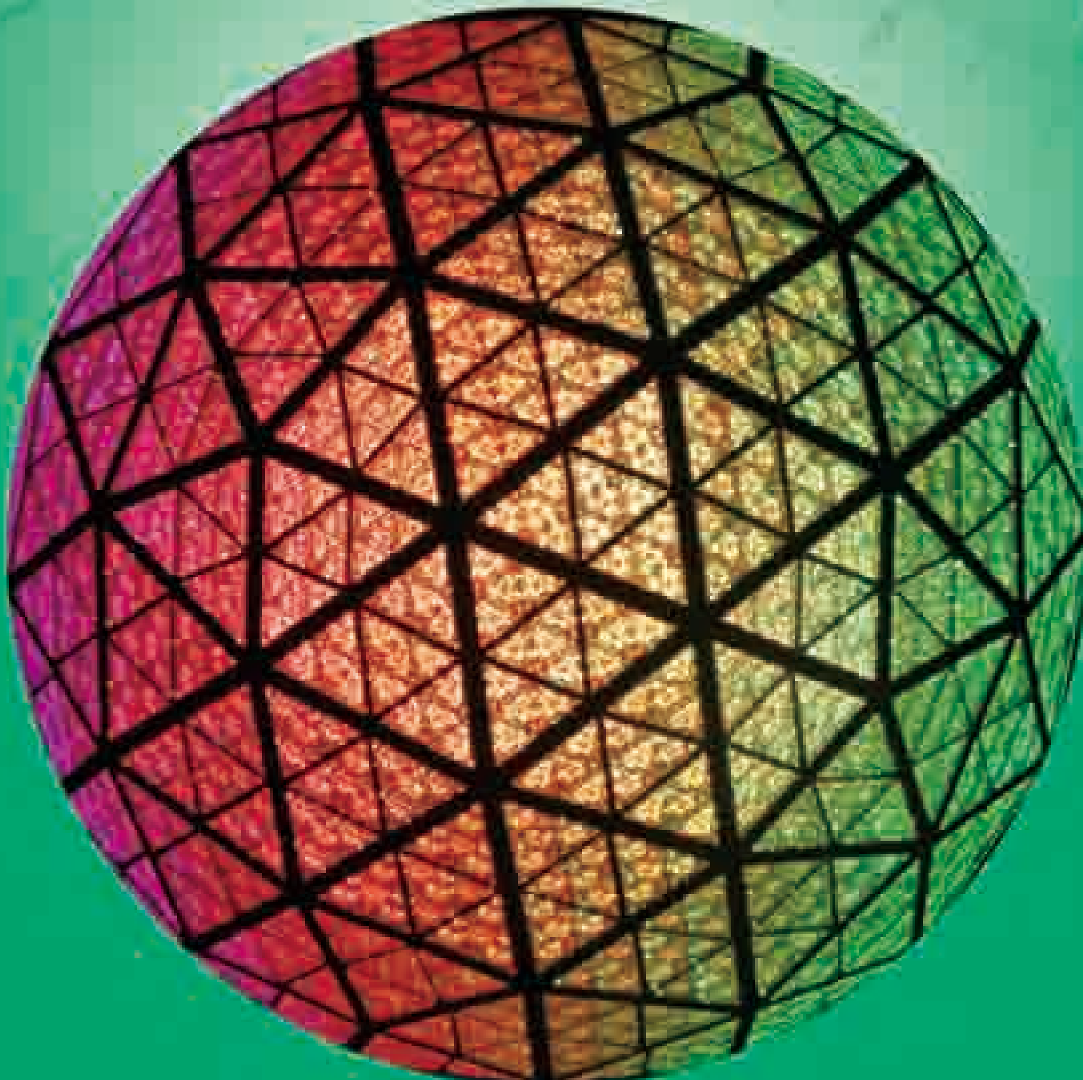
义务教育教科书

# 数学

SHUXUE

九年级 下册



北京出版社

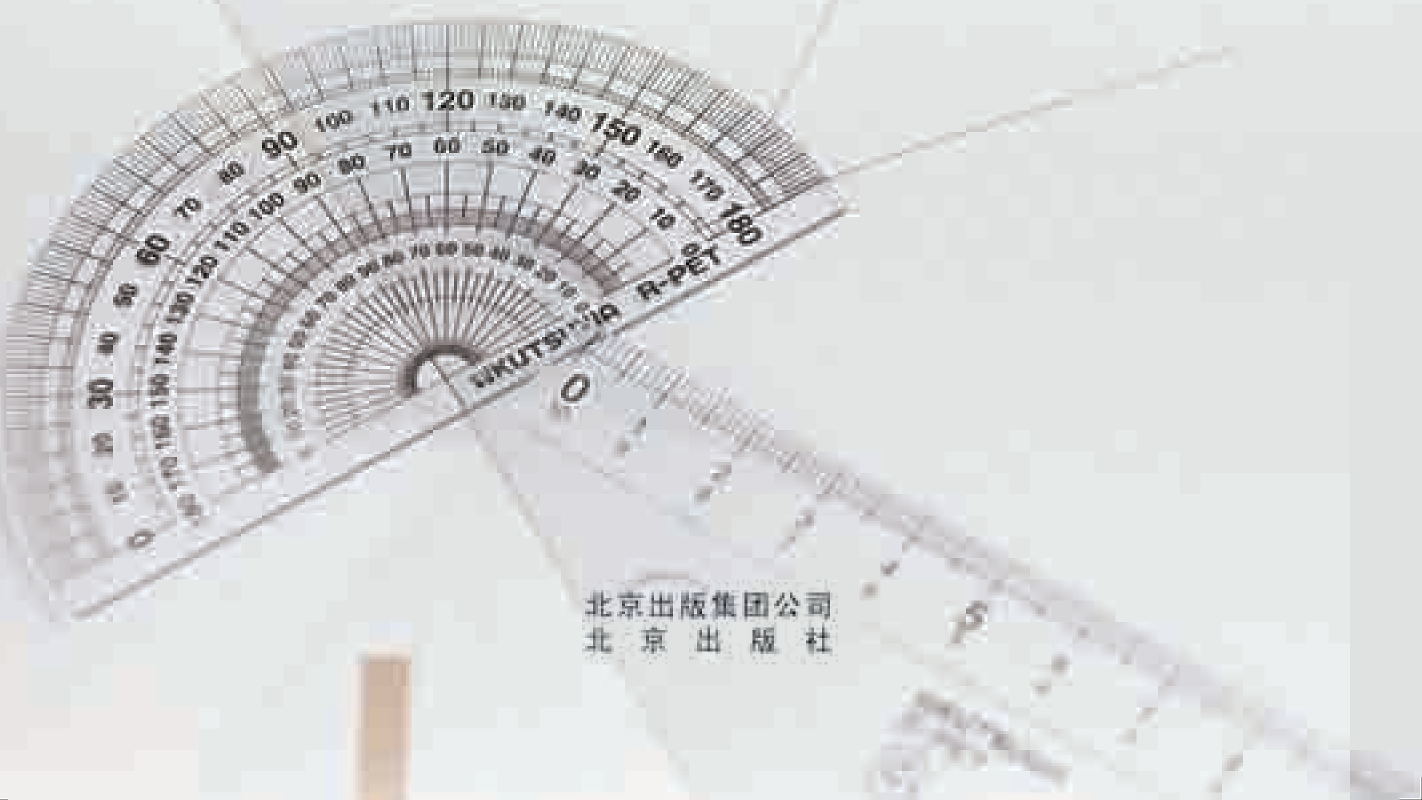
义务教育教科书

# 数学

SHUXUE

## 九年级 下册

北京教育科学研究院 北京出版集团公司 合编



北京出版集团公司
北京出版社

# 前　言

亲爱的同学们：

欢迎你们使用本套义务教育教科书！

数学是研究数量关系和空间形式的科学，是人类文化的重要组成部分。通过本套教科书，能够获得良好的数学教育，在数学上得到不同程度的发展。

## 栏目说明

### 思考

思考是数学发展的前提，不要放弃任何一个独立思考的机会，甚至在别人已经说出答案而你还没有找到例子或思路的时候也不要放弃。

### 交流

将你的思路和方法记录下来，有条理地向其他同学或老师表达，耐心倾听他们的意见，调整自己的思路或方法。

### 探索

严谨观察、细致分析、大胆猜想、细心验证、不断反思，直到找到满意的结论，体会数学探索的艰辛与乐趣。

### 实践

学好数学不仅要勤于动脑，也要勤于动手。动手画图、计算、列式、填表，将实际问题转化为数学问题，用数学的方法解决问题。

### 问题解决

你将遇到富有趣味性、挑战性的数学问题。这些问题需要你在理解的基础上，运用所学的数学知识和方法，寻求解决问题的思路和线索，猜想与验证结论，并将解决问题的整个过程有条理地记录下来，和同学们分享。

### 探究学习

你将面对一个新的情境，需要你发现和提出问题，独立思考，通过归纳、概括、类比、证明，得到新的猜想或规律，或者得到一个崭新的方法。

### 阅读理解

你将会发现数学发展的悠久历史，体验数学家探索数学的艰辛与快乐，感受数学对其他学科的巨大贡献。数学是人类文化的重要组成部分。

### 综合与实践

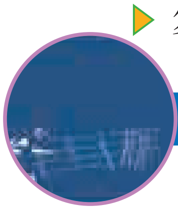
数学既能锤炼思维又具有广泛应用的事实将在这里得到充分的体现。你将尝试综合运用所学的数学概念、原理、方法和思想去解释和解决实际生活中的问题与现象，经历制定方案、调查研究、收集数据、整理数据、分析数据、做出判断、发现规律等过程，感受到数学的魅力。

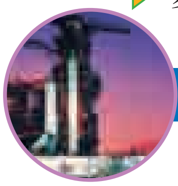
希望这套数学教科书能够陪伴你度过一个充满智慧、乐趣的初中！

# 目　录









# 第二十三章
# 图形的变换

仔细观察这些美丽的图案，你能根据其中的一部分绘制出整个图案吗？

在这一章中，我们将走进图形变换的天地，探索图形变换的规律.

# 23.1 平移变换

如图 23－1，手扶电梯的运动、飞机的滑行等，都给我们带来平行移动的形象．

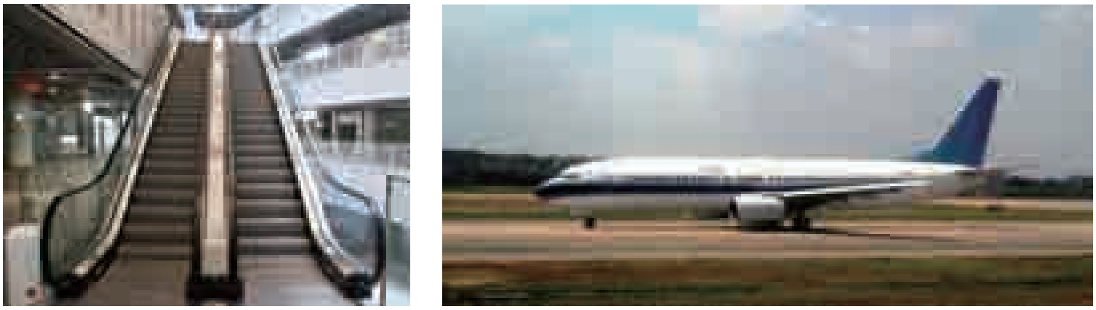


图 23－1

**思考**

还记得利用直尺和三角尺画平行线的方法吗(图 23－2)？三角尺的移动过程有什么特征？

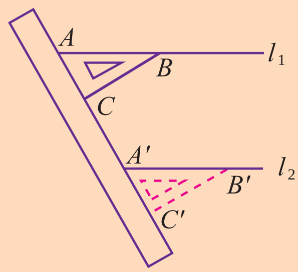



图 23－2

像这样，在平面内，将一个图形沿某个方向移动一定的距离，得到一个新的图形，这样的图形运动称为平移变换，简称**平移**．

平移不改变图形的形状和大小．

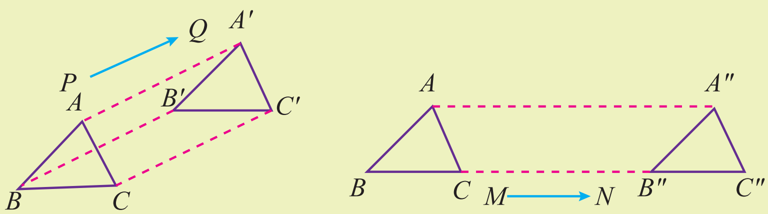
在图 23－2 中，$\triangle ABC$ 平移到 $\triangle A'B'C'$，点 $A$，$B$，$C$ 分别平移到了点 $A'$，$B'$，$C'$．$A$ 与 $A'$，$B$ 与 $B'$，$C$ 与 $C'$ 分别是对应点；$AB$ 与 $A'B'$ 是对应线段；$\angle A$ 与 $\angle A'$ 是对应角．

你还能举出图 23－2 中其他的对应线段、对应角吗？

## 交流

1. 在图 23－2 中，对应线段、对应角之间有怎样的关系？

2. 在图 23－3(1) 中，如果$\triangle ABC$沿着 $PQ$ 方向移动到$\triangle A'B'C'$的位置，对应点所连的线段有怎样的关系？在图 23－3(2) 中，如果$\triangle ABC$沿着 $MN$ 方向移动到$\triangle A''B''C''$的位置呢？




(1)　　　　(2)

图 23－3

可以得到：

**经过平移，图形的对应线段相等且平行（或在一条直线上）；对应角相等；对应点所连的线段相等且平行（或在同一条直线上）.**

**例 1** 如图 23－4，平移$\triangle ABC$，使点 $A$ 移动到点 $A'$，作出平移后的$\triangle A'B'C'$.

**分析：** 利用图形平移后对应点的特征，作出点 $B$，$C$ 的对应点 $B'$，$C'$.

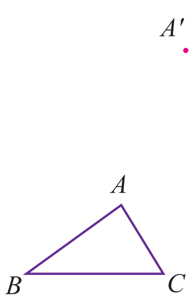



图 23－4

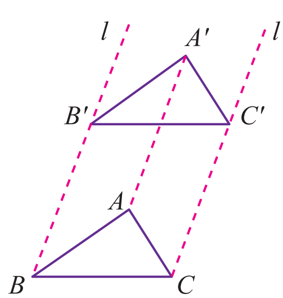



图 23－5

**解：** 如图 23－5，连接 $AA'$，过点 $B$ 与点 $C$ 分别作 $AA'$ 的平行线 $l$，$l'$，在 $l$，$l'$ 上分别截取 $BB'=AA'$，$CC'=AA'$，则点 $B'$ 就是点 $B$ 的对应点，点 $C'$ 就

是点 $C$ 的对应点．连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，$\triangle A'B'C'$ 就是 $\triangle ABC$ 平移后的图形．

**交流**

1. 除例 1 的方法外，你还有其他方法作出 $\triangle A'B'C'$ 吗？
2. 确定一个图形平移后的位置，需要什么条件？

**例 2** 如图 23－6，将 N 状的图形按箭头所指的方向平移 3 cm，作出平移后的图形．

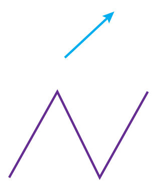


图 23－6

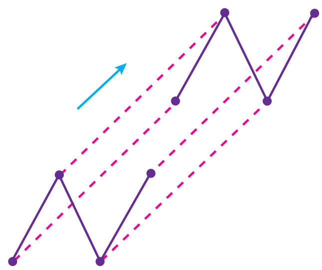


图 23－7

**解：** 在图形上，找出关键的 4 个点，分别过这 4 个点按箭头所指的方向作 4 条长为 3 cm 的线段，将所作线段的另 4 个端点按原来的顺序连接，即可得到平移后的图形（图 23－7）．

**实践**

如图 23－8，在方格纸中，画出将图中的 $\triangle ABC$ 向右平移 3 格后的 $\triangle A'B'C'$，然后再画出将 $\triangle A'B'C'$ 向上平移 2 格后的 $\triangle A''B''C''$．$\triangle A''B''C''$ 是否可以看成是 $\triangle ABC$ 经过一次平移后得到的呢？

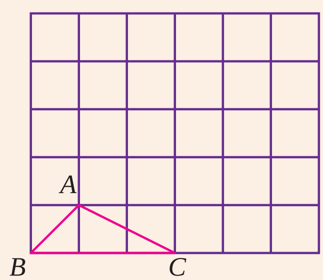
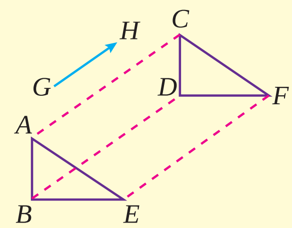



图 23－8

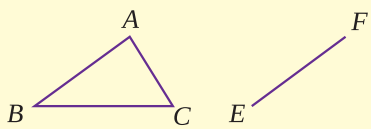
## 练习

1. 如图所示，△*ABE* 沿 *GH* 的方向平移一定距离后记为△*CDF*．找出图中平行且相等的线段和全等三角形．

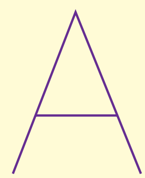



（第 1 题）

2. 如图，经过平移，△*ABC* 的边 *AB* 移到了 *EF*，作出平移后的三角形，你能给出几种作法？
3. 如图，将 A 状的图形沿水平方向向右平移 2 cm，作出平移后的图形．

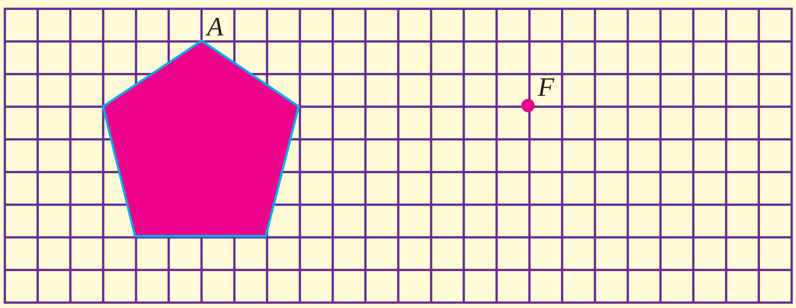



（第 2 题）



（第 3 题）

4. 如图，在方格纸上，经过平移，五边形的顶点 *A* 移到了点 *F* 处，作出平移后的五边形．




（第 4 题）

## 实践

1. 如图 23－9，将点 $A(2，3)$ 向左平移 4 个单位长度，得到点 $A'$，在图上标出这个点，并写出它的坐标；把点 $A$ 向下平移 3 个单位长度呢？把点 $A$ 向右或向上平移呢？再找几个点，对它们进行平移，观察它们坐标的变化，你能从中发现什么规律？

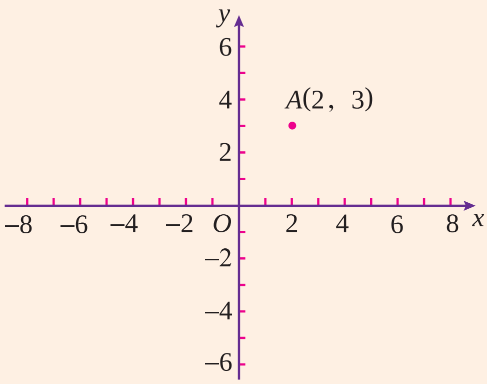



图 23－9

2. 如图 23－10，利用计算机或图形计算器在平面直角坐标系中画一个△$ABC$. 任选平移方向和距离作平移变换，得到△$A'B'C'$. 度量点 $A$，$A'$ 的坐标，观察它们的坐标之间有什么关系；再分别度量点 $B$，$B'$ 与点 $C$，$C'$ 的坐标，观察它们的坐标之间有什么关系．任意改变△$ABC$ 的位置，上面得出的结论是否仍然成立？

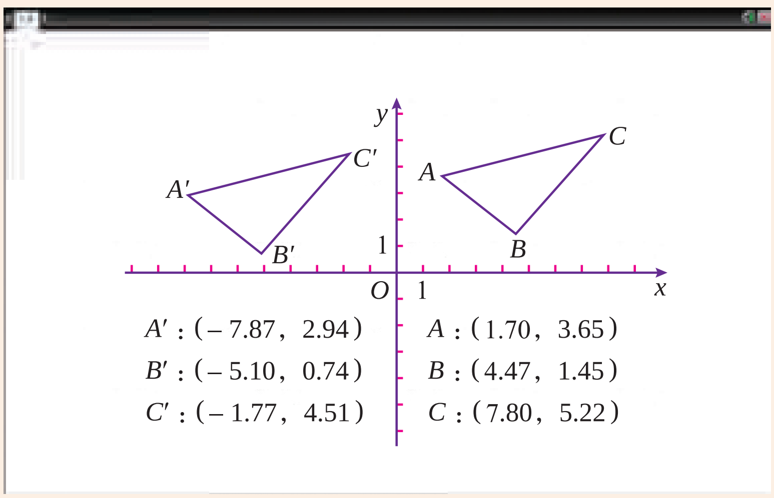



图 23－10

实际上，可以得到下面的结论：

在平面直角坐标系中，将点 $(x, y)$ 向右（或向左）平移 $a(a>0)$ 个单位长度，可以得到对应点 $(x+a, y)$ [或 $(x-a, y)$]；将点 $(x, y)$ 向上（或向下）平移 $b(b>0)$ 个单位长度，可以得到对应点 $(x, y+b)$ [或 $(x, y-b)$].

**探索**

在平面直角坐标系中，将点 $(-4, 3)$ 按下列要求移动：

(1) 向右平移 6 个单位长度；

(2) 再向下平移 3 个单位长度；

(3) 再向左平移 6 个单位长度；

(4) 再向下平移 3 个单位长度；

(5) 最后，向右平移 6 个单位长度 .

写出平移过程中各点的坐标，并画出移动路线图，看一看它像一个什么数字 .

在解答某些几何题时，经常把几何图形中的某一部分平移，形成新的图形，使已知与求解的线段或角建立联系，从而发现解题思路 .

**例 3** 已知：如图 23 − 11，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，对角线 $AC$，$BD$ 交于点 $O$，$AC = BD$，且 $\angle AOD = 60°$.

求证：$BC + AD = AC$.

**证明：** 过点 $D$ 作 $AC$ 的平行线，交 $BC$ 的延长线于点 $E$，得四边形 $ACED$.

又 ∵ $AD \parallel CE$，

∴ 四边形 $ACED$ 是平行四边形 .

∴ $AC = DE$，$AD = CE$.

又 ∵ $AC = BD$，

∴ $BD = DE$.

∵ $DE \parallel AC$，$\angle AOD = 60°$，

∴ $\angle BDE = 60°$.

∴ $\triangle BDE$ 是等边三角形 .

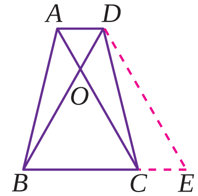


图 23 − 11

$\therefore\quad BE = DE = AC.$

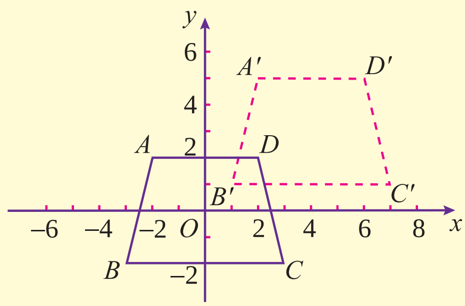
$\because\quad BC + CE = AC,$

$\therefore\quad BC + AD = AC.$

我们看到，解决本题的关键在于把线段 $AC$ 平移到 $DE$ 的位置，使已知与求证所隐含的内在联系充分显示出来 .

## 练习

1. 如图，四边形 $ABCD$ 的各顶点在平面直角坐标系中的坐标分别为 $A(-2，2)$，$B(-3，-2)$，$C(3，-2)$，$D(2，2)$. 把这个四边形向上平移 3 个单位长度，再向右平移 4 个单位长度后，得到四边形 $A'B'C'D'$，请你写出它的顶点坐标 .



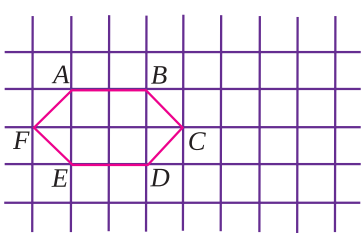

（第 1 题）

2. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，已知 $AC = 2$，$BD = \sqrt{5}$，$AB + DC = 3$，求梯形的高 .

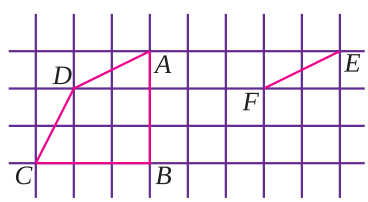
## 习　题　23－1

### ★基础★

1. 在图中画出六边形 $ABCDEF$ 沿从 $A$ 到 $B$ 的方向平移距离等于线段 $AB$ 的长度后的图形 .
2. 如图，$EF$ 是四边形 $ABCD$ 平移后一边所在的位置 . 试画出四边形 $ABCD$ 平移后的图形 .

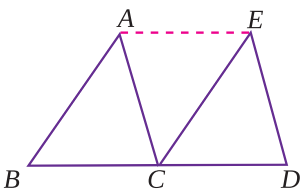



（第 1 题）

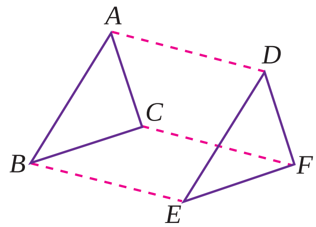



（第 2 题）

3. 如图，$\triangle ECD$ 是由 $\triangle ABC$ 怎样平移后得到的？指出图中相等的线段和角 .
4. 如图，$\triangle ABC$ 平移后得到 $\triangle DEF$，指出图中的平行线段和相等线段 .

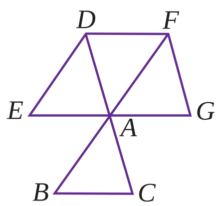


（第 3 题）

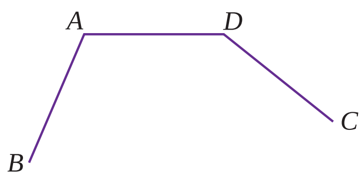


（第 4 题）

5. 如图，$\triangle DEA$ 和 $\triangle FAG$ 都是由 $\triangle ABC$ 平移后得到的 . 试说明 $DF \parallel EA \parallel BC$.
6. 如图，$AB = DC$，画出线段 $AB$ 平移后的线段 $DE$，其平移方向为从 $A$ 到 $D$，平移的距离为线段 $AD$ 的长 . 平移后所得的 $\angle DEC$ 与 $\angle DCE$ 相等吗？试说明理由 .

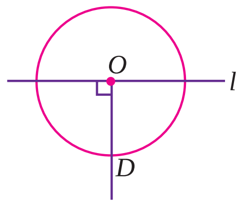


（第 5 题）



（第 6 题）

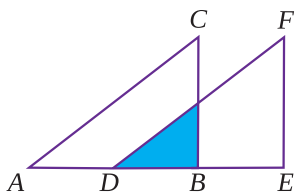
7. 如图，$\odot O$ 的半径 $OD$ 为 5 cm，直线 $l \perp OD$，垂足为 $O$，那么直线 $l$ 沿射线 $OD$ 方向平移多少厘米时与 $\odot O$ 相切？为什么？
8. 在平面直角坐标系中：
   (1) 描出 $A(-2, 1)$，$B(-3, -5)$，$C(0, 4)$ 三点，依次连接各点，得到 $\triangle ABC$.
   (2) 将 $\triangle ABC$ 平移，使其顶点 $A$ 移到点 $(1, 1)$. 画出平移后的三角形，并写出 $B$，$C$ 两点平移后的坐标 .



（第 7 题）

## ★★ 提升 ★★

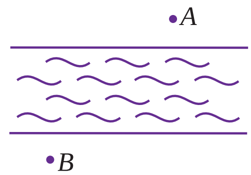
1. 如图，将 Rt $\triangle ABC$ 沿直角边 $AB$ 向右平移 2 个单位长度至 $\triangle DEF$. 如果 $AB = 4$，$\angle ABC = 90°$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 6，求图中蓝色部分的面积 .
2. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，对角线 $AC = 20$，$BD = 15$，$CH \perp AB$ 于点 $H$，且 $CH = 12$，求梯形的面积 .



（第 1 题）

## ★★★ 拓展 ★★★

如图，$A$，$B$ 两地在一条河的两岸，现要在河上建造一座桥 $MN$．桥建造在何处才能使从 $A$ 到 $B$ 的路径 $AMNB$ 最短？（假定河的两岸是平行的直线，桥要与河岸垂直）




# 23.2 旋转变换

在日常生活中，除了物体的平移外，我们还可以看到许多物体的旋转现象．

图 23－12

我们可以把图 23－12 中的扇叶、指针等看做图形．像这样，在平面内，将一个图形绕一个定点沿顺时针或逆时针方向转动一个角度，得到一个新的图形，这样的图形运动称为**旋转变换**，简称**旋转**，这个定点称为**旋转中心**，转动的角称为**旋转角**．如果图形上的点 $P$ 经过旋转到点 $P'$，那么这两个点叫做**旋转的对应点**．例如，在图 23－13 中，把 $\triangle OAB$ 以点 $O$ 为旋转中心，逆时针旋转 $45°$，得到 $\triangle OA'B'$，则点 $A$ 与 $A'$，点 $B$ 与 $B'$ 分别是对应点．

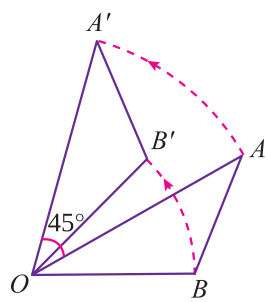



图 23－13

旋转不改变图形的形状和大小．

**思考**

图 23－14 可以看做是一个菱形通过几次旋转得到的？每次旋转了多少度？

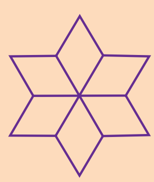


图 23－14

**例 1** 如图 23－15，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$D$ 是 $BC$ 上一点，$\triangle ABD$ 经过旋转后到达 $\triangle ACE$ 的位置．请回答：

(1) 旋转中心是哪一点？

(2) 逆时针旋转了多少度？

(3) 如果 $M$ 是 $AB$ 的中点，那么经过上述旋转后，点 $M$ 旋转到了什么位置？

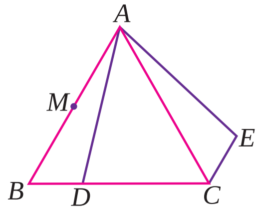



图 23－15

**解：**(1) 旋转中心是点 $A$；

(2) 逆时针旋转了 $60°$；

(3) 点 $M$ 旋转到了 $AC$ 的中点位置上．

**实践**

如图 23－16，利用计算机或图形计算器画一个三角形，作出这个三角形绕某一点 $O$ 旋转一定角度后的图形．观察图中对应点与旋转中心所连线段之间有什么关系，对应点与旋转中心连线所成的角之间有什么关系．

改变点 $O$ 的位置，再对这个图形作旋转变换，上述结论是否仍然成立？

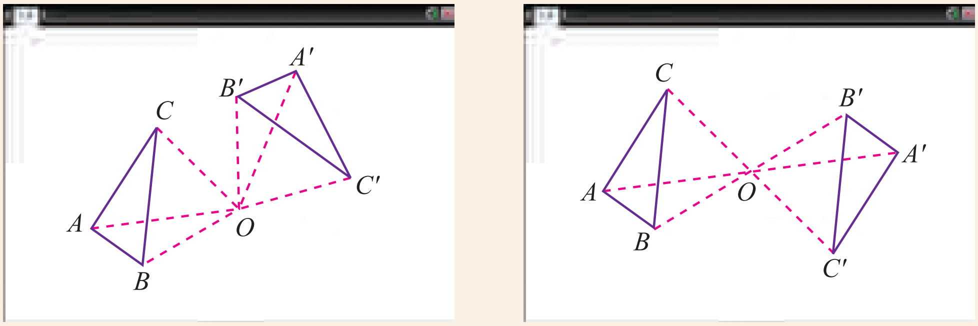



图 23－16

可以得到：

任意一对对应点与旋转中心的连线所成的角都是旋转角，对应点到旋转中心的距离相等．

**例 2** 如图 23－17，△$ABC$ 绕点 $C$ 顺时针旋转后，顶点 $A$ 的对应点为点 $D$．试确定顶点 $B$ 的对应点的位置，并画出旋转后的三角形．

**分析：** 假设顶点 $B$ 的对应点为 $E$，则∠$BCE$，∠$ACD$ 都是旋转角，且∠$BCE$＝∠$ACD$，$CE$＝$CB$，$CD$＝$CA$．

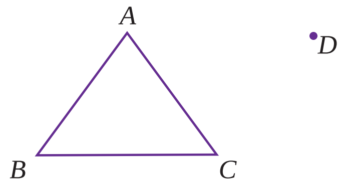


图 23－17

**作法：**（1）如图 23－18，连接 $CD$；

（2）以 $BC$ 为一边作∠$BCF$，使∠$BCF$＝∠$ACD$；

（3）在射线 $CF$ 上截取 $CE$＝$CB$；

（4）连接 $DE$．

△$DEC$ 就是△$ABC$ 绕点 $C$ 按顺时针旋转后的图形．

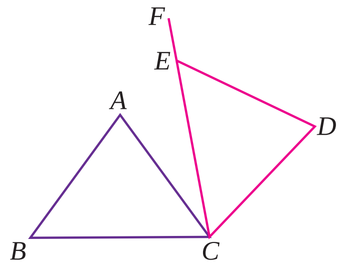
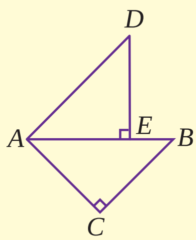


图 23－18

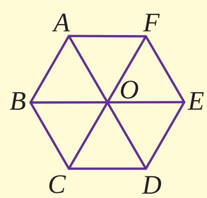
你还能用其他方法作出△$DEC$ 吗？

## 练习

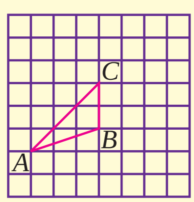
1. 如图，△$ABC$ 与△$ADE$ 都是等腰直角三角形，∠$C$ 和∠$AED$ 都是直角，点 $E$ 在 $AB$ 上．如果△$ABC$ 经逆时针旋转后能与△$ADE$ 重合，那么请指出其旋转中心与旋转角度．
2. 如图，$O$ 是六个正三角形的公共顶点．正六边形 $ABCDEF$ 能否看做某条线段绕 $O$ 点连续旋转所形成的图形？
3. 如图，画出△$ABC$ 绕点 $C$ 逆时针旋转 90° 后的图形．
4. 如图，$E$ 是正方形 $ABCD$ 中 $CD$ 边上任意一点，以点 $A$ 为中心，把△$ADE$ 顺时针旋转 90°，画出旋转后的图形．



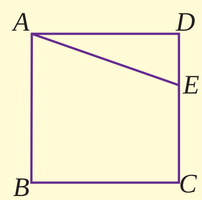
（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

**思考**

中心对称图形与旋转变换图形有什么关系？

**实践**

1. 如图 23－19，在平面直角坐标系中，作出下列已知点关于原点 $O$ 的对称点，并写出它们的坐标．这些对称点坐标与已知点的坐标有什么关系？

$A(3,\ 0)$， $B(0,\ -2)$， $C(2,\ 1)$， $D(-1,\ 3)$．

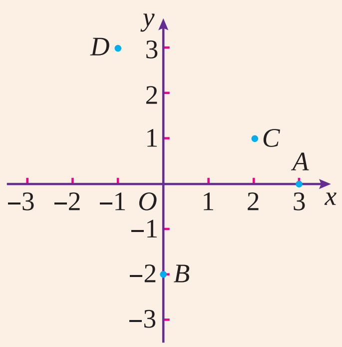


图 23－19

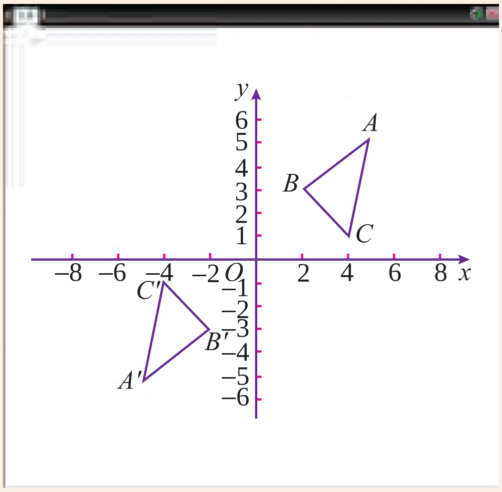


图 23－20

2. 如图 23－20，利用计算机或图形计算器在平面直角坐标系中画一个△$ABC$．以原点 $O$ 为中心作旋转角为 180° 的旋转变换，得到△$A'B'C'$．度量点 $A$，$A'$ 的坐标，观察它们的坐标有什么关系．再度量点 $B$，$B'$ 与点 $C$，$C'$ 的坐标，观察它们的坐标有什么关系．

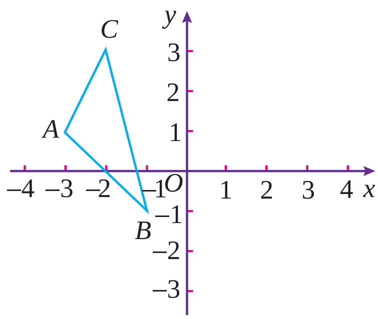
任意改变△$ABC$ 的位置，上面得出的结论是否仍然成立？

实际上，可以得到如下结论：

点 $P(x,\ y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x,\ -y)$．

**例 3** 如图 23－21，△$ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-3,1)$，$B(-1,-1)$，$C(-2,3)$，利用关于原点对称的点的坐标的特点，作出与△$ABC$ 关于原点对称的图形．

**解：** 点 $P(x,y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x,-y)$，因此△$ABC$ 的三个顶点 $A(-3,1)$，$B(-1,-1)$，$C(-2,3)$ 关于原点的对称点分别为 $A'(3,-1)$，$B'(1,1)$，$C'(2,-3)$．依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 就可以得到与△$ABC$ 关于原点对称的△$A'B'C'$．




请你在图 23－21 上作出与△$ABC$ 关于原点对称的图形．

图 23－21

**例 4** 如图 23－22，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=\angle ABC=90°$，$AD=CD$，$DP\perp AB$ 于 $P$．如果四边形 $ABCD$ 的面积是 18，求 $DP$ 的长．

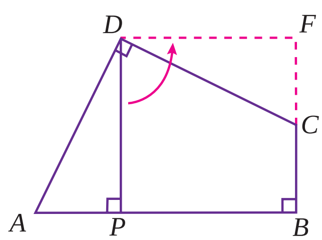



图 23－22

**分析：** 这个问题看似条件不足，但仔细想一想，如果将△$ADP$ 剪下来，补到△$CDF$ 处，可证得四边形 $DPBF$ 恰为一个正方形，$DP$ 的长就可求得．这里的图形割补，相当于△$ADP$ 绕点 $D$ 逆时针旋转 90° 到△$CDF$ 的位置．

**解：** 将△$ADP$ 绕点 $D$ 逆时针旋转 90°，使 $AD$ 与 $CD$ 重合，得△$DCF$．因为 $\angle A+\angle DCB=180°$，所以旋转后 $F$，$C$，$B$ 在同一条直线上．

$\because$ $\angle DPB=\angle DFB=\angle PDF=90°$，$DP=DF$，

$\therefore$ 四边形 $DPBF$ 是正方形．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 的面积是 18，

$\therefore$ 正方形 $DPBF$ 的面积是 18．

$\therefore$ $DP^2=18$．

$\therefore$ $DP=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$．

## 练习

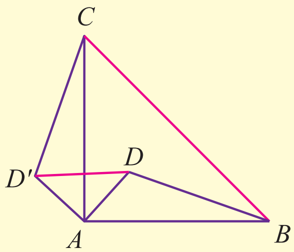
1. 下列各点中，哪两个点关于原点 $O$ 对称？

$A(-5,0)$；　$B(0,2)$；　$C(2,-1)$；　$D(2,0)$；

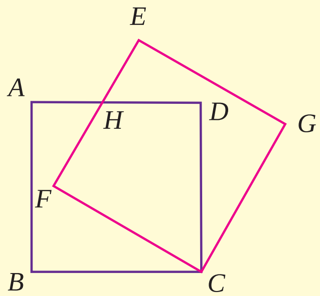
$E(0,5)$；　$F(-2,1)$；　$G(-2,-1)$.

2. 如图，$D$ 是等腰 Rt△$ABC$ 内一点，$BC$ 是斜边．如果将△$ABD$ 绕点 $A$ 按逆时针方向旋转到△$ACD'$ 的位置，求∠$ADD'$ 的大小．

3. 如图，边长为 3 的正方形 $ABCD$ 绕点 $C$ 按顺时针方向旋转 30° 后得到正方形 $EFCG$，$EF$ 交 $AD$ 于 $H$．求 $DH$ 的长．




（第 2 题）




（第 3 题）

## 综合与实践

### 图案设计

许多美丽的图案都是用平移、旋转的方法绘制而成的．如图 23－23，观察它们的变化规律，你能设计一些类似的图案吗？试试看！

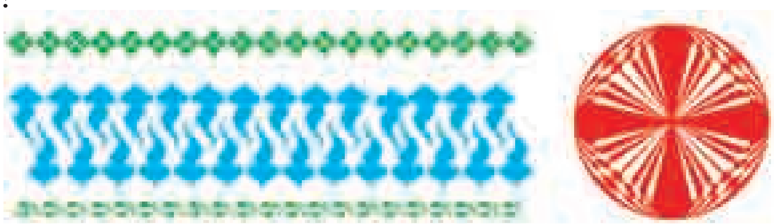


图 23－23

## 习　题　23－2

### ★基础★

1. 任意画一个$\triangle ABC$，作下列旋转：

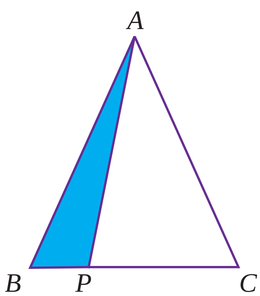
(1) 以$A$为中心，把这个三角形逆时针旋转40°；

(2) 以$B$为中心，把这个三角形顺时针旋转60°；

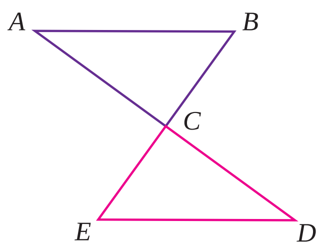
(3) 在三角形外任取一点为中心，把这个三角形顺时针旋转120°；

(4) 以$AC$中点为中心，把这个三角形旋转180°.

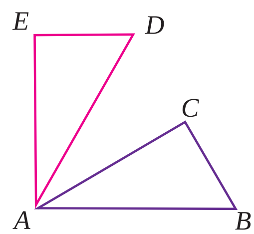
2. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$P$是$BC$边上任意一点．以点$A$为中心，取旋转角等于$\angle BAC$，把$\triangle ABP$逆时针旋转，画出旋转后的图形．




（第2题）




（第3题）



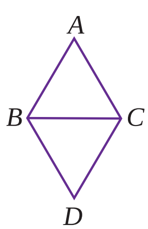

（第4题）

3. 如图，$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle ACB=90°$．$\triangle ABC$旋转后能与$\triangle DEC$重合，如果点$B$，$C$，$E$三点在同一直线上，那么：

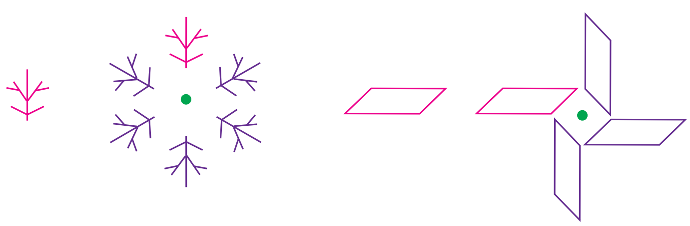
(1) 旋转中心是哪一点？(2) 旋转角的度数是多少？(3) $DE$和$AB$的位置关系怎样？

4. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle B=60°$，$AC=1$．如果将$\triangle ABC$绕点$A$逆时针旋转60°到$\triangle ADE$的位置，求$EC$的长．

5. 如图，如果等边三角形$ABC$旋转后能与等边三角形$DCB$重合，那么在图形所在的平面上可以作为旋转中心的点有几个？分别说明其旋转的方向．




（第5题）



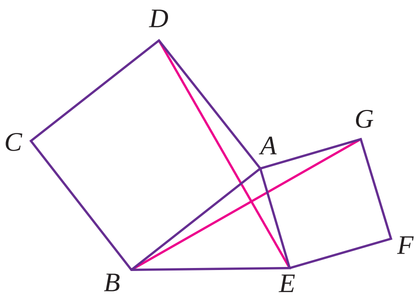
（第6题）

6. 如图，其中的图形都是由一个基本图形经过旋转得到的，分别指出旋转中心和旋转角的大小．

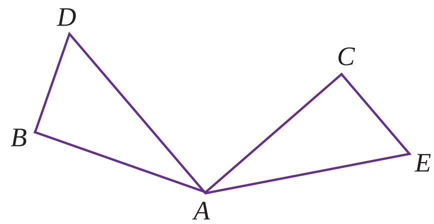
7. 四边形 $ABCD$ 各顶点的坐标分别为 $A(5, 0)$，$B(-2, 3)$，$C(-1, 0)$，$D(-1, -5)$，作出与四边形 $ABCD$ 关于原点 $O$ 对称的图形．

## ★★提升★★

1. 如图，如果四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 都是正方形，那么将 $\triangle ADE$ 旋转某一角度后，能不能与 $\triangle ABG$ 重合？如果能重合，那么旋转中心是什么，旋转角的度数是多少？

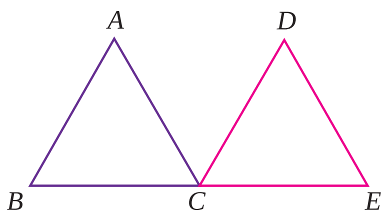


（第 1 题）

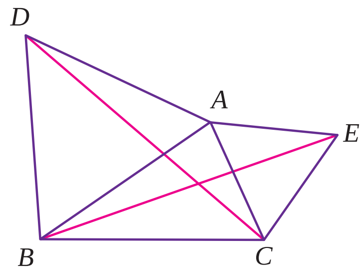


（第 2 题）

2. 如图，如果 $\triangle BAD$ 与 $\triangle CAE$ 是能够重合的图形，其中 $\angle BAD = \angle CAE = 30°$，$AB = AC$，$AD = AE$，且 $\angle DAC = 90°$．那么旋转中心是什么？旋转角的度数是多少？
3. 如图，$\triangle ABC$，$\triangle DCE$ 是能够重合的等边三角形，且 $B$，$C$，$E$ 三点在同一条直线上．如果将 $\triangle ABC$ 绕点 $C$ 旋转，那么旋转角最小是多少度时能与 $\triangle DCE$ 重合？



（第 3 题）



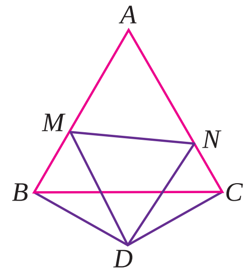
（第 4 题）

4. 如图，$\triangle ABD$，$\triangle AEC$ 都是等边三角形．$BE$ 与 $DC$ 有什么关系？你能用旋转的性质说明上述关系成立的理由吗？

## ★★★拓展★★★

1. 直线 $y = 2x + 2$ 与 $x$ 轴，$y$ 轴分别交于 $A$，$B$ 两点，将 $\triangle AOB$ 绕点 $O$ 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle A_1OB_1$，求经过 $A$，$A_1$，$B_1$ 三点的抛物线的表达式．

2. 如图，$D$ 是等边三角形 $ABC$ 外一点，且满足 $DB=DC$，$\angle BDC=120°$．$M$，$N$ 分别是 $AB$，$AC$ 上的点，且 $\angle MDN=60°$．当 $\angle MDN$ 绕点 $D$ 旋转时，$MN$，$BM$，$CN$ 的关系是否发生变化？请简述理由．



（第 2 题）

## 23.3 轴对称变换

**思考**

1. 什么叫轴对称图形？轴对称图形有什么性质？你能举出学习过的轴对称图形吗？

2. 观察以下两组图案，你能分别说出最后图案的形成过程吗？

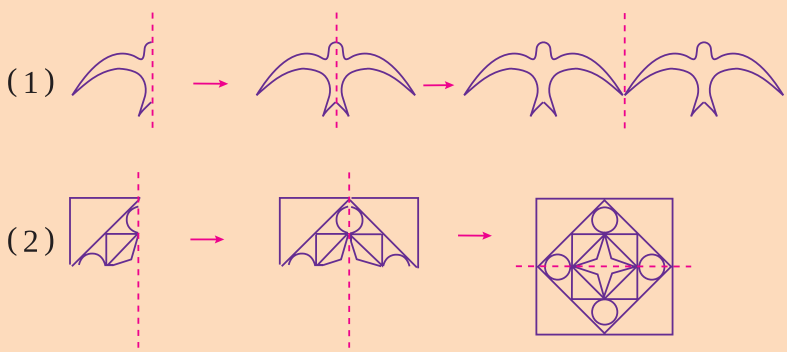


图 23－24

**实践**

1. 图 23－25 给出了某图形的一部分，请你先画出这部分图形关于直线 $l_1$ 对称的图形，再画出所得到的对称图形关于直线 $l_2$ 对称的图形．

2. 请你在图 23－26 的正方形内填充适当图案，使它们和正方形内

的已知图案关于虚线所在直线对称，然后和同学们交流．

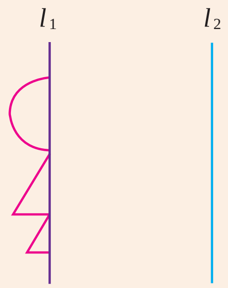



图 23－25

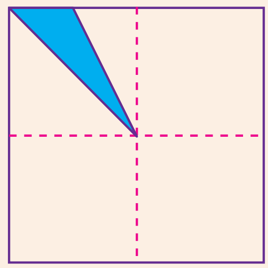


图 23－26

像这样，由一个平面图形得到它的轴对称图形的图形运动称为**轴对称变换**．

利用轴对称变换，可以设计出美丽的图案．在许多美术作品中，都可以看到轴对称的例子（图 23－27）．

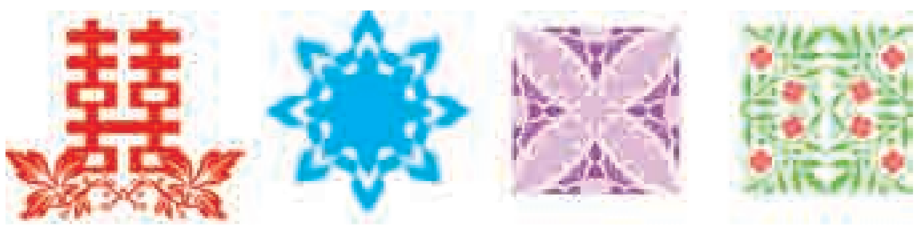


图 23－27

有时，将平移、旋转和轴对称结合起来，可以设计出更美丽的图案．许多镶边和背景图案就是这样设计出来的（图 23－28）．

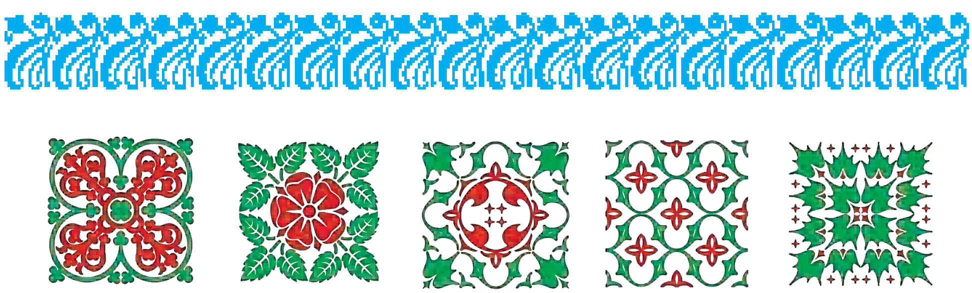


图 23－28

成轴对称的两个图形中的任何一个可以看做由另一个图形经过轴对称变换后得到，一个轴对称图形也可以看做以它的一部分为基础，经轴对称变换而成．

在平面直角坐标系中，关于 $x$ 轴对称的两个点的坐标有什么关系？关于 $y$ 轴对称的两个点的坐标有什么关系？

**思考**

实际上，可以得到下列结论：

- 点 $P(x, y)$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $P_1(x, -y)$；
- 点 $P(x, y)$ 关于 $y$ 轴的对称点为 $P_2(-x, y)$．

**例 1** 如图 23－29，四边形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(-5, 1)$，$B(-2, 1)$，$C(-2, 5)$，$D(-5, 4)$．请作出与四边形 $ABCD$ 关于 $y$ 轴对称的图形．

**解：** 点 $P(x, y)$ 关于 $y$ 轴对称的点坐标为 $P'(-x, y)$，因此，四边形 $ABCD$ 的顶点 $A$，$B$，$C$，$D$ 关于 $y$ 轴对称的点分别为 $A'(5, 1)$，$B'(2, 1)$，$C'(2, 5)$，$D'(5, 4)$．依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，就可得到与四边形 $ABCD$ 关于 $y$ 轴对称的四边形 $A'B'C'D'$．

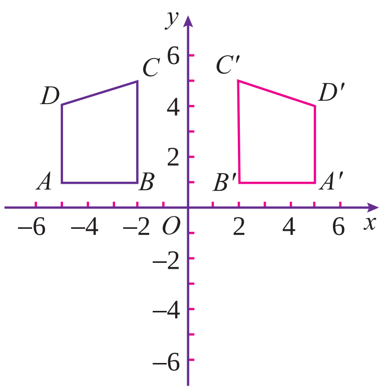



图 23－29

请你在图 23－29 上作出与四边形 $ABCD$ 关于 $x$ 轴对称的图形．

**例 2** 如图 23－30，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$．现将点 $A$，$C$ 重合，使纸片折叠压平，设折痕为 $EF$，请计算重叠部分△$AEF$ 的面积．

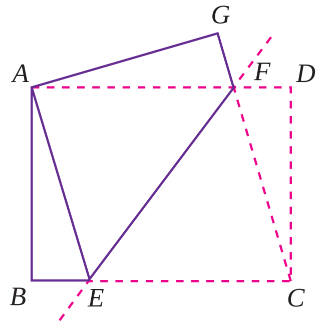


图 23－30

**分析：** 通过折叠，直角梯形 $ECDF$ 变为直角梯形 $EAGF$，△$CEF$ 变为△$AEF$．$EF$ 所在直线是它们的对称轴．折叠实际上是图形的轴对称变换．

**解：** 将矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 $EF$ 折叠，点 $A$，$C$ 重合，

$\therefore \quad \triangle CEF \cong \triangle AEF.$

$\therefore \quad AE=CE.$

设 $CE=x$，则 $AE=CE=x$，$BE=4-x$．

在 Rt△$ABE$ 中，$AE^2=AB^2+BE^2$，

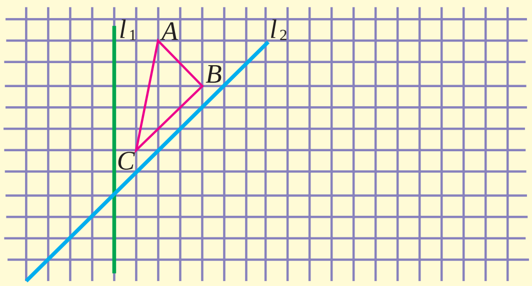
$\therefore \quad x^2=3^2+(4-x)^2.$

解得 $\quad x=\dfrac{25}{8}.$

$$\therefore \quad S_{\triangle AEF}=S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}CE\cdot AB=\frac{1}{2}\times\frac{25}{8}\times 3=\frac{75}{16}.$$

## 练习

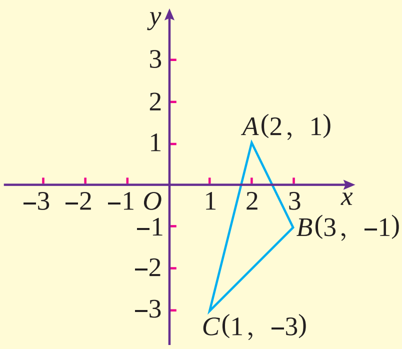
1. 先画出△$ABC$ 关于直线 $l_1$ 对称的图形△$A_1B_1C_1$，再画出△$A_1B_1C_1$ 关于直线 $l_2$ 对称的图形△$A_2B_2C_2$．



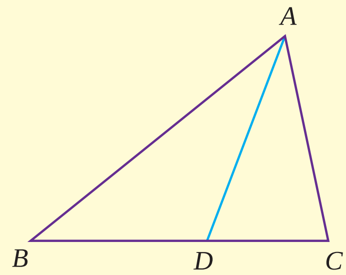
（第 1 题）

2. 如图，利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点，分别画出△$ABC$ 关于 $x$ 轴和 $y$ 轴对称的图形．

3. 如图，在△$ABC$ 中，$AD$ 是∠$BAC$ 的角平分线，$AB = AC + CD$．求证：∠$C$ = 2∠$B$．



（第 2 题）

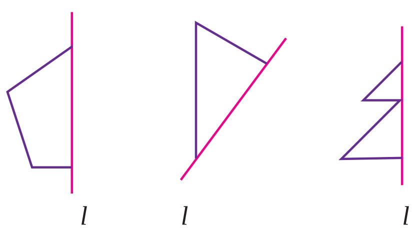


（第 3 题）

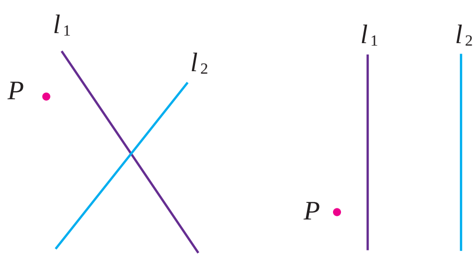
## 习 题 23－3

### ★基础★

1. 把下列各图形补成关于直线 $l$ 对称的图形．



（第 1 题）

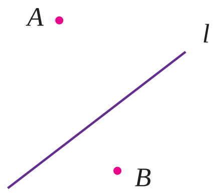


（1）　（2）

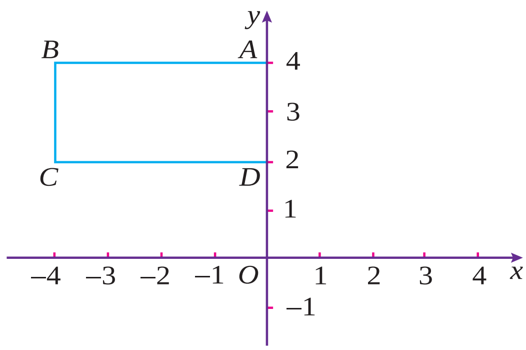
（第 2 题）

2. 请你分别在图（1）、图（2）中画出点 $P$ 关于直线 $l_1$ 对称的点 $P'$，再画出点 $P'$ 关于直线 $l_2$ 对称的点 $P''$．

3. 如图所示，村庄 $A$，$B$ 分别在笔直公路 $l$ 的两侧．一辆汽车在公路 $l$ 上行驶，汽车在什么位置时到 $A$，$B$ 两村庄的距离相等？请找出这个点，并说明理由．




（第 3 题）




（第 4 题）

4. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$A(0,\ 4)$，$B(-4,\ 4)$，$C(-4,\ 2)$.

（1）请写出 $D$ 点坐标；

（2）作出矩形 $ABCD$ 关于 $y$ 轴对称的图形 .

## ★★ 提升 ★★

1. 在平面直角坐标系中，直线 $l$ 过点 $M(3,\ 0)$，且平行于 $y$ 轴．如果△$ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(-2,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$，$C(-1,\ 2)$，△$ABC$ 关于 $y$ 轴的对称图形是△$A_1B_1C_1$，△$A_1B_1C_1$ 关于直线 $l$ 的对称图形是△$A_2B_2C_2$，写出△$A_2B_2C_2$ 的三个顶点的坐标 .
2. 如图，要在燃气管道 $l$ 上修建一个泵站，分别向 $A$，$B$ 两城镇供气．泵站修在管道的什么位置，可使所用的输气管线最短？


（第 2 题）

## ★★★ 拓展 ★★★

直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于点 $A$ 和点 $B$，$M$ 是 $OB$ 上的一点．如果将△$ABM$ 沿 $AM$ 折叠，点 $B$ 恰好落在 $x$ 轴上的点 $B'$ 处，求直线 $AM$ 的表达式 .

# 23.4 位似变换

在日常生活中，我们经常见到下面一类相似的图形（图 23 − 31）：通过幻灯机，把图片上的图形放大到屏幕上；摄影师通过照相机，把景物的影像缩小在底片上 .

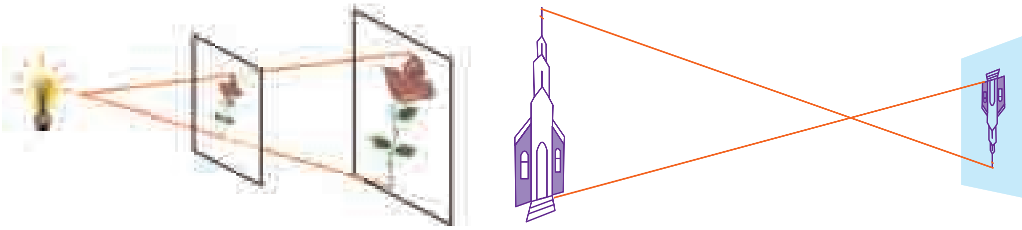


图 23 − 31

这样的放大或缩小，没有改变图形形状，经过放大或缩小的图形与原图形是相似的 . 因此，我们可以得到真实的图片和照片 .

**探索**

首先，我们来证明如下的命题：

如图 23 − 32，$O$ 是 $\triangle ABC$ 外的一点，作射线 $OA$，$OB$，$OC$，在射线 $OA$，$OB$，$OC$ 上分别取三点 $A'$，$B'$，$C'$，使 $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}$，那么 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

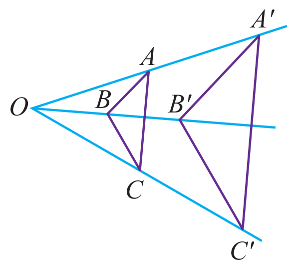



图 23 − 32

其次，我们研究上面命题是否可以推广到多边形的情况：

如图 23 − 33，$O$ 是四边形 $ABCD$ 外的一点，作射线 $OA$，$OB$，$OC$，$OD$，在射线 $OA$，$OB$，$OC$，$OD$ 上分别取四点 $A'$，$B'$，$C'$，$D'$，使 $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}=\dfrac{OD'}{OD}$，那么四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 相似吗？

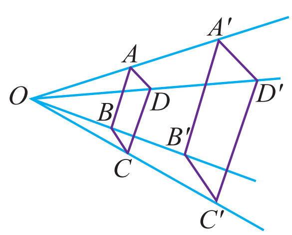



图 23 − 33

图 23 − 32、图 23 − 33 中的两个多边形不仅相似，而且对应点的连线相交于一点，像这样的两个图形叫做**位似图形**．其中交点 $O$ 叫做**位似中心**．

利用位似的方法，可以把一个多边形放大或缩小．

**例 1** 任意画一个四边形，不改变图形的形状，把它的各边长缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ．

**解：** 如图 23 − 34，在四边形 $ABCD$ 外任意取一点 $O$，作射线 $OA$，$OB$，$OC$，$OD$，然后分别在射线 $OA$，$OB$，$OC$，$OD$ 上取点 $A'$，$B'$，$C'$，$D'$，使得 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$，顺次连接点 $A'$，$B'$，$C'$，$D'$，四边形 $A'B'C'D'$ 就是所要求作的图形．

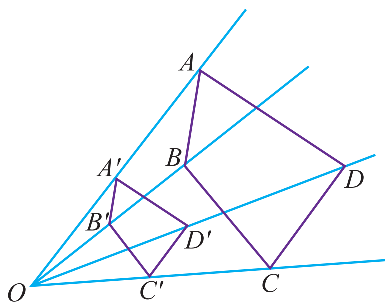


图 23 − 34

想一想，还可以把位似中心取在哪里?

像这样，由一个平面图形得到它的位似图形的图形运动称为**位似变换**．

**实践**

利用下面的方法可以将一个图形放大：

如图 23 − 35，用螺钉把四根直尺在 $A$，$B$，$C$，$D$ 四处互相连接起来，使连接处可以转动，并使四边形 $ABCD$ 形成一个平行四边形．在 $CB$ 尺上选一点 $O$，使 $B$ 介于 $C$，$O$ 之间．在 $O$ 处装上一根针，这根针的作用在于能把 $O$

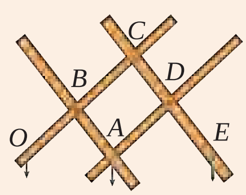


图 23 − 35

固定在图板上的某一点；再在 $CD$ 尺上选一点 $E$，使 $O$，$A$，$E$ 三点共线；最后在 $A$ 处装上一根针，$E$ 处装上一支铅笔．

使用的时候，将 $O$ 点固定，让 $A$ 处的针描画已知图形，那么 $E$ 处的铅笔便会随着画出相似的图形来．

## 实践

1. 如图 23－36，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(1,\ 3)$，$B(1,\ 1)$，$C(6,\ 2)$，以点 $O$ 为位似中心，相似比为 2，将 $\triangle ABC$ 放大．观察对应顶点坐标的变化，你有什么发现？

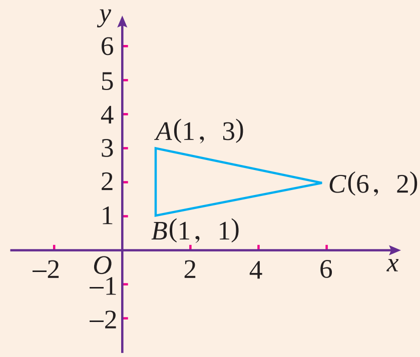



图 23－36

2. 如图 23－37，利用计算机或图形计算器在平面直角坐标系中画一个 $\triangle ABC$，以点 $O$ 为位似中心，自选相似比为 $k$，进行位似变换，得到 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A''B''C''$．

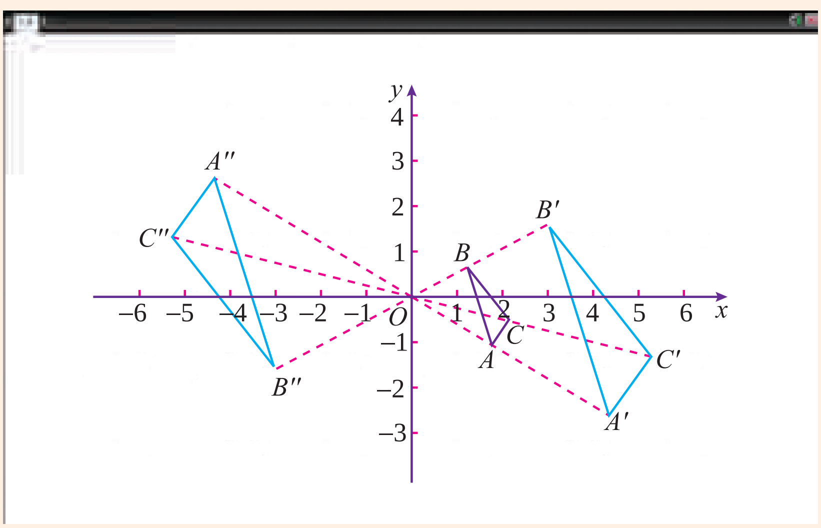



图 23－37

（1）确定点 $A'$，$A''$ 的横坐标，并分别计算它们与点 $A$ 的横坐标的比值．

（2）确定点 $A'$，$A''$ 的纵坐标，并分别计算它们与点 $A$ 的纵坐标的比值．观察比值与 $k$ 有什么关系．其他对应点呢？

任意改变△$ABC$ 的位置，上面得出的结论是否仍然成立？

可以得到：

在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 $k$，那么位似图形对应点的对应坐标的比等于 $k$ 或 $-k$．

**例 2** 已知：△$ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(2，4)$，$B(4，0)$，$C(6，0)$．在第一象限内画出它的一个以原点 $O$ 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ 的位似图形．

**作法：** 如图 23－38，利用位似变换中对应点的坐标的变化规律，点 $A$ 的对应点 $A'$ 的坐标为 $\left(2\times\frac{1}{2},\ 4\times\frac{1}{2}\right)$，即 $(1，2)$．类似的，可以确定点 $B'$，$C'$ 的坐标分别为 $(2，0)$，$(3，0)$．依次连接点 $A'$，$B'$，$C'$，△$A'B'C'$ 就是所要求作的△$ABC$ 的位似图形．

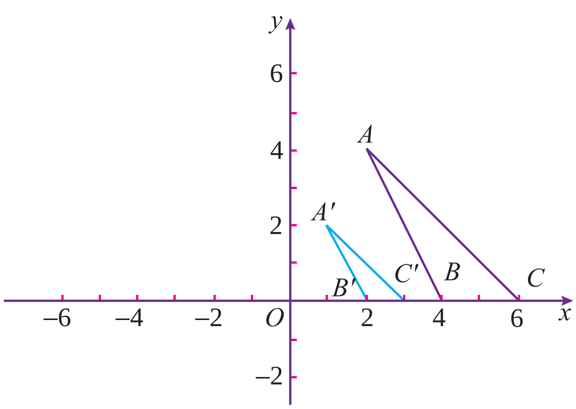
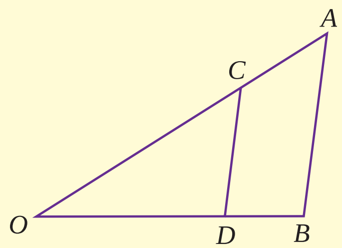


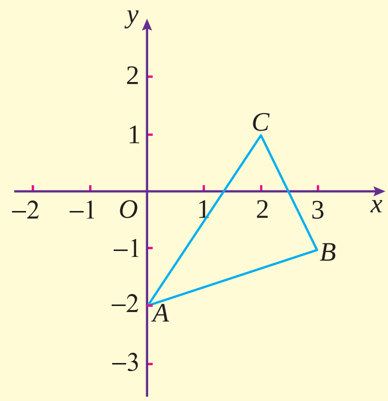

图 23－38

## 练习

1. 如图，$\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 是位似图形，$AB$ 与 $CD$ 平行吗？请说明理由 .
2. 任意画一个五边形，不改变图形的形状，再把它的各边长放大为原来的 3 倍 .
3. 如图，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(0, -2)$，$B(3, -1)$，$C(2, 1)$. 以原点 $O$ 为位似中心，将这个三角形放大为原来的 2 倍 .




（第 1 题）

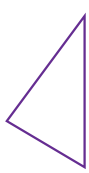



（第 3 题）

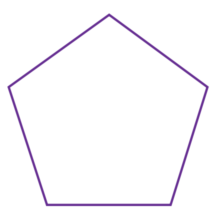
## 习 题 23－4

### ★基础★

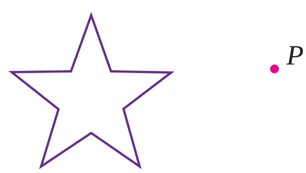
1. 如图，将三角形放大，使放大后的三角形与原三角形对应边的比为 2 : 1.



（第 1 题）



（第 2 题）




（第 3 题）

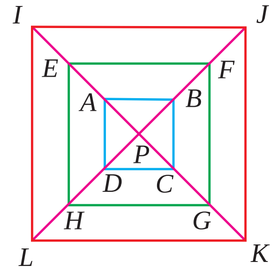
2. 如图，将五边形缩小，使缩小后的五边形与原五边形对应线段的比是 1 : 3.
3. 如图，以点 $P$ 为位似中心，将五角星缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ .

## ★★提升★★

1. 如图，正方形 $EFGH$，$IJKL$ 是由正方形 $ABCD$ 经过位似变换得到的，点 $P$ 是位似中心，其中 $PA = AE = EI$.

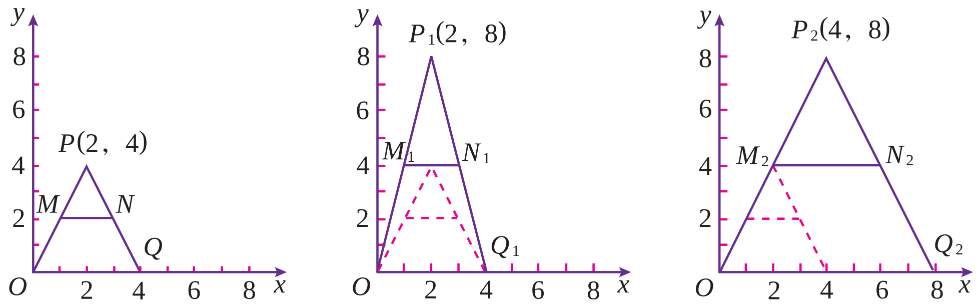
(1) 如果相似比为 3，正方形 $ABCD$ 的位似图形是哪个正方形？

(2) 如果由正方形 $ABCD$ 得到它的位似图形正方形 $EFGH$，求其相似比.



(第 1 题)

2. 如图所示，在平面直角坐标系中，图(1)中的 A 状图案经过变换后分别变成图(2)、图(3)中的图案(虚线对应于原图案)，请写出相应点的坐标，并指出对应点坐标之间的关系.

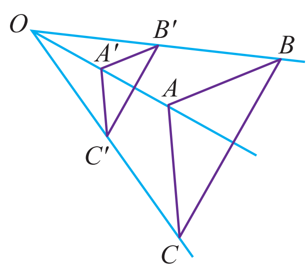


(1)　(2)　(3)

(第 2 题)

## ★★★拓展★★★

如图，利用直尺、计算机或图形计算器任意画一个△$ABC$，以点 $O$ 为位似中心，自选相似比 $k$，进行位似变换，得到△$A'B'C'$. 度量线段 $OA$，$OA'$，$OB$，$OB'$，$OC$，$OC'$ 的长，你有什么发现？任意改变△$ABC$ 的位置，得出的结论是否仍然成立？



## 阅读理解

# 绝妙的证明

有这样一道几何证明题：

如图 23－39，$ABCD$ 为任意给定的四边形，$AB$，$BC$，$CD$，$DA$ 边的中点分别是 $E$，$F$，$G$，$H$．连接 $EG$ 和 $HF$．

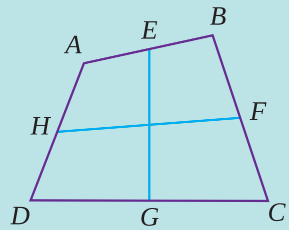


图 23－39

证明：$S_{四边形ABCD} \leqslant EG \cdot HF \leqslant \frac{1}{2}(AB+CD) \cdot \frac{1}{2}(AD+BC)$.

我国数学家华罗庚对这道题有一个绝妙的证明：

如图 23－40，他把四边形沿对边中点连线划分为四个小四边形，分别记作“改、造、山、河”．然后，他让“改”字块不动，挪动其余三块：将“造”字块绕点 $H$ 旋转 180°；再将“河”字块绕点 $E$ 旋转 180°；最后将“山”字块平移，让点 $C$ 与点 $D$ 重合．有趣的是，这样挪动后的新图形竟然是一个平行四边形（图 23－41）！它的两条邻边就是原四边形对边中点的连线．我们知道，一个平行四边形的面积总是不大于两条邻边边长的乘积，这就证明了前一个不等式．

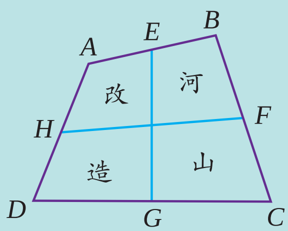


图 23－40

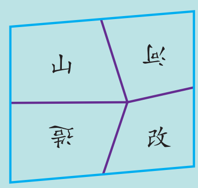


图 23－41

如图 23－42，再将原图绕 $F$ 点旋转 180°，利用三角形两边之和大于第三边，就得到上、下边长之和的一半大于左、右对边中点连线的长．同理可证，左、右边长之和的一半大于上、下对边中点连线的长．这就证明了后一个不等式．

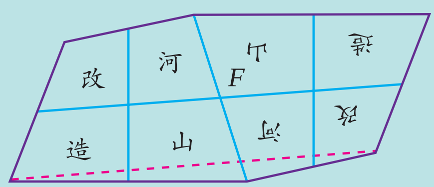


图 23－42

## 回顾与整理

### 知识要点

1. 在平面内，将一个图形沿某个方向移动一定的距离，得到一个新的图形，这样的图形运动称为平移变换.

2. 在平面内，将一个图形绕一个定点沿顺时针或逆时针方向转动一个角度，得到一个新的图形，这样的图形运动称为旋转变换.

3. 由一个平面图形得到它的轴对称图形的图形运动称为轴对称变换.

4. 由一个平面图形得到它的位似图形的图形运动称为位似变换.

平移变换、旋转变换、轴对称变换都不改变图形的形状和大小；位似变换不改变图形的形状，可以改变图形的大小.

### 学习指导

1. 图形变换是对物体运动的数学抽象. 理解各种图形变换的概念，要从物体的运动变化入手，这是认识各种图形变换的重要途径.

例如，通过观察跑道上滑行的飞机的运动，找出运动规律，从而认识图形的平移变换.

又如，通过观察电风扇的扇叶和钟的指针转动等实例，找出运动规律，从而认识图形的旋转变换.

2. 要注意几种图形变换的相同点和不同点. 平移、旋转与轴对称变换是一个几何图形运动到一个新的位置后，这个图形上任意两点的距离保持不变（即保距变换）；位似变换是一个几何图形在运动前、后的对应线段之比总为定值，而角的大小则保持不变（即保角变换）.

## 复　习　题

### ★基础★

1. 选择题：

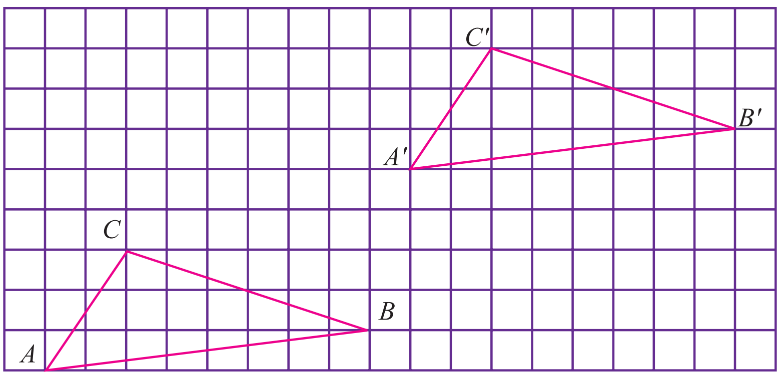
(1) 如图，$\triangle A'B'C'$ 是由 $\triangle ABC$ 平移得到的，下列说法错误的是（　　）.

A. 将 $\triangle ABC$ 先向右平移 9 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度就得到 $\triangle A'B'C'$

B. 将 $\triangle ABC$ 先向上平移 5 个单位长度，再向右平移 9 个单位长度就得到 $\triangle A'B'C'$

C. 将 $\triangle ABC$ 沿着 $CC'$ 的方向，平移的距离等于线段 $CC'$ 的长，就得到 $\triangle A'B'C'$

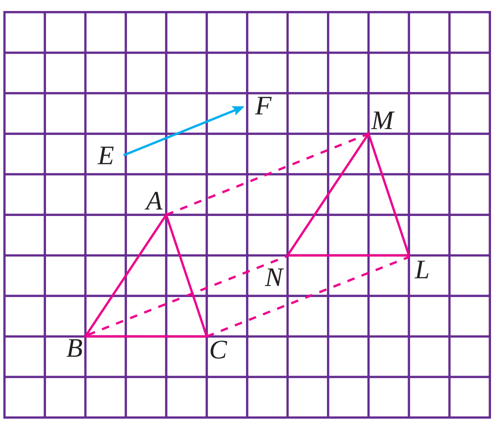
D. 将 $\triangle ABC$ 沿着 $C'C$ 的方向，平移的距离等于线段 $CC'$ 的长，就得到 $\triangle A'B'C'$



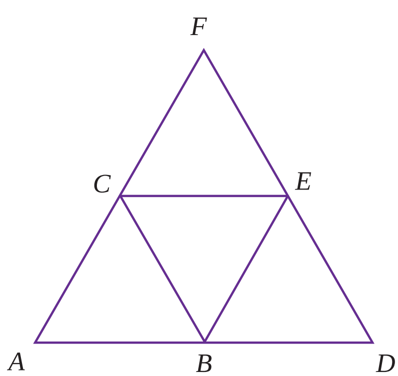

[ 第 1(1) 题 ]

(2) 如图，将 $\triangle ABC$ 沿着 $EF$ 方向平移一定的距离到 $\triangle MNL$. 现有下列四个结论：① $AM \parallel BN$；② $AM = BN$；③ $BC = NL$；④ $\angle ACB = \angle MNL$. 其中正确的有（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个




[ 第 1(2) 题 ]




[ 第 1(3) 题 ]

（3）如图，$\triangle ABC$，$\triangle BDE$，$\triangle CEF$，$\triangle BEC$ 是四个等边三角形．下列说法正确的是（　　）．

A. 将$\triangle ABC$平移可得到其余的三个等边三角形

B. 将$\triangle ABC$绕点 $B$ 旋转可得到其余的三个等边三角形

C. 将$\triangle ABC$绕点 $C$ 旋转可得到其余的三个等边三角形

D. 将$\triangle ABC$旋转可得到其余的三个等边三角形，而不必平移

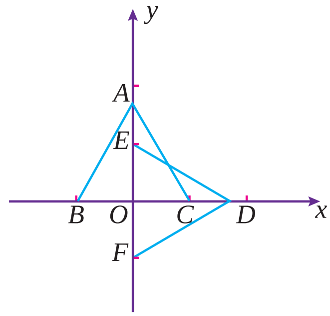
（4）如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别为 $A(0, \sqrt{3})$，$B(-1, 0)$，$C(1, 0)$．如果$\triangle DEF$ 各顶点的坐标分别为 $D(\sqrt{3}, 0)$，$E(0, 1)$，$F(0, -1)$，则下列判断正确的是（　　）．

A. $\triangle DEF$ 由$\triangle ABC$ 绕点 $O$ 顺时针旋转 90° 得到

B. $\triangle DEF$ 由$\triangle ABC$ 绕点 $O$ 逆时针旋转 90° 得到

C. $\triangle DEF$ 由$\triangle ABC$ 绕点 $O$ 顺时针旋转 60° 得到

D. $\triangle DEF$ 由$\triangle ABC$ 绕点 $O$ 顺时针旋转 120° 得到

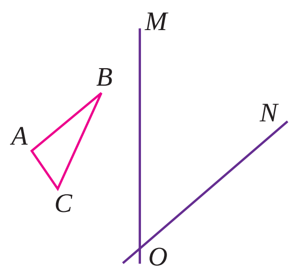



［第 1(4) 题］

2. 如图，图（1）、图（2）都是一个图形经过两次轴对称变换之后得到的图形，图（1）中的两条对称轴是平行的，图（2）中的两条对称轴是垂直的．图（1）中的图形除了经过两次轴对称变换得到之外，还可以通过我们学习过的________得到；图（2）中的图形可以通过________得到．

（1）　　　　（2）

（第 2 题）



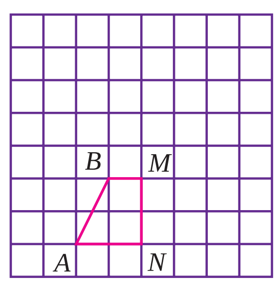

（第 3 题）

3. 如图，画出$\triangle ABC$关于直线 $OM$ 对称的$\triangle A'B'C'$，再画出$\triangle A'B'C'$关于直线 $ON$ 对称的$\triangle A''B''C''$．观察$\triangle ABC$ 与$\triangle A''B''C''$，你能发现这两个三角形之间有什么关系吗？$\triangle A''B''C''$ 能否由$\triangle ABC$ 旋转得到？

4. 如图，梯形 $ABMN$ 是直角梯形．

（1）请在图中补上一个直角梯形，使它与梯形 $ABMN$ 构成一个等腰梯形；

（2）将补上的直角梯形以点 $M$ 为旋转中心，逆时针旋转 180°，再向上平移一格，画出这个直角梯形．




（第 4 题）

5. 根据下列点坐标的变化，判断它们进行了怎样的变换：

(1) $(-1，3)\to(-1，-3)$；　　(2) $(-5，-6)\to(-5，-1)$；

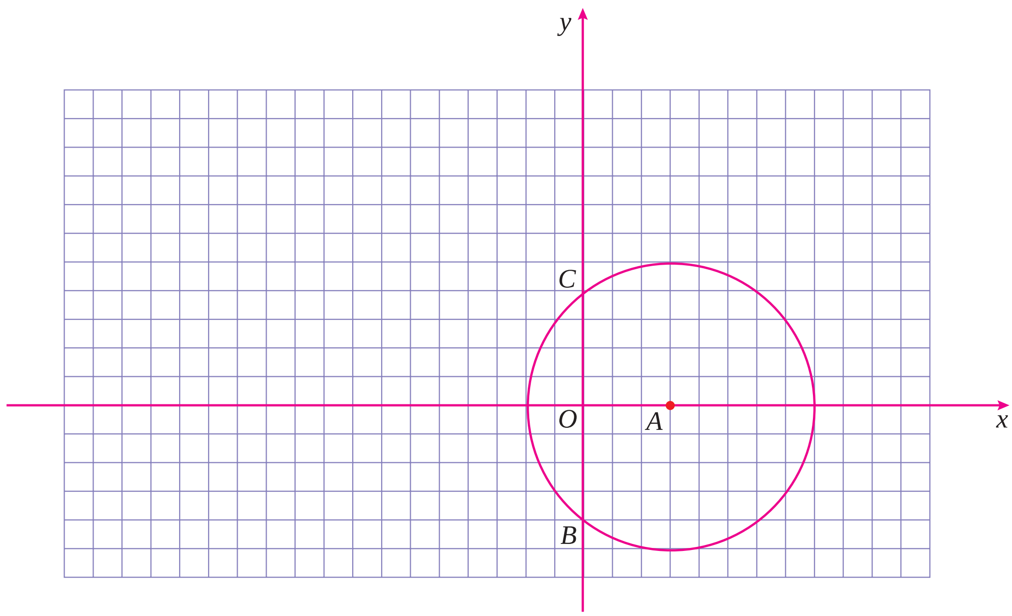
(3) $(3，4)\to(-3，4)$；　　(4) $(-2，3)\to(2，-3)$；

(5) $(4，8)\to(2，4)$.

6. 如图，正方形网格中，每个小正方形的边长为 1 个单位长度，以 $O$ 为原点建立平面直角坐标系．圆心为 $A(3，0)$ 的⊙ $A$ 被 $y$ 轴截得的弦长 $BC=8$．解答下列问题：

(1) ⊙ $A$ 的半径为________.

(2) 请在图中将⊙ $A$ 先向上平移 6 个单位长度，再向左平移 8 个单位长度得到⊙ $D$，观察你所画的图形．⊙ $D$ 的圆心 $D$ 的坐标是________；⊙ $D$ 与 $x$ 轴的位置关系是________；⊙ $D$ 与 $y$ 轴的位置关系是________.



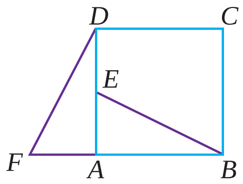

（第 6 题）

## ★★ 提升 ★★

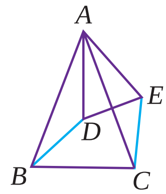
1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是 $AD$ 的中点，$F$ 是 $BA$ 延长线上的一点，$AF=\frac{1}{2}AB$.

(1) 证明：$\triangle ABE\cong\triangle ADF$；

(2) 在图中，可以通过平移、轴对称、旋转中的哪一种变换，使 $\triangle ABE$ 变换到 $\triangle ADF$ 的位置?



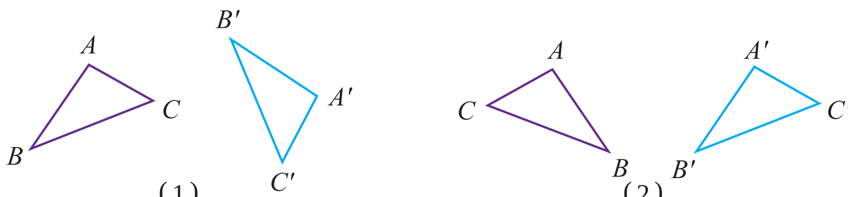

（第 1 题）




（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABC$，$\triangle ADE$ 均是顶角为 $42°$ 的等腰三角形，$BC$，$DE$ 分别是底边．图中的哪两个三角形可以通过怎样的旋转而相互得到？

3. 用硬纸板剪出两个同样大小的三角形，按照下列两种情况将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 放在桌面上．

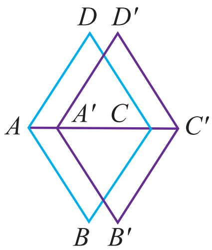



（第 3 题）

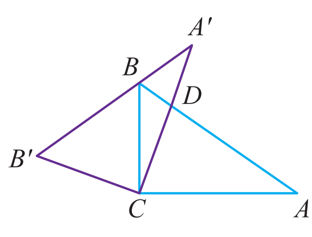
请你动手试一试，如何通过平移、旋转与轴对称将 $\triangle ABC$ 运动到 $\triangle A'B'C'$，使两者互相重合．再与你的伙伴们交流一下，看看谁的方法多．

## ★★★ 拓展 ★★★

1. 如图，把菱形 $ABCD$ 沿着对角线 $AC$ 的方向移动到菱形 $A'B'C'D'$ 的位置，它们的重叠部分的面积是菱形 $ABCD$ 的面积的一半，如果 $AC = \sqrt{2}$，求菱形平行移动的距离 $AA'$.




（第 1 题）




（第 2 题）

2. 如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$\angle A = 35°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 $C$ 旋转到 $\triangle A'B'C$ 的位置，其中 $A'$，$B'$ 分别是 $A$，$B$ 的对应点，且点 $B$ 在斜边 $A'B'$ 上，直线 $CA'$ 交 $AB$ 于 $D$，这时 $\angle BDC$ 的度数是多少？

3. 如图，先阅读图形的操作过程（本题中四个矩形的水平方向的边长均为 $a$ 个单位长度，竖直方向的边长均为 $b$ 个单位长度），再解答问题.

在图（1）中，将线段 $A_1A_2$ 向右平移 1 个单位长度到 $B_1B_2$，得到封闭图形 $A_1A_2B_2B_1$（即蓝色部分）；

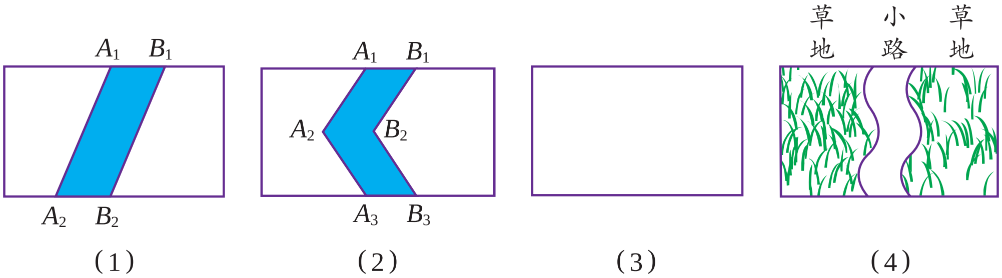
在图（2）中，将折线 $A_1A_2A_3$ 向右平移 1 个单位长度到 $B_1B_2B_3$，得到封闭图形 $A_1A_2A_3B_3B_2B_1$（即蓝色部分）.

（1）类似的，在图（3）中，请你画一条有两个折点的折线，同样向右平移 1 个单位长度，从而得到一个封闭图形，并填充颜色.

（2）请你分别写出上述 3 个图形中除去填充颜色部分后剩余部分的面积：

$S_1=$ ______，$S_2=$ ______，$S_3=$ ______.

（3）如图（4），在一块矩形草地上，有一条弯曲的柏油路（小路任何地方的水平宽度都是 1 个单位长度）. 请你猜想草地面积是多少，并说明你的猜想是正确的.




（第 3 题）

# 第二十四章
# 投影、视图与展开图

物体在光的映照下会留下影子，这是我们非常熟悉的生活现象．人们将这一现象加以科学抽象，得出投影法则，并广泛用于艺术和工程制图之中．在本章我们将从影子说起，了解一些投影的基本概念，进而学习基本几何体的三视图和平面展开图．

# 24.1 中心投影与平行投影

如图 24－1，物体在灯光或日光的照射下会在某个平面（屏幕、墙壁、地面等）留下影子，而且影子与物体本身的形状有密切的几何关系，这就是生活中常见的投影现象，这个影子就是我们所说的物体的**投影**，照射光线叫做**投影线**，投影所在的平面叫做**投影面**．


（1）


（2）

图 24－1

图 24－2 是三角尺在灯光照射下形成的投影示意图．灯的光线可以看做是从一点发出的，我们把这种投影称为**中心投影**．这个点称为**投影中心**．

由于太阳离我们很远，它的光线可以看做是平行的，我们把在太阳光照射下形成的这种投影称为**平行投影**． 如图 24－3，在平行投影中，如果投影线与投影面垂直，那么这种投影称为**正投影**．

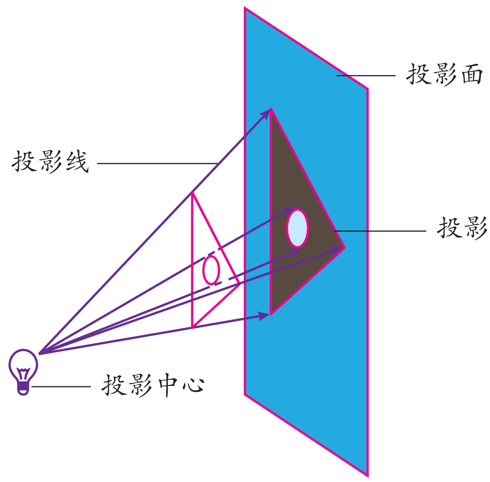


图 24－2

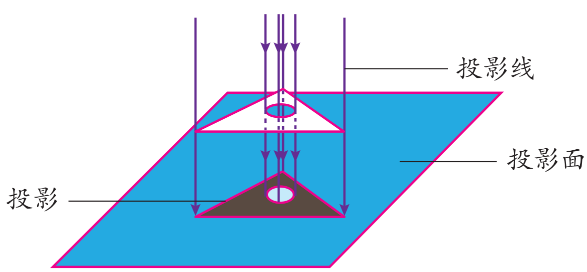


图 24－3

**思考**

1. 在图 24－2 中，把三角尺向投影面平行移动，它的投影的形状和大小是否发生变化?

2. 在图 24－3 中，把三角尺向投影面平行移动，它的投影的形状和大小是否发生变化?

可以看出，在图 24－2 的中心投影中，当我们固定灯泡和投影面的位置，平行移动三角尺时，它的投影会随着三角尺靠近投影面而缩小，远离投影面而放大，但形状不变．在图 24－3 中，当平行移动三角尺时，它的投影形状、大小都不变．由于正投影能够反映物体的真实形状和大小，因此，在工程技术上常采用正投影的方法绘制图纸．

**例 1** 如图 24－4 和图 24－5 分别是在同一时刻木杆的影子，辨认哪幅图所示的投影是中心投影，哪幅图所示的投影是平行投影．

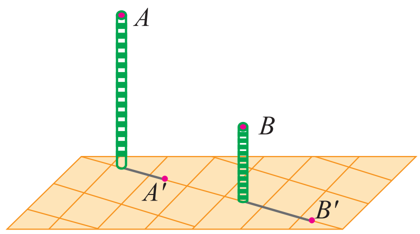


图 24－4

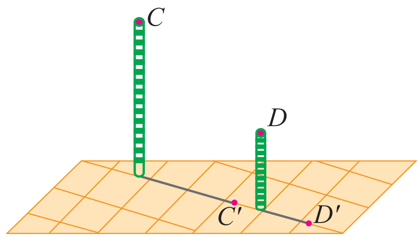


图 24－5

**解:** 如图 24－6，分别连接 $A'A$ 和 $B'B$，并延长 $A'A$，$B'B$，可以发现 $A'A$ 与 $B'B$ 交于点 $P$，即光是从点 $P$ 发出的，因此图 24－4 所示的投影是中心投影．

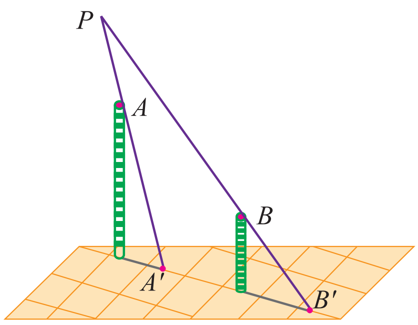


图 24－6

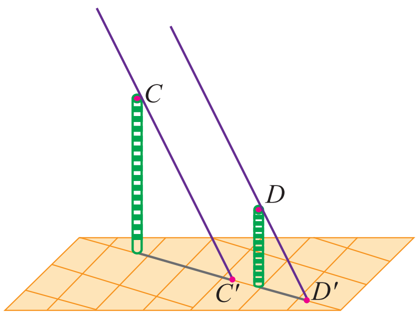


图 24－7

如图 24－7，分别连接 $C'C$ 和 $D'D$，并延长 $C'C$，$D'D$，可以发现 $C'C \parallel D'D$，即光线平行，因此图 24－5 所示的投影是平行投影 .

**例 2** 如图 24－8，分别画出线段 $AB$ 与投影面平行、倾斜和垂直时的正投影，并比较线段 $AB$ 与其投影的大小 .

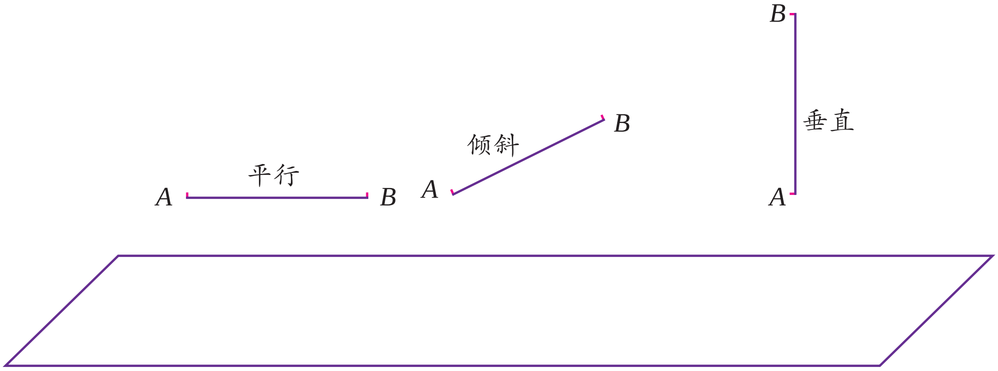



图 24－8

**解：** 可将点 $A$ 的投影点记作 $A'$，点 $B$ 的投影点记作 $B'$，则线段 $AB$ 的投影可记作 $A'B'$.

如图 24－9，当 $AB$ 与投影面平行时，线段 $AB$ 与其投影 $A'B'$ 相等，即 $A'B' = AB$.

当 $AB$ 与投影面倾斜时，它的投影缩短，即 $A'B' < AB$.

当 $AB$ 与投影面垂直时，它的投影缩成一点，即点 $A'$ 与点 $B'$ 重合 .

线段的正投影有什么规律?

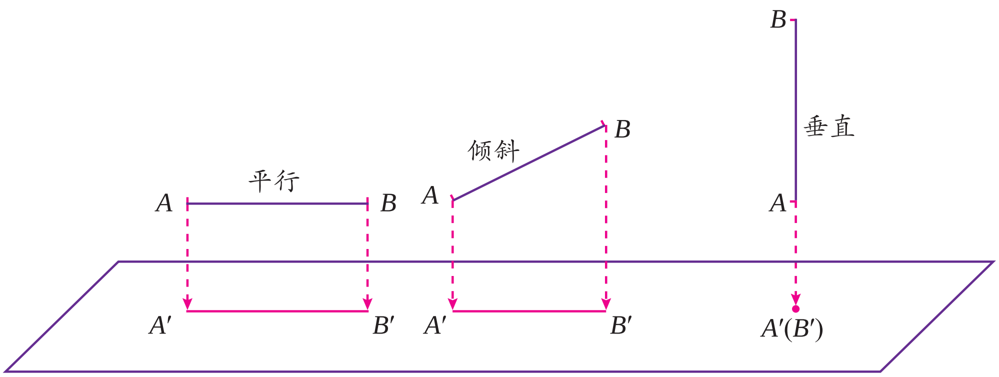


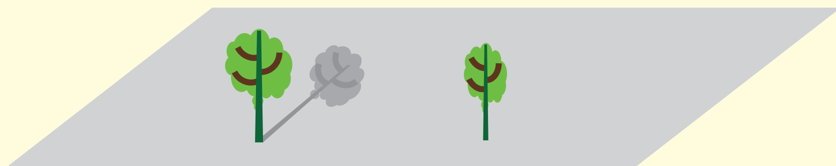

图 24－9

## 交流

把一张矩形硬纸片置于桌面的上方，按平行、倾斜、垂直于桌面放置时，它的正投影可能是怎样的图形？

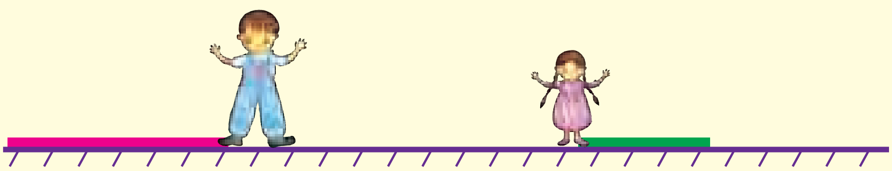
## 练习

1. 观察图 24－1，辨别哪个是中心投影，哪个是平行投影．
2. 如图，用线段表示同一时刻另一棵树在阳光照射下的影长．



（第 2 题）

3. 小华和小明在同一盏路灯下的影长如图所示，请找出路灯的位置．



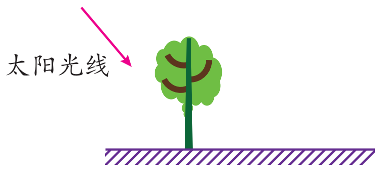
（第 3 题）

## 习题 24－1

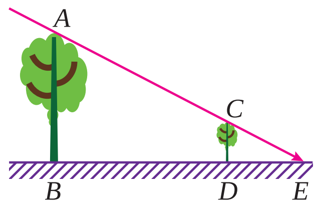
### ★基础★

1. 甲、乙两人同时在太阳光下，他们的身高与其影长的关系是______________.已知甲的身高为 1.7 m，影长为 2.5 m；乙的身高为 1.65 m，那么乙的影长为______________m（精确到 0.01）.

2. 操场上有甲、乙两棵树，甲树高 2.1 m，在阳光下甲树影长为 1.2 m，乙树影长为 1.02 m，求乙树高 .
3. 如图所示，请在图中用线段表示出树的影长 .
4. 如图，某一时刻一缕阳光照在大树梢 $A$，又照到小树梢 $C$，落到地面 $E$ 处，测得 $BD = 11$ m，$CD = 2$ m，$DE = 2.5$ m，试求大树 $AB$ 的高 .



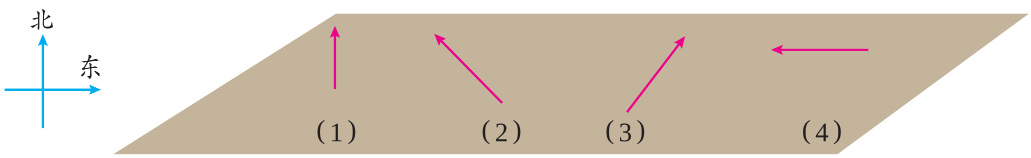
（第 3 题）



（第 4 题）

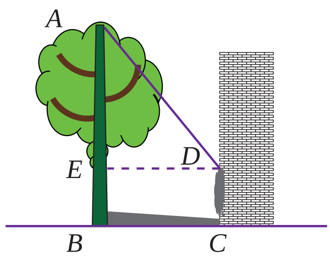
## ★★ 提升 ★★

1. 下图记录的是一棵大树在一天中的四个时刻里因阳光照射而在地面上形成的影子的方向，请你按时间先后顺序进行排序，并说明理由 .



（第 1 题）

2. 数学兴趣小组的同学们想测量校园里一棵大树 $AB$ 的高度 . 他们发现大树的影子恰好落在院墙 $CD$ 和地面 $BC$ 上（如图所示）. 测得 $CD = 1.2$ m，$BC = 2.4$ m，此时测得垂直于地面的 1 m 杆的影长为 0.6 m，求大树 $AB$ 的高度 .



（第 2 题）

## ★★★ 拓展 ★★★

1. 甲在阳光下走了 1 分钟，乙在路灯下也走了 1 分钟，分析一下他们的影长是如何变化的 .
2. 如图所示，灯塔后面有一片小树林，小丽沿着小路正对着灯塔方向走去 . 她看到的小树是愈来愈多，还是愈来愈少？为什么？


（第 2 题）

# 24.2 基本几何体的三视图

**思考**

长方体按图 24－10 摆放．在平行光线下，它分别在 $X$，$Y$，$Z$ 三个相互垂直平面上的正投影是什么图形？

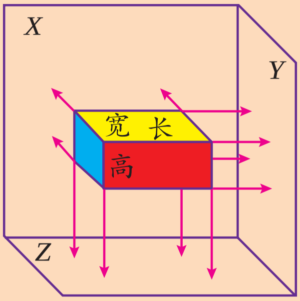


图 24－10

我们把物体的正投影称为**视图**．如图 24－11，长方体在 $X$，$Y$，$Z$ 三个平面上的视图都是矩形．在 $X$ 平面上的矩形一边是长方体的长，另一边是长方体的高；在 $Y$ 平面上的矩形一边是长方体的宽，另一边是长方体的高；在 $Z$ 平面上的矩形一边是长方体的长，另一边是长方体的宽．

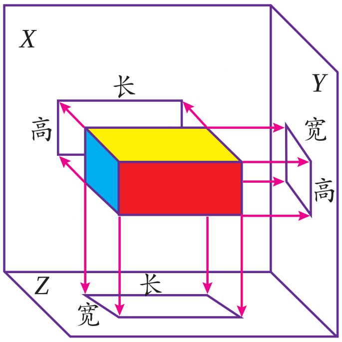


图 24－11

一般地，我们把从物体正面得到的视图称为**主视图**，从物体的左侧面得到的视图称为**左视图**，从物体上面得到的视图称为**俯视图**，把它们统称为**三视图**．

在图 24－11 中，如果把三个两两互相垂直的平面都展开在同一平面上，即分别把投影面 $Y$ 向右旋转 90°、投影面 $Z$ 向下旋转 90°，就可以得到长方体在同一平面上的三视图，如图 24－12 所示．

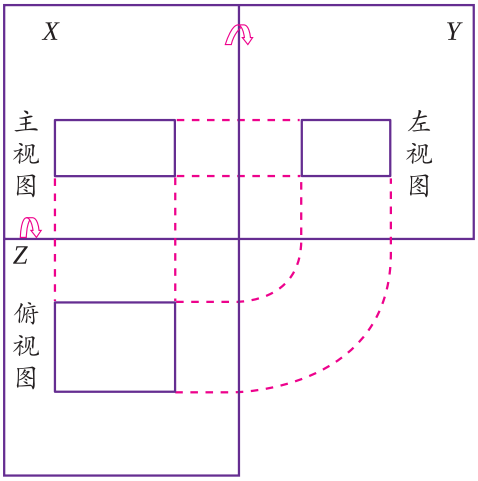


图 24－12

一般地，我们把俯视图画在主视图的下面，左视图画在主视图的右面．由于主视图反映物体的长和高，左视图反映物体的高和宽，俯视图反映物体的长和宽．因此画三视图时，应该使得：

- 主视图与俯视图的长度相等，且相互对正，即“长对正”；
- 主视图与左视图的高度相等，且相互平齐，即“高平齐”；
- 俯视图与左视图的宽度相等，即“宽相等”．

三个视图中长度、高度和宽度之间的这种关系简称为“三等规则”．

**例 1** 把圆柱和直三棱柱分别按图 24－13 和图 24－14 摆放，试分别画出它们的三视图的示意图．

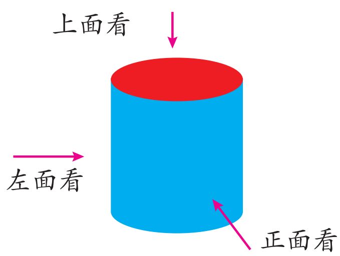


图 24－13

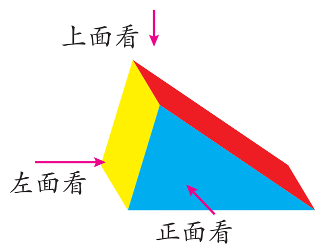
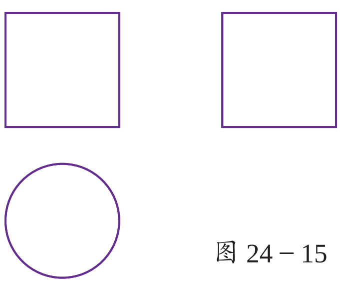


图 24－14

**解：**(1) 圆柱的主视图和左视图是相同的矩形，俯视图是圆，如图 24－15 所示．



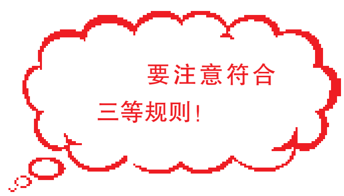



图 24－15

(2) 直三棱柱的三视图如图 24－16 所示．

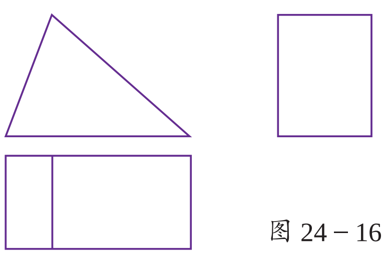


图 24－16

## 交流

1. 如果把例 1 中的两个物体分别按图 24－17 的样子摆放，画出它们的三视图的示意图．

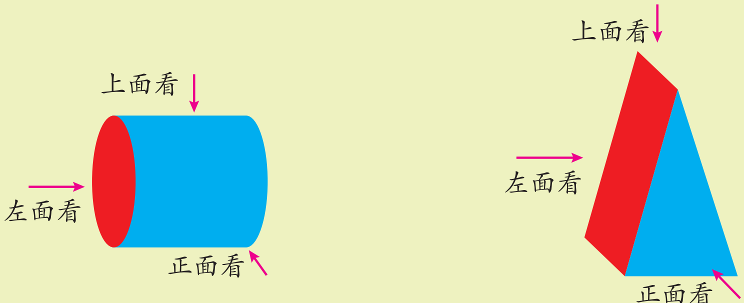



图 24－17

2. 画出正方体、球的三视图的示意图．

画三视图时，如果一个几何体的三个视图都相同，就可以用一个视图来表示这个几何体．比如球就可用一个视图——圆来表示，正方体可用一个视图——正方形来表示．如果一个几何体有两个视图相同，可以省略其中的一个视图．比如，圆柱的三个视图是由两个相同的矩形和一个圆组成的，可以只画出矩形和圆两个视图．

画视图时，一般将看得见的轮廓线画成实线，看不见的轮廓线画成虚线．

**例 2** 根据图 24－18 和图 24－19 所给的视图，说出它们所表示的几何体的名称．

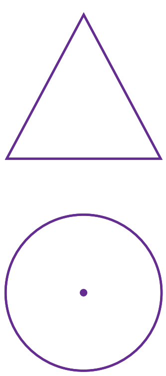


图 24－18

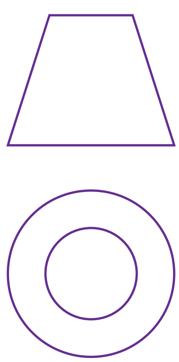


图 24－19

注意，它们都只有二视图，这说明它们的左视图与主视图相同.

**解：** 图 24－18 所表示的几何体是圆锥，如图 24－20 所示．

图 24－19 所表示的几何体是圆台，如图 24－21 所示．

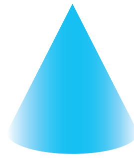


图 24－20

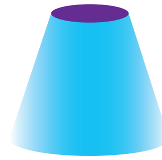


图 24－21

## 探索

将图 24－22 至图 24－25 所示的 4 个基本几何体，按图 24－26 至图 24－29 所给的三视图摆出相应的立体模型．

图 24－22

图 24－23

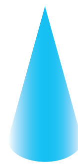


图 24－24

图 24－25

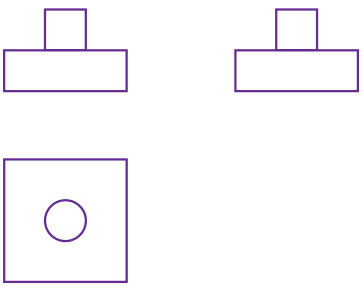


图 24－26

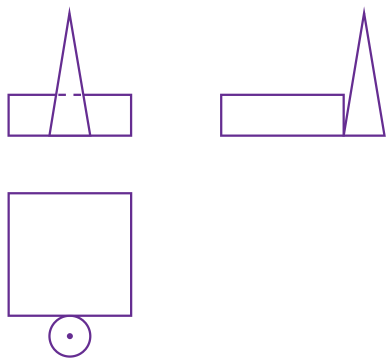


图 24－27

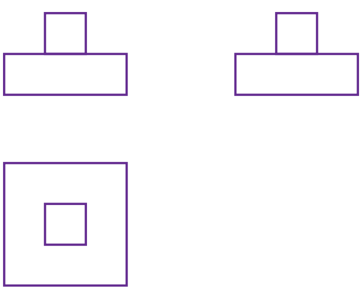


图 24－28

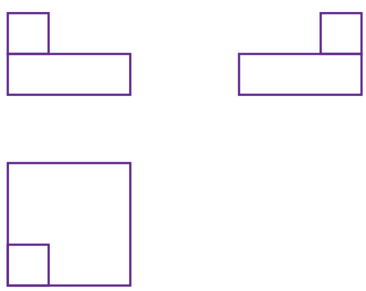
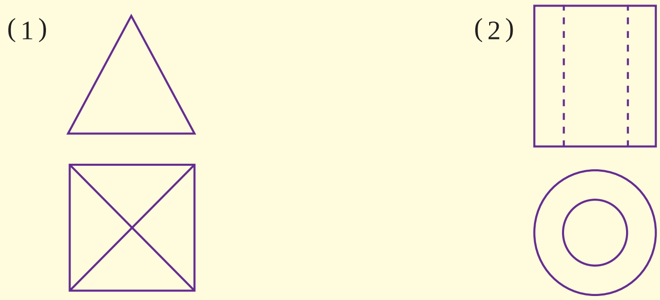


图 24－29

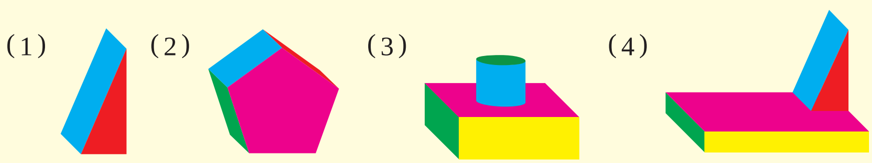
## 练习

1. 画出底面半径为 1 cm，高为 3 cm 的圆锥的三视图的示意图 .
2. 说出 3 个俯视图为圆的几何体的名称 .
3. 如图，根据所给视图，说出它们所表示的几何体的名称 .

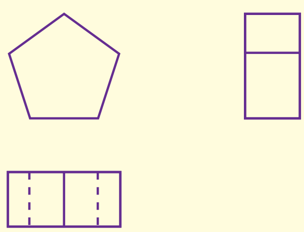



（第 3 题）

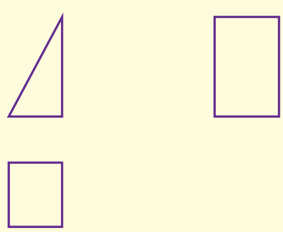
4. 找出与下列几何体相对应的视图，并在视图下面的括号中填上相应的序号 .



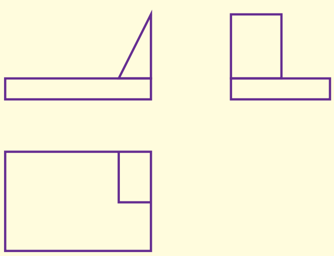

（第 4 题）



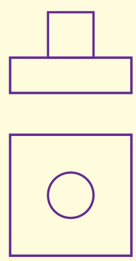
(　　)



(　　)



(　　)



(　　)

## 24.3 基本几何体的平面展开图

**思考**

如果把图 24－30 的圆柱和圆锥的侧面分别沿着虚线剪开，展开后是怎样的平面图形？

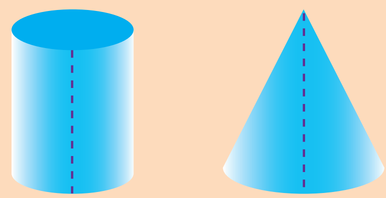


图 24－30

一个圆柱的侧面展开图是一个矩形，如图 24－31 所示．

一个圆锥的侧面展开图是一个扇形，如图 24－32 所示．

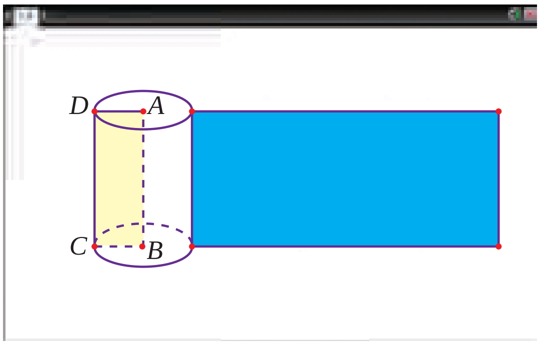



图 24－31

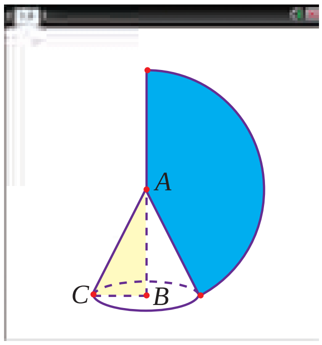



图 24－32

**探索**

将一个如图 24－33 所示的长方体纸盒，沿着某些棱剪开，分别展开成如图 24－34 中的一个平面图形．

图 24－33

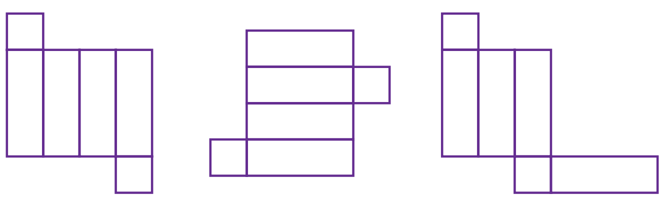
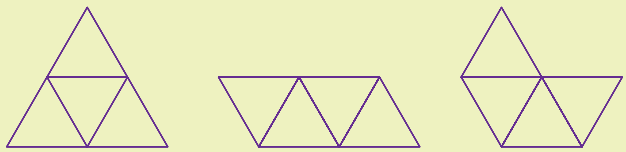


图 24－34

我们看到，图 24 – 34 所示的都是由长方体的表面沿着一些棱剪开后，展开而成的平面图形．显然，对同一个长方体的表面，按照不同的方式展开可以得到不同的平面展开图．

**交流**

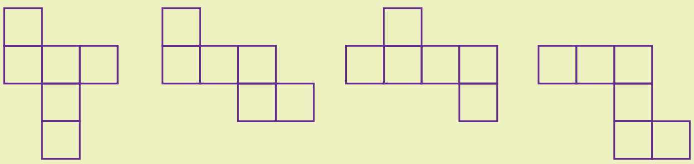
1. 一个正三棱锥的表面可以展开成如图 24 – 35 中的哪个平面图形？



（1）　　（2）　　（3）

图 24 – 35

2. 图 24 – 36 所示的平面图形中，哪些能围成一个正方体？



（1）　　（2）　　（3）　　（4）

图 24 – 36

**例**　某灯具厂要制作一批灯具，设计师给出了如图 24 – 37 所示的灯具三视图的示意图，试按照三视图确定制作每个灯具所需材料的面积（精确到 $0.1\ \mathrm{m}^2$）．

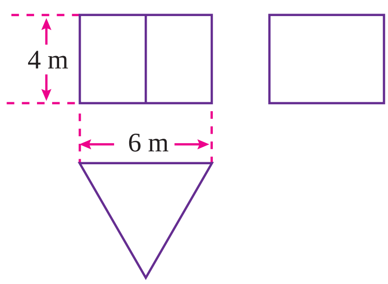



图 24 – 37

**分析**：在本题中，如果知道每个灯具的侧面积和底面积，就可知道制作每个灯具所需材料的总面积．因此，解决本题的思路是先由三视图判断出灯具的立体模型，然后再由立体模型画出它的一个平面展开图，从而计算出它的总面积．

**解：**由图 24－37 可知，灯具是正三棱柱形状．如图 24－38 所示，其上、下底是相同的等边三角形，三个侧面是相同的矩形，而且矩形的长为 6 m、宽为 4 m，等边三角形的边长为 6 m，所以可得到这个正三棱柱灯具的一个平面展开图，如图 24－39．

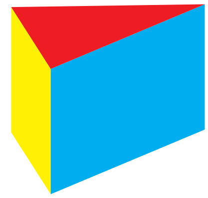


图 24－38

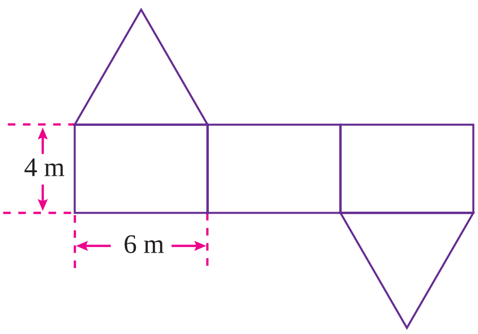
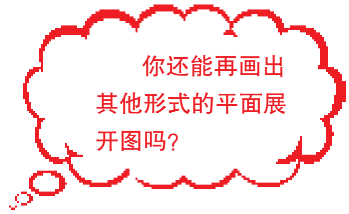



图 24－39




由展开图可知，制作一个灯具所需材料的面积为

$$\left(\frac{1}{2}\times 6\times 6\sin 60^\circ\right)\times 2+(4\times 6)\times 3$$

$$\approx 103.2(\mathrm{m}^2).$$

答：制作每个灯具所需材料的面积约为 103.2 $\mathrm{m}^2$．

## 思考

图 24－40 是一个正方体的平面展开图，如果使字母 $A$ 出现在顶面，那么它的底面应该出现什么字母？

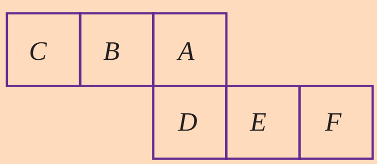
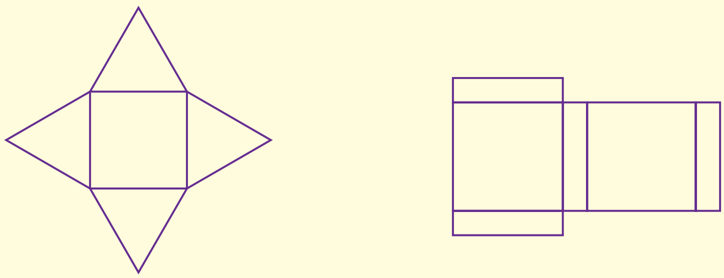



图 24－40

## 练习

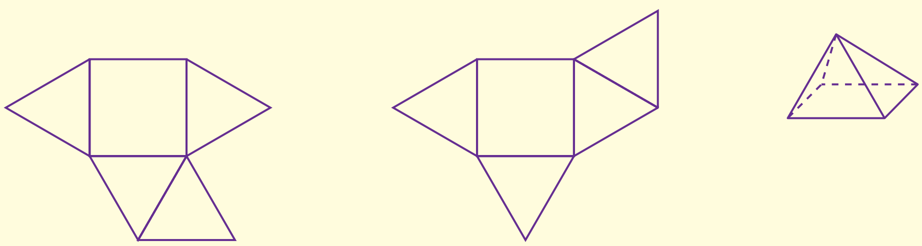
1. 下列图形 (1)、(2) 是某些简单几何体表面的平面展开图，说出它们各自所表示的几何体的名称 .



(1)　　　　　　(2)

(第 1 题)

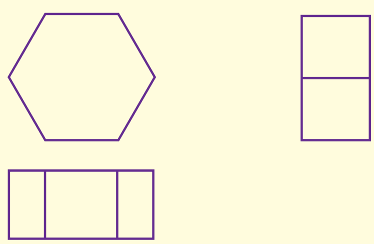
2. 判断图 (1)、(2) 中哪一个可围成图 (3) 所示的几何体 .



(1)　　　　　　(2)　　　　　　(3)

(第 2 题)

3. 根据下面的三视图，画出这个几何体的平面展开图 .

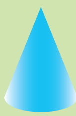
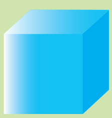


(第 3 题)

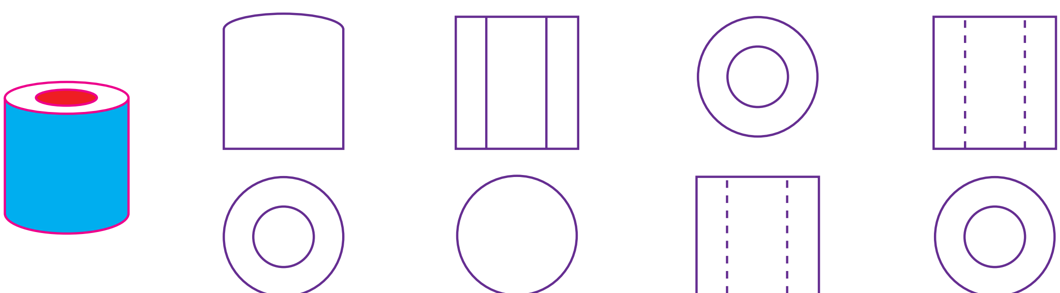
# 习 题 24-2

## ★基础★

1. 把相应的三个视图画在下表中．

| 几何体 | 主视图 | 左视图 | 俯视图 |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | | |
|  | | | |
|  | | | |
|  | | | |

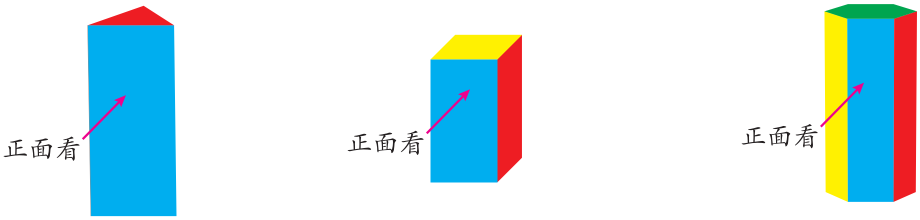
2. “一个圆柱的主视图总是矩形，俯视图总是圆”这种说法对吗？举例说明．
3. 如图，(1)、(2)、(3)、(4)是四位同学画出的空心圆柱的主视图和俯视图，哪组有错误？为什么？



(1)　(2)　(3)　(4)

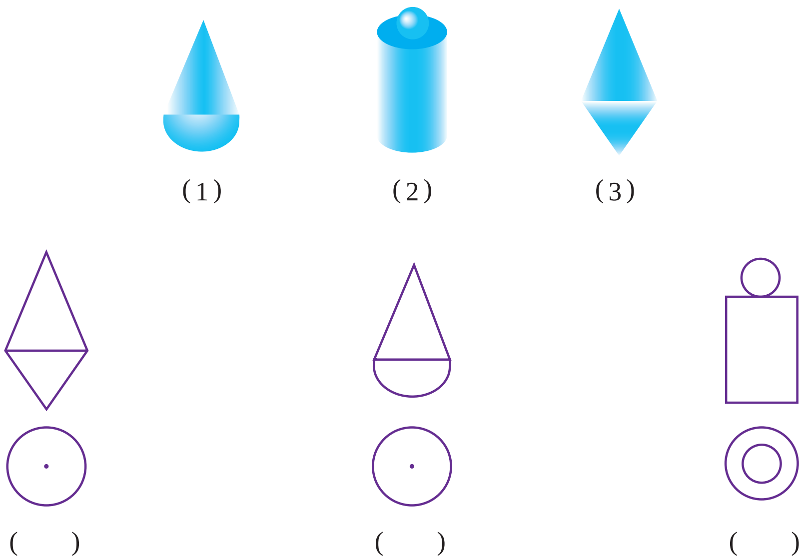
（第 3 题）

4. 画出如图所示的正三棱柱、正四棱柱、正六棱柱的三视图的示意图．



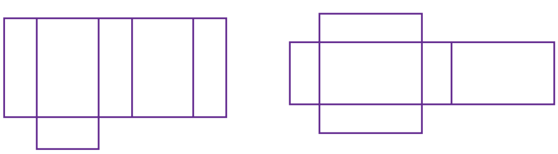

（第 4 题）

5. 找出与下列几何体相对应的视图，在视图下面的括号中填上相应的序号．




（第 5 题）

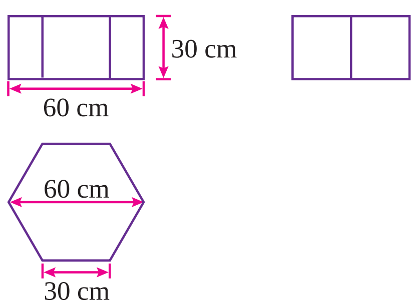
6. 下面两个平面展开图中，哪一个可以围成一个长方体？



（第 6 题）

7. 画出正三棱柱和正四棱柱的一种平面展开图．

8. 某工厂要加工一批包装盒，设计师给出了如图所示的三视图，请按照三视图确定制作每个包装盒所需纸板的面积．




（第 8 题）

## ★★提升★★

1. 判断题：

(1) 三视图都是圆的几何体一定是球；　　(　　)

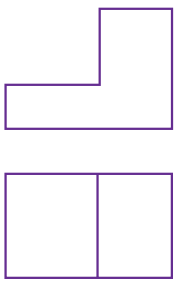
(2) 有两个视图都是矩形的几何体一定是圆柱；　　(　　)

(3) 圆锥形物体的三视图都是三角形；　　(　　)

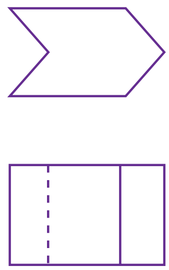
(4) 圆台状物体的三视图都是梯形 .　　(　　)

2. 根据下面的主视图和俯视图，补上几何体的左视图 .

(1)



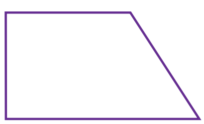
(2)



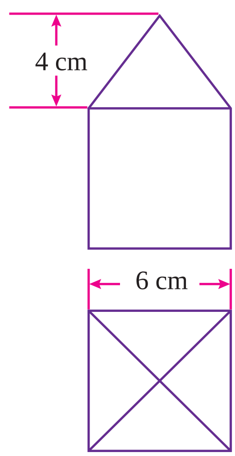
(第 2 题)

## ★★★拓展★★★

1. 如图是一个高为 2 cm 的直四棱柱的俯视图，试补上它的主视图和左视图 .



(第 1 题)




(第 2 题)

2. 如图，是一个几何体的视图，先画出它的平面展开图，然后再扩大 2 倍做出它的立体模型 .

3. 做出一个你喜欢的立体模型 .

## 阅读理解

### 视点、视线和盲区

当你乘车沿着一条平直的马路向前行驶时，会看到图 24－41 所示的情境．虽然建筑物 $A$ 比建筑物 $B$ 矮，但当小轿车从位置①向位置②行驶时，你从车里向外看，建筑物 $A$ 好像越来越大，建筑物 $B$ 逐渐被建筑物 $A$ 遮挡，直至完全消失．这是为什么呢？

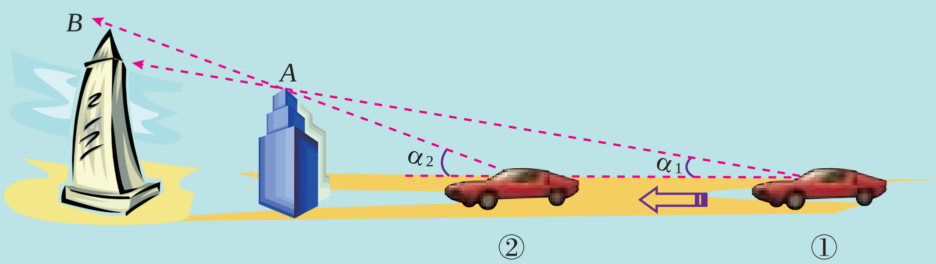



图 24－41

这与视点、视线和盲区的知识有关．我们把人眼睛的位置称为视点，由视点出发的线称为视线，人眼睛看不到的地方称为盲区．

被视物体看上去的高矮是由视角 $\alpha$（视线与水平线的夹角）决定的，而视角的大小又依赖于被视物体的高度及视点与被视物体之间的距离．对于同一物体，距离越近，视角 $\alpha$ 越大；距离越远，视角 $\alpha$ 越小．当汽车向前行驶时，人的眼睛（视点）与前方建筑物的距离越来越近，视角 $\alpha$ 逐渐变大，被前面矮一些的建筑物遮挡的盲区也就越来越大，直到远处高大的建筑物完全在你眼前消失．

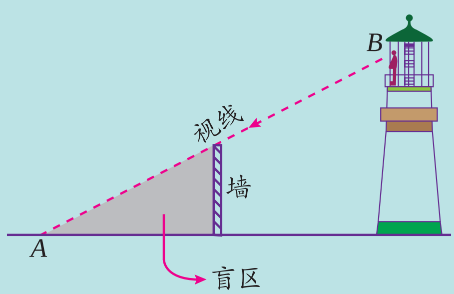



图 24－42

反过来，如图 24－42 所示，当 $A$ 处于什么位置时，在 $B$ 点就看不到它了呢？

图 24－42 中的灰色区域为盲区．在这里可以躲开 $B$ 点的观察．盲区是一个空间，在不同的情况下，可以发挥不同的作用．

视点、视线和盲区在人们的生活中有着广泛的应用，你能再举出几个这方面的例子吗？

## 回顾与整理

**知识要点**

本章学习了投影、基本几何体的视图和平面展开图等内容．

1. 投影可分为中心投影和平行投影．

在平行投影中，如果投影线与投影面垂直，那么这种投影称为正投影．

2. 物体的正投影就是物体的视图．从物体正面得到的视图称为主视图，从左侧面得到的视图称为左视图，从上面得到的视图称为俯视图，把它们统称为三视图．

平面图形的正投影是画基本几何体视图的基础．

画几何体三视图时，要注意“长对正，高平齐，宽相等”，用实线表示看得见的轮廓线，用虚线表示看不见的轮廓线．

3. 将几何体的表面展开在同一个平面上的图形就是这个几何体的平面展开图．

**学习指导**

1. 中心投影与平行投影的最大区别在于中心投影的光线是由一点发出的，它是呈放射状的射线；而平行投影中没有投影中心，它的光线是平行的．投影线与投影面垂直的平行投影就是物体的正投影．在本章中，如果没有特别说明，我们一般所指的投影都是正投影．

学习指导

2. 视图是根据正投影的原理得到的，它将一个几何体反映在平面上．学习中要注意通过视图和几何体的联系和转换，发展空间观念．

3. 视图是物体的正投影．它不是简单的影子．在画视图时要注意，无论是看得见，或看不见部分的轮廓线，都要在平面图上反映出来．

4. 平面展开图是将几何体反映在平面上的另一种方法．学习时要注意展开图与三视图之间的区别和联系，要会画和会判断基本几何体的平面展开图，并能根据展开图想象和制作实物模型．

## 复　习　题

### ★基础★

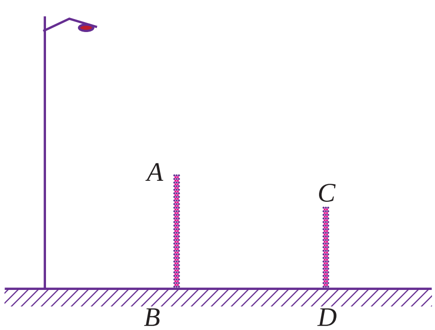
1. 回答下列问题：

（1）同一时刻，两个身高相同的同学站在阳光下的操场上，他们的影长有什么关系？

（2）清晨、上午 9 时、中午 12 时，同一个旗杆在阳光下的影长有什么变化？

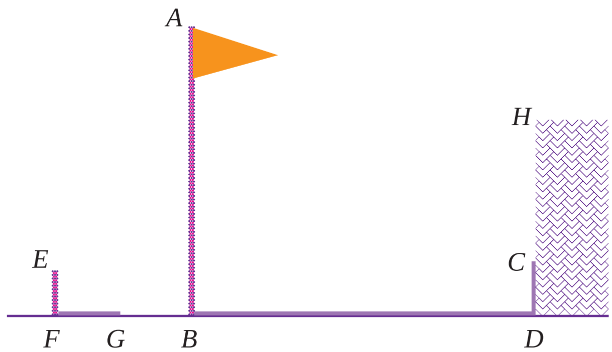
（3）在同一时刻，两个身高相同的人，一个在北纬 20°，另一个在北纬 60°，他们的影长相同吗？

2. 如图，在路灯下有 $AB$，$CD$ 两根长短不同的木棒，请画出木棒 $AB$，$CD$ 的影长．



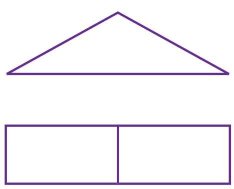

（第 2 题）

3. 如图，一根长 2 m 的木棒 $EF$ 在地面上的影子 $FG$ 为 3 m，此时 14 m 高的旗杆 $AB$ 的影子有一部分落在距离旗杆 15 m 的墙 $DH$ 上，求旗杆的影子落在墙上的高度 $CD$.

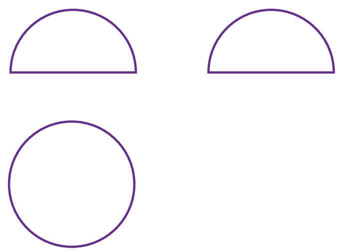



（第 3 题）

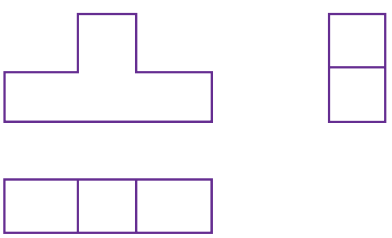
4. 下列各三视图分别表示什么形状的立体图形？请把三视图的序号填入相应的立体图形下的括号内．



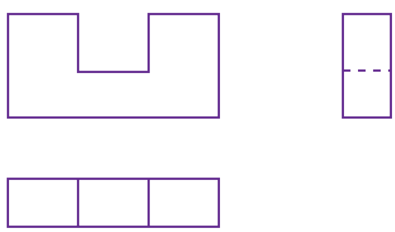
（1）



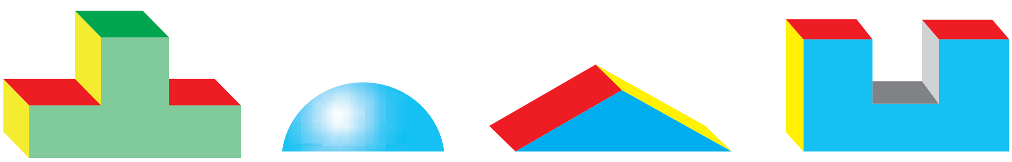
（2）



（3）



（4）



（　　）　（　　）　（　　）　（　　）

（第 4 题）

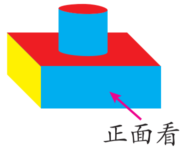
5. 画出如图所示几何体的三视图．

6. 如图，直三棱柱的三视图是（　　）．

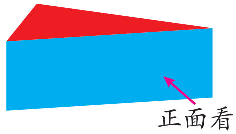
A．三个三角形

B．一个三角形和两个矩形

C．一个三角形和两个矩形，两个矩形内有一条连接对边两点的虚线，这条虚线与另一组对边平行




（第 5 题）



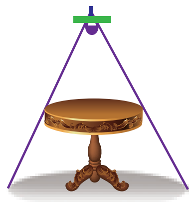

（第 6 题）

## ★★提升★★

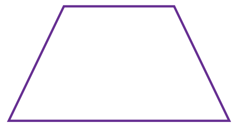
1. 如图，圆桌正上方的灯泡发出的光线照射桌面后，在地面上形成阴影（圆形）．已知桌面的直径为 1 m，桌面距离地面 0.8 m，如果灯泡距地面 2.8 m，求地面上的阴影的面积（精确到 0.1 $m^2$）．

2. 高为 1 cm 的直四棱柱的俯视图如图所示，请补上它的主视图和左视图．

3. 添线补全下面物体的三视图．

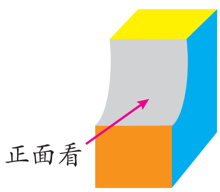


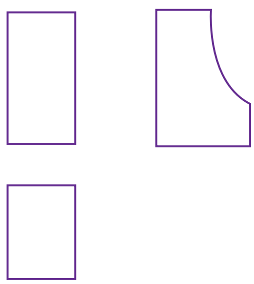
（第 1 题）



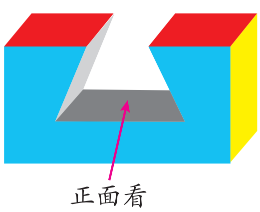
（第 2 题）

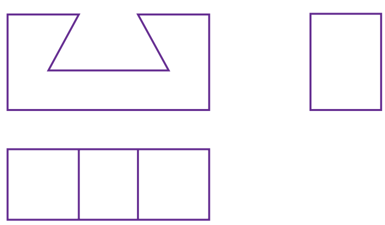
（1）



（2）

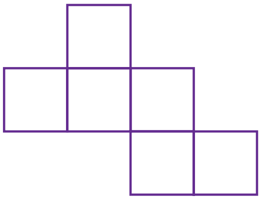


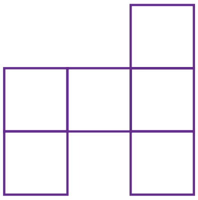
（第 3 题）

## ★★★拓展★★★

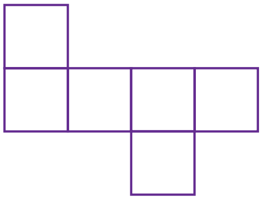
1. 图（1）、（2）、（3）都是正方体的平面展开图吗？请把 3，−1，4，−2，7，−5 这六个数字分别填入正方体的平面展开图的小正方形格内，使它围成正方体后，正方体相对面的数字之和都等于 2.



（1）



（2）



（3）

（第 1 题）

2. 做出一个正六棱柱的立体模型，并画出它的三视图的示意图 .


# 第二十五章 概率的求法与应用

在日常生活中，我们会遇到很多概率问题.

北京气象台天气预报:“明天白天，阴转小雨，降水概率 60%……”

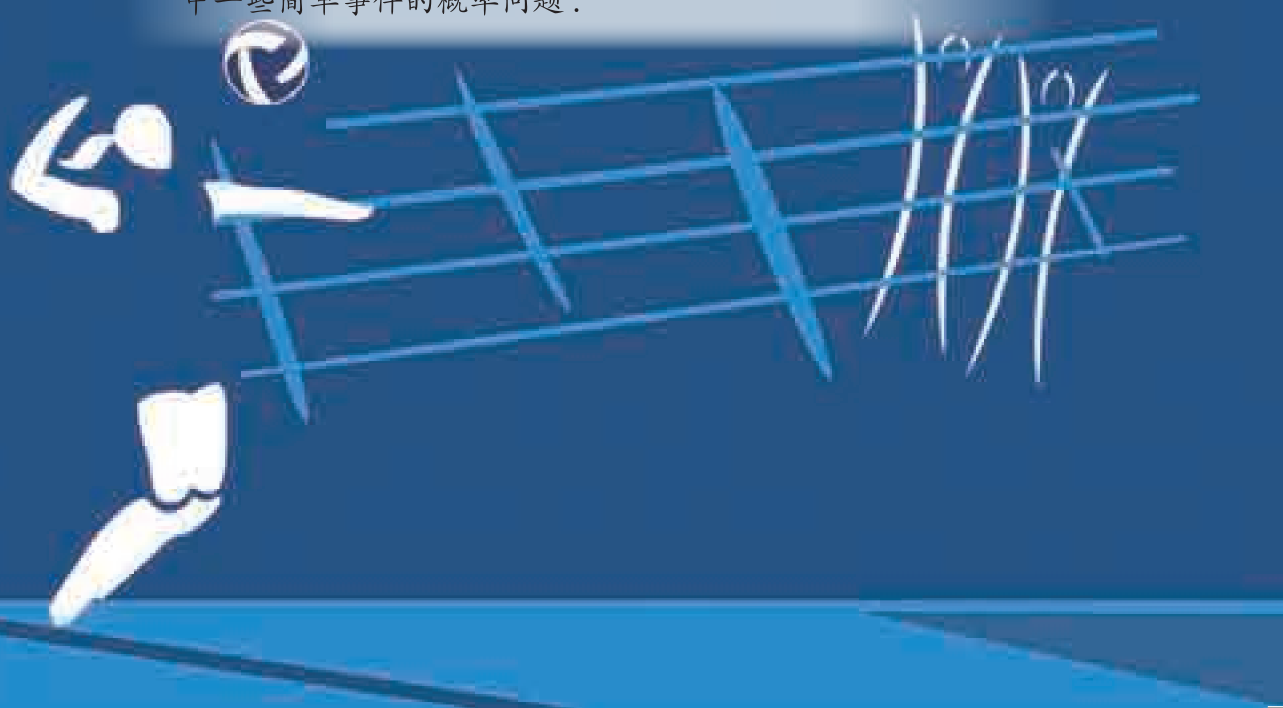
瓶盖掉在地上，盖面朝上的概率有多大?

在商场购物得到一张抽奖券，中奖的概率有多大?

水平相当的甲、乙两队进行排球比赛，规定五局三胜，甲队以 3:0 战胜乙队的概率有多大?

……

这一章，我们要学习求概率的方法，并学会解决生活中一些简单事件的概率问题.



## 25.1 求概率的方法

前面我们已经学习过，事件可以分为必然事件、不可能事件和随机事件．还知道，事件发生的可能性可以用数值表示，如 P(必然事件)＝1，P(不可能事件)＝0．

表示一个事件发生的可能性大小的数值，称为这个事件的概率，记作 P(事件)．例如，降水概率是 60%，是指降水的可能性是 60%.

现在，我们来学习求概率的方法．

**1. 列举法**

我们曾做过抛掷一枚硬币的实验，硬币落地后，所有可能出现的结果有 2 个，如图 25－1 所示．

正面朝上　　　　反面朝上

图 25－1

由于硬币是均匀的，每个结果发生的可能性都相等，其中“正面朝上”的结果只有 1 个，所以“正面朝上”的概率是：

所求事件出现的结果个数.

$$P(\text{正面朝上})=\frac{1}{2}.$$

所有可能出现的结果个数.

**探索**

每位同学同时抛掷两枚硬币，观察两枚硬币落地后的情况：

(1) 两枚硬币落地后，可能出现的结果有几种？

(2) 两枚硬币落地后，正面都朝上的概率有多大？

假设抛掷的分别是 A，B 两枚硬币，落地后硬币 A 所有可能出现的结果如下表的左列所示，硬币 B 所有可能出现的结果如下表的上行所示，两枚硬币所有可能同时出现的结果如下表所示：

| 同时可能出现 ／ 硬币 B 可能出现 ／ 硬币 A 可能出现 | 正面朝上 | 反面朝上 |
|---|---|---|
| 正面朝上 | （正，正） | （正，反） |
| 反面朝上 | （反，正） | （反，反） |

上面是用列表的方法列举所有可能出现的结果，有下面 4 个：

（正，正）；（正，反）；（反，正）；（反，反）.

由于两枚硬币都是均匀的，每个结果发生的可能性都相等，其中出现“两枚正面都朝上”的结果有 1 个 . 所以

这样计算的根据是什么？

$$P(\text{两枚正面都朝上})=\frac{1}{4}.$$

我们也可以先列举硬币 A 所有可能出现的结果，在它的每个结果后面再分别列举硬币 B 所有可能出现的结果，由此得到 A，B 两枚硬币所有可能同时出现的结果，如图 25－2 所示：

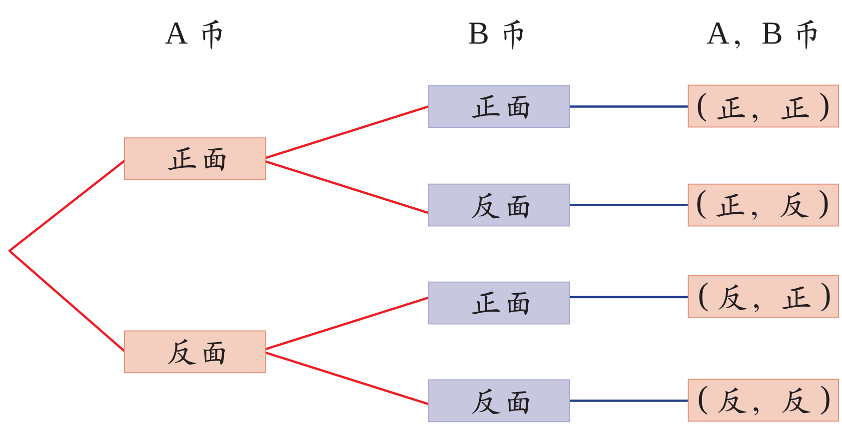



图 25－2

上面是用画树状图的方法列举所有可能出现的结果 .

由此可知，用列举法求概率的一般步骤是：

( 1 ) 列举 ( 列表、画树状图 ) 事件所有可能出现的结果，并判断每个结果发生的可能性是否都相等；

( 2 ) 如果都相等，再确定所有可能出现的结果个数 $n$ 和其中出现所求事件 $A$ 的结果个数 $m$ ；

( 3 ) 用公式计算所求事件 $A$ 发生的概率 . 即

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

**例 1** 在五张大小相同的卡片上，分别写有数字 0，1，1，2，2，把写有 1，2 的两张卡片放在左边，把另外写有 0，1，2 的三张卡片放在右边，并且写有数字的面都朝下 .

( 1 ) 分别从左、右两边随机各取出一张卡片，求这两张卡片上的数字之和为奇数的概率；

( 2 ) 将右边的三张卡片随机排成一行，求翻开后组成一个三位数的概率 .

**分析：** 只需列举所有可能发生的结果，并确定每个结果发生的可能性都相等 .

( 1 ) 将取出的左、右两边两张卡片上的数字求和，所有可能出现的结果如下表所示：

| 两个数字求和 / 右边取出的数字 / 左边取出的数字 | 0 | 1 | 2 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | $1+0=1$ | $1+1=2$ | $1+2=3$ |
| 2 | $2+0=2$ | $2+1=3$ | $2+2=4$ |

( 2 ) 右边三张卡片随机排成一行，翻开后，所有可能出现的结果如图 25 – 3 右列所示：

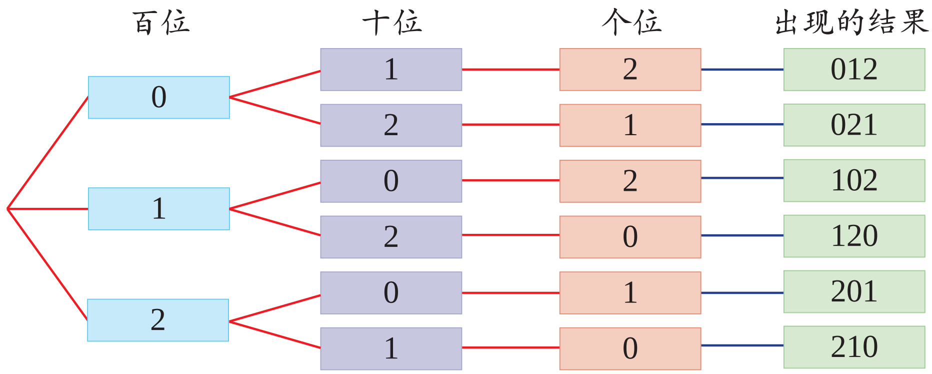



图 25－3

**解**：(1) 这两张卡片的数字之和所有可能出现的结果有 6 个：

为什么每个结果发生的可能性都相等？

1，2，3，2，3，4.

每个结果发生的可能性都相等，其中出现和为奇数的结果有 3 个 . 所以

$$P(\text{数字之和为奇数}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(2) 翻开后所有可能出现的结果有 6 个：

012，021，102，120，201，210 .

其中出现三位数的结果有 4 个 . 所以

$$P(\text{组成一个三位数}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

要确定每个结果发生的可能性相等！

**练习**

1. 甲、乙两人的口袋里都装有 5 元、10 元的两张人民币，两人分别从口袋里随机掏出一张 .
   (1) 列出这两张币值之和所有可能出现的结果；
   (2) 求这两张币值之和是偶数的概率 .
2. 把 A，K，Q 三张扑克牌背面朝上，随机排成一行，求 A 牌恰好排在中间的概率 .

**例 2** 口袋里有四枚除颜色外都相同的棋子，其中有三枚是红色的，一枚是黑色的 . 从中随机同时摸出两枚，求摸出的两枚棋子颜色不同的概率 .

**分析：** 只需列举同时摸出两枚棋子的所有可能结果．为防止遗漏或重复，给三枚红色棋子编号为红$_1$、红$_2$、红$_3$．结果如图 25－4 所示：

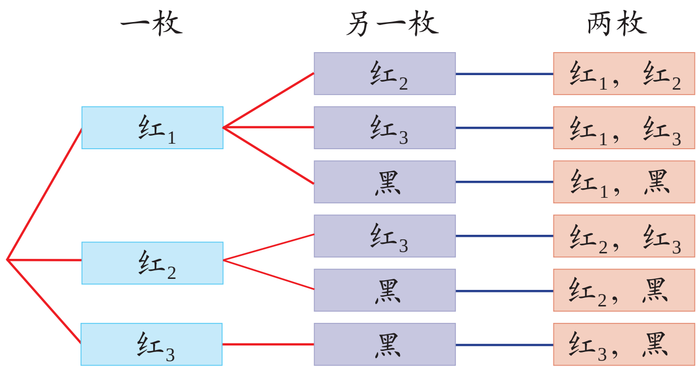



图 25－4

为什么不列出（红$_2$，红$_1$）?

**解：** 同时摸出两枚棋子的所有可能结果有 6 个：

（红$_1$，红$_2$）；（红$_1$，红$_3$）；（红$_1$，黑）；（红$_2$，红$_3$）；（红$_2$，黑）；（红$_3$，黑）.

每个结果发生的可能性都相同，其中出现颜色不同的结果有 3 个．所以

$$P(\text{摸出两枚棋子颜色不同})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

**例 3** 口袋里有三枚除颜色外都相同的棋子，其中有两枚是红色的，一枚是黑色的．从中随机摸出一枚记下颜色，放回口袋搅匀，再从中随机摸出一枚记下颜色．求两次摸出棋子颜色不同的概率．

**分析：** 这是有放回的两次摸出棋子的问题，也就是每次都是从三枚棋子中随机摸出一枚．列举两次摸出棋子的所有可能结果，如下表所示：

| 第二次可能摸出的结果 / 两次可能摸出的结果 / 第一次可能摸出的结果 | 红$_1$ | 红$_2$ | 黑 |
|---|---|---|---|
| 红$_1$ | （红$_1$，红$_1$） | （红$_1$，红$_2$） | （红$_1$，黑） |
| 红$_2$ | （红$_2$，红$_1$） | （红$_2$，红$_2$） | （红$_2$，黑） |
| 黑 | （黑，红$_1$） | （黑，红$_2$） | （黑，黑） |

这里的（红$_2$，红$_1$）与（红$_1$，红$_2$）为什么不一样?

**解：** 两次摸出棋子所有可能出现的结果有 9 个：

（红$_1$，红$_1$）；（红$_1$，红$_2$）；（红$_1$，黑）；
（红$_2$，红$_1$）；（红$_2$，红$_2$）；（红$_2$，黑）；
（黑，红$_1$）；（黑，红$_2$）；（黑，黑）.

每个结果发生的可能性都相等，其中颜色不同的结果有 4 个，所以

$$P(\text{两次摸出棋子颜色不同})=\frac{4}{9}.$$

**探索**

请你用画树状图的方法，列举例 3 中两次摸出棋子所有可能的结果.

**练习**

1. 将一副扑克牌中的两张牌分别从中间剪开，分成大小一样的四片，背面朝上放在桌面上洗匀，从中随机同时取出两片.
   （1）列举取出两片的所有可能的结果；
   （2）求取出的两片恰好是同一张扑克牌的概率.
2. 三张一样的卡片，分别写上数字 0，1，2，放进抽屉里洗匀.从中随机取一张，把卡片上的数字记在十位上，然后放回抽屉里洗匀；再从中随机取一张，把卡片上的数字记在个位上.求：
   （1）组成的是一个两位数的概率；
   （2）组成的是一个两位奇数的概率.

### 2. 用频率估计

抛掷一枚硬币时，我们可以通过列举法求得硬币落地后“正面朝上”的概率.如果把硬币换成瓶盖（图 25－5），怎样求瓶盖掉在地上后，盖面朝上的概率呢？

图 25－5

## 交流

抛掷一枚瓶盖，落地后会出现哪些结果，每个结果发生的可能性相等吗？为什么？还能用前面的公式计算概率吗？如果不能，怎样求盖面朝上的概率？

我们设计一个重复抛掷的实验来探索解决问题的方法．

## 实践

全班同学分成两大组．第一大组的同学都抛掷同一型号的一枚瓶盖，第二大组的同学都抛掷同一面额的硬币，以 2 人为一小组各抛掷 50 次，记下落地后盖（正）面朝上的次数，统计本小组 50 次实验中盖（正）面朝上的次数和频率，各大组依次累计各小组的实验结果，填在下表中（频率精确到 0.000 1）．

| 累计顺序 | 1组 | 1~2组 | 1~3组 | 1~4组 | 1~5组 | 1~6组 | 1~7组 | 1~8组 | 1~9组 | 1~10组 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 累计实验次数 | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | … |
| 盖（正）面朝上次数 | | | | | | | | | | | … |
| 盖（正）面朝上频率 | | | | | | | | | | | … |

在图 25－6 中画出上表中盖（正）面朝上的频率折线图．

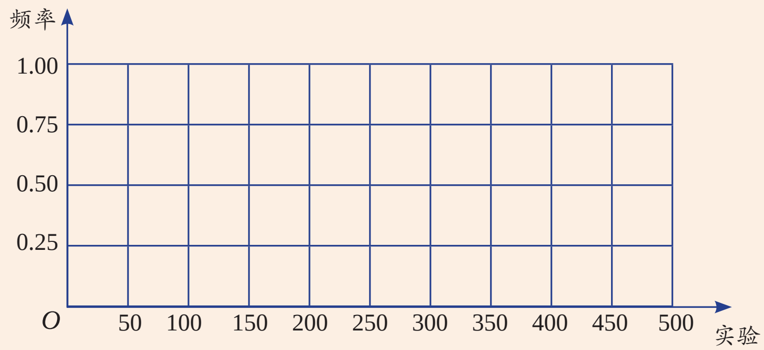



图 25－6

从实验中知道，瓶盖或硬币落地后，所有可能出现的结果有 2 个："盖 ( 正 ) 面朝上"和"盖 ( 正 ) 面朝下".

由于瓶盖不均匀，每个结果发生的可能性不相等，因此，不能用前面的公式计算盖面朝上的概率 .

观察两个大组完成的频率折线图，我们发现，重复实验的次数不同，盖 ( 正 ) 面朝上的频率也可能不同，但总是在某个常数附近波动，我们就把这个常数作为盖 ( 正 ) 面朝上的概率 .

一般地，在做大量重复实验时，如果一个事件发生的频率总是在某个常数附近波动，就把这个常数作为这个事件发生的概率 .

## 练习

1. 某数学兴趣小组在课外活动时，三人合作做抛掷同一型号的一枚图钉的实验，大量重复实验的结果统计如下表：

| 累计实验次数 | 甲：150 | 甲、乙：350 | 甲、乙、丙：550 |
|---|---|---|---|
| 钉尖朝上次数 | 80 | 185 | 296 |
| 钉尖朝上频率 | 0.533 3 | 0.528 6 | 0.538 2 |

根据表格中的信息，估计掷一枚这样的图钉落地后钉尖朝上的概率 ( 精确到 0.01 ).

2. 每位同学做一个抛掷一只大小相同的纸杯实验 . 掷 10 次，记下落地后杯腰触地的次数，计算相应的频率 . 用你和相邻同学 10 人的重复实验的频率的平均值，估计抛掷一只这样的纸杯落地后杯腰触地的概率 .


( 第 2 题 )

## 习　题　25－1

### ★基础★

1. 填空题：

（1）某班将要转来甲、乙两名同学，这两名同学的性别可能性相等．这两名同学所有可能出现的性别的结果是____________，这两名同学都是男生的概率为____________，是不同性别的概率为____________．

（2）有 A，B 两枚币值相同的硬币，A 币两面分别贴红色、黄色标签，B 币两面分别贴红色、绿色标签．任意抛掷这两枚硬币，落地后两枚硬币面朝上标签颜色所有可能出现的结果是________________________________________，两枚朝上标签都是红色的概率为____________，朝上标签的颜色不同的概率为____________．

2. 甲、乙两人玩“剪刀、锤子、布”游戏．规定：剪刀胜布，布胜锤子，锤子胜剪刀，两人同时随机出示一种手势．

（1）列出两人出示手势的所有可能出现的结果，如甲、乙分别出示剪刀、布，结果记为（刀，布）；

（2）分别求甲胜和乙胜的概率．

3. 同时随机抛掷 1 角、5 角、1 元三枚硬币，分别求落地后“三枚正面都朝上”和“两枚正面、一枚反面朝上”的概率．

4. 两张大小相同的画有动物图案的卡片，分别从中间剪开，分成全等的四片，洗匀后放在口袋里，从中随机同时取出两片．

（1）如果两张卡片上的动物图案完全相同，求取出的两片能拼成动物图案的概率；

（2）如果两张卡片上的动物图案不同，求取出的两片能拼成动物图案的概率．

5. 抽屉里有一副扑克牌中的三张牌，从中随机取出一张记下牌花，放回抽屉洗匀；再从中随机取出一张记下牌花．

（1）如果三张牌花各不相同，求两次取出的是相同牌花的概率；

（2）如果其中两张牌花相同，另一张牌花不同，求两次取出的是相同牌花的概率．

6. 某中学九年级有 6 个班，要从中选出 2 个班代表学校参加某项活动．（1）班必须参加，另外再从（2）班至（6）班中选出 1 个班．有学生建议用如下的方法：从装有编号为 1，2，3 的三个白球的 A 袋中摸出一个球，再从装有编号为 1，2，3 的三个红球的 B 袋中摸出 1 个球（两袋中球的大小、形状与质量完全一样），摸出的两个球上的数字之和是几，就选几班．你认为这种方法公平吗？请说明理由．

*7. 在一张边长为 $a$ 的正方形纸板中间有一个面积最大的圆，在圆内涂满了粘苍蝇的药物．如果一只苍蝇飞到正方形纸板上，落在每个点的可能性都相等，求下列事件的概率：

(1) 苍蝇被粘住；

(2) 苍蝇未被粘住．

8. 某班级学生分组做抛掷瓶盖实验，各组实验结果如下表：

| 累计抛掷次数 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| 盖面朝上次数 | 54 | 105 | 158 | 212 | 264 |
| 盖面朝上频率 | 0.540 0 | 0.525 0 | 0.526 7 | 0.530 0 | 0.528 0 |

根据表格中的信息，估计掷一枚这样的瓶盖，落地后盖面朝上的概率（精确到 0.01）．

## ★★ 提升 ★★

1. 甲、乙两人玩掷骰子游戏，每人各掷一枚，同时掷出，计算两枚骰子朝上的点数的和，通过约定点数的和的情况来论胜负．

(1) 若规定：点数之和如果是 2，3，4，10，11，12 时，那么甲胜；如果是 5，6，7，8，9 时，那么乙胜．各方胜的概率分别为多大？哪方胜的概率较大？

(2) 若规定：点数之和如果是奇数时，那么甲胜；如果是偶数时，那么乙胜．这个游戏规则公平吗？请用概率的知识说明．

2. 从 3 名男生和 2 名女生中抽签，随机挑出 2 名学生去参观，求挑出的 2 名学生中：

(1) 同是男生的概率；

(2) 是 1 名男生和 1 名女生的概率．

## ★★★ 拓展 ★★★

有三枚币值相同的硬币，两面分别贴上不同颜色的标签，其中 A 币贴的是红色、黄色，B 币贴的是黄色、绿色，C 币贴的是绿色、红色．同时抛掷这三枚硬币，求：

(1) 落地后朝上标签颜色各不相同的概率；

(2) 落地后朝上标签至少有一个是红色的概率．

## 25.2 概率的简单应用

学习了求概率的方法后，我们就可以来解决一些简单的实际问题．

**例 1** 水平相当的甲、乙两队进行排球比赛，规定五局三胜，求甲队以 3 : 0 战胜乙队的概率．

分析：根据规定，只有比赛满三局，甲队才有可能以 3 : 0 战胜乙队．只需求前三局比赛中甲队连胜三局的概率，所以需要列出前三局比赛甲队所有可能出现胜负的结果．

请你画出树状图.

解：前三局比赛中，甲队所有可能出现胜负的结果有 8 个，即

（胜，胜，胜）；（胜，胜，负）；（胜，负，胜）；（胜，负，负）；

（负，胜，胜）；（负，胜，负）；（负，负，胜）；（负，负，负）.

其中出现连胜三局的结果只有 1 个．所以

每个结果发生的可能性都相等吗?

$$P(\text{甲队连胜前三局})=\frac{1}{8}.$$

答：甲队以 3 : 0 战胜乙队的概率是 $\frac{1}{8}$．

在实际比赛中，3 : 0 的结果时有出现．可见，概率很小的事件也可能发生．

**例 2** 某商场为促销商品，每期发行 1 000 张编号为 000 ~ 999 的购物奖券，当奖券发完后，从 0 ~ 9 中分别摇出三个数字组成一个中奖号．奖券号码与中奖号完全相同时，为一等奖；后两位号码相同时，为二等奖；最后一位号码相同时，为三等奖．

（1）小华购物得到 3 张奖券，求他中一等奖的概率；

（2）小明购物得到 1 张奖券，求他中二等奖的概率；

（3）如果购物得到 1 张奖券，求这张奖券的中奖概率．

分析：只需确定所有可能中奖的号码个数和其中各种奖的号码个数．1 000 张奖券，每张都可能中奖，有 1 000 个号码，一等奖只有 1 个号码，比如 258；那么，二等奖的中奖号就是 $x$58（其中“$x$”可能是除 2 以外的 9 个数字），有 9 个号码；三等奖的中奖号就是 $xy$8（其中“$y$”可能是除 5 以外的 9 个数字，而这时的 $x$ 可能是 0 ~ 9 中的 10 个数字），则有 $9\times10=90$ 个号码．所有中奖的号码有 100 个．

**解：** 所有可能中奖的号码有 1 000 个，其中，中一等奖的号码有 1 个；中二等奖的号码有 9 个；中三等奖的号码有 90 个 . 所有中奖的号码有 100 个 . 每个号码中奖的可能性都相等 .

(1) 小华得到 3 张奖券，有 3 个可能中一等奖的机会 . 所以

$$P(\text{小华中一等奖})=\frac{3}{1\,000};$$

(2) 小明得到 1 张奖券，有 9 个可能中二等奖的机会 . 所以

$$P(\text{小明中二等奖})=\frac{9}{1\,000};$$

(3) 得到 1 张奖券，有 100 个可能中奖的机会 . 所以

$$P(\text{得到 1 张奖券中奖})=\frac{100}{1\,000}=\frac{1}{10}.$$

答：小华中一等奖的概率是 $\frac{3}{1\,000}$；小明中二等奖的概率是 $\frac{9}{1\,000}$；1 张奖券中奖的概率是 $\frac{1}{10}$ .

**思考**

在例 2 中，每期购物奖券的中奖率是多少？中奖率与随意得到一张奖券的中奖概率的区别是什么？

在例 2 中，每期购物奖券的中奖率，是指中奖奖券数占全部奖券数的百分比，也就是：

$$\text{中奖率}(\%)=\frac{100}{1\,000}\times 100\%=10\%.$$

中奖概率，是指中奖可能性的大小，因此它们的含义不同 .

**练习**

1. 水平相当的甲、乙两人进行乒乓球对抗赛，规定七局四胜 . 求乙以 4 : 0 获胜的概率 .
2. 如图，是一把由三组 0 ~ 9 的数字组成的号码锁，当三组中的某个数字都分别对齐密码后，锁才能打开，求下列情况下试开一次能打开锁的概率：
   (1) 忘记开锁密码的最后一个数字；
   (2) 开锁密码的三个数字全忘记 .

（第 2 题）

## 交流

在气温和水分都适宜的土壤里，种下一粒麦种会出现发芽或不发芽两种情况．每种情况发生的可能性都相等吗？怎样估计一粒麦种发芽的概率？

由于麦种的品种与质量不同，在气温和水分都适宜的土壤里，种下的一粒麦种可能发芽，也可能不发芽．品种与质量好的麦种发芽的可能性大，不发芽的可能性小．换麦种时，通常要做发芽实验以测定麦种的发芽率，从而估算每亩①地播种的麦种数量，也可以用发芽率来估计一粒麦种发芽的概率．

**例 3** 某农场引进一批新麦种，在播种前做了五次发芽实验，每次任取 500 粒麦种进行实验．实验结果如下表所示（发芽率精确到 0.000 1）：

| 实验的麦种数/粒 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| 发芽的麦种数/粒 | 492 | 487 | 491 | 493 | 489 |
| 发芽率/% | 98.40 | 97.40 | 98.20 | 98.60 | 97.80 |

其中，

$$发芽率=\frac{发芽的麦种数}{实验的麦种数}\times 100\%.$$

试估计：在与实验条件相同的情况下，种一粒这样的麦种发芽的概率（精确到 0.01）．

**分析：** 500 粒麦种的一次实验，把其中发芽的麦种粒数看做频数，那么，发芽率就是频率．用五次实验中发芽率的平均值估计一粒麦种发芽的概率．

**解：** 用计算器计算，发芽率的平均值 $\bar{x}\approx 98.08\%=0.980\,8$，方差 $s=1.856\times 10^{-5}$.

由于方差很小，即发芽率在平均值 0.980 8 附近波动很小．所以，估计一粒麦种发芽的概率约为 0.98.

答：在与实验条件相同的情况下，种一粒麦种发芽的概率约为 0.98.

① 1 亩≈667 平方米．

**思考**

在例 3 中，麦种发芽率的平均值与随意种一粒麦种发芽的概率的含义分别是什么？它们的数值有什么关系？

**练习**

1. 检验员检测了一台机床前三天正常生产的全部零件的质量，检测结果如下表（合格率精确到 0.000 1）：

| 零件生产时间 | 第一天 | 第二天 | 第三天 |
|---|---|---|---|
| 零件的合格率 / % | 97.75 | 98.05 | 97.95 |

其中，合格率 $= \dfrac{\text{合格的零件数}}{\text{检测的零件数}} \times 100\%$.

从这台机床第四天正常生产的零件中随机抽取一个，估计这个零件是合格品的概率 .

2. 某灯泡厂生产的灯泡，经抽样实验，被抽取的灯泡 98% 能使用 2 500 h 以上 . 你买了一只该厂生产的灯泡，这只灯泡能使用 2 500 h 以上的概率是多少？

## 习　题　25－2

### ★基础★

1. 在学校田径运动会 4 × 100 米接力比赛时，用抽签的方法安排跑道，九年级（1）、（2）、（3）三个班恰好分在一组 . 求下列事件的概率：

（1）九年级（1）班恰好排在第一道的概率；

（2）九年级（1）、（2）班恰好依次排在第一、第二道的概率 .

2. 有 5 张电影票，其中有 3 张是第 10 排的，2 张是第 1 排的 . 5 人抓阄分配 .

（1）小华从 5 个阄中随机抓 1 张，求抓到的是第 10 排的概率；

（2）小华已经抓去 1 张第 10 排的电影票，小芳、小明再从剩下的阄中同时随机各取一张，求两人抓到的都是第 10 排的概率 .

3. 水平相当的小明和小华进行一场羽毛球比赛，规定三局两胜 . 求小明以 2 : 0 获胜的概率 .

4. 某邮局发行 1 万张有奖明信片，当明信片售完后从 0 ~ 9 中分别摇出四个数字组成一个中奖号 . 明信片号码与中奖号码相同时，为特等奖；后三个号码相同时，为一等奖；后两个号码相同时，为二等奖；最后一个号码相同时，为三等奖 .

（1）小芳购买了 5 张明信片，求她中特等奖的概率；

（2）小丽购买了 1 张明信片，求她中一等奖的概率；

（3）求购买 1 张明信片的中奖概率 .

5. 小兰去银行取款时，忘记了她的教育储蓄存折密码的最后两个数字，只记住了后两个数字都比 5 大 . 当她按对前面的数字后，随机按了后面两个比 5 大的数字 . 求她按对密码的概率 .

6. 射击运动员小强在以往的 5 次比赛中，射中 9 环以上的命中率（%）依次是：97.45，98.04，97.85，97.63，98.10.

（1）估计他射击 1 次射中 9 环以上的概率；

（2）说明这里的命中率与概率的含义各是什么 .

## ★★ 提升 ★★

1. 小华的抽屉里，左边只放有大小厚薄差不多的 5 科不同的课本，右边只放有大小厚薄一样的这 5 科的作业本 . 上自习课时，小华从抽屉的左边随机摸出一本课本，又从右边随机摸出一本作业本 . 求他摸出的两本恰好是同一科的概率 .

2. 从甲班乒乓球队的 5 名选手中，随机抽选 3 名组队参加乒乓球团体赛 . 求抽选的 3 名恰好是前 3 号选手的概率 .

## ★★★ 拓展 ★★★

甲、乙两人进行射击比赛，规定每人各射击 10 次，抽签决定先后，轮流射击一次 .

（1）写出甲抽得先射击的概率；

（2）抽签结果是甲先射击 . 甲射击 10 次，总成绩是 91 环；乙射击 9 次后，总成绩是 82 环，按乙的射击水平他必然能射中 8 环以上，而且射中 8 环以内每个点的可能性都相等，求乙最后一次射击能胜甲的概率（提示：分别计算所有可能射中 8 环以内区域的面积和能胜甲的环数区域的面积）.

## 探究学习

### 模拟彩票中奖实验

某种“15 选 5”的彩票规定：从 1~15 这 15 个号码中选择 5 个（可以重复），如果选择的号码与摇出的 5 个中奖号码（比如中奖号码为 1，2，9，11，11）至少有两个相同，就可以中奖．请模拟彩票中奖实验，用实验的结果估计购买一张这种彩票中奖的概率．

一、实验方法

方法 1：用科学计算器模拟彩票中奖实验．

（1）按键操作如下：

| | 具体操作 | 结　果 |
|---|---|---|
| A型计算器 |  | randint (1,15) |
| B型计算器 |  | RanInt# (1,15) |

按“enter”或“=”键，产生第一个号码，记作（$x_1$，…），依次按 5 次，产生 5 个号码的结果，记作（$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$）. 比如第一次实验出现:（1，11，3，5，14），与中奖号码比对不中奖，继续实验．

（2）重复实验，直至出现与中奖号码至少有两个相同时，结束这个实验．比如第六次实验出现:（2，8，7，11，13），其中与中奖号码（1，2，9，11，11）至少有 2，11 相同，结束这个实验．

（3）以 5 人为一组，统计本组每人实验的结果，将每人重复实验的次数和其中出现中奖的次数填在下表中．

| 实验者序号 | （1） | （2） | （3） | （4） | （5） |
|---|---|---|---|---|---|
| 每人实验的次数 | | | | | |
| 出现中奖的次数 | | | | | |
| 出现中奖的频率 | | | | | |

方法 2：摸球模拟彩票中奖实验.

(1) 选用大小和质量都一样的 15 个小球，每个小球分别写上 1，2，…，15 等号码，放进口袋里搅匀.依次有放回地随机摸出 5 次号码(小球)作为一次实验.

随机从口袋里摸出 1 个小球，记下小球的号码为 ($x_1$，…)，放回口袋里再搅匀.依次有放回地随机摸出 5 次小球，得到 5 个号码的结果，记作 ($x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$).比如第一次实验出现：(2，15，10，4，7)，与中奖号码比对不中奖，继续实验.

(2)、(3) 同方法 1.

二、探究结果

1. 计算上页表中的中奖频率.

2. 计算重复实验的频率的平均值和方差.

3. 用 5 人模拟实验中奖的频率的平均值估计购买一张这种彩票中奖的概率.

4. 与其他组交流，比较哪个组的实验中奖频率的方差最小.

阅读理解

数学文化

## 历史上科学家掷币实验的记录

历史上，法国科学家蒲丰、皮尔逊等人做过成千上万次掷一枚钱币的实验.下页表中列举的就是蒲丰、皮尔逊等人做过的掷币实验的记录.

| 实验者 | 掷币次数 | 出现“正面朝上”的次数 | 频　率 |
|---|---|---|---|
| 德·摩根 | 2 048 | 1 061 | 0.518 1 |
| 蒲丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 德·摩根 | 4 092 | 2 048 | 0.500 5 |
| 费勒 | 10 000 | 4 979 | 0.497 9 |
| 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |
| 罗曼诺夫斯基 | 80 640 | 39 699 | 0.492 3 |

根据上述蒲丰、皮尔逊等人的掷币实验数据，“正面朝上”发生的频率在数值 0.50 附近摆动．那么，“正面朝上”的概率就是 0.50.

根据上述结论，可以通过大量的重复实验，用事件发生的频率作为它的概率．

## 回顾与整理

**知识要点**

本章主要内容是：概率的求法与应用．

1. 求概率的方法．

(1) 列举法．

列举（列表、画树状图）事件所有可能出现的结果，并判断每个结果发生的可能性都相等．则事件 $A$ 发生的概率为

$$\mathrm{P}(A)=\frac{m}{n}.$$

其中，$n$ 是所有可能出现的结果个数，$m$ 是所求事件 $A$ 出现的结果个数．

知识要点

（2）用频率估计．

在大量重复实验时，如果一个事件发生的频率在某个常数附近波动，就把这个常数作为这个事件的概率．

2. 概率的简单应用．

运用求概率的方法，解决生产、生活中一些简单事件的概率问题．

学习指导

1. 掌握求概率的方法．

重点掌握列举法，熟练运用列表和画树状图，列举所有可能发生的结果：当每个结果发生的可能性都相等时，可以运用公式 $\mathrm{P}(A)=\frac{m}{n}$ 求概率；当每个结果发生的可能性不相等时，运用重复实验的频率估计概率．

2. 体会随机思想．

要从具体实例中了解事件发生的不确定性，在分析问题、解决问题的过程中体会其中蕴含的随机思想．

3. 学会运用概率知识解决简单实际问题．

分析实际问题的特征，选择求概率的方法，类比三个典型应用问题，建立实验模型，来求解生产、生活中的一些简单事件的概率问题.提高运用数学知识的意识和分析问题及解决问题的能力．

## 复 习 题

### ★基础★

1. 填空题：

（1）必然事件的概率 P＝________，不可能事件的概率 P＝________，随机事件的概率 P 的取值范围是________；

(2) 事件 $A$ 发生的概率为 P，那么，事件 $A$ 不发生的概率为________；

(3) 从 1，2，3 这三个数字中随机取两个相加，所有可能的和是________，和为偶数的概率是________；

(4) 从 0，1，3 这三个数字中随机取两个相减，所有可能的差是________，差为负数的概率是________；

(5) 甲、乙、丙三人随机站成一排，所有可能的站法有________，甲不站在中间的概率是________.

2. 选择题：

(1) 下列说法中正确的是(　　).

A. 随机事件发生的概率是不能确定的

B. 明天，降水概率 70%，是指明天 70% 的时间下雨

C. 事件 $A$ 发生的概率与事件 $A$ 不发生的概率可能相等

D. 概率为 0 的事件不存在

(2) 随机从三男一女四名学生的学号中抽取两人的学号，被抽中的两人性别不同的概率为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

3. 从长度分别是 2，3，4，5 的四条线段中随机取出三条，求：

(1) 三条线段能组成三角形的概率；

(2) 三条线段能组成直角三角形的概率.

4. 在 A 盒中有两张卡片，分别写有 3，$-2$；B 盒中有四张卡片，分别写有 2，4，0，$-1$. 随机从这两个盒子中各取出一张卡片，求取出的两张卡片上的数的积：

(1) 是负数的概率；

(2) 是正数的概率；

(3) 是零的概率.

5. 九年级(1)、(2)、(3)三个班教室门锁的钥匙都差不多，未贴标签摆放在一个盒子里，各班学生同时随机各取出一把去开教室门. 求：

(1) 只有一个班能打开教室门的概率；

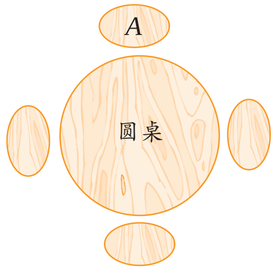
(2) 三个班都能打开教室门的概率；

(3) 三个班都不能打开教室门的概率.

## ★★ 提升 ★★

1. 听说学校聘来三位新教师，四位同学都在猜测他们的性别. 甲猜三位都是男教师；乙猜三位都是女教师；丙猜两位是男教师、另一位是女教师；丁猜一位是男教师、另两位是女教师. 假设每位教师是男教师或女教师的可能性相等，请你分别求四位同学猜对的概率.

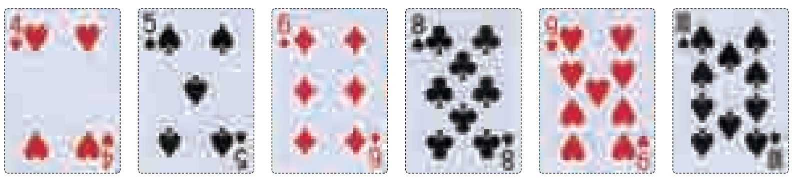
2. 一张圆桌旁有四个座位，$A$ 先坐在如图所示的座位上，$B$，$C$，$D$ 三人随机坐到其他三个座位上，求 $A$ 与 $B$ 相邻而坐的概率 .




（第 2 题）

## ★★★ 拓展 ★★★

1. 如图，有 6 张纸牌，从中任意抽取两张，点数之和是奇数的概率是________.



（第 1 题）

2. 甲、乙两人要去某风景区游玩，每天某一时段开往该风景区的汽车有三辆（舒适程度不同，票价相同），但他们不知道这些车开过来的顺序 . 两人采用了不同的乘车方案：甲无论如何总是上开来的第一辆车，而乙则是先观察后上车 . 当第一辆车开来时，乙不上车，而是仔细观察车的舒适状况 . 如果第二辆车的舒适状况比第一辆车好，他就上第二辆车；如果第二辆不比第一辆好，他就上第三辆车 .

如果把这三辆车的舒适程度分为上、中、下三等，请尝试着解决下面的问题：

（1）三辆车按出现的先后顺序，其舒适程度共有哪几种不同的可能？

（2）你认为甲、乙两人采用的方案，哪个人的方案能使自己乘坐舒适程度上等的车的可能性大？为什么？

# 第二十六章
# 综合运用数学知识解决实际问题

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学．

——华罗庚

## 26.1 解决实际问题的一般思路

在人们的生活、学习和生产中，无处不用数学．对于生活和生产中的数学问题，应当怎样去解决呢？一般的思路和方法是什么呢？下面我们来研究这些问题．

**交流**

某商店出售一种商品，经营者提出了以下三种调价方案：

(1) 先提价 10%，再降价 10%；

(2) 先降价 10%，再提价 10%；

(3) 先提价 25%，再降价 25%.

根据以上方案，请你思考下面几个问题：

(1) 执行这三种调价方案以后，调价后的价格与原来的价格是否相同？

(2) 比较这三种调价方案，调价后的价格是否相同？如果不相同，哪一种比较低些？

(3) 推广到一般情况，如果先提价 $a\%$，再降价 $a\%$，可以得到什么结论？

为了比较这三种调价方案，需要列出它们各自调价后价格的数学表达式．设这种商品原价为 $m$ 元：

按方案 (1) 调价后的价格为

$$m(1+10\%)(1-10\%)=0.99m(\text{元})；$$

按方案 (2) 调价后的价格为

$$m(1-10\%)(1+10\%)=0.99m(\text{元})；$$

按方案 (3) 调价后的价格为

$$m(1+25\%)(1-25\%)=0.937\ 5m(\text{元}).$$

从以上三式可知，调价后的价格都与原来的价格不相同．方案 (1) 与方案 (2) 调价后的价格相同，而方案 (3) 调价后的价格比方案 (1) 与方案 (2) 调价后的价格低．

推广到一般情况，设某种商品原价为 $m$ 元，那么无论是先提价 $a\%$，再降价 $a\%$；还是先降价 $a\%$，再提价 $a\%$，调价后的价格都是

$$m[1-(a\%)^2](\text{元}).$$

转化为数学表达式，可以作一般性的研究.

不难发现，$m[1-(a\%)^2]<m$. 当 $0<a<100$ 时，$a$ 越大，调价后的商品价格越低.

**例 1** 某电脑公司有 A，B，C 三种型号的电脑，其中 A 型每台 6 000 元，B 型每台 4 000 元，C 型每台 2 500 元. 学校计划从该公司购进两种不同型号的电脑共 36 台，恰好花费 100 500 元，请你设计不同的购买方案供学校选择.

**分析：** 由于要求在这三种电脑中选购两种，因此需要分类讨论，利用计划需购进电脑台数和购进电脑共用钱数这两个等量关系，列方程组来求解.

**解：** 按要求有三种情况：

(1) 当只购进 A，B 型电脑时，设购进 A 型电脑 $x$ 台，B 型电脑 $y$ 台. 根据题意，得

$$\begin{cases}6\,000x+4\,000y=100\,500,\\ x+y=36.\end{cases}$$

利用方程组的知识来解决.

解得

$$\begin{cases}x=-21.75,\\ y=57.75.\end{cases}$$

不合题意，舍去.

(2) 当只购进 A，C 型电脑时，设购进 A 型电脑 $x$ 台，C 型电脑 $z$ 台. 根据题意，得

$$\begin{cases}6\,000x+2\,500z=100\,500,\\ x+z=36.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=3,\\ z=33.\end{cases}$$

(3) 当只购进 B，C 型电脑时，设购进 B 型电脑 $y$ 台，C 型电脑 $z$ 台. 根据题意，得

$$\begin{cases}4\,000y+2\,500z=100\,500,\\ y+z=36.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} y = 7, \\ z = 29. \end{cases}$$

所以，有两种方案可供学校选择，第一种方案是购进 A 型电脑 3 台和 C 型电脑 33 台；第二种方案是购进 B 型电脑 7 台和 C 型电脑 29 台 .

我们看到，对于上述实际问题需要先把它转化为代数式或方程的数学问题，再利用已学过的数学知识去解决 .

**练习**

1. 某商场同时售出两台电子琴，每台售价均为 1 000 元 . 以成本计算，一台盈利 20%，另一台亏本 20%. 在本次出售中，试判断该商场是赔了还是赚了 .
2. 在某校举办的足球比赛中规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分 . 某班足球队参加了 12 场比赛，共得 22 分 . 已知这个队只输了 2 场，那么此队胜几场？平几场？

实际问题是多种多样的，它们有着不同的背景，在解决这些实际问题时，需要综合应用数学的有关知识 .

**例 2** 学校举办摄影展览，要求在长、宽分别为 15 cm，10 cm 的长方形相片四周，镶上一圈等宽的彩色纸条（如图 26 – 1），并使纸条的面积与相片的面积之比为 2 : 3. 如果王英同学镶上的纸条宽度为 1.6 cm，那么是否符合要求？如果不符合，请你帮助她确定纸条的宽度（精确到 0.1 cm）.

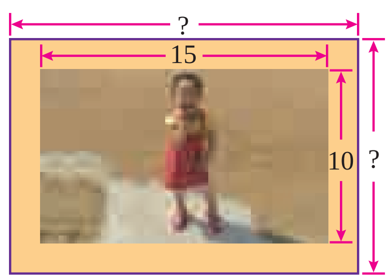


图 26 – 1

**分析：** 此问题与图形有关，需要结合图形寻找蕴含其中的数量关系，由已知两个长方形的面积之比，联想到利用方程的知识来解决 .

**解：** 设纸条的宽度为 $x$ cm，根据题意，得

$$(15+2x)(10+2x)=15\times10\times\frac{5}{3}.$$

转化为一元二次方程的问题.

整理得

$$2x^2+25x-50=0.$$

解方程得

$$x_1\approx1.8,\ x_2\approx-14.3.$$

根据题意，取 $x\approx1.8$.

因为 $1.6<1.8$，误差超过要求范围，所以王英同学镶上的纸条不符合要求.

答：王英同学镶上的纸条不符合要求，纸条的宽度应约为 1.8 cm.

**例 3** 小明去商店买灯泡. 商店柜台里现有功率为 100 W 的白炽灯泡和 40 W 的节能灯泡，它们的单价分别为 2 元和 32 元. 经了解这两种灯泡的照明效果和使用寿命都一样，但是节能灯泡省电. 已知小明家所在地的电价为每度 0.5 元，请问：当这两种灯泡的使用寿命超过多少时间时，小明选择节能灯泡才合算？［用电量 (kW · h) = 功率 (kW) × 时间 (h)，1 度 = 1 kW · h］

**分析：** 选择最优方案，需要对两种灯泡的用电量进行比较，结合题意联想用不等式的知识求解. 要注意题目所给数量的实际意义及其单位的换算.

**解：** 设使用寿命超过 $x$ 小时，选择节能灯泡才合算. 根据题意，得

$$2+0.5\times\frac{100}{1\,000}x>32+0.5\times\frac{40}{1\,000}x.$$

转化为不等式的问题.

解得

$$x>1\,000.$$

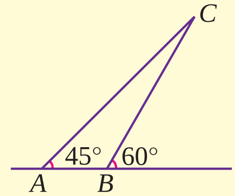
答：这两种灯泡的使用寿命超过 1 000 小时，选择节能灯泡才合算.

## 练习

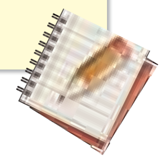
1. 磁悬浮列车是一种新型交通工具，具有速度快、能耗低等优点. 它每个座位的平均能耗仅为飞机每个座位平均能耗的 $\frac{1}{3}$，是汽车每个座位平均能耗的 70%. 那么，汽车每个座位的平均能耗是飞机每个座位平均能耗的（　　）.

   A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{10}{21}$　　D. $\frac{21}{10}$

2. 如图，天空中有一个静止的广告气球 $C$，从地面上的一点 $A$ 测得点 $C$ 的仰角为 45°，从地面上的另一点 $B$ 测得点 $C$ 的仰角为 60°．已知 $AB=20$ m，点 $C$ 和直线 $AB$ 在同一铅垂平面上，求气球离地面的高度（精确到 0.1 m）．



（第 2 题）



在解决实际问题时，怎样先把它转化为数学问题，然后通过对数学问题的解答，来完成对应用问题的解答呢？我们看下面的例题．

**例 4** 如图 26－2，一座抛物线形拱桥，已知水位在 $AB$ 位置时，水面宽 9.80 m；水位再上升 3 m 就达到警戒线 $CD$，这时水面宽 6.92 m．如果洪水到来时，水位以每小时 0.25 m 的速度上升，求洪水经过警戒线以后几个小时将到达拱桥的洞顶．

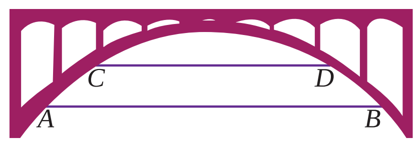


图 26－2

**分析：** 由于拱桥为抛物线形，联想利用二次函数图象的知识来解决．为了便于研究，需要建立适当的平面直角坐标系．

**解：** 以 $AB$ 所在直线为 $x$ 轴，$AB$ 中点为原点，建立平面直角坐标系，则抛物线顶点 $M$ 在 $y$ 轴上，且 $A$，$B$ 两点的坐标分别为 $(-4.90,\ 0)$，$(4.90,\ 0)$，$C$，$D$ 两点的坐标分别为 $(-3.46,\ 3)$，$(3.46,\ 3)$，如图 26－3．

设抛物线的表达式为

$$y=ax^2+k. \qquad ①$$

把 $B$，$D$ 两点的坐标 $(4.90,\ 0)$，$(3.46,\ 3)$ 分别代入①得

$$\begin{cases}24.01a+k=0,\\11.97a+k=3.\end{cases}$$

解得 $a\approx-0.25$，$k\approx6.00$．

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-0.25x^2+6$．

顶点 $M$ 的坐标为 $(0,\ 6)$．

设 $CD$ 与 $y$ 轴交点为 $N$，则 $ON=3$．

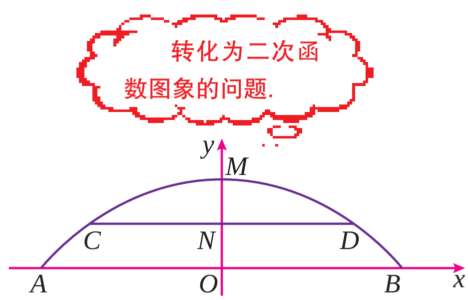


图 26－3

∵ $OM=6$,

∴ $MN=OM-ON=3$.

$3\div 0.25=12(\text{h})$.

答：洪水经过警戒线以后 12 小时将到达拱桥的洞顶 .

**探索**

服装厂有大量形状为等腰直角三角形的边角布料，如图 26－4．图中 $\angle C=90°$，$AC=BC=4$．现在要从这些布料中剪出扇形，做成不同形状的玩具，且使构成扇形的两条半径恰好都落在 $\triangle ABC$ 的边上，扇形的弧与 $\triangle ABC$ 的其他边相切 . 请设计出所有符合要求的方案示意图，并求出扇形的半径 .

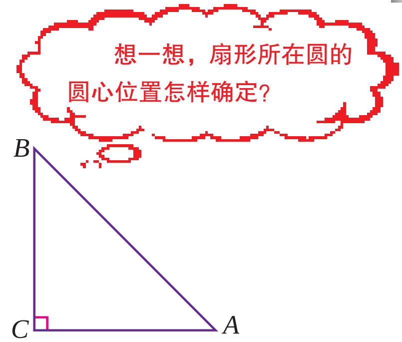



图 26－4

**例 5** 如图 26－5 所示，边长为 800 m 的正方形 $ABCD$ 是个货场，从 $A$ 处有一条平直铁路通过，与 $BC$ 边交于点 $E$，$CE=200$ m . 点 $D$ 是货运汽车入口 . 现要在铁路线 $AE$ 上修一个卸货站，使得点 $D$ 到卸货站的距离最短，求这个最短距离是多少 .

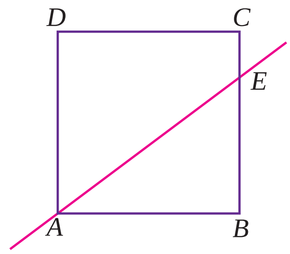



图 26－5

**分析：** 在这个问题中，要求出点 $D$ 到铁路 $AE$ 的最短距离，首先要在图形中作出点 $D$ 到 $AE$ 的最短距离，再寻求计算的方法 .

**解：** 作 $DF\perp AE$，垂足为 $F$，连接 $DE$，如图 26－6.

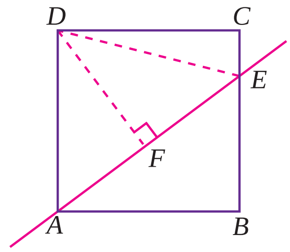



图 26－6

∵ $S_{\triangle ADE}=S_{\text{正方形}ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle DCE}$

$$=800^2-\frac{1}{2}\times 800\times 600-\frac{1}{2}\times 800\times 200$$

$$=320\ 000.$$

在 Rt $\triangle ABE$ 中，$AE=\sqrt{800^2+600^2}=1\ 000$，

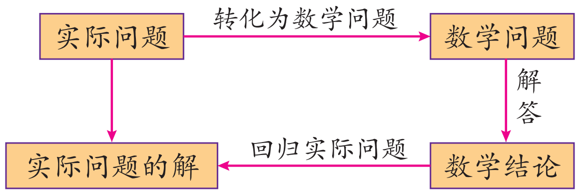
∴ $DF=\dfrac{2\times 320\ 000}{1\ 000}=640$.

答：点 $D$ 到卸货站的最短距离是 640 m .

## 交流

解决实际问题的一般思路是什么？

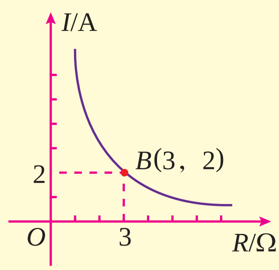
一般地，解决实际问题时都有一个转化的过程．首先分析实际问题，将它转化为相关的数学问题；然后运用相应的数学知识、方法去解答它；再把问题的解答回归到实际问题中进行考察，经过检验得到实际问题的解．这个思路可以用下面的框图来表示：




## 练习

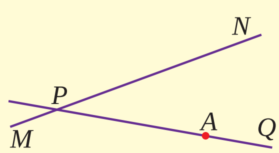
1. 在某闭合电路中，电压为定值，电流 $I$(A) 与电阻 $R$(Ω) 成反比例．如图表示的是该电路中电流 $I$ 与电阻 $R$ 之间关系的图象，则用电阻 $R$ 表示电流 $I$ 的函数表达式为（　　）．

   A. $I=\dfrac{2}{R}$　　B. $I=\dfrac{3}{R}$　　C. $I=\dfrac{6}{R}$　　D. $I=-\dfrac{6}{R}$




（第 1 题）

2. 如图，公路 $MN$ 和公路 $PQ$ 在点 $P$ 处交汇，且 $\angle QPN=30°$，点 $A$ 处有一所中学，$AP=160$ m．假设拖拉机在公路上行驶时，周围 100 m 以内会受到噪声的影响，那么拖拉机在公路 $MN$ 上沿 $PN$ 方向行驶时，学校是否会受到噪声影响？请说明理由．如果受影响，已知拖拉机的速度为 18 km/h，那么学校受影响的时间为多少？




（第 2 题）

# 习 题 26-1

## ★基础★

1. 据北京市水务局统计，北京市城区每年可利用的雨水量达 $2.3\times10^9$ m³，相当于 110 个昆明湖的水量，但北京市每年收集利用的雨水却只有 $10^6$ m³，约为 1 个昆明湖水量的(　　).

A. 4.78%　　B. 4.8 倍　　C. 47.8 倍　　D. $2.1\times10^{12}$ 倍

2. 商场在促销活动中，将标价为 200 元的商品在打 8 折的基础上再打 8 折销售，则该商品现在的售价是(　　).

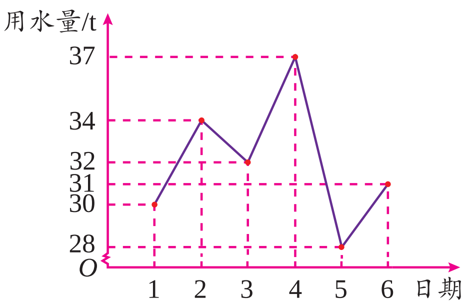
A. 160 元　　B. 128 元　　C. 120 元　　D. 118 元

3. 已知小明同学身高 1.5 m，在太阳光下的地面影长为 2 m. 如果此时测得一塔在同一地面的影长为 60 m，那么此塔的高应为(　　).

A. 90 m　　B. 80 m　　C. 45 m　　D. 40 m

4. 某住宅小区 6 月份 1 日至 6 日每天用水量的变化情况如图所示，那么这 6 天的平均用水量是(　　).

A. 30 t　　B. 31 t　　C. 32 t　　D. 33 t




(第 4 题)

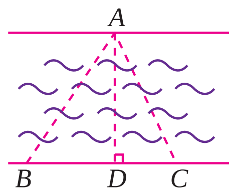
5. 已知甲、乙两种商品原来单价的和为 100 元. 因为市场变化，甲种商品降价 10%，乙种商品提价 5%. 调价以后，甲、乙两种商品单价的和比原来单价的和提高了 2%. 求甲、乙两种商品原来的单价各是多少元.

6. 3 月 12 日是植树节，某中学九年级(2)班计划组织部分同学义务植树 180 棵. 由于同学们参与的积极性很高，实际参加植树活动的人数比原计划增加了 50%，结果每人比原计划少栽了 2 棵树. 求实际有多少人参加了这次植树活动.


(第 6 题)

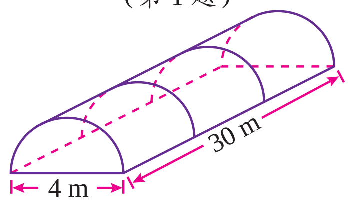
## ★★ 提升 ★★

1. 为了测量某段河面的宽度，王海同学设计了如图所示的测量方案：先在河的北岸选一定点 $A$，再在河的南岸选定相距 $a$ m 的两点 $B$，$C$，分别测得 $\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$. 请你根据王海同学测得的数据，计算出河宽 $AD$（结果用含 $a$ 和 $\alpha$，$\beta$ 的三角函数表示）.



（第 1 题）

2. 农村常需要搭建截面为半圆形的全封闭蔬菜塑料大棚. 有一种大棚如图所示，如果不考虑塑料薄膜接头重合及埋在土里的部分，那么搭建一个这样的塑料大棚需用塑料薄膜的面积是多少？



（第 2 题）

3. 某学校足球队参加全市足球联赛，在这个赛季中共需要比赛 14 场，现在已经比赛了 8 场，输了一场，得到 17 分. 联赛的记分规则是：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，输一场得 0 分. 试求：

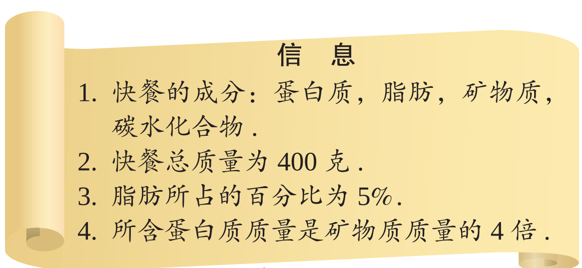
（1）在前 8 场比赛中，该队共胜了多少场；

（2）如果该队打满 14 场比赛，最高能得多少分；

（3）如果预期目标是打满 14 场比赛，得分不低于 29 分，那么在后面的 6 场比赛中，该队至少还要胜几场.

## ★★★ 拓展 ★★★

1. 5 月 20 日是中国学生营养日. 某校社会实践小组在这天开展活动，调查快餐营养情况. 他们从食品安全监督部门获取了一份快餐的信息（如图）. 根据信息，解答下列问题：



（第 1 题）

（1）这份快餐中所含的脂肪质量；

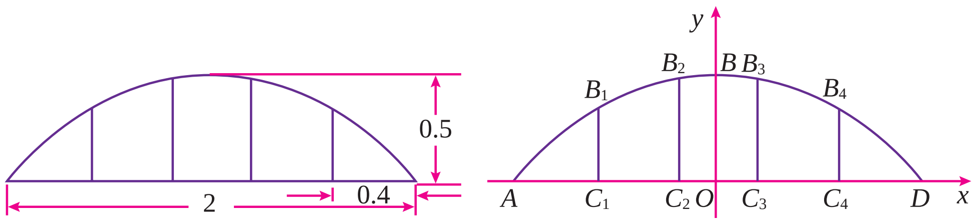
（2）如果碳水化合物占快餐总质量的 40%，求这份快餐所含蛋白质的质量；

（3）如果这份快餐中蛋白质和碳水化合物所占百分比的和不高于 85%，求其中所含碳水化合物质量的最大值.

2. 某公园草坪的护栏是由 50 段形状相同的抛物线形组成的，为牢固起见，每段护栏需按间距 0.4 m 加设不锈钢管立柱. 利用如图所示数据及坐标系（单位：m），求：

（1）该抛物线的表达式；

（2）所需不锈钢管立柱的总长度.




（第 2 题）

## 26.2 应用举例

生活和生产中的数学应用问题，背景往往比较复杂，数学关系比较隐蔽．因此需要认真阅读问题，抓住问题中的关键词语，理解题意，收集、分析、处理数据，联系有关的数学知识，把握其中的数、形关系，将其转化为相应的数学问题．比如转化为方程、不等式、函数、几何图形和统计概率等数学问题．

**例 1** 为了保护环境，某企业决定购买 10 台污水处理设备．现有 A，B 两种型号的污水处理设备，且它们的单价分别为 15 万元和 12 万元，又知该企业购买污水处理设备的预算资金不超过 130 万元.

（1）请你设计出该企业的购买方案．

（2）已知每台 A，B 型设备一个月处理的污水量分别为 250 吨，220 吨．如果该企业每月产生的污水量为 2 260 吨，为了尽可能节省资金，应选择哪种购买方案?

**分析：**由企业购买设备的资金有限，联想到需要转化为不等式的问题；要选择尽可能节省资金的方案，需要少购买价格较高的型号设备且使购买的两种设备处理污水的能力能满足企业处理污水的要求．

**解：**（1）设购买 A 型设备 $x$ 台，则购买 B 型设备（$10-x$）台．根据题意，得

$$15x+12(10-x)\leqslant 130.$$

解不等式，得 $x\leqslant \dfrac{10}{3}$．

$\because$ $x$ 为非负整数，

$\therefore$ $x$ 只能取 1，2，3，0，相应的（$10-x$）的值为 9，8，7，10.

$\therefore$ 该企业有四种购买方案．

方案一：购买 A 型设备 1 台，B 型设备 9 台；

方案二：购买 A 型设备 2 台，B 型设备 8 台；

方案三：购买 A 型设备 3 台，B 型设备 7 台；

方案四：只购买 B 型设备 10 台.

(2) 设购买 A 型设备 $x$ 台，则购买 B 型 $(10-x)$ 台．根据题意，得

$$250x+220(10-x)\geqslant 2\ 260.$$

解不等式，得　$x\geqslant 2$.

由 (1) 知，$x\leqslant \dfrac{10}{3}$，且 $x$ 为非负整数，

∴　$x$ 只能取 2，3，相应的 $(10-x)$ 的值为 8，7.

当 $x=2$ 时，购买资金为：$15\times 2+12\times 8=126$ (万元).

当 $x=3$ 时，购买资金为：$15\times 3+12\times 7=129$ (万元).

∴　选择方案二，即购买 A 型设备 2 台，B 型设备 8 台，可节省资金.

可以看到，在由数学问题回归到实际问题时，数学问题的解答不一定完全符合实际意义，所以还要根据应用问题的实际意义，确定正确的答案．

**例 2**　为了避免浪费水的现象，某城市计划出台阶梯水价政策，以家庭为单位分月计算：基本用水量 12 m$^3$ 以下为第一级，水价为每立方米 3.7 元；12 m$^3$ 到 16 m$^3$ 为第二级，水价为第一级的 2 倍；16 m$^3$ 以上为第三级，将按第一级水价的 5 倍收费．

不同等级的用水量，水价是不相同的.

(1) 按阶梯水价计算以下各家庭 4 月份应缴的水费，并填入下表：

| | 4 月份总用水量 /m$^3$ | 水费 / 元 |
|---|---|---|
| 小刚家 | 8 | |
| 小丽家 | 11 | |
| 小平家 | 14 | |
| 小华家 | 26 | |

(2) 设一户家庭某月用水量为 $x$ m$^3$，按阶梯水价，试写出该户此月应缴水费 $y$(元) 与用水量 $x$(m$^3$) 之间的函数关系式，并画出图象；

(3) 如果 5 月份小平家缴了 92.5 元的水费，小刚家缴了 40.7 元的水费，问这两家 5 月份的用水量各是多少．

**解：**(1) 略 (请自己完成填表).

(2) 该户此月应缴水费 $y$(元) 与用水量 $x$(m$^3$) 之间的函数关系式是

$$y=\begin{cases}3.7x,\ (0\leqslant x\leqslant 12)\\ 3.7\times 12+3.7\times 2\times(x-12),\ (12<x\leqslant 16)\\ 3.7\times 12+3.7\times 2\times 4+3.7\times 5\times(x-16).\ (x>16)\end{cases}$$

函数图象如图 26 – 7 所示．

(3) 设小平家 5 月份用水 $x_1$ m$^3$，因为缴水费 92.5 元，由图象可知，$x_1>16$.

所以　$92.5=3.7\times 12+3.7\times 2\times 4+3.7\times 5\times(x_1-16)$.

解得　$x_1=17$.

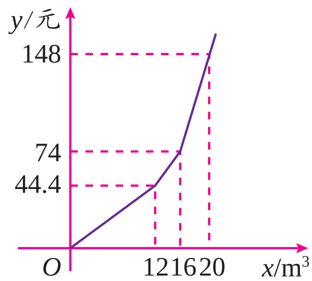


图 26 – 7

设小刚家 5 月份用水 $x_2$ m$^3$，因为缴水费 40.7 元，由图象可知，$x_2<12$，

所以　$40.7=3.7\times x_2$.

解得　$x_2=11$.

答：5 月份小平家的用水量是 17 m$^3$，小刚家的用水量是 11 m$^3$.

## 探索

根据例 2 的资料，请你设计一个月用水量与水费之间的关系对应表，供收水费的工作人员使用．

## 练习

1. 如图是某商品价格标签的一部分，那么它的原价是（　　）.

   A. 25 元　　B. 24 元　　C. 26 元　　D. 27 元

（第 1 题）

2. 王明同学节日到商场购物．商场开展购物返券促销活动，规定“满 100，送 50”，即购物满 100 元，赠送 50 元购物券．王明同学想，如果正好消费 100 元，50 元购物券也用完，相当于几折优惠？如果消费 199 元，还是赠送 50 元购物券，相当于几折优惠？你能帮助他解决这些问题吗？

数学的应用需要根据实际问题，联系有关的数学知识，完成由实际问题向数学问题的转化．在应用的过程中既要善于联想，必要时还需要动手操作，灵活运用所学知识．

**例 3** 已知：如图 26－8，$C$ 城市在 $B$ 城市的正北方向，两城市相距 100 km．计划在两城市间修筑一条高速公路（即线段 $BC$）．经测量，森林保护区 $A$ 既在 $B$ 城市的北偏东 40° 的方向上，又在 $C$ 城市的南偏东 56° 的方向上．已知森林保护区 $A$ 的范围是以 $A$ 为圆心，半径为 50 km 的圆形区域．计划修筑的这条高速公路会不会穿越保护区？为什么？

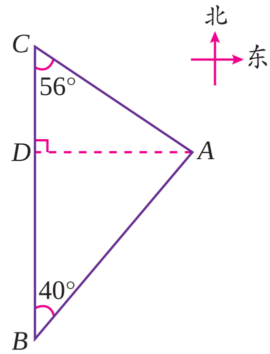


图 26－8

**分析：** 本题是一个涉及环保的应用问题，需要我们把实际问题抽象为三角形中的数量关系，转化为解直角三角形的数学问题．

**解：** 过点 $A$ 作 $AD \perp BC$，垂足为 $D$，如图 26－8.

在 Rt $\triangle ADC$ 中，$CD = \dfrac{AD}{\tan 56^\circ}$．

转化为三角函数的数学问题.

在 Rt $\triangle ADB$ 中，$BD = \dfrac{AD}{\tan 40^\circ}$．

根据题意，$CD + DB = CB = 100$，得

$$\frac{AD}{\tan 56^\circ} + \frac{AD}{\tan 40^\circ} = 100,$$

$$\therefore \quad AD = \frac{100 \cdot \tan 56^\circ \cdot \tan 40^\circ}{\tan 56^\circ + \tan 40^\circ} \approx 53.58.$$

$\therefore \quad AD > 50.$

答：计划修筑的这条高速公路不会穿越森林保护区．

**例 4** 要剪切如图 26－9(1) 所示的甲、乙两种直角梯形零件（单位：mm），且使两种零件数量相等．有两种面积相等的矩形铝板可供选用，第一种长 500 mm，宽 300 mm [图 26－9(2)]；第二种长 600 mm，宽 250 mm [图 26－9(3)].

(1) 为了充分利用材料，应当选用第几种铝板？这时一块铝板最多能剪甲、乙两种零件共多少个？剪下零件以后，剩余的边角料面积是多少？

（2）按你设计的剪切方案，画出示意图，并把边角余料用斜线表示出来 .

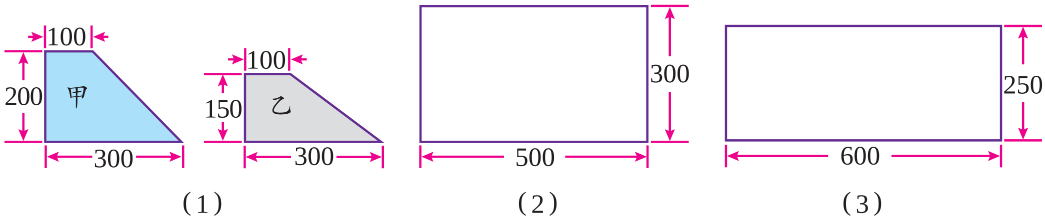



图 26－9

**分析：** 按照条件选择铝板，要动手操作，摆一摆、画一画、拼一拼，关键要打破直角梯形常规的摆放方法，灵活地去拼接，寻找最佳的剪切方案 .

**解：**（1）应选用第一种铝板，可剪甲、乙两种零件共 4 个 .

$$\because \quad 300\times 500-2\left[\frac{1}{2}(100+300)\times 200+\frac{1}{2}(100+300)\times 150\right]$$

$$=150\ 000-140\ 000=10\ 000,$$

$\therefore$ 剩余的边角料面积是 10 000 mm$^2$.

（2）画出的图形如图 26－10 所示 .

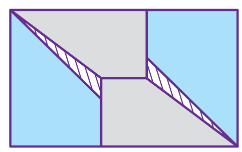


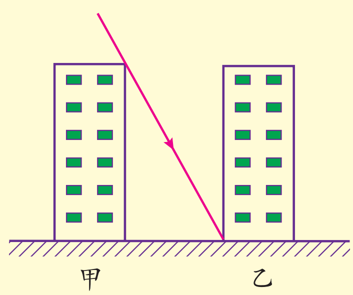
图 26－10

## 练习

根据国家有关规定，高层建筑物之间要留有一定的距离 . 已知甲、乙两楼在同一平面内的位置如图所示，甲楼高 33 m，上午太阳光线与地面的最小夹角为 60°.

（1）为保证乙楼能受到阳光照射，甲、乙两楼间的距离至少应为多少？

（2）如果甲、乙两楼之间的实际距离只有 15.6 m，那么乙楼的哪个部分上午有时不能享受阳光？




在解决数学应用问题时，往往要综合应用相关的数学知识 .

**交流**

如图 26－11(单位：cm)，将厚度为 0.02 cm 的卷筒纸，在直径为 10 cm 的卷筒上卷成直径为 20 cm 的纸卷．怎样求出卷纸的总长度？请你找出最优的计算方法．

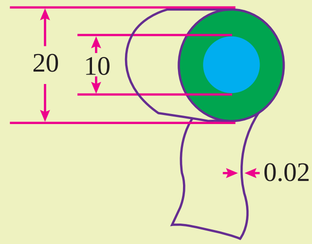



图 26－11

**例 5** 在一次科技知识竞赛活动中，两组同学的成绩统计如下：

| 成绩 / 分 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 甲组人数 / 人 | 2 | 5 | 10 | 13 | 14 | 6 |
| 乙组人数 / 人 | 4 | 4 | 16 | 2 | 12 | 12 |

根据这些统计数据，试从不同的角度分析哪组同学的成绩更好一些．

**分析：**通过观察、分析数据，可以联想到用统计中的平均数、中位数、方差等知识去解决．

**解：**(1) 甲、乙两组成绩的中位数、平均数都是 80 分．甲组成绩在 80 分(含 80 分)以上的有 33 人，乙组成绩在 80 分(含 80 分)以上的有 26 人，从这一角度看，甲组的成绩总体较好．

(2) $s_{甲}^2=\dfrac{1}{2+5+10+13+14+6}[2(50-80)^2+5(60-80)^2+10(70-80)^2+13(80-80)^2+14(90-80)^2+6(100-80)^2]$

$=\dfrac{1}{50}(2\times900+5\times400+10\times100+13\times0+14\times100+6\times400)$

$=172.$

$s_{乙}^2=\dfrac{1}{50}(4\times900+4\times400+16\times100+2\times0+12\times100+12\times400)$

$=256.$

$\because\ s_{甲}^2<s_{乙}^2,$

$\therefore$ 甲组成绩比乙组成绩波动要小，从这一角度看，甲组的成绩较好．

(3) 从成绩统计表看，甲组成绩在 90 分(含 90 分)以上的人数为 14 + 6 =

20(人)，乙组成绩在 90 分(含 90 分)以上的人数为 12 + 12 = 24(人)，乙组成绩集中在高分段的人数多，同时乙组得满分的人数比甲组多 6 人，从这一角度看，乙组的成绩较好．

**例 6** 某市要在一块地上(图 26－12 中的矩形 $ABCD$)规划建造一个矩形街心花园 $GHCK$，为了使文物保护区 $\triangle AEF$ 不被破坏，矩形街心花园的顶点 $G$ 不能在文物保护区内．已知 $AB = 200$ m，$AD = 160$ m，$AE = 60$ m，$AF = 40$ m．求：

(1) 当矩形街心花园的顶点 $G$ 恰是 $EF$ 的中点时，花园的面积；

(2) 当点 $G$ 在 $EF$ 上的什么位置时，花园的面积最大．

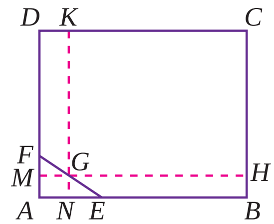


图 26－12

**分析：** 当点 $G$ 为 $EF$ 的中点时，求矩形 $GHCK$ 的面积，实际上已经转化成为一个数学问题．由三角形中位线的性质，易求 $MG$，$NG$ 的长，从而计算出花园的面积．对于第(2)问，由于随着点 $G$ 在 $EF$ 上的变动，矩形花园 $GHCK$ 的面积也在不断地变化，因此，要求何时花园的面积最大，就联想到要将其转化为函数问题．可以利用计算机或图形计算器探究，如图 26－13.

图 26－13

**解：** 如图 26－12，延长 $HG$，$KG$ 分别交 $AD$，$AB$ 于点 $M$，$N$.

(1) 当点 $G$ 是 $EF$ 的中点时，由三角形中位线定理，得

$$MG = \frac{1}{2}AE = 30,\quad GN = \frac{1}{2}AF = 20.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{矩形\,GHCK} &= HG \cdot KG \\ &= (200 - 30)(160 - 20) \\ &= 23\,800(\mathrm{m}^2).\end{aligned}$$

(2) 设 $MG = x$，则 $HG = 200 - x$.

$\because\quad MG \parallel AE$，

$\therefore \quad \triangle FMG \backsim \triangle FAE.$

$\therefore \quad \dfrac{FM}{FA} = \dfrac{MG}{AE}.$

$$FM = \frac{FA \cdot MG}{AE} = \frac{40x}{60} = \frac{2}{3}x.$$

$$\begin{aligned} MA &= FA - FM \\ &= 40 - \frac{2}{3}x\ (0 \leqslant x \leqslant 60). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad S_{\text{矩形}\,GHCK} &= HG \cdot KG \\ &= (200 - x)\left[160 - \left(40 - \frac{2}{3}x\right)\right] \\ &= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{40}{3}x + 24\,000 \\ &= -\frac{2}{3}(x-10)^2 + \frac{72\,200}{3}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x = 10\,(\mathrm{m})$ 时，$S_{\text{矩形}\,GHCK}$ 最大 .

此时 $\dfrac{FG}{FE} = \dfrac{MG}{AE} = \dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6}$，即 $FG : GE = 1 : 5$.

答：当点 $G$ 恰是 $EF$ 的中点时，花园的面积为 23 800 $\mathrm{m}^2$；当点 $G$ 的位置在 $EF$ 上，且满足 $FG : GE = 1 : 5$ 时，花园的面积最大 .

## 练习

某公司销售部有营销人员 15 人，销售部为了制订某种商品的月销售定额，统计了这 15 人某月的销售量如下：

| 每人销售量 / 件 | 1 800 | 510 | 250 | 210 | 150 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 / 人 | 1 | 1 | 3 | 5 | 3 | 2 |

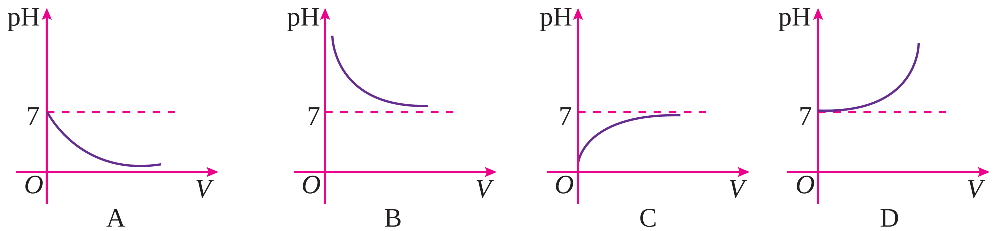
(1) 求这 15 位营销人员该月销售量的平均数、中位数和众数 .

(2) 假设销售部负责人把每位销售员的月销售量定为 320 件，你认为是否合理？如不合理，请你制订一个比较合理的销售定额，并说明理由 .

## 习 题 26－2

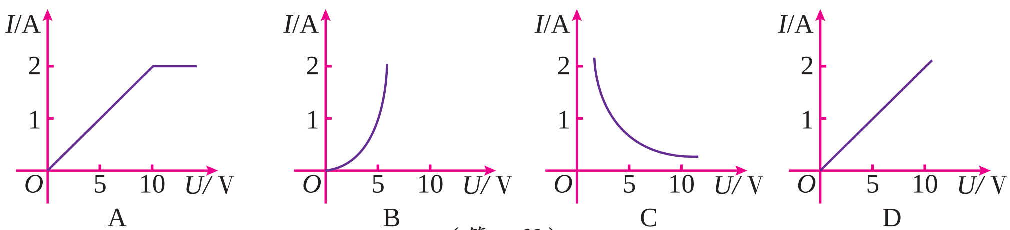
### ★基础★

1. 我们知道，溶液的酸碱度由 pH 确定．当 pH > 7 时，溶液呈碱性；当 pH < 7 时，溶液呈酸性．如果将给定的 HCl 溶液加水稀释，那么在下列图象中，能反映 HCl 溶液的 pH 与所加水的体积 $V$ 的变化关系的是（　　）.



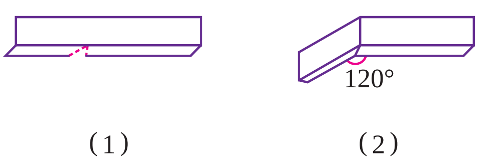

（第 1 题）

2. 如果一定值电阻 $R$ 两端所加电压为 5 V 时，通过它的电流为 1 A，那么通过这一电阻的电流 $I$ 随它两端电压 $U$ 变化的图象是（　　）.

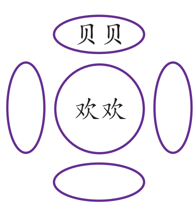



（第 2 题）

3. 如图，要把角钢（1）变成 120° 的钢架（2），则在角钢（1）上截去的缺口的度数是________.



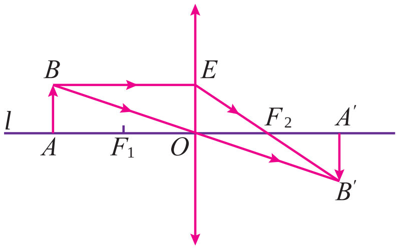

（第 3 题）



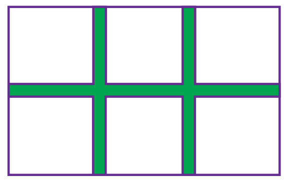

（第 4 题）

4. 要把北京 2008 年奥运会的 5 个吉祥物“福娃”放在展台上，有 2 个位置已定（如图），其他 3 个“福娃”在各种不同位置放置的情况下，“迎迎”和“贝贝”的位置不相邻这一事件发生的概率为________.

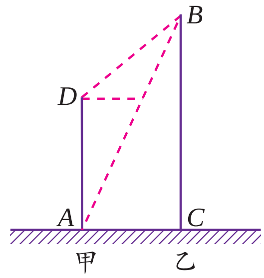
5. 如图，是凸透镜成像的光路图．已知 $AB \perp l$，$A'B' \perp l$，$EO \perp l$，它们的垂足分别是 $A$，$A'$，$O$．$BE \parallel l$，$AF_1 = F_1O = f = OF_2$（$f$ 为凸透镜的焦距）．利用数学知识证明：$A'B' = AB$.




（第 5 题）



（第 6 题）




（第 7 题）

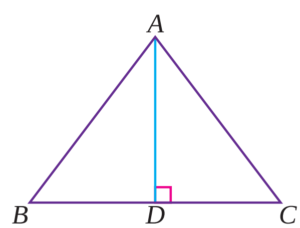
6. 如图，在宽为 20 m、长为 32 m 的矩形耕地上，修筑同样宽的三条道路（两条纵向，一条横向；横向与纵向互相垂直），把耕地分成大小相等的六块试验田．要使试验田面积为 570 $m^2$，请问道路应为多宽？

7. 如图，有甲、乙两楼，甲楼高 $AD$ 是 23 m，现在想测乙楼的高度 $CB$．某人在甲楼的楼底 $A$ 和楼顶 $D$ 分别测得乙楼的楼顶 $B$ 的仰角为 65°13′ 和 40°．请利用这些数据求乙楼的高度（精确到 0.01 m）．

## ★★提升★★

1. 某同学在 A，B 两家超市发现他看中的随身听的单价相同，书包单价也相同．随身听和书包的单价之和是 452 元，且随身听的单价比书包单价的 4 倍少 8 元．
（1）该同学看中的随身听和书包的单价各是多少元？
（2）某一天该同学上街，恰好赶上商家促销，超市 A 所有商品打 8 折销售，超市 B 全场购物满 100 元返购物券 30 元（不足 100 元不返券，购物券全场通用）．但他只带了 400 元钱，如果他只在一家超市购买这两样物品，请问在哪一家购买更省钱？

2. 在生产中，为了节约原材料，加工某些零件时经常利用一些边角废料．如图，$\triangle ABC$ 为锐角三角形废料板，其中 $BC = 12$ cm，$BC$ 边上的高 $AD = 8$ cm．在 $\triangle ABC$ 上截取矩形 $PQMN$，使 $QM$ 边与 $BC$ 边重合，请画草图说明 $P$，$N$ 两点落在什么位置上，才可能使它的面积最大？求出它的最大值，并求出此时矩形的长和宽．




（第 2 题）

3. 某班共有 50 名学生，老师安排每人制作一件 A 型或 B 型的陶艺品．学校现有甲种制作材料 36 kg，乙种制作材料 29 kg．制作一件陶艺品的用料情况如下表：

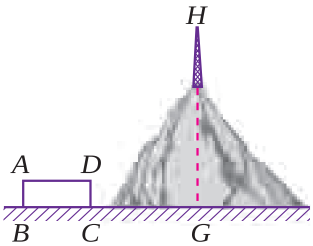
| 陶艺品类型 | 所需的甲种材料 /kg | 所需的乙种材料 /kg |
| --- | --- | --- |
| A　型 | 0.9 | 0.3 |
| B　型 | 0.4 | 1 |

（1）设制作 B 型陶艺品 $x$ 件，求 $x$ 的取值范围；

（2）请你根据学校现有材料，分别写出这个班制作 A 型和 B 型陶艺品的件数 .

## ★★★ 拓展 ★★★

如图，山顶有一座铁塔，山脚下有一个矩形建筑物 $ABCD$，且建筑物周围没有开阔平整地带 . 该建筑物顶端宽度 $AD$ 和高度 $DC$ 都可以直接测得，从 $A$，$D$，$C$ 三点可看到塔顶端 $H$. 可供使用的测量工具有皮尺、测角器 .




（1）请你根据现有条件，充分利用矩形建筑物，设计一个测量塔顶端到地面高度的方案 . 具体要求如下：测量数据尽可能少；在所给图形上，画出你设计的测量平面图，并将应测数据标记在图形上 .

（2）根据你上述标记的数据，计算塔顶端到地面的高度 $HG$.

## 综合与实践

### 复印纸和包装箱中的数学问题

1. 在复印资料的过程中，同学们发现复印纸的尺寸规格如下表(单位：mm)：

| 型　号 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 尺　寸 | 841 × 594 | 594 × 420 | 420 × 297 | 297 × 210 | 210 × 148 | 148 × 105 |

试研究各种型号纸张之间、每种型号纸张的长与宽之间存在什么关系，想一想这样规定的实际意义是什么.

2. 某厂生产长方体形状的肥皂，它的长、宽、高分别是10 cm，7 cm，3 cm. 请你为这个肥皂厂设计一种符合下列要求的包装箱，并使包装箱所用材料最少(只计算包装箱的表面积).

（1）包装箱是一个长方体；

（2）肥皂装箱时，以相同面积的面相对接；

（3）一箱肥皂为30块，装上肥皂后不留空隙.

阅读理解

## 哥尼斯堡七桥问题

18 世纪，在东普鲁士的哥尼斯堡，有一条普莱格尔河从城中穿过，河中的两个小岛与两岸由七座小桥相连，如图 26－14 所示．当地居民有一个传统，在假日里沿着小岛与河岸散步．他们试图找到一条这样的路线：一个人一次走遍七座桥，每座桥只能走过一次，最后仍能回到出发点．虽然，大多数人都把它当成有趣的娱乐，但是一直也未能解决这个问题，这就是有名的七桥问题．这个问题引起了当时著名的瑞士数学家欧拉的注意．

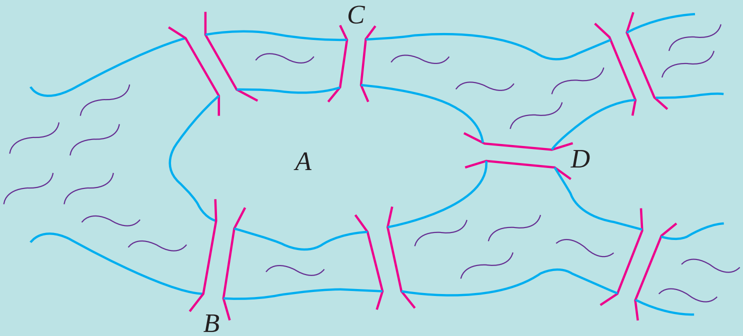



图 26－14

欧拉为了解决这个问题，他并没有亲自去哥尼斯堡，而是把这个问题作了数学化的处理：他把两岸和小岛都抽象成点，把桥看做连接两点的线，这样著名的七桥问题便转化为能否用一支笔不离开纸而一笔画出图 26－15 的问题了．若可以画出来，则图形中必有起点和终点，并且起点和终点应该是同一点．欧拉对这个问题进行了一般性的研究，发现了一笔画的规律．他认为，能一笔画的图形首先必须是连通图（简单地说，如果一个图中，任两个顶点之间都

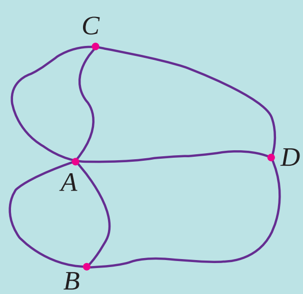



图 26－15

有连接它们的线，那么这样的图便可称为连通图）. 连通图中，与奇数条线相连的顶点叫做奇点，与偶数条线相连的顶点叫做偶点 . 七桥问题中的图就是连通图，其中的点 $A$，$B$，$C$，$D$ 都是奇点 . 但是，不是所有的连通图都可以一笔画的，能否一笔画是由图中的奇、偶点的数目决定的：

（1）凡是只有两个奇点的连通图（其余都为偶点），一定可以一笔画成 . 画时必须把一个奇点作为起点，另一个奇点作为终点 . 例如图 26 – 16 的线路可以是：$A \to B \to C \to A \to D \to C$.

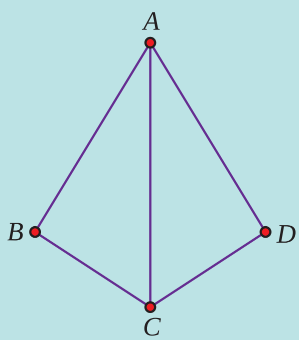


图 26 – 16

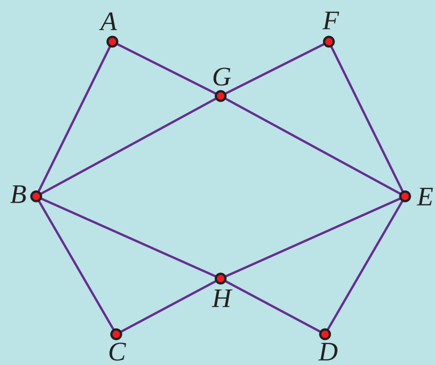


图 26 – 17

（2）凡是由偶点组成的连通图，一定可以一笔画成 . 画时可以把任一偶点作为起点，最后一定能以这个点为终点画完此图 . 例如图 26 – 17 中的各点都是偶点，画的线路可以是：$A \to B \to C \to H \to E \to G \to B \to H \to D \to E \to F \to G \to A$.

（3）其他情况的连通图都不能一笔画出 .

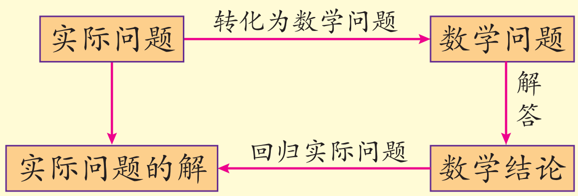
把上面所说的归纳起来，就是一个连通图若能一笔画出，有且只有两种情况：一种是所有的点都是偶点，另一种是只有两个奇点 .

在七桥问题中，由于奇点的个数是 4，所以它不能一笔画出，从而解决了这个问题 . 后来欧拉利用解决这个问题的思路和方法，继续开展深入的研究，他也因此而成为新的数学分支——“图论”的先驱 .

# 回顾与整理

## 知识要点

本章主要学习了综合运用数学知识解决实际问题．一般地，解决实际问题有一个转化的过程，首先分析实际问题，将它转化为相应的数学问题，然后运用数学知识和方法来解答它，再把数学结论回归到实际问题中去检验，以确定实际问题的解答．这个思路用框图表示如下：




## 学习指导

1. 学习数学重在应用，要注意数学与生活、生产实际及其相关学科知识间的相互联系，发现其中的数学问题，运用所学知识去解决，努力培养应用数学的意识．

2. 在解决实际问题时，首先要认真分析问题，注意收集、处理信息，透彻理解题意，然后联想相关的数学知识，通过抽象、概括，向数学问题转化．实际问题往往背景复杂，文字叙述较长，需要认真阅读，抓住关键词语，正确理解题意，认清事物之间的联系，找到解决问题的关键．

3. 在实际问题转化为数学问题以后，要运用所掌握的数学知识、技能和方法，完成对数学问题的解答．有时数学问题的解答并不一定符合问题的实际意义，这时就要针对问题的实际，对解答进行分析、选择，得到实际问题的正确答案．实际问题往往带有更强的综合性，解决它们需要具备扎实的数学基础知识和基本技能、较高的分析问题与解决问题的能力及勇于探索的精神．

# 复 习 题

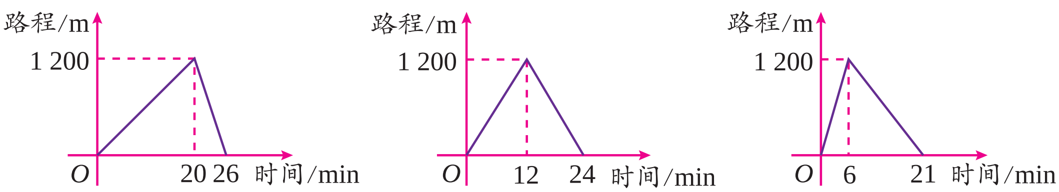
## ★基础★

1. 甲对乙说："你任意想一个数，把这个数乘 2，结果加上 8，再除以 2，最后减去所想的数，此时我就知道结果．"请你解释甲为什么能知道结果．

2. 某人到瓷砖商店去购买一种多边形形状的瓷砖，用来密铺地面，他购买的瓷砖形状不可以是（　　）．

   A. 正三角形　　B. 矩形　　C. 正八边形　　D. 正六边形

3. 小明、爸爸、爷爷同时从家里出发到达同一目的地后立即返回．小明去时骑自行车，返回时步行；爷爷去时步行，返回时骑自行车；爸爸往返都是步行．三个人步行的速度不等，小明和爷爷骑自行车的速度相等，每个人的行走路程与时间的关系是下面三个图象中的一个．请问完成一次往返，小明、爸爸、爷爷各用多少分钟？



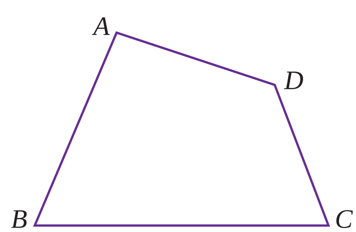

（1）　（2）　（3）

（第 3 题）

4. 用白铁皮做罐头盒，每张铁皮可以制作盒身 16 个或盒底 43 个，一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒．现有 150 张白铁皮，用几张制盒身、几张制盒底，可以正好制成整套的罐头盒？

5. 华氏温度和摄氏温度之间满足关系 $y = ax + b$，其中 $x$ 表示摄氏温度，$y$ 表示华氏温度．已知标准大气压下水的冰点为 0 ℃或 32 °F，沸点为 100 ℃或 212 °F．试确定 $y$ 和 $x$ 的函数关系，并分别求出当摄氏温度分别为 $-40$ ℃，30 ℃时，相应的华氏温度是多少．

6. 草原上的四口油井，位于四边形 $ABCD$ 的 4 个顶点，如图所示．现在要建立一个维修站 $H$，试问 $H$ 建在何处，才能使它到四口油井的距离之和 $HA + HB + HC + HD$ 为最小？并说明理由．




（第 6 题）

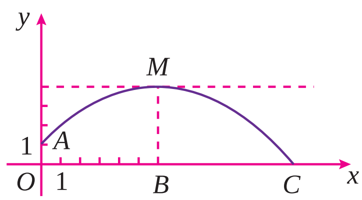
## ★★提升★★

1. 为了加快教学手段的现代化，某中学计划购置一批电脑．已知甲公司的报价为每台 5 800 元，优惠条件是购买 10 台以上，则从第 11 台开始，可按报价的 70% 付款；乙公司的报价也是每台 5 800 元，但优惠条件是每台均按报价的 85% 付款．假如你是学校负责人，在电脑品牌、质量、售后服务等完全相同的前提下，你如何选择？请说明理由．

2. 如图，足球场上守门员在 $O$ 处开出一高球，球从离地面 1 米的 $A$ 处飞出（$A$ 在 $y$ 轴上），运动员甲在距 $O$ 点 6 米的 $B$ 处发现球在自己头的正上方达到最高点 $M$，距地面约 4 米高．

（1）求足球开始飞出到落地时，该抛物线的表达式．

（2）足球落地点 $C$ 距守门员大约多少米？




（第 2 题）

3. 张强到某水果批发市场进货，市场中香蕉的价格如下表：

| 购买香蕉的质量 /kg | 不超过 20 | 20 以上，但不超过 40 | 40 以上 |
|---|---|---|---|
| 每千克价格 / 元 | 6 | 5 | 4 |

张强两次共购买香蕉 50 kg(第二次多于第一次)，共付出 264 元．请问张强第一次、第二次分别购买香蕉多少千克？

4. 某市的 A 县和 B 县春季育苗，急需化肥分别为 90 吨和 60 吨，该市的 C 县和 D 县分别储存化肥 100 吨和 50 吨，全部调配给 A 县和 B 县．已知 C，D 两县运化肥到 A，B 两县的运费(元 / 吨)如下表所示：

| 运费 出发地 / 目的地 | C | D |
|---|---|---|
| A | 35 | 40 |
| B | 30 | 45 |

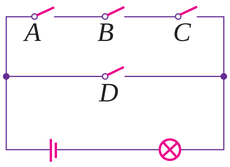
(1) 设 C 县运到 A 县的化肥为 $x$ 吨，求总运费 $W$(元)与 $x$(吨)的函数关系式，并写出自变量 $x$ 的取值范围；

(2) 求最低总运费，并说明总运费最低时的运送方案．

5. 如图，电路图上有四个开关 $A$，$B$，$C$，$D$ 和一个小灯泡，各元器件均能正常工作．

(1) 任意闭合其中一个开关，则小灯泡发光的概率等于多少？

(2) 任意闭合其中两个开关，请用画树状图或列表的方法求出小灯泡发光的概率．



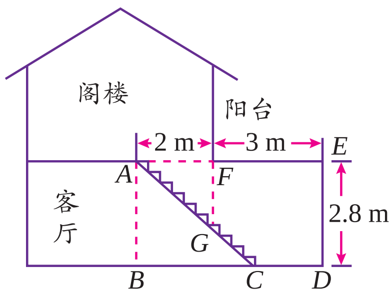
（第 5 题）

## ★★★ 拓展 ★★★

1. 李老师要装修带阁楼的新居（如图所示为新居剖面图），在建造客厅到阁楼的楼梯 $AC$ 时，为避免上楼时墙角 $F$ 碰头，设计墙角 $F$ 到楼梯的竖直距离 $FG$ 为 1.75 m．他量得客厅高 $AB = 2.8$ m，楼梯洞口宽 $AF = 2$ m，阁楼阳台宽 $EF = 3$ m．请你帮助李老师解决下列问题：

(1) 要使墙角 $F$ 到楼梯的竖直距离 $FG$ 为 1.75 m，楼梯底端 $C$ 到墙角 $D$ 的距离 $CD$ 是多少米？

(2) 在 (1) 的条件下，为保证上楼时的舒适性，楼梯的每个台阶的高要小于 20 cm，每个台阶的宽要大于 20 cm，问楼梯应该设计多少个台阶？



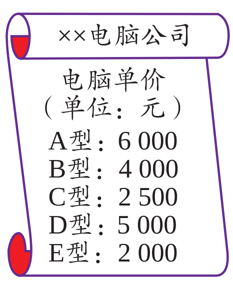
（第 1 题）

2. 某电脑公司现有 A，B，C 三种型号的甲品牌电脑和 D，E 两种型号的乙品牌电脑．某中学要从甲、乙两种品牌电脑中各选购一种型号的电脑．

(1) 写出所有选购方案（利用树状图或列表方法表示）；

(2) 如果 (1) 中各种选购方案被选中的可能性相同，那么 A 型电脑被选中的概率是多少？

(3) 现知该中学购买甲、乙两种品牌电脑共 36 台（价格如图所示），恰好用了 10 万元人民币，其中选购的甲品牌电脑为 A 型电脑，求购买的 A 型电脑有几台．



（第 2 题）

$\frac{x+3}{2}$ $y=kx+b$ $m\geqslant -1$

# 附 录

## 部分中英文词汇索引

| 中　文 | 英　文 | 页　码 |
|---|---|---|
| 平　移 | translation | 2 |
| 旋　转 | rotation | 10 |
| 位似图形 | homothetic figures | 25 |
| 投　影 | projection | 38 |
| 中心投影 | center projection | 38 |
| 平行投影 | parallel projection | 38 |