(x)<0$，可得 $-2<x<0$，此时 $f(x)$ 递减．

因此，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ -2)$ 上递增，在 $(-2,\ 0)$ 上递减，在 $(0,\ 1)$ 上递增．由于 $f'(-2)=f'(0)=0$，可知 $x=-2$ 是函数的极大值点，极大值为

$$f(-2)=4e^{-2}=\frac{4}{e^2};$$

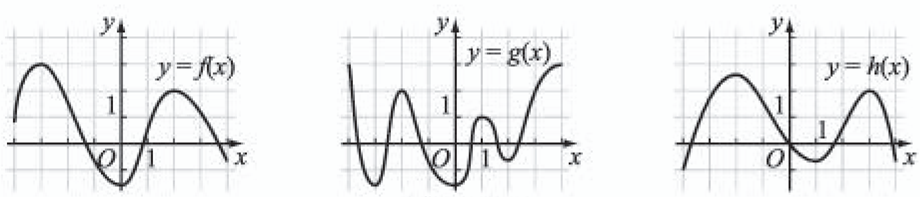
$x=0$ 是函数的极小值点，极小值为

$$f(0)=0.$$

又因为 $f(1)=e>\frac{4}{e^2}$，所以函数的最大值点为 1，最大值为 e；$x^2e^x\geqslant 0$ 对任意实数都是成立的，因此函数的最小值点为 0，而且最小值是 0．

练习A

1. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 的定义域均为 $[-4,\ 4]$，且它们的图像如下图所示，分别指出这 3 个函数的极值点和最值点．



（第 1 题）

2 判断函数 $y=\lg x$ 是否有极值，并说明理由.

3 已知函数 $f(x)=\dfrac{3x^2+ax}{e^x}$ 在 $x=0$ 取得极值，求 a 的值.

4 求下列函数的极值.

(1) $y=x^2-7x+6$；　　(2) $y=3x^4-4x^3$；

(3) $y=x+2\sin x$，$x\in(0, 2\pi)$.

5 求函数 $y=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

6 求函数 $f(x)=2x^3-15x^2+36x-24$ 在区间 $\left[1, \dfrac{7}{2}\right]$ 上的最大值与最小值.

练习B

1 判断下列命题的真假.

(1) 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, c]$，且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增，在 $[b, c]$ 上递减，则函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(b)$.

(2) 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 (a, c)，且 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上递减，在 $[b, c)$ 上递增，则函数 $f(x)$ 无最小值.

2 求函数 $f(x)=(x-1)[2x^2-(3a+4)x+9a-4]$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值，其中 $0<a<2$.

3 设函数 $f(x)=ax^3+3x+2$ 有极值，求 a 的取值范围，并求出函数的极值点.

4 求下列函数的值域.

(1) $f(x)=\ln x-x$；　　(2) $f(x)=e^x-x-1$.

5 已知 $f(x)=(x-1)^2e^x$，求 $f(x)$ 的极值点以及极值、最值点以及最值.

6 已知 $f(x)=x^2-3x+\ln x$，求 $f(x)$ 的极值点以及极值、最值点以及最值.

7 求证：当 $x\leqslant 2$ 时，$x^3-6x^2+12x-1\leqslant 7$.

1 必要不充分　2 $x=2$　3 $x>2$　4 递减　5 3　6 -3

习题6-2A

1 证明函数 $y=2x+\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

2 利用导数求下列函数的最值.

(1) $y=x^2-3x+2$，$x\in[0, 3]$；

(2) $y=-2x^2+7x-3$，$x\in[0, 2]$；

(3) $y=x^2-2x-1$，$x\in[-2, 0]$.

3. 利用导数求下列函数的单调区间.

(1) $y=2x-3$；　　(2) $y=x^2-8x+16$；

(3) $y=(x-1)^3$；　　(4) $y=x^2(x-1)$.

4. 求下列函数的极值.

(1) $y=x^3-x^2-x+4$；　　(2) $y=-x^3+3x-5$；

(3) $y=4x^3-3x^2-6x+2$.

5. 讨论下列函数的性质.

(1) $y=x+2\sqrt{x}$，$x\in[0,4]$；　　(2) $y=2x^2-x^4$.

6. 设 $f(x)=(2-x)(x+2)^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值点；

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(3) 求 $f(x)$ 在区间 $[-5,1]$ 的最大值与最小值；

(4) 作出 $f(x)$ 的草图.

习题6-2B

1. 可导函数在闭区间内的最大值必在（　　）取得.

(A) 极值点　　(B) 导数为 0 的点

(C) 极值点或区间端点　　(D) 区间端点

2. 已知 $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^2+1}$，求 $f(x)$ 的极值点以及极值、最值点以及最值.

3. 求函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的单调区间，其中 a 为实常数.

4. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2-x-1$ 的图像与直线 $y=c$ 有 3 个不同的交点，求实数 c 的取值范围.

5. 已知 $e^x\geqslant kx+1$ 恒成立，求 k 的取值范围.

6. 已知函数 $y=k(x-1)$ 与 $y=\ln x$ 的图像有且只有一个公共点，求 k 的取值范围.

习题6-2C

1. 利用导数求一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的单调区间与最值.

2. 若函数 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$ 在 $x=1$ 时有极值，试求函数 $f(x)$ 的极值，并求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right]$ 上的最值.

6.3 利用导数解决实际问题

在生活中，人们经常会遇到最优化的问题．例如，在铺设管道或者公路时，怎样使得花费最少？在制作容器时，怎样使得用料最少？经济活动中，怎样使得经营成本最小？等等．这些问题都需要寻求相应的最佳方案或最佳策略，因此数学上都称为最优化问题．因为利用导数可以求得最值，所以可以利用导数来求解最优化问题，下面我们举例说明．

情境与问题

如图 6-3-1 所示，海中有一座油井 A，其离岸的距离 $AC=1.2$ km，岸是笔直的，岸上有一座炼油厂 B，且 $BC=1.6$ km．现要用输油管将油井 A 与炼油厂 B 连接起来，且输油管既可以铺设在水下，也可以铺设在陆地上，还可以一部分铺设在水下另一部分铺设在陆地上．已知水下的铺设成本为每千米 50 万元，陆地的铺设成本为每千米 30 万元．那么，铺设输油管的最少花费是多少？

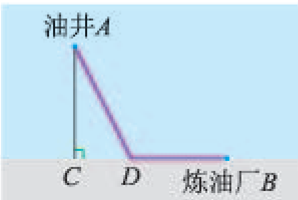


图 6-3-1

尝试与发现

分别计算下列两种铺法的铺设成本，然后尝试给出最优的铺设方案．

(1) 先沿 AC 铺设再沿 CB 铺设；

(2) 直接沿着线段 AB 铺设．

如果先沿 AC 铺设，再沿 CB 铺设，则成本为

$$1.2\times 50+1.6\times 30=108\ (\text{万元}).$$

又因为

$$AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=\sqrt{1.2^2+1.6^2}=2\ (\text{km}),$$

所以直接沿线段 AB 铺设，成本为

$$2\times 50=100\ (\text{万元}).$$

如图 6-3-1 所示，在线段 CB 上取一点 D，设其离 C 的距离为 x km，则

$$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{1.2^2+x^2}\ (\text{km}),$$

$$DB=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}\ (\text{km}).$$

设先沿 AD 铺设再沿 DB 铺设输油管时成本为 y 万元，则

$$y=50\sqrt{1.2^2+x^2}+30(1.6-x),\ 0\leqslant x\leqslant 1.6.$$

因此，当 $0<x<1.6$ 时，

$$y'=50\times\frac{1}{2}\times(1.2^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\times 2x-30=\frac{50x}{\sqrt{1.2^2+x^2}}-30.$$

令 $y'>0$，可解得 2 ________.

可知 y 在 $[0,\ 0.9]$ 上递减，在 $[0.9,\ 1.6]$ 上递增．从而 y 在 $x=$ 3 ________ 时取得最小值，而且最小值为

$$50\sqrt{1.2^2+0.9^2}+30(1.6-0.9)=96.$$

从而可知最少花费是 96 万元.

例 1 如图 6-3-2 所示，某海岛码头 O 离岸边最近点 B 的距离是 150 km，岸边的医药公司 A 与点 B 的距离为 300 km，现有一批药品要尽快送达海岛码头．已知 A 与 B 之间有一条公路，现要用海陆联运的方式运送这批药品，若汽车时速为 130 km，快艇时速为 50 km．试在岸边选一点 C，先将药品用汽车从 A 送到 C，再用快艇从 C 运到海岛码头，则点 C 选在何处可使运输时间最短?

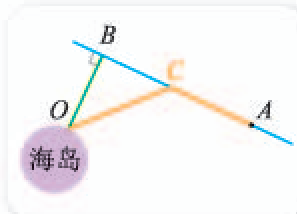


图 6-3-2

解 设点 C 与点 B 的距离为 x km，运输时间为 $T(x)$ h，则

$$T(x)=\frac{\sqrt{150^2+x^2}}{50}+\frac{300-x}{130},\ 0\leqslant x\leqslant 300.$$

因为

$$T'(x)=\frac{1}{2}\ \frac{(150^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\times 2x}{50}-\frac{1}{130}=\frac{x}{50\sqrt{150^2+x^2}}-\frac{1}{130},$$

令 $T'(x)>0$，可解得 $x>\dfrac{125}{2}$.

因此可知 $T(x)$ 在 $\left[0,\ \dfrac{125}{2}\right]$ 上递减，在 4 ________ 上递增，从而 $T(x)$ 在 $x=\dfrac{125}{2}$ 时取得最小值.

这就是说，点 C 选在离 B 点为 $\dfrac{125}{2}$ km 时可使运输时间最短.

例 2 如图 6-3-3 所示，现有一块边长为 1.2 m 的正方形铁板，如果从铁板的四个角各截去一个边长相等的小正方形，然后做成一个长方体形的无盖容器，则容器的容积 V m^3 是截下的小正方形边长 x m 的函数.

（1）写出函数的解析式；

（2）为了使容器的容积最大，截去的小正方形边长应为多少?

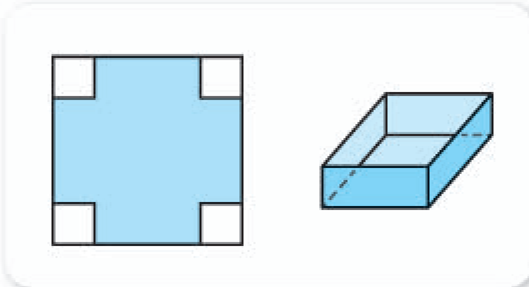


图 6-3-3

分析 当截去的正方形边长较短时，容器的底面积就会较大，高较小；反之，当截去的正方形边长较长时，容器的底面积就会较小，高较大．但是容器的容积等于底面积乘以高，因此，为了使得容器的容积最大，必须寻找合适的 x 值.

解 (1) 根据题意可知，容器底面的边长为 $(1.2-2x)$ m，高为 x m，于是

$$V=(1.2-2x)^2x,$$

又因为显然 x 的长度必须小于原有正方形边长的一半，因此 $0<x<0.6$，所以

$$V=(1.2-2x)^2x,\ 0<x<0.6.$$

(2) 由题意有

$$V'=2(1.2-2x)\times(-2)x+(1.2-2x)^2=12(x-0.6)(x-0.2).$$

令 $V'>0$，可解得 $x<0.2$.

因此可知 V 在 $(0,\ 0.2]$ 上递增，在 $[0.2,\ 0.6)$ 上递减．故 V 在 $x=$ 5 ______ 时取得极大值，而且在此时取得最大值.

即截去的正方形边长为 0.2 m 时，容器的容积最大.

例 3 某种退烧药能够降低的温度 R 是血液中该药含量 M 的函数，而且

$$R=M^2\left(C-\frac{M}{3}\right),\ 0<M<3C,$$

其中 C 是一个常数．试求这种退烧药在血液中的含量 M 为多少时，能够降低的温度最大.

解 因为

$$R'=2M\left(C-\frac{M}{3}\right)+M^2\left(-\frac{1}{3}\right)=-M(M-2C),$$

由 $R'>0$ 可以解得 $M<2C$.

因此可知 R 在 $(0,\ 2C]$ 上递增，在 $[2C,\ 3C)$ 上递减．故 V 在 $M=2C$ 时取得极大值，而且在此时取得最大值.

例 4 已知某型号手机总成本 C 元是月产量 Q 万件的函数，且

$$C=10Q^2+200Q+1\,000,\ 1\leqslant Q\leqslant 30.$$

将 Q 看成能取区间 $[1, 30]$ 内的每一个值，求月产量 Q 为多少时，才能使每件产品的平均成本最低？最低平均成本为多少？

解 记平均成本为 $f(Q)$ 元，则

$$f(Q)=\frac{C}{Q}=\frac{10Q^2+200Q+1\ 000}{Q}=10Q+\frac{1\ 000}{Q}+200.$$

因为 $1<Q<30$ 时，有 $f'(Q)=10-\frac{1\ 000}{Q^2}$，令 $f'(Q)>0$，可解得 $Q>10$.

因此可知 $f(Q)$ 在 $[1, 10]$ 上递减，在 $[10, 30]$ 上递增，从而 $f(Q)$ 在 $Q=10$ 时取得极小值，而且在此时取得最小值

$$f(10)=10\times10+\frac{1\ 000}{10}+200=400.$$

即当月产量为 10 万件时，每件产品的平均成本最低，最低为 400 元.

拓展阅读

利用导数来推导光的折射定律

光学中的费马原理是“光永远以时间最短的路径行进”. 由费马原理可知，在同一均匀介质内，光行进的路径一定是直线，这是因为两点之间线段最短. 但是，在不同的均匀介质中，光速不相等.

那么，如图 1 所示，如果光要从一种均匀介质的 A 点出发，达到另外一种均匀介质的 B 点，光将沿着什么样的路径行进呢？

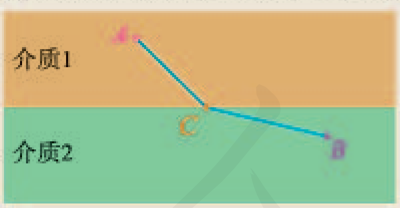


图 1

因为在同一均匀介质中光是沿直线行进的，所以光肯定是先从 A 沿直线行进到两种介质的分界面上的一点 C，然后再从 C 行进到 B，如图 1 所示. 我们需要确定的是，C 点在何处？假设光在介质 1 与介质 2 中的速度分别为 c_1，c_2，根据费马原理可知，C 点的位置要使得光行进的时间最短.

如图 2 所示，过 A，B 分别作两种介质分界面的垂线 AE，BF，连接 EF，设

$$AE=h_1,\ BF=h_2,\ EF=d,$$

则 h_1，h_2，d 都是常数.

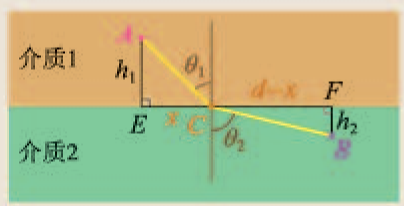


图 2

设 $EC=x$，则

$$AC=\sqrt{h_1^2+x^2},$$

$$BC=\sqrt{h_2^2+(d-x)^2},$$

因此光行驶的时间为

$$y=\frac{AC}{c_1}+\frac{BC}{c_2}$$

$$=\frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{c_2}+\frac{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}{c_2}.$$

因为

$$y'=\frac{x}{c_2\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{d-x}{c_2\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}},$$

可以证明，y 取最小值的充要条件是 $y'=0$，即

$$\frac{x}{c_2\sqrt{h_1^2+x^2}}=\frac{d-x}{c_2\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}.$$

又因为

$$\sin\angle EAC=\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}},$$

$$\sin\angle FBC=\frac{d-x}{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}},$$

所以有

$$\frac{\sin\angle EAC}{c_1}=\frac{\sin\angle FBC}{c_2}.$$

如果过 C 点作 EF 的垂线 l，且称 AC 与 l 所成的锐角为光线的入射角，记作 θ_1，BC 与 l 所成的锐角为光线的折射角，记作 θ_2，则入射角与折射角之间的关系为

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1}=\frac{\sin\theta_2}{c_2}.$$

这就是光学中的折射定律.

习题6-3A

1. 从物理学中我们知道，如果电源的电动势为 E，内阻为 r，外阻为 R，则电源的输出功率为 $P=\dfrac{E^2R}{(R+r)^2}$. 假设 E 与 r 保持不变，计算外阻 R 为多少时，电源的输出功率最大.
2. 用边长为 60 cm 的正方形铁皮做一个无盖水箱，先在四角分别截去边长相等的小正方形，然后把四边翻转 90° 再焊接成一个长方体形水箱，则水箱底边为多少时才能使水箱的容积最大?
3. 将长为 72 cm 的铁丝截成 12 段，搭成一个正四棱柱的模型，以此为骨架做成一个容积最大的容器，则铁丝应怎样截?
4. 横截面为矩形的横梁的强度同此矩形的长的平方与宽的积成正比，而且比例系数为 k（$k>0$）. 要将直径为 d 的圆木锯成强度最大的横梁，则横截面的宽与高分别应是多少?
5. 如图所示，现要建一条高速公路连接城市 A 与城市 B，且 B 在一条旧公路尽头，A 距旧公路最近的点 C 的距离为 40 km，B，C 之间的距离为 90 km. 如果新建高速公路的成本为每千米 300 万元，将旧公路改造成高速公路的成本为每千米 200 万元. 试判断高速公路怎样建才能使成本最低.

（第 5 题）

习题6-3B

1. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，而 E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 上的点，且四边形 $EFGH$ 也是正方形，求四边形 $EFGH$ 面积的最小值.

2. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知上底 $CD=40$，腰 $AD=40$，则 AB 为多少时等腰梯形的面积最大？
3. 已知等腰三角形的周长为 $2p$，将该三角形围绕底边旋转一周形成几何体，则三角形的各边长分别是多少时所得几何体的体积最大？
4. 要做一个容积为 216 mL 的圆柱形封闭容器，高与底面直径分别为何值时，所用材料最省？
5. 若 x_1，x_2，…，x_n 是一组已知数据，令

$$s(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2,$$

用导数求 x 取何值时 $s(x)$ 取得最小值.

1 $1.6-x$　2 $x>0.9$　3 0.9　4 $\left[\frac{125}{2}, 300\right]$　5 0.2

6.4 数学建模活动：描述体重与脉搏率的关系

按照优势互补的原则，跟其他同学组成一个数学建模小组，采用分工合作的方式，根据有关知识，并作出其他合理假设，完成数学建模任务.

生物学中认为，

(1) 睡眠中的恒温动物依然会消耗体内能量，主要是为了保持体温；

(2) 动物体温通过身体表面散发热量，表面积越大，散发的热量越多，保持体温需要的能量也就越大，但可以认为，动物体内消耗的能量 E 关于身体的表面积 S 的导数是一个常数；

(3) 消耗的能量 E 关于心脏的血流量 Q（单位时间流过的血量）的导数可以认为是一个常数；

(4) 心脏每次收缩挤压出来的血量 q 与心脏大小成正比；

(5) 动物心脏的大小与这个动物的大小成正比；

(6) 动物的体重与体积成正比.

设脉搏率 f 是单位时间心跳的次数，W 是动物的体重，试建立 f 与 W 之间的关系式，并从网络或有关专业书籍中查找数据进行验证.

活动提示

1. 可以认为动物的表面积 S 是体积 V 的函数，即 $S=f(V)$，其中 $f'(V)$ 与 V 的关系可以通过类比正方体或球得到.

2. 下表给出了一些动物体重与脉搏率对应的数据，建模时可以参考.

动物名	体重/g	脉搏率/(心跳次数·min^{-1})
鼠	25	670
大鼠	200	420
豚鼠	300	300
兔	2 000	205
小狗	5 000	120
大狗	30 000	85
羊	50 000	70
马	450 000	38

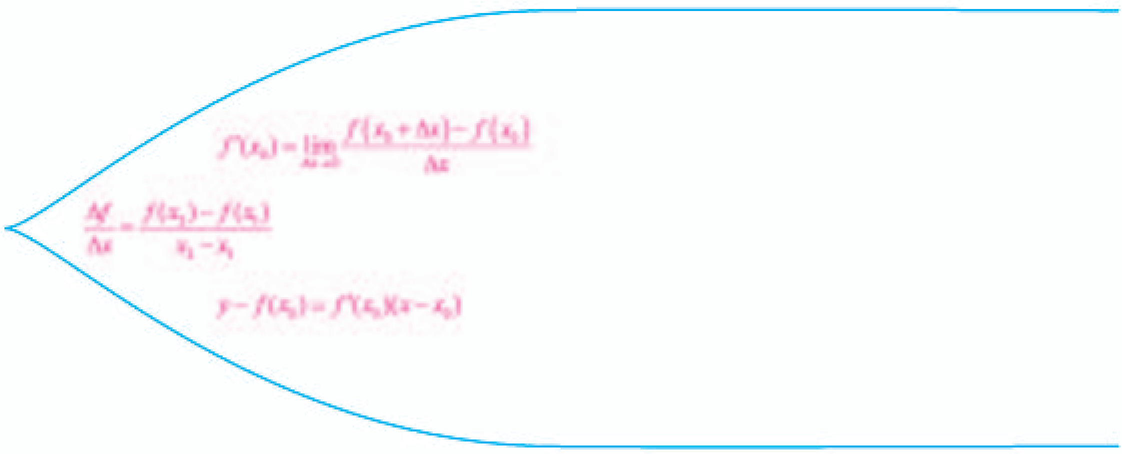
3. 在利用有关数学模型进行参数求解时，既可以利用上述表格中的部分数据（参见必修第二册的“4.7　数学建模活动：生长规律的描述”），也可利用上述表格中的全部数据（参见选择性必修第二册的“4.3.1　一元线性回归模型”）.

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们在函数的平均变化率的基础上，学习了导数的概念，了解了导数的几何意义，并学习了基本初等函数的导数以及求导法则，还利用导数研究了函数的单调性、极值、最值等.

依照知识之间的联系，可以作出如下的知识结构图.



请依据自己的理解，在知识结构图上补充更多的内容吧.

结合自己的学习心得，发挥你的想象力和创造力，为本章的知识重新设计出一份独特的知识结构图，然后和同学交流制作的一些心得吧！

02 课题作业

(1) 对于微积分的发现，恩格斯说：在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了！著名数学家冯·诺伊曼说，微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性无论做怎样的估计都不会过分. 不过，微积分的发现并不是一蹴而就的，其思想的发端可以追溯到很早以前，而微积分的知识刚开始出现时，很多人并不看好微积分的发展. 收集与阅读微积分创立和发展过程中的故事，了解重要历史人物和事件，自选角度，与他人合作或者独立整理有关成果，写成演讲用的材料，并与其他同学交流.

(2) 在信息技术高度发展的今天，数学学习除了通过课堂进行之外，也可以借

助“互联网+”等进行．例如，可以通过慕课平台进行有关数学知识的学习，可以通过作业平台等进行知识的巩固，还可以通过在线评价系统了解自己的数学核心素养发展情况，等等．

了解借助“互联网+”进行数学学习的途径，整理不同途径的优缺点，向朋友或低年级学生进行介绍，并思考有关学习平台等可以如何改进．

03 复习题

A 组

1. 已知曲线在某点处的切线的斜率为负数，求此切线的倾斜角的取值范围．

2. 求下列函数的导数．

(1) $y=x^{0.1}$；(2) $y=(4x-3)(2x+5)$；

(3) $y=(10x+3)^{100}$；(4) $y=\ln(6x-4)$．

3. 求下列函数在给定点的导数．

(1) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$，$x=5$；(2) $f(x)=3(x+1)x^2$，$x=1$．

4. 已知函数 $f(x)=x^2$，分别求出曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0.3,\ 0.09)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 9)$ 处的切线的斜率．

5. 已知 $f(u)=u^3$，求 $f'(3)$ 以及曲线 $y=f(u)$ 在点 $(3,\ f(3))$ 处的切线方程．

6. 求曲线 $y=x^3+3x$ 的平行于直线 $y=15x+2$ 的切线方程．

7. 求下列函数在给定点的切线方程．

(1) $y=\dfrac{3x}{x+1}$，$(2,\ 2)$；(2) $y=5x+\ln x$，$(1,\ 5)$．

8. 求下列函数的单调区间．

(1) $y=2x^2-\ln x$；(2) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$；(3) $y=\sin x+\cos x$．

9. 求函数 $y=2x^3-15x^2+36x-27$ 的极值点和单调区间，并画出这个函数的草图．

10. 求函数 $y=2x^3-3x^2-12x+8$ 在区间 $[-2,\ 3]$ 上的最大值和最小值．

11. 已知定义在区间 $(-\pi,\ \pi)$ 上的函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$，求 $f(x)$ 的单调递增区间．

12. 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点 $(0,\ b)$ 处的切线方程是 $x-y+1=0$，求 a，b．

B 组

1. 写出函数 $f(u)=u^5$ 和 $g(\theta)=\cos\theta$ 的导函数．

2. 已知 $f(x)=x^3$，求 $f(a-bx)$ 的导数，其中 a，b 均为常数．

3. 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=0$，那么 $f(x)$ 的取值具有什么特点？

4. 已知关于 x 的函数 $y=x^3-t^2x-tx^2+t^3$ 在区间 $(-1, 3)$ 上单调递减，求 t 的取值范围.

5. 已知 $a>0$ 且 $f(x)=ax+\dfrac{a-2}{x}+2-2a$，若 $f(x)\geqslant 2\ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

6. 若函数 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{2}\ln x+1$ 在其定义域内的一个子集 $(a-1, a+1)$ 内存在极值，求实数 a 的取值范围.

7. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$，

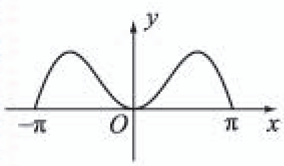
(1) 求 $f(x)$ 与 y 轴的交点 A 的坐标；

(2) 若 $f(x)$ 的图像在点 A 处的切线斜率为 -1，求 $f(x)$ 的极值.

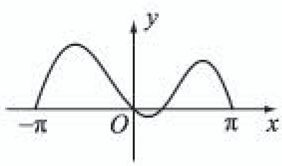
8. 已知 x 轴为函数 $f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4}$ 的图像的一条切线，求实数 a 的值.

9. 求曲线 $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

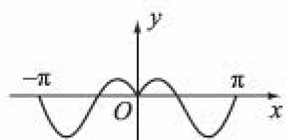
10. 函数 $f(x)=x\sin x$，$x\in[-\pi, \pi]$ 的图像大致是（　　）.



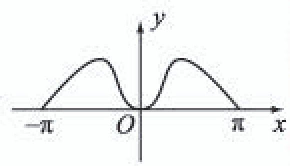
(A)



(B)



(C)



(D)

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x, & x\leqslant a, \\ -2x, & x>a. \end{cases}$

(1) 若 $a=0$，求 $f(x)$ 的最大值；

(2) 若 $f(x)$ 无最大值，求实数 a 的取值范围.

12. 要在半径为 0.5 m 的圆桌中心正上方安装一个吊灯，已知桌面上灯光的强度可以用 $y=k\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$ 表示，其中 r 是灯与桌面上被照点的距离，φ 是光线与桌面的夹角. 为使桌边最亮，吊灯应离桌面多高？

13. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$，若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数，试求实数 a 的取值范围.

14. 证明：当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$.

15. 已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是增函数，在 $[0, 2]$ 上是减函数，且方程 $f(x)=0$ 有 3 个实数根，它们分别是 α，β，2.

(1) 求实数 c 的值；

(2) 求证：$f(1)\geqslant 2$；

(3) 求 $|\alpha-\beta|$ 的取值范围.

C 组

1. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 设 $a=b=4$，若函数 $f(x)$ 有 3 个不同零点，求实数 c 的取值范围；

(3) 求证：$a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有 3 个不同零点的必要不充分条件.

2. 若函数 $f(x)$ 在 **R** 上可导，且满足 $f(x)-xf'(x)>0$，判断 $3f(1)$ 与 $f(3)$ 的大小.

3. 设函数 $f(x)=xe^{a-x}+bx$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(2, f(2))$处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$.

(1) 求实数 a，b 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

4. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，求 a 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，求实数 a 的取值范围.

6. 令 $f(x)=x^2+x-1$，对抛物线 $y=f(x)$，持续实施下面牛顿切线法的步骤：

在点 $(1, 1)$ 处作抛物线的切线交 x 轴于 $(x_1, 0)$；

在点 $(x_1, f(x_1))$ 处作抛物线的切线，交 x 轴于 $(x_2, 0)$；

在点 $(x_2, f(x_2))$ 处作抛物线的切线，交 x 轴于 $(x_3, 0)$；

……

由此能得到一个数列 $\{x_n\}$，回答下列问题.

(1) 求 x_1 的值；

(2) 设 $x_{n+1}=g(x_n)$，求 $g(x_n)$ 的解析式；

(3) 用二分法求方程的近似解，给出前 4 步结果. 比较牛顿切线法和二分法的求解速度.

7. 求证：$x\geqslant 0$ 时，有 $xe^{-x}\leqslant \ln(1+x)$.

后　记

本套教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，经国家教材委员会专家委员会2019年审核通过.

本套教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧.

我们衷心感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的所有编写人员，尤其是因为种种原因未能参加此次教材修订的专家、学者：丁尔陞、江守礼、房艮孙、张润琦、高尚华、万庆炎、魏榕彬、邱万作、陈研、段发善、李迈岸、陈亦飞、刘长明、郭鸿、王池富……

本套教科书在编写过程中，得到了《普通高中数学课程标准（2017年版）》制定组、国家教材委员会专家委员会等的大力支持. 借此机会，向所有制定组成员、专家委员会成员以及其他为我们教材编写提供过帮助的专家表示衷心的感谢！

我们感谢对本套教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的所有同仁和社会各界朋友：王跃飞、胡细宝、邵丽云、王晓声、曹付生、侯立伟、王中华、王光图、王秀梅、卞文、邓艳强、田媛、史洪波、付一博、吕希、吕晶、朱明鲜、刘超、闫旭、池洪清、阮征、孙国华、牟柏林、李刚、李广勤、李洪岩、何艳国、张伟、张羽、张明、张文刚、张春青、张晶强、金永涛、郑继平、常丽艳、潘戈、薛达志、郑海军、赵争鸣、吴晖湘、戴莉、金盈、舒凤杰、李祥广、胡文亮、王玉洁、杨长智、徐会吉、尹玉柱、尹燕花……

本套教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示衷心的感谢！同时也向为本书提供照片的单位表示感谢！

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本套教科书的过程中提出宝贵意见．我们将集思广益，不断修订，以使教科书日臻完善．

本书责任编辑：王旭刚；美术编辑：史越；整体设计：吕旻、史越；插图绘制：郑海军．

联系方式

电话：010−58758523，010−58758866

电子邮箱：wangxg@pep.com.cn，jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组

2019 年 4 月