教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

七年级 下册

北京出版社

教育部审定
2013

义务教育教科书

数学
SHUXUE

七年级 下册

北京教育科学研究院 编

北 京 出 版 社

前　言

亲爱的同学们：

欢迎你们使用本套义务教育教科书！

数学是研究数量关系和空间形式的科学，是人类文化的重要组成部分。通过本套教科书，能够获得良好的数学教育，在数学上得到不同程度的发展。

栏目说明

思考

思考是数学发展的前提，不要放弃任何一个独立思考的机会，甚至在别人已经说出答案而你还没有找到例子或思路的时候也不要放弃。

交流

将你的思路和方法记录下来，有条理地向其他同学或老师表达，耐心倾听他们的意见，调整自己的思路或方法。

探索

严谨观察、细致分析、大胆猜想、细心验证、不断反思，直到找到满意的结论，体会数学探索的艰辛与乐趣。

实践

学好数学不仅要勤于动脑，也要勤于动手。动手画图、计算、列式、填表，将实际问题转化为数学问题，用数学的方法解决问题。

问题解决

你将遇到富有趣味性、挑战性的数学问题。这些问题需要你在理解的基础上，运用所学的数学知识和方法，寻求解决问题的思路和线索，猜想与验证结论，并将解决问题的整个过程有条理地记录下来，和同学们分享。

探究学习

你将面对一个新的情境，需要你发现和提出问题，独立思考，通过归纳、概括、类比、证明，得到新的猜想或规律，或者得到一个崭新的方法。

阅读理解

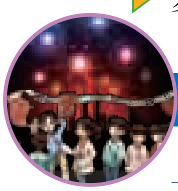
你将会发现数学发展的悠久历史，体验数学家探索数学的艰辛与快乐，感受数学对其他学科的巨大贡献。数学是人类文化的重要组成部分。

综合与实践

数学既能锤炼思维又具有广泛应用的事实将在这里得到充分的体现。你将尝试综合运用所学的数学概念、原理、方法和思想去解释和解决实际生活中的问题与现象，经历制定方案、调查研究、收集数据、整理数据、分析数据、做出判断、发现规律等过程，感受到数学的魅力。

希望这套数学教科书能够陪伴你度过一个充满智慧、乐趣的初中！

目 录



第四章
一元一次不等式和一元一次不等式组

在现实世界中，两个量之间不仅有相等关系，还有不等关系，而且随处可见. 这一章我们将要研究两个量之间的不等关系，学习有关不等式的概念、性质以及一元一次不等式和一元一次不等式组的解法等内容，并研究如何运用这些知识来解决一些简单的问题 .

一、不等式与不等式的基本性质

4.1 不等式

思考

1. 你能举出生活中一些表示不等关系的例子吗?
2. 你知道不等关系怎样用数学符号表示吗?

符号“＞”、“＜”、“≠”都是不等号，用它们可以分别表示两个量或两个表达式之间大于、小于、不等于的数量关系．例如 $4>-1$，$2x>5$，$a\neq b$，$5-9<3+7$ 等． 用不等号表示不等关系的式子叫做**不等式**.

比如，太阳的体积比地球大，如果用 a，b 分别表示太阳、地球的体积，那么就可表示成：$a>b$.

又如，2011 年底北京地区注册博物馆数量已超过 159 家，如果用 n 表示博物馆数，那么就可表示成：$n>159$.

我们还经常把大于号“＞”和等号“＝”结合起来使用,写成“⩾”，读作“大于或等于”，也就是“不小于”；同样地，符号“⩽”读作“小于或等于”，也就是“不大于”．用符号“⩾”或“⩽”连接起来的式子也叫做不等式.

探索

1. 在电脑前连续工作不宜超过 1 小时，怎样用不等式表示?

2. 如图 4－1，高速公路上对机动车时速的限制怎样用不等式表示?

图 4－1

例 1 用不等式表示下面的不等关系：

(1) 张平的年龄比杨洋大；

(2) 某种电梯标明“载客不超过 13 人”；

(3) 北京某一天的最低气温是 −3 ℃，最高气温是 12 ℃.

解： (1) 设张平的年龄为 a，杨洋的年龄为 b.

张平的年龄比杨洋大，用不等式表示为

$$a > b.$$

(2) 设电梯的载客人数为 x.

载客不超过 13 人，用不等式表示为

$$x \leqslant 13.$$

(3) 设北京某一天的气温为 x ℃.

最低气温是 −3 ℃，最高气温是 12 ℃，用不等式表示为

$$-3 \leqslant x \leqslant 12.$$

例 2 用不等式表示下列关系：

(1) a 的一半大于 3；

(2) x 与 6 的差是负数；

(3) x 的 5 倍不小于 20；

(4) b 的 $\frac{1}{5}$ 与 7 的和是非正数.

解： (1) $\frac{a}{2} > 3$；

(2) $x - 6 < 0$；

(3) $5x \geqslant 20$；

(4) $\frac{1}{5}b + 7 \leqslant 0$.

交流

空气质量指数（Air Quality Index 简称 AQI）是描述空气质量的一个标准. 当 AQI 的值在 0 和 50 之间时，空气质量状况为优，基本无空气污染，人们可正常活动. 某市去年空气质量为优的天数占全年天数的 60%，通过节能减排，今年要实现超过 80% 的目标，需要增加空气质量为优的天数设为 x 天，试用不等式表示这个关系.

练习

1. 用不等式表示下列关系：

(1) 哥哥存款 x 元，弟弟存款 y 元，兄弟二人的存款总数少于 1 000 元；

(2) 今年父亲的年龄是 40 岁，儿子的年龄是 13 岁，x 年后父亲的年龄与儿子的年龄的关系 .

2. 用不等式表示：

(1) a 是正数；　　(2) b 不是负数；

(3) x 与 8 的和小于 6 ；　　(4) y 的一半大于 6.

3. 用“>”或“<”填空：

(1) $6+5$____$9+5$ ；　　(2) $6+(-3)$____$9+(-3)$ ；

(3) 6×5____9×5 ；　　(4) $6\div3$____$9\div3$ ；

(5) $6\times(-5)$____$9\times(-5)$ ；　　(6) $6\div(-3)$____$9\div(-3)$.

4. 举出生活中的两个不等关系，并用不等式表示.

4.2 不等式的基本性质

我们学习过等式的性质，不等式是否也有类似的性质呢?

在 4.1 节的练习中我们练习过用“>”或“<”填空：

(1) $6+5$____$9+5$ ；　　(2) $6+(-3)$____$9+(-3)$ ；

(3) 6×5____9×5 ；　　(4) $6\div3$____$9\div3$ ；

(5) $6\times(-5)$____$9\times(-5)$ ；　　(6) $6\div(-3)$____$9\div(-3)$.

从中我们可以看到，对于不等式 $6<9$ ：

(1) 当不等式两边同时加上 5 时，不等号的方向____________；

(2) 当不等式两边同时加上 -3 时，不等号的方向____________；

(3) 当不等式两边同时乘 5(即 $+5$) 时，不等号的方向____________；

(4) 当不等式两边同时除以 3(即 $+3$) 时，不等号的方向____________；

(5) 当不等式两边同时乘 -5 时，不等号的方向____________；

(6) 当不等式两边同时除以 -3 时，不等号的方向____________.

探索

请你做一些类似的计算进行比较，并从中概括出不等式的性质 .

一般地，不等式具有下面的基本性质：

不等式的基本性质

1. 不等式两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，不等号的方向不变；
2. 不等式两边都乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变；
3. 不等式两边都乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

思考

1. 不等式的基本性质和等式的基本性质有什么相同之处，有什么不同之处？

2. 怎样用数学式子表示不等式的这些性质？

不等式的基本性质可表示为：

1. 如果 $a>b$，那么 $a\pm c>b\pm c$；
2. 如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$（或 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$）；
3. 如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$（或 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$）.

例 1 设 $a>b$，用不等号连接下列各题中的两个式子，并说明理由：

（1）$a-3$ 与 $b-3$；　　（2）$2a$ 与 $2b$；　　（3）$-\frac{1}{2}a$ 与 $-\frac{1}{2}b$.

解：（1）根据不等式的基本性质 1，在不等式 $a>b$ 的两边都加上 -3，不等号的方向不变，所以得

$$a-3>b-3.$$

（2）根据不等式的基本性质 2，在不等式 $a>b$ 的两边都乘 2，不等号的方向不变，所以得

$$2a>2b.$$

（3）根据不等式的基本性质 3，在不等式 $a>b$ 的两边都乘 $-\frac{1}{2}$，不等号的方向改变，所以得

$$-\frac{1}{2}a<-\frac{1}{2}b.$$

乘负数时别忘了改变不等号的方向！

例 2 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式：

(1) $x-1<1$；　　(2) $6x>5x-1$；

(3) $\frac{1}{3}x>5$；　　(4) $-2x<-3$.

解：(1) 根据不等式的基本性质 1，不等式的两边都加上 1，不等号的方向不变，得

$$x<2.$$

(2) 根据不等式的基本性质 1，不等式的两边都减去 $5x$，不等号的方向不变，得

$$x>-1.$$

(3) 根据不等式的基本性质 2，不等式的两边都乘 3，不等号的方向不变，得

$$x>15.$$

(4) 根据不等式的基本性质 3，不等式的两边都除以 -2，不等号的方向改变，得

$$x>\frac{3}{2}.$$

不等式的两边都除以 -2，不等号的方向要改变！

交流

如果 a，b，c 为有理数，其中 $c\neq0$，而且 $a>b>c$，下列不等式中哪些正确？

(1) $ab>bc$；　　(2) $a+b>b+c$；　　(3) $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

练习

1. 设 $a<b$，用“<”或“>”填空：

(1) $a+c$____$b+c$；　　(2) $4a$____$4b$；

(3) $-7a$____$-7b$；　　(4) $\frac{a}{6}$____$\frac{b}{6}$.

2. 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式：

（1）$x-2<3$；　　（2）$4x>3x-5$；

（3）$\frac{1}{10}x<\frac{7}{10}$；　　（4）$-8x<10$.

3. 当 $x=-3$，$x=0$，$x=2$，$x=7$，$x=8$ 时，不等式 $x-2<5$ 分别成立吗？

习　题　4－1

★基础★

1. 根据下列数量关系，列出不等式：

（1）$5x$ 与 4 的和是负数；

（2）x 小于它的相反数；

（3）y 的 $\frac{1}{4}$ 与 x 的 $\frac{1}{3}$ 的和不大于 0；

（4）m 的 3 倍大于或等于 10；

（5）$2a$ 与 $3b$ 的差是非负数 .

2. 用不等式表示下列不等关系：

（1）学生甲的身高是 a 厘米，学生乙的身高是 b 厘米，甲与乙身高的差是正数 .

（2）姐姐每月上网 20 小时，妹妹每月上网 x 小时，妹妹每月上网的时间超过了姐姐上网时间的 2 倍 .

（3）小明家每月的电话费 m 元在 150 元以内（不含 150 元）.

3. 设 $a>b$，用“>”或“<”填空：

（1）$a-\frac{5}{3}$ ____ $b-\frac{5}{3}$；　　（2）$a+c$ ____ $b+c$；

（3）$26a$ ____ $26b$；　　（4）$-\frac{2}{3}a$ ____ $-\frac{2}{3}b$.

4. 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式：

（1）$x+2>1$；　　（2）$10+x<9$；

（3）$6-x>5$；　　（4）$2x>-3$.

5. 下列数值中哪些能使不等式 $x+3<6$ 成立？

$$0,\quad -2.5,\quad -4,\quad 3,\quad \pi,\quad 4,\quad 4.5.$$

★★提升★★

1. 用“>”、“=”或“<”填空：

(1) 如果 $a-b<0$，那么 a____b；

(2) 如果 $a-b=0$，那么 a____b；

(3) 如果 $a-b>0$，那么 a____b；

(4) 如果 $b>0$，那么 $a+b$____a；

(5) 如果 $b=0$，那么 $a+b$____a；

(6) 如果 $b<0$，那么 $a+b$____a.

2. 用“<”或“>”填空：

(1) 当 $a>0$，b____0 时，$ab>0$；

(2) 当 $a>0$，b____0 时，$ab<0$；

(3) 当 $a<0$，b____0 时，$ab>0$；

(4) 当 $a<0$，b____0 时，$ab<0$.

3. 用“>”或“<”填空：

(1) 如果 $a>b$，那么 b____a；

(2) 如果 $a>b$，$b>c$，那么 a____c.

★★★拓展★★★

判断以下各题的结论是否正确，并说明理由：

(1) 如果 $a>b$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(2) 如果 $a>b$，$c=d$，那么 $ac>bd$；

(3) 如果 $ac^2>bc^2$，那么 $a>b$；

(4) 如果 $ax<b$，且 $a\neq 0$，那么 $x<\frac{b}{a}$；

(5) 如果 $ab>0$，那么 $\frac{a}{b}>0$；

(6) 如果 a，b，c 为有理数，其中 $c\neq 0$，而且 $a>b>c$，那么 $a-b>b-c$.

二、一元一次不等式

4.3 不等式的解集

由 4.2 节练习第 3 题的结果我们知道，当 $x=-3$，$x=0$，$x=2$ 时，不等式 $x-2<5$ 成立；当 $x=7$，$x=8$ 时，不等式 $x-2<5$ 不成立．与方程类似，

我们把使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**.

不等式 $x-2<5$ 还有其他的解吗？这个不等式有多少个解？

思考

可以发现，当 x 取小于 7 的任何一个数时，不等式 $x-2<5$ 都成立；而当 x 取大于或等于 7 的任何一个数时，不等式 $x-2<5$ 都不成立. 也就是说，任何一个小于 7 的数都是不等式 $x-2<5$ 的解，$x-2<5$ 有无穷多个解.

我们把不等式 $x-2<5$ 所有的解组成一个集合，称为不等式 $x-2<5$ 的解的集合，简称解集. $x<7$ 表示了不等式 $x-2<5$ 的解集.

一般来说，一个不等式的所有解组成的集合，简称为这个不等式的**解集**.

不等式的解集，可以在数轴上直观地表示出来.

例如，不等式 $x-2<5$ 的解集 $x<7$，可以用数轴上表示 7 的点的左边部分来表示，如图 4－2.

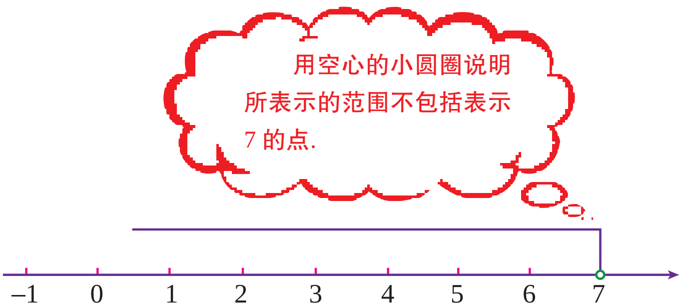


图 4－2

不等式 $x+5\geqslant 4$ 的解集 $x\geqslant -1$ 可以用数轴上表示 -1 的点和它的右边部分来表示，如图 4－3.

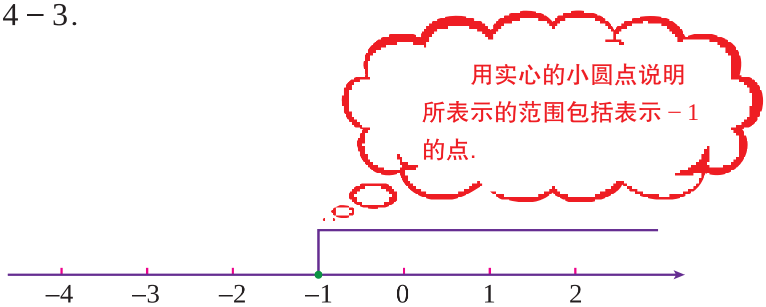


图 4－3

交流

如何用含 x 的不等式表示图 4－4 和图 4－5 中所表示的不等式的解集？表示 -5，-4.999，$-\frac{1}{\pi}$，0，0.5，2.999，3，$\frac{22}{7}$ 的点分别在哪个不等式的解集中？

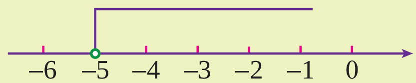


图 4－4

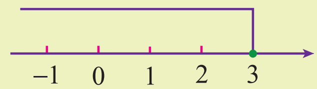


图 4－5

练习

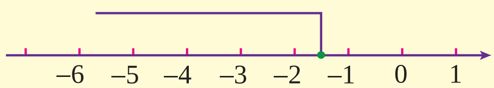
1. 在数轴上表示下列不等式的解集：

(1) $x \leqslant 0$；

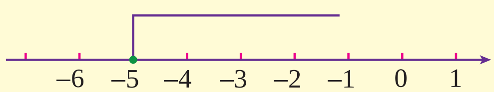
(2) $x > -3.5$.

2. 下列在数轴上表示的不等式的解集是否正确？如果不正确，该如何改正？

(1) $x < -\frac{3}{2}$；

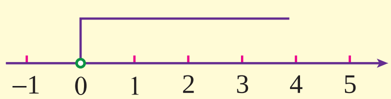


(2) $x \leqslant -5$.

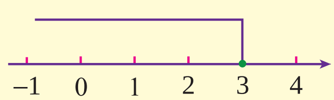


3. 分别用含 x 的不等式表示下列数轴中所表示的不等式的解集：

(1)



(2)



4.4 一元一次不等式及其解法

像 $x-2<5$，$x+5\geqslant 4$，$y-1<1$，$6x>5x-1$，$\frac{1}{3}x>5$，…的不等式，它们都只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 1，系数不等于 0，我们把这样的不等式叫做**一元一次不等式**.

求不等式的解集的过程，叫做**解不等式**.

同解一元一次方程类似，解一元一次不等式的过程，就是要利用不等式的基本性质将不等式变形成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式.

思考

在解方程时“移项要变号”的法则，在解不等式的变形中是否仍然成立？为什么？

例 1 解不等式 $2+5x>12$，并把它的解集在数轴上表示出来.

解： 根据不等式的基本性质 1，两边都减去 2，得

$$5x>12-2.$$

这一过程是否相当于把 2 变号后移到了不等号的右边？

合并同类项，得

$$5x>10.$$

根据不等式的基本性质 2，两边都除以 5，把系数化为 1，得

$$x>2.$$

这个不等式的解集在数轴上表示，如图 4－6.

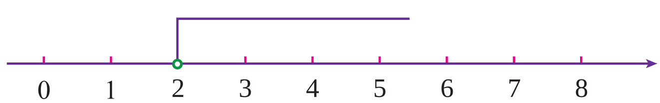


图 4－6

可以发现，解一元一次不等式与解一元一次方程类似，也可以“移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向.

例 2 解不等式 $\dfrac{x-1}{2}>\dfrac{2(2x-1)}{3}$，并把它的解集在数轴上表示出来．

解： 去分母，得

$$3(x-1)>4(2x-1).$$

去括号，得

$$3x-3>8x-4.$$

移项，得

$$3x-8x>3-4.$$

合并同类项，得

$$-5x>-1.$$

两边都除以 -5，得

$$x<\frac{1}{5}.$$

这个不等式的解集在数轴上表示，如图 4－7.

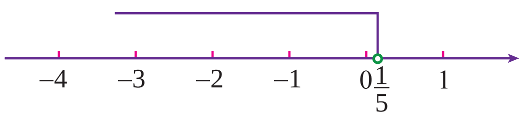


图 4－7

与解方程比较

解方程 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2(2x-1)}{3}$.

解：去分母，得 $3(x-1)=4(2x-1)$.

去括号，得 $3x-3=8x-4$.

移项，得 $3x-8x=3-4$.

合并同类项，得 $-5x=-1$.

两边都除以 -5，得 $x=\dfrac{1}{5}$.

一元一次方程的解只有一个，而一元一次不等式的解有无穷多个．

交流

解一元一次不等式的一般步骤是什么？它和解一元一次方程的主要区别在哪里？

练习

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $0.3x<0.8-0.1x$；　　(2) $10+3x\geqslant -5$；

(3) $2(x+5)<13+5x$；　　(4) $3(x+2)\geqslant 4(x-1)+6$.

2. 解不等式：$\dfrac{x+4}{6}-\dfrac{x}{3}\leqslant x-4$.

3. 求下列不等式的正整数解：

(1) $2x-1\leqslant 3$；　　(2) $-3x+2>-10$.

例 3 当 x 取何值时，代数式 $\frac{1}{3}(2-x)$ 的值比代数式 $3x-1$ 的值小？

解： 根据题意，得

$$\frac{1}{3}(2-x)<3x-1.$$

去分母，得 $$2-x<3(3x-1).$$

去括号，得 $$2-x<9x-3.$$

移项，得 $$-x-9x<-3-2.$$

合并同类项，得 $$-10x<-5.$$

系数化为 1，得 $$x>\frac{1}{2}.$$

所以当 x 取大于 $\frac{1}{2}$ 的值时，代数式 $\frac{1}{3}(2-x)$ 的值小于代数式 $3x-1$ 的值.

例 4 两位搬运工人要将若干箱同样的货物用电梯运到楼上．已知一箱货物的质量是 55 千克，两位工人的体重之和是 160 千克，电梯的载重量是 1 600 千克，算一算两位工人一次最多能运多少箱货物．

解： 设两位工人一次最多能运 x 箱货物．

根据题意，得 $$55x+160\leqslant 1\,600.$$

解这个不等式，得

$$55x\leqslant 1\,600-160.$$

$$55x\leqslant 1\,440.$$

$$x\leqslant 26\frac{2}{11}.$$

解集在数轴上表示，如图 4－8.

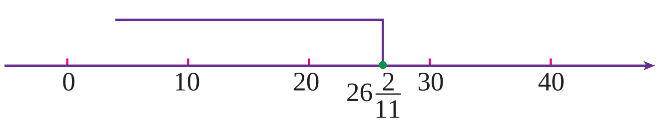


图 4－8

由于货物是按箱计算的，所以符合题意的解只能取整数 26.

答：两位工人一次最多能运 26 箱货物．

思考

一次知识竞赛共有 15 道题．竞赛规则是：答对 1 题记 8 分，答错 1 题扣 4 分，不答记 0 分．结果神箭队有 2 道题没答，飞艇队答了所有题，两队的成绩都超过了 90 分．请你分析一下两队分别至少答对几道题．

练习

1. 当 x 取何值时，代数式 $6x+7$ 的值：

（1）小于 1；（2）不小于 1；（3）是负数；（4）是非负数．

2. 到 6 月份为止，小力集邮票 91 张，小亮集邮票 53 张．从 7 月份开始，小力每月集邮票 10 张，小亮每月集邮票 4 张，那么至少从几个月后小力的邮票张数比小亮的 2 倍还多？

习题 4－2

★基础★

1. 下面不等式的两种解法对不对？如果不对，怎样改正？

解不等式 $-4x-3\geqslant 2x+6$．

解法 1：$-4x-2x\geqslant 6+3$．

$-6x\geqslant 9$．

$\therefore\quad x\geqslant -1.5$．

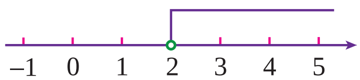
解法 2：$-3-6\geqslant 2x+4x$．

$6x\leqslant -9$．

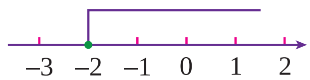
$\therefore\quad x\leqslant -1.5$．

2. 选择题：

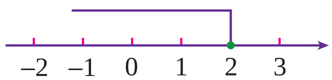
(1) 不等式 $x-3\leqslant 3x+1$ 的解集在数轴上表示如下，正确的是（　　）.



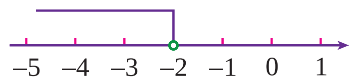
A



B



C



D

(2) 不等式 $3-7x<12-5(x-1)$ 的解集是（　　）.

A. $x>7$　　　　B. $x<-7$

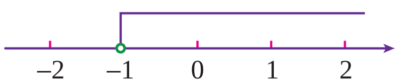
C. $x>-7$　　　　D. $x>-10$

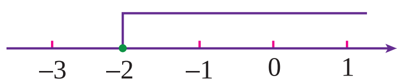
3. 在数轴上表示下列不等式的解集：

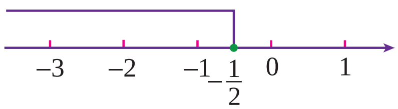
(1) $x>4$；　　　　(2) $x\geqslant 0$；

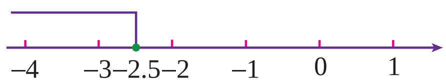
(3) $x\leqslant 2$；　　　　(4) $x<-\dfrac{3}{2}$.

4. 用含 x 的不等式表示下列数轴所表示的解集：

(1)


(2)


(3)


(4)


5. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $2(5-2x)\leqslant -3(x-2)$；　　　　(2) $2(x-1)-3(2x+1)\geqslant 0$；

(3) $\dfrac{1}{3}(1-2x)<\dfrac{3}{2}(2x-1)$；　　　　(4) $x-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+1}{3}<1+\dfrac{x+8}{6}$.

6. 当 x 在什么范围内取值时，代数式 $-2x+1$ 的值：

(1) 是负数；　　　　(2) 大于 -3；

(3) 小于 $-3x+5$；　　　　(4) 不大于 $4x-7$.

7. 求不等式 $3(x+1)\leqslant 5x+9$ 的负整数解，并在数轴上表示出来 .

8. 一双鞋的成本是 50 元，那么定价至少是多少元，打 8 折后才不会亏本？

★★ 提升 ★★

1. k 取什么值时，代数式 $\frac{1}{2}\left(1-5k-\frac{1}{3}k^2\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{k^2}{4}-k\right)$ 的值：

 (1) 小于 0；　　(2) 等于 0；　　(3) 大于 0.

2. 王老师要用 1 000 元去买 60 元一套和 90 元一套的两种演出服装共 15 套，请问王老师最多能买 90 元一套的服装多少套?
3. 姐姐现有存款 300 元，每月存款 60 元；妹妹现有存款 200 元，每月存款 20 元．几个月后，姐姐的存款是妹妹存款的 2 倍以上?
4. 某旅游公司规定，旅游大巴的个人零售票价是每人 10 元，20 人以上（含 20 人）的团体票价可以享受 8 折优惠．蓝鸟小队参加活动的同学预计在 16 人左右，分析一下他们如何购票更实惠．

★★★ 拓展 ★★★

1. x 取哪些整数时，能使下面各题中的两个不等式都成立：

 (1) $x+1>3$ 与 $x-6<0$；　　(2) $2x\geqslant-4$ 与 $2x\leqslant4$；

 (3) $\frac{x}{2}>-3$ 与 $-x\geqslant1$；　　(4) $2x\geqslant7$ 与 $4x<23$.

2. 在进行矿山爆破时，为了确保安全，点燃引火线后要在爆破前转移到 300 米以外的安全地区．已知引火线的燃烧速度是 0.8 厘米 / 秒，人离开的速度是 5 米 / 秒，算一算引火线至少需要多少厘米．

三、一元一次不等式组

4.5 一元一次不等式组及其解法

思考

从北京到天津某地，有几条可供选择的路线，它们的路程在 240 千米到 300 千米之间（包括 240 千米和 300 千米），如果汽车的平均速度是每小时 80 千米，那么从北京到天津某地所需的行驶时间大约在什么范围内?

设汽车从北京到天津某地大约需要 x 小时，根据题意，汽车行驶的距离 $80x$ 千米应该在 240 千米到 300 千米之间．即行驶时间 x 应同时满足不等式

$$80x \geqslant 240 \qquad ①$$

和

$$80x \leqslant 300. \qquad ②$$

由于不等式①和②是同时存在的，我们可以把这两个不等式放在一起，写为 $\begin{cases} 80x \geqslant 240, \\ 80x \leqslant 300 \end{cases}$ 的形式，这样就组成一个一元一次不等式组．

不等式组中的各个不等式的解集的公共部分，就是不等式组中 x 的可取值的范围．

由不等式①解得 $x \geqslant 3.$

由不等式②解得 $x \leqslant 3.75.$

在同一数轴上表示不等式①、②的解集，如图 4－9.

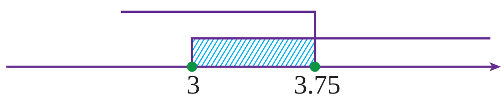


图 4－9

可以看出，使不等式①、②同时成立的 x 的值是 3 和 3.75 之间的所有数（包括 3 和 3.75），记作 $3 \leqslant x \leqslant 3.75$．它们是不等式①、②的解集的公共部分．不等式①、②的解集的公共部分，叫做由不等式①、②所组成的一元一次不等式组的解集．

这样，上面问题的答案应该是：从北京到天津某地大约需要 3 至 3.75 小时．

一般地，当两个或两个以上的含有同一个未知数的一元一次不等式合在一起时，就组成了一个**一元一次不等式组**．不等式组中的几个一元一次不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的**解集**．求不等式组的解集的过程叫做**解不等式组**．

解一元一次不等式组，通常可以先分别求出不等式组中每个不等式的解集，再确定这些解集的公共部分．利用数轴可以直观地确定出不等式组的解集．

例 1 解不等式组 $\begin{cases} 3x-2<2x-5, & ① \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}<\dfrac{x-2}{3}. & ② \end{cases}$

解： 解不等式①，得 $x<-3$.

解不等式②，得 $x<-1$.

在数轴上表示不等式①、②的解集，如图 4 – 10.

比 -3 还小的数一定都比 -1 小！

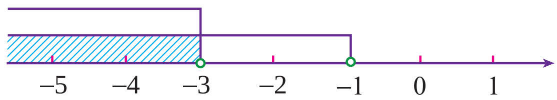


图 4 – 10

所以这个不等式组的解集是 $x<-3$.

例 2 解不等式组 $\begin{cases}5x-6\geqslant 2x+6, & ①\\ 3x-4>4(x-1). & ②\end{cases}$

解： 解不等式①，得 $x\geqslant 4$.

解不等式②，得 $x<0$.

在数轴上表示不等式①、②的解集，如图 4 – 11.

$x\geqslant 4$ 与 $x<0$ 这两个解集没有公共部分.

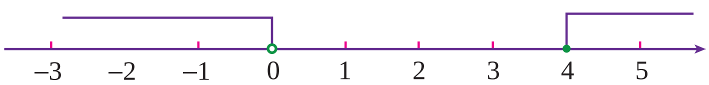


图 4 – 11

由图 4 – 11 可以看出，这两个不等式的解集没有公共部分，就说不等式组无解.

例 3 求适合不等式 $-11<-2a-5\leqslant 3$ 的 a 的整数解.

解： 由 $-11<-2a-5\leqslant 3$，得

$$\begin{cases}-2a-5>-11,\\ -2a-5\leqslant 3.\end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$\begin{cases}a<3,\\ a\geqslant -4.\end{cases}$$

所以原不等式的解集为 $-4\leqslant a<3$.

适合原不等式的整数解是 -4，-3，-2，-1，0，1，2.

交流

解一元一次不等式组的一般步骤是什么？一元一次不等式组一定有解吗？

练习

1. 填表：

不等式组	$\begin{cases} x>2, \\ x>-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x<2, \\ x<-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x>2, \\ x<-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x<2, \\ x>-1 \end{cases}$
在数轴上表示不等式的解集				
不等式组的解集				

2. 解下列不等式组：

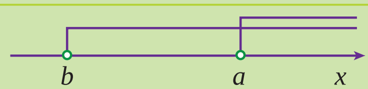
(1) $\begin{cases} 3x+2<2x-3, \\ 2(x-1)>4x-7; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x+2>2(x-1), \\ 4x-3\leqslant 3x-2; \end{cases}$　(3) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}<1, \\ \dfrac{3x-1}{2}>x+\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

3. 求适合不等式 $-10\leqslant 3x-7<8$ 的所有的整数解．

习　题　4－3

★基础★

1. 填表：

不等式组 $(a>b)$	在数轴上表示不等式的解集	不等式组的解集
$\begin{cases} x>a, \\ x>b \end{cases}$		
$\begin{cases} x<a, \\ x>b \end{cases}$		
$\begin{cases} x<a, \\ x<b \end{cases}$		
$\begin{cases} x>a, \\ x<b \end{cases}$		

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 9-0.1x \geqslant -1, \\ 1-0.2x \leqslant -1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2(x+1) < 0, \\ 2x-1 < 1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \geqslant 1, \\ 3x-7 > -1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{x}{3} < -1, \\ 2(x-3)-3(x-2) < 0. \end{cases}$

3. 求同时适合不等式 $6x+\frac{5}{7} > 4x+7$ 和不等式 $8x+3 < 4x+40$ 的 x 的整数解 .

4. 求适合不等式 $-12 \leqslant 6x-10 < 23$ 的非正整数解 .

★★ 提升 ★★

1. 长比宽多 8 米的长方形花坛，它的周长在 120 米和 180 米之间 (包括 120 米和 180 米)，那么它的宽可能在什么范围内?
2. 一个两位数，它的个位上的数字比十位上的数字大 3，并且这个两位数小于 44 且大于 25，求这个两位数.
3. 某校在一次课外活动中，需要抽调一部分学生并把他们平均编为 9 个组．如果每组比预定人数多 1 人，那么所需学生总数超过 200 人；如果每组比预定人数少 1 人，那么所需学生总数不到 190 人．求每组学生的预定人数是多少 .

★★★ 拓展 ★★★

1. 试求下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases} x > -2, \\ x-3 > 0, \\ 6-x \geqslant 0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2 \geqslant 2x, \\ x-4 < 5-2x, \\ \frac{x+3}{2} > 3x. \end{cases}$

2. k 取什么值时，解方程 $6x-k=0$ 得到的 x 的值：

(1) 都小于 1 ;　　(2) 都不小于 1.

3. 把若干颗花生分给若干只猴子. 如果每只猴子分 3 颗，就剩下 8 颗；如果每只猴子分 5 颗，那么最后一只猴子虽分到了花生，但不足 5 颗. 求猴子有多少只，花生有多少颗 .

综合与实践

如何上网最划算

某地区家用电脑上网实行两种收费标准，包月制或计时制．

包月制：每月 50 元（限一部个人住宅电话上网）．

计时制：每小时 3 元．

两种收费制都要缴纳话费 0.02 元 / 分．

请你根据上面上网收费的两种标准，分析一下在什么情况下选用哪种收费标准比较实惠．

也可了解你所居住地区的上网收费情况，解决类似问题．

阅读理解

符号“$>$”和“$<$”的由来

在符号“$>$”和“$<$”出现之前，人们用文字、缩写或象征性记号来表示不等关系．

1629 年，生于法国的荷兰数学家吉拉德（A. Girard，1595 —1632）在他所著的《代数新发现》里，使用了下面象征性的记号表示不等式：

$$A\mathrm{ff}B \text{ 表示 } A>B\text{；}B\xi A \text{ 表示 } B<A.$$

显然，它书写起来比文字简洁许多，但是记起来并不方便，而且不能突出它们对称的特征．因此，后人认为它更像繁体字的简化，并不是理想的不等号，使用者寥寥无几．

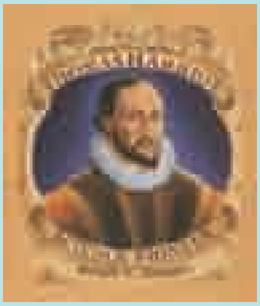
1631 年，创用乘号“×”的奥特雷德在一本广为流行的著作《数学入门》里，创用符号“$\sqsupset$”表示“大于”，符号“$\sqsupset$”表示

“小于”. 这种符号具有明显的对称性、和谐性，到了 18 世纪还有人在使用，但书写起来，还是不及符号“$>$”和“$<$”来得干脆利落，最终还是被淘汰了.

同年，在英国数学家、天文学家托马斯·哈里奥特（T. Harriot，1560—1621）逝世 10 周年之际，人们为了纪念他在数学研究方面的丰功伟绩，出版了他的遗著《分析术实例》. 该书内容之丰富，论述之深刻，曾被大数学家沃利斯赞美不绝，尤其是书中大于和小于符号的首次创立永载史册. 书中写道：

大于的记号：$a>b$ 表示 a 量大于 b 量；

小于的记号：$a<b$ 表示 a 量小于 b 量.



托马斯·哈里奥特

这对符号一出现，立刻得到一些学者的赞许和使用. 如果按照国际惯例，以出版时间作为诞生时间的话，不等号“$>$”、“$<$”是 1631 年诞生的，但若从作者创用的时间来看，还要提早 10 ~ 20 年，至少应该从 1621 年算起.

符号“$>$”和“$<$”始创于 17 世纪，直到 18 世纪初才被广泛应用，整整花了一个世纪的时间.

回顾与整理

知识要点

本章我们以熟悉的生活实际为背景，研究了两个量之间的不等关系，探讨了不等式和它的基本性质，一元一次不等式和一元一次不等式组的解法，以及应用一元一次不等式解决一些简单问题.

1. 用不等式可以表示两个量之间的不等关系. 不等式的基本性质与等式的基本性质很类似，主要区别是：在等式两边都乘（或除以）同一个不等于零的数时，所得结果仍是等式；在不等式两边都乘（或除以）同一个正数时，不等号的方向不变，而在不等式两边都乘（或除以）同一个负数时，不等号的方向要改变.

2. 解一元一次不等式和解一元一次方程也很类似，主要异同点对比如下：

	一元一次方程	一元一次不等式
标准形式	一元一次方程 $ax+b=0(a\neq0)$	一元一次不等式 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0(a\neq0)$
解法步骤	①去分母 ②去括号 ③移项 ④合并同类项 ⑤系数化为 1	①去分母 ②去括号 ③移项 ④合并同类项 ⑤系数化为 1 注意：在步骤①和⑤中，如果乘数或除数是负数，要改变不等号的方向
解	只有一个解	有无数多个解

3. 一元一次不等式组的解集是这个不等式组中各个不等式的解集的公共部分. 解不等式组的一般步骤是：

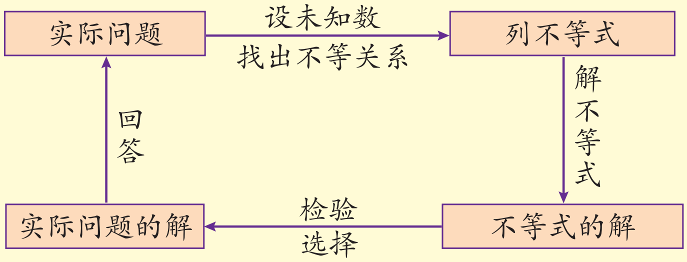
(1) 求出不等式组中每个不等式的解集；

(2) 借助数轴求出这些不等式的解集的公共部分，即求出了

知识要点

不等式组的解集.

4. 列一元一次不等式解实际问题的一般步骤如下：



学习指导

1. 现实生活中的数量关系既有相等的，也有不等的. 方程和不等式是我们研究相等与不等关系的两个重要工具. 一元一次不等式是研究不等关系的基本工具，也是学习其他不等式和其他知识的基础.

2. 一元一次不等式与一元一次方程，有许多类似之处，要特别注意它们之间的相同点和不同点. 这是学好本章内容很重要的学习方法.

3. 不等式的基本性质是解一元一次不等式和解一元一次不等式组的依据.

4. 在不等式两边都乘同一个数（正数、零、负数），会出现三种不同的情形. 以不等式 $5<6$ 为例，在不等式 $5<6$ 两边都乘同一个数 a 时，有下面三种情形：

① $5a<6a(a>0)$； ② $5a=6a(a=0)$； ③ $5a>6a(a<0)$.

请注意：如果在不等式的两边都乘零（情形②），就改变了问题的性质，不能用它对不等式进行变形.

5. 借助数轴可以直观地表示不等式的解集，这有助于我们确定一元一次不等式组的解集. 在数轴上表示 $x>a$ 与 $x\geqslant a$（或 $x<a$ 与 $x\leqslant a$）这两个解集时，用空心圆圈还是用实心圆点是有区别的，空心圆圈表示不含 a，而实心圆点表示含有 a.

6. 把实际问题中的不等关系抽象为不等式，需要把实际问题中一些表示不等关系的词语准确地转化为数学符号. 比如，“大

于”、“超过”等一般抽象为“＞”；“小于”、“不足”等一般抽象为“＜”；“不大于”、“不小于”一般抽象为“⩽”、“⩾”.

学习指导

7. 借助不等式或不等式组解决实际问题时，在求出不等式或不等式组的解集以后，要认真地检验它是否符合实际问题.

复 习 题

★基础★

1. 判断题：

(1) 如果 $a<b$，那么 $-3a<-3b$； ( )

(2) 如果 $a<b$，那么 $-5+a<-5+b$； ( )

(3) 如果 $a>b$，那么 $-\frac{a}{3}<-\frac{b}{3}$. ( )

2. 如果 $x>y$，试用不等号连接下列各对式子：

(1) $x+2$ 与 $y-2$； (2) $-(x-y)^2$ 与 0；

(3) $-5x$ 与 $-5y$； (4) $\frac{x}{5}$ 与 $\frac{y}{5}$.

3. 解下列不等式，并把解集表示在数轴上：

(1) $-\frac{2}{3}x<-1$； (2) $6x-3>2x+7$；

(3) $\frac{2}{3}(5-x)\geqslant 6$； (4) $\frac{2(x-1)}{5}\geqslant\frac{3(1-x)}{10}$.

4. x 取什么值时，代数式 $\frac{2x+7}{3}$ 的值：

(1) 是正数； (2) 是负数； (3) 是零.

5. 求下列不等式的正整数解：

(1) $2x-5<5-2x$； (2) $4x-6\geqslant 7x-15$.

6. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}4x>3x-1,\\2x<4;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+5>0,\\x+3>6;\end{cases}$

（3）$\begin{cases} 5x+1 \leqslant 3(x+1), \\ \dfrac{x-1}{2} \geqslant \dfrac{2x-1}{5}; \end{cases}$

（4）$\begin{cases} 2x-3 \leqslant x+2, \\ \dfrac{x-1}{6} - \dfrac{3x-1}{2} > 2 - \dfrac{x}{2}; \end{cases}$

（5）$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - 1 < \dfrac{1}{2}x, \\ \dfrac{x+2}{5} \leqslant \dfrac{x-1}{4}; \end{cases}$

（6）$\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - 1 > 4 - \dfrac{x}{4}, \\ x - \dfrac{x-1}{2} \geqslant 2 - \dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$

7. 解不等式：

（1）$-2 \leqslant \dfrac{3-x}{2} \leqslant 3$;

（2）$-8 < -6 - \dfrac{3x-2}{4} < -5$.

8. （1）一个两位数加上它的一半，所得的数大于 45 且小于 48，求这个两位数；

（2）一个两位数，它的十位上的数字比个位上的数字小 3，已知它大于 36 且小于 68，求这个两位数 .

9. 某次数学竞赛中出了 10 道题，每答对 1 题得 5 分，每答错 1 题或不答扣 3 分 . 问至少要答对几道题，得分才不低于 10 分 .

★★ 提升 ★★

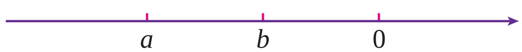
1. 求 $x - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x+8}{6} \leqslant 1 - \dfrac{x-1}{3}$ 的非负整数解 .

2. 有理数 a，b 在数轴上的位置如图所示，用“＞”或“＜”填空：

（1）$a-b$____0；

（2）$a+b$____0；

（3）$|a|$____$|b|$.



（第 2 题）

3. 一个负整数的 45% 与 2 的和的 3 倍不小于这个数的 75%，求满足条件的所有负整数 .

★★★ 拓展 ★★★

1. 求下列不等式组的整数解：

（1）$\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} > x - \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}(3x-1) \leqslant 2 - \dfrac{1}{2}x; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 2(x+2) < x+8, \\ x-3 \geqslant 3x-7, \\ 3(x-2)+8 > 2x. \end{cases}$

2. 学校图书馆准备购买定价分别为 8 元和 14 元的杂志和小说共 80 本，计划用钱在 750 元到 850 元之间（包括 750 元和 850 元），那么 14 元一本的小说最少可以买多少本？最多可以买多少本？

第五章 二元一次方程组

在新年联欢会上，同学们组织了猜谜活动，并采取积分方法记分，每答对 1 题得分，每答错 1 题扣分．在猜谜活动中，王强答对了 7 道题，答错了 3 道题，共获得 50 分；李翔答对了 8 道题，答错了 1 道题，共获得 62 分．问答对 1 道题得多少分，答错 1 道题扣多少分．

解决这类问题要用到二元一次方程组的知识．本章我们将要学习二元一次方程组的解法，并研究如何利用它来解决一些实际问题．

一 二元一次方程和二元一次方程组

5.1 二元一次方程和它的解

现在我们来研究章前页提出的问题．

思考

1. 如果我们用方程的知识来解决上述问题，首先要想清楚问题中都涉及了哪些数量，这些数量中哪些是已知量，哪些是未知量．

2. 是否可以设两个未知数，列出含有这两个未知数的方程来求解呢？

如果设答对 1 题得 x 分，答错 1 题扣 y 分，那么根据 x，y 之间的关系，我们可以得到下面两个方程：

$$7x-3y=50\;;\quad 8x-y=62.$$

交流

这两个方程和我们已经学习过的一元一次方程有什么区别和联系？它们之间有什么相同点和不同点？

上面的两个方程中，每一个方程都含有两个未知数 x，y，并且含未知数的项的次数都是 1，我们把这样的方程叫做**二元一次方程**．

使二元一次方程左右两边的值相等的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解．

例如，当 $x=1$，$y=1$ 时，方程 $3x+8y=11$ 左右两边的值相等，我们就把

$x=1$，$y=1$ 叫做方程 $3x+8y=11$ 的一个解，记作

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

方程 $3x+8y=11$ 的解要这样联立在一起表示 .

思考

怎样确定二元一次方程 $ax+by=c$（其中 a，b，c 是已知数，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$）的一个解？

只要我们给出 x（或 y）的一个值，把它代入方程中，就可以将方程转化为含有另一个未知数 y（或 x）的一元一次方程，从而求出相应的 y（或 x）的一个值 . 这样的一对 x，y 的值就是这个二元一次方程的一个解 .

例 1 已知：$2x+5y=7$，用含 y 的代数式表示 x.

解： 由 $2x+5y=7$，得

$$2x=7-5y.$$

$$x=\frac{7-5y}{2}.$$

就是把 y 看做“已知数”，解关于 x 的方程 .

例 2 求出二元一次方程 $3x+2y+4=0$ 的任意 3 个解 .

解： 由 $3x+2y+4=0$，得

$$2y=-3x-4.$$

$$y=-\frac{3x+4}{2}.$$

可以把 x 看做“已知数”，把原方程化为用 x 表示 y 的形式 .

令 x 分别取 -1，0，2，代入 $y=-\dfrac{3x+4}{2}$ 中，得出的 y 的值分别为：$-\dfrac{1}{2}$，-2，-5.

所以 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=-5 \end{cases}$ 是二元一次方程 $3x+2y+4=0$ 的 3 个解 .

一般地，一个二元一次方程有无数个解 .

实践

请填写下表，并指出二元一次方程 $3x+2y=17$ 的所有正整数解．

$3x+2y=17$	x							…
	y							…

通过填表我们知道，二元一次方程 $3x+2y=17$ 的正整数解为：

$\begin{cases} x=1, \\ y=7; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=5, \\ y=1. \end{cases}$

通过“实践”，你能否体会求二元一次方程的正整数解的方法？

练习

1. 把下列二元一次方程改写成用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式：

（1）$x-3y=13$；（2）$3x+2y=5$；（3）$4x-5y+6=x+3y-4$.

2. 填写下表，使表中的每一对 x，y 的值都是方程 $2x-3y=5$ 的一个解：

$2x-3y=5$	x	-3		6	-23		$-\frac{2}{3}$	
	y		-2			7		$-\frac{5}{4}$

3. $\begin{cases} x=-1, \\ y=3 \end{cases}$ 是不是方程 $3x+y=0$ 和 $x+3y=8$ 的公共解？$\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 是不是方程 $2x-y=1$ 和 $3x+y=5$ 的公共解？请你检验一下．

5.2 二元一次方程组和它的解

为了研究章前页提出的问题，我们在 5.1 节列出了两个二元一次方

程．由于在这个问题中，两位同学的得分情况是一起出现的，所以两个方程应同时成立．据此，我们把方程 $7x-3y=50$ 和 $8x-y=62$ 放在一起，写为 $\begin{cases}7x-3y=50,\\8x-y=62\end{cases}$ 的形式．这样就组成了一个二元一次方程组．

一般地，含有相同的未知数的两个二元一次方程合在一起，就组成了一个**二元一次方程组**．使二元一次方程组中的两个方程左右两边的值都相等的两个未知数的值（即两个方程的公共解），叫做二元一次方程组的解．

实践

请你填写下表，并指出既是方程 $7x-3y=50$ 的解，又是方程 $8x-y=62$ 的解的一对 x，y 的值是什么？

$7x-3y=50$	x	…	-1	2	5	8	11	…
	y	…						…
$8x-y=62$	x	…	-1	2	5	8	11	…
	y	…						…

通过填表，我们知道 $\begin{cases}x=8,\\y=2\end{cases}$ 既是方程 $7x-3y=50$ 的解，又是方程 $8x-y=62$ 的解，即 $\begin{cases}x=8,\\y=2\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}7x-3y=50,\\8x-y=62\end{cases}$ 的解．

例 1 判断 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 是不是方程组 $\begin{cases}x+3y=1,\\2x-5y=-9\end{cases}$ 的解．

解： 把 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 代入方程 $x+3y=1$ 的左右两边，

左边 $=-2+3\times1=1$，右边 $=1$．

∵ 左边 = 右边,

∴ $\begin{cases} x=-2, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程 $x+3y=1$ 的解 .

把 $\begin{cases} x=-2, \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程 $2x-5y=-9$ 的左右两边,

左边 $=2\times(-2)-5\times 1=-9$, 右边 $=-9$.

∵ 左边 = 右边,

∴ $\begin{cases} x=-2, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程 $2x-5y=-9$ 的解 .

所以 $\begin{cases} x=-2, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} x+3y=1, \\ 2x-5y=-9 \end{cases}$ 的解 .

例 2 已知 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2 \end{cases}$ 是关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax+3y=1, \\ 2x-by=4 \end{cases}$ 的解, 求 $a+b$ 的值 .

解: ∵ $\begin{cases} x=-1, \\ y=2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+3y=1, \\ 2x-by=4 \end{cases}$ 的解,

∴ 把 $x=-1$, $y=2$ 分别代入两个方程, 得

$$\begin{cases} -a+6=1, \\ -2-2b=4. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=5, \\ b=-3. \end{cases}$$

∴ $a+b=5+(-3)=2$.

练习

1. 在 ① $\begin{cases} x=3, \\ y=0; \end{cases}$ ② $\begin{cases} x=0, \\ y=-1; \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 这三对数值中, __________ 是方程 $x+2y=3$ 的解, __________ 是方程 $x+y=2$ 的解, 因此 __________ 是方程

组 $\begin{cases} x+2y=3, \\ x+y=2 \end{cases}$ 的解 .

2. 如果 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+2y=1, \\ 3x-by=2 \end{cases}$ 的解，那么 a，b 的值是多少？

习 题 5-1

★基础★

1. 请判断下面给出的 x，y 的值是不是方程 $3x+2y=5$ 的解：

（1）$\begin{cases} x=2, \\ y=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$

2. 把下列方程写成用含 x 的代数式表示 y 的形式：

（1）$2x+3y=0$；　　（2）$x-2y+5=0$；

（3）$3x-2y=x+5y$；　　（4）$2x+4=3(2y-2)$.

3. 判断 $\begin{cases} x=2.15, \\ y=-4.24 \end{cases}$ 是不是方程 $4x+y=3.46$ 和方程 $x-3y=14.87$ 的公共解 .（可以用计算器检验）

4. 在下面每一个二元一次方程组的后面给出了一对 x 和 y 的值，判断这对值是不是前面方程组的解：

（1）$\begin{cases} x-2y=5, \\ x+2y=1; \end{cases}$　　$\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 3x-4y=5, \\ 2x+y=\dfrac{3}{2}; \end{cases}$　　$\begin{cases} x=1, \\ y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+2y=2. \end{cases}$　　$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

★★提升★★

1. 根据下列关系列出二元一次方程，并写出它的 4 个解：

(1) x 的 3 倍比 y 大 7；

(2) 小明用 10 元买了 x 张 60 分的邮票和 y 张 80 分的邮票 .

2. 求满足方程 $3x+y=5$ 的非负整数解 .

3. 已知 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} ax+2y=b, \\ 4x-by=3 \end{cases}$ 的解，求 a，b 的值 .

4. 一个两位数，十位上的数字与个位上的数字的和是 13，请写出满足条件的所有的两位数 .

★★★拓展★★★

已知二元一次方程 $3x-2y=5$：

(1) 方程 $3x-2y=5$ 的整数解有多少个？请写出其中的任意 3 个解 .

(2) 写出使 $|x|+|y|$ 的值最小的整数解 .

(3) $3x-2y=5$ 的整数解有规律吗？试写出它的规律 .

问题解决

让我们和王晓、张磊一起做一个数学游戏 .

王晓对张磊说：“请你想一个 0 与 10 之间的整数，将它乘 7，再加上 5，把得数乘 3，再加上你想的另一个 0 与 10 之间的整数，然后从这个得数中减去 8，说出你的最后计算结果 .”

当张磊说出最后计算出的结果是 121 时，王晓很快就说出了张磊前后两次心里想的整数分别是 5 和 9.

请你思考：

1. 王晓为什么能很快地知道张磊两次想的整数分别是 5 和 9？请你写出解决这个问题的一般方法 .

2. 如果王晓请张磊想的数不是“0 与 10 之间的整数”，而是“任意的正整数”，那么这个问题能否得到解决？为什么？

二、二元一次方程组的解法

5.3 用代入消元法解二元一次方程组

怎样消去一个未知数，转化为一元一次方程去求解呢？

探索

怎样求出二元一次方程组 $\begin{cases} y=5-x, \\ x-2y=2 \end{cases}$ 的解？

能否通过我们已经学习过的一元一次方程的解法来求这个二元一次方程组的解？

由于有相等关系：$y=5-x$，所以 y 和 $5-x$ 可以互相替代．如果我们把方程 $x-2y=2$ 中的 y 用 $5-x$ 替代，就得到一个关于 x 的一元一次方程 $x-2(5-x)=2$，从而可以求出 x 的值．化简方程得

$$3x=12.$$

$$x=4.$$

把 $x=4$ 代入方程 $y=5-x$ 中，得

$$y=1.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$

运用上节所学知识可以验证，当 $\begin{cases} x=4, \\ y=1 \end{cases}$ 时，方程组成立．

是否可以把上面的解法运用到下面例题的求解中？

思考

例 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x-y=3, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 4x-3y=1. \end{cases}$

这个方程组与前面“探索”中给出的方程组在形式上有什么不同？怎样变形可以使它与前面的方程组有相同的形式？

解：(1) $\begin{cases} x-y=3, & ① \\ 3x-2y=5. & ② \end{cases}$

由①，得 $y=x-3$. ③

把③代入②，得

$$3x-2(x-3)=5.$$

只要用含有 x 的代数式表示 y 就可以了.

解这个方程，得

$$x=-1.$$

把 $x=-1$ 代入③，得

$$y=-4.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-4. \end{cases}$

我们可以把方程①变形为用含有 x 的代数式表示 y，通过代换求解.

(2) $\begin{cases} 3x+2y=5, & ① \\ 4x-3y=1. & ② \end{cases}$

由①，得 $y=\dfrac{5-3x}{2}$. ③

把③代入②，得 $4x-3\times\dfrac{5-3x}{2}=1$.

解得 $x=1$.

把 $x=1$ 代入③，得 $y=1$.

求出 x 的值后，要代入③，再求出 y 的值.

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

请你心算检验，$\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 是不是方程组 $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 4x-3y=1 \end{cases}$ 的解.

交流

1. 在上面例题的求解中是怎样消去 y 的？

2. 用消去 x 的方法能否解上面的例题？

3. 通过以上例题的解题过程，你能否总结出一种解二元一次方程组的一般方法．

把方程组中的一个方程进行变形，写出用一个未知数 x（或 y）表示另一个未知数 y（或 x）的代数式，然后把它代入另一个方程中，消去未知数 y（或 x），得到关于 x（或 y）的一元一次方程，通过解这个一元一次方程，再来求二元一次方程组的解．

我们把这种通过“代入”消去一个未知数，从而求出方程组的解的方法叫做**代入消元法**，简称代入法．

我们还可以用图形计算器求解二元一次方程组．以上面的例题（2）为例，按键步骤如下：

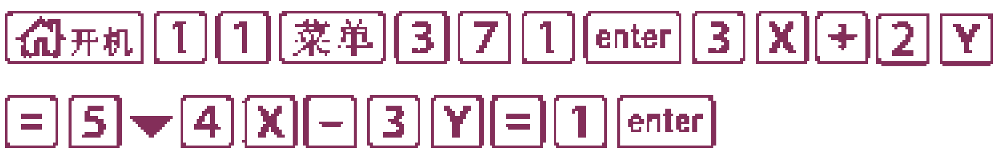


图 5－1

如图 5－1，得原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

探索

*用图形计算器解二元一次方程组$\begin{cases}0.1x+205y=1.1,\\ \dfrac{2}{11}x-\dfrac{1}{113}y=2.\end{cases}$

练习

用代入消元法解下列方程组：

（1）$\begin{cases}y=3x-1,\\ 2x+3y=8;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x-3y=1,\\ 3x+2y=6;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x+3y=1,\\ 3x-y=3;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}2x-3y=7,\\ 4x+y=0.\end{cases}$

5.4 用加减消元法解二元一次方程组

思考

请你观察方程组$\begin{cases}3x+2y=1,\\ x-2y=3\end{cases}$的结构特点，想一想，除了可以用代入法解方程组外，是否还有其他的解法．

通过观察我们发现，这个方程组的两个方程中分别含有 $2y$ 和 $-2y$ 的项，它们的系数互为相反数，因此它们的和为零，所以我们还可以用下面的方法解这个方程组．

解： $\begin{cases}3x+2y=1, & ①\\ x-2y=3. & ②\end{cases}$

这两个方程中含 y 的项的系数互为相反数，把两个方程相加就可以消去 y，进而求解．

①+②消去 y，得

$$4x=4.$$
$$x=1.$$

把 $x=1$ 代入①，得

$$2y=-2.$$
$$y=-1.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$

请你检验，$\begin{cases}x=1,\\y=-1\end{cases}$ 是不是方程组 $\begin{cases}3x+2y=1,\\x-2y=3\end{cases}$ 的解．

例 1 解方程组 $\begin{cases}2x+3y=5,\\x+3y=1.\end{cases}$

解： $\begin{cases}2x+3y=5, & ①\\x+3y=1. & ②\end{cases}$

①－②，得

$$x=4.$$

把 $x=4$ 代入②，得

$$4+3y=1.$$
$$y=-1.$$

所以 $\begin{cases}x=4,\\y=-1\end{cases}$ 是原方程组的解．

交流

1. 分析上面的解题过程，请你总结一下这类方程组具有什么特点，可以运用怎样的方法求解．

2. 如果一个二元一次方程组中，两个方程的某个未知数的系数相同或互为相反数时，可以运用什么方法求解？

当二元一次方程组中两个方程的某个未知数的系数互为相反数或相等时，可以把方程的两边分别相加（当某个未知数的系数互为相反数时）或相减（当某个未知数的系数相等时）来消去这个未知数，得到一个一元一次方程，进而求得二元一次方程组的解．

像上面这种解二元一次方程组的方法叫做**加减消元法**，简称加减法．

思考

如果二元一次方程组的两个方程中，不含有系数互为相反数（或相等）的两项，我们是否可以对方程进行变形，把它转化为可以运用加减消元法求解的二元一次方程组呢？

例2 用加减消元法解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 3x+2y=14, \\ 5x-y=6; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 2x-3y=3, \\ 3x-2y=7. \end{cases}$

怎样创造条件，运用加减消元法求解？

解：（1）$\begin{cases} 3x+2y=14, & ① \\ 5x-y=6. & ② \end{cases}$

②×2，得

$$10x-2y=12. \quad ③$$

①+③，得

$$13x=26.$$

$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入①，得

$$6+2y=14.$$

$$y=4.$$

所以 $\begin{cases} x=2, \\ y=4 \end{cases}$ 是原方程组的解．

(2) $\begin{cases} 2x-3y=3, & ① \\ 3x-2y=7. & ② \end{cases}$

①×3，得

$$6x-9y=9. \qquad ③$$

②×2，得

$$6x-4y=14. \qquad ④$$

④－③，得

$$5y=5.$$

$$y=1.$$

把 $y=1$ 代入①，得

$$2x-3=3.$$

$$x=3.$$

所以 $\begin{cases} x=3, \\ y=1 \end{cases}$ 是原方程组的解．

交流

怎样根据方程组的特点选择恰当的方法，使求解的过程比较简捷？请你试举两例加以说明．

练习

1. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4x-3y=5, \\ 2y-4x=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 2x-3y=18. \end{cases}$

2. 选择适当的方法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-5y=2, \\ 2x-y=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x-3y=18, \\ 2x-y=8; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-2y=5, \\ x+3y=-5; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x+y=7, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$

*5.5 三元一次方程组

思考

请你运用解二元一次方程组的经验，试解方程组 $\begin{cases} x+y+z=5, \\ x+y-z=3, \\ x-y+z=1. \end{cases}$

我们已经知道，解二元一次方程组思路的核心就是消元．通过观察，我们可以发现方程组中第 2 个和第 3 个方程中分别有 y 和 $-y$，$-z$ 和 z，它们均互为相反数．

解： $\begin{cases} x+y+z=5, & ① \\ x+y-z=3, & ② \\ x-y+z=1. & ③ \end{cases}$

②＋③，得

$$2x=4.$$

$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入①，得

$$2+y+z=5.$$

$$y+z=3. \quad ④$$

把 $x=2$ 代入②，得

$$2+y-z=3.$$

$$y-z=1. \quad ⑤$$

④＋⑤，得

$$2y=4.$$

$$y=2.$$

把 $y=2$ 代入④，得

$$2+z=3.$$

$$z=1.$$

所以，原方程组的解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=2, \\ z=1. \end{cases}$

一般地，像上面方程组中的每个方程，都含有三个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1，我们把这样的方程叫做**三元一次方程**．

像上面的方程组这样，含有相同的未知数的三个三元一次方程合在一起，就组成一个**三元一次方程组**． 使三元一次方程组中三个方程左右两端的值都相等的三个未知数的值（即三个方程的公共解），叫做三元一次方程组的解．

对于三元一次方程组，我们仍然可以运用代入消元法或加减消元法，消去三元一次方程组中的一个或两个未知数，把它化成二元一次方程组或一元一次方程来解方程组．

例 解方程组：

（1）$\begin{cases} y = x + z, \\ 2x + 2y - 3z = 5, \\ x - y + 2z = 3; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 5x - 3y - z = 21, \\ 3x - 4y - z = 22, \\ 4x + 2y - 3z = -14. \end{cases}$

解：（1）$\begin{cases} y = x + z, & ① \\ 2x + 2y - 3z = 5, & ② \\ x - y + 2z = 3. & ③ \end{cases}$

这里根据方程组中方程的特点，选择运用了代入消元法．

把 ①代入②，得

$$2x + 2(x + z) - 3z = 5.$$

$$4x - z = 5. \qquad ④$$

把 ①代入③，得

$$x - (x + z) + 2z = 3.$$

$$z = 3.$$

把 $z = 3$ 代入④，得

$$x = 2.$$

把 $x = 2$，$z = 3$ 代入①，得

$$y = 5.$$

所以，原方程组的解为 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 5, \\ z = 3. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 5x - 3y - z = 21, & ① \\ 3x - 4y - z = 22, & ② \\ 4x + 2y - 3z = -14. & ③ \end{cases}$

根据方程组中各方程系数的特点，先消去哪个未知数？

①－②，得

$$2x+y=-1. \qquad ④$$

①×3，得

$$15x-9y-3z=63. \qquad ⑤$$

⑤－③，得

$$11x-11y=77.$$

同④消去的未知数一样．

$$x-y=7. \qquad ⑥$$

④＋⑥，得

$$3x=6.$$

$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入⑥，得

$$y=-5.$$

把 $x=2$，$y=-5$ 代入①，得

$$z=4.$$

所以，原方程组的解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=-5, \\ z=4. \end{cases}$

我们也可以借助图形计算器解三元一次方程组．现在试用图形计算器解下面的三元一次方程组

$$\begin{cases} x+2y+z=5, \\ 2x-y+z=7, \\ 3x+y-z=-2. \end{cases}$$

按键步骤如下：

开机 1 1 菜单 3 7 1 del 3 enter X + 2 Y + Z = 5 ▼ 2 X − Y + Z = 7 ▼ 3 X + Y − Z = (−) 2 enter

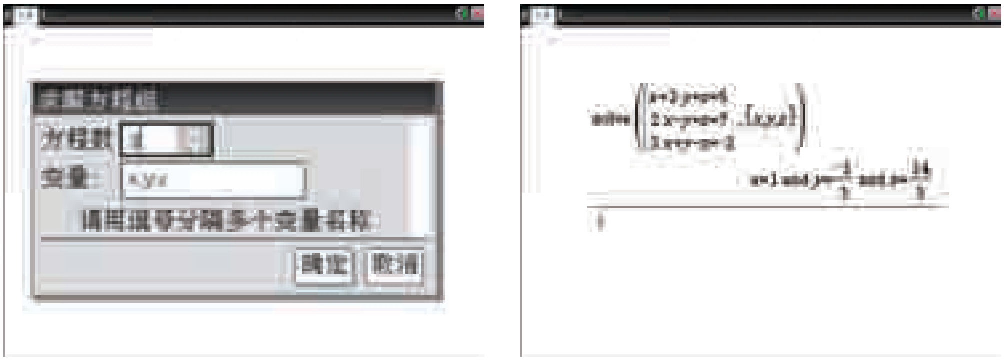


图 5－2

如图 5－2，得原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=-\dfrac{1}{3}, \\ z=\dfrac{14}{3}. \end{cases}$

练习

*解下列方程组：

（1）$\begin{cases} x+y-z=6, \\ x-y+2z=-7, \\ 3x+2y+z=7; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=5, \\ 2a-b+c=4; \end{cases}$　　（3）$\begin{cases} x+y=8, \\ y+z=-3, \\ z+x=-1. \end{cases}$

习　题　5－2

★基础★

1. 用代入消元法解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x+2y=-3; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x-2y=3, \\ 3x+y=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-3y=7, \\ 4x-9y=22; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 5x-2y=3, \\ 10x-3y=4. \end{cases}$

2. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 2x-y=3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-3y=5, \\ 3x-y=-1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x-3y=4, \\ 2x-6y=11; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x-4y=9, \\ 2x-3y=7. \end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x=2y, \\ x-4y=5; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 5x+2y=17; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+5y=3, \\ 3x-3y=11; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x+2y=8. \end{cases}$

4. 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{2x-y}{3}=-1, \\ 6(x+y)-4(2x-y)=16. \end{cases}$

★★ 提升 ★★

1. 已知：当 $x=-3$ 和 $x=2$ 时，代数式 $kx+b$ 的值分别是 -4 和 11.

(1) 求 k，b 的值；

(2) 求 x 为何值时，代数式 $kx+b$ 的值为 $\dfrac{1}{2}$.

2. 如果关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} 3ax-by=5, \\ 2bx-ay=1 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 试求 a，b 的值 .

*3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y-2z=5, \\ 2x-y-z=4, \\ 3x+y-3z=10; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=5, \\ 4a-2b+c=-1. \end{cases}$

★★★ 拓展 ★★★

1. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-y=a, \\ x-3y=5-4a \end{cases}$ 的解满足 $x<y$，试求 a 的取值范围 .

2. 由于粗心，在解方程组 $\begin{cases}\square x-2y=5,\\ 7x-4y=\triangle\end{cases}$ 时，小明把系数□抄错了，得到的解是 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3},\\ y=-\dfrac{10}{3};\end{cases}$ 小亮把常数△抄错了，得到的解是 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-16.\end{cases}$ 请你帮助他们纠正解题中的错误，写出□，△所代表的数，并求原方程组的解 .

5.6 二元一次方程组的应用

例 1 李威喜欢集邮，他有中国邮票和外国邮票共 335 张，其中中国邮票的张数比外国邮票的张数的 3 倍少 17 张 . 他有中国邮票和外国邮票各多少张?

分析： 题目中含有两个未知数，中国邮票与外国邮票的张数 . 根据题意，这两个未知数要同时满足以下两个关系：

(1) $\boxed{\text{中国邮票的张数}}+\boxed{\text{外国邮票的张数}}=335$；

(2) $\boxed{\text{中国邮票的张数}}=3\times\boxed{\text{外国邮票的张数}}-17$.

解： 设李威有中国邮票 x 张，外国邮票 y 张，根据题意列出方程组，得

$$\begin{cases}x+y=335, & ①\\ x=3y-17. & ②\end{cases}$$

把②代入①，得

$$3y-17+y=335.$$

解这个方程，得

$$y=88.$$

把 $y=88$ 代入②，得

$$x=3\times88-17=247.$$

$$\therefore\ \begin{cases}x=247,\\ y=88.\end{cases}$$

答：李威有中国邮票 247 张，外国邮票 88 张 .

例 2 某校七年级（1）、（2）两班的同学积极参加全民健身活动，为此两班到同一商店购买体育用品．已知七年级（1）班购买了 3 个篮球和 8 副羽毛球拍共用了 442 元，七年级（2）班购买了同样的 5 个篮球和 6 副羽毛球拍共用了 480 元，问每个篮球和每副羽毛球拍各多少元．

解： 设每个篮球 x 元，每副羽毛球拍 y 元，根据题意列方程组，得

$$\begin{cases}3x+8y=442, & ①\\ 5x+6y=480. & ②\end{cases}$$

①×5，得

$$15x+40y=2\ 210. \quad ③$$

②×3，得

$$15x+18y=1\ 440. \quad ④$$

③－④，得

$$22y=770.$$

$$y=35.$$

把 $y=35$ 代入①，得

$$x=54.$$

$$\therefore \begin{cases}x=54,\\ y=35.\end{cases}$$

答：每个篮球 54 元，每副羽毛球拍 35 元．

例 3 张强与李毅二人分别从相距 20 千米的 A，B 两地出发，相向而行．如果张强比李毅早出发 30 分钟，那么在李毅出发后 2 小时，他们相遇；如果他们同时出发，那么 1 小时后两人还相距 11 千米．求张强、李毅每小时各走多少千米．

分析： 如果设张强、李毅每小时各走 x 千米、y 千米，那么根据题意画出示意图，如图 5－3.

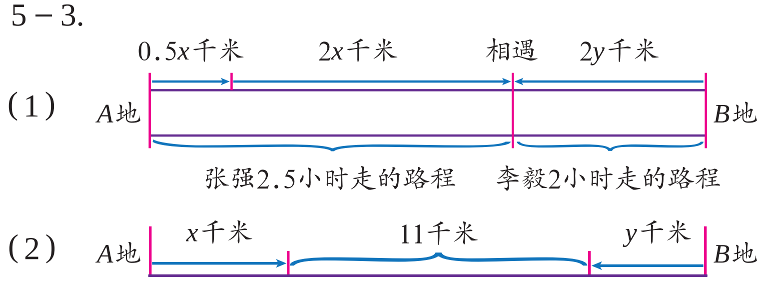


图 5－3

解： 设张强每小时走 x 千米，李毅每小时走 y 千米，根据题意列方程组，得

$$\begin{cases}2.5x+2y=20,\\20-(x+y)=11.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=4,\\y=5.\end{cases}$$

答：张强每小时走 4 千米，李毅每小时走 5 千米 .

例 4 用一些长短相同的小木棍按图 5 – 4 所示的方式，连续摆正方形或六边形，要求相邻的图形只有一条公共边 . 已知摆放的正方形比六边形多 4 个，并且一共用了 110 根小木棍，问连续摆放的正方形和六边形各多少个 .

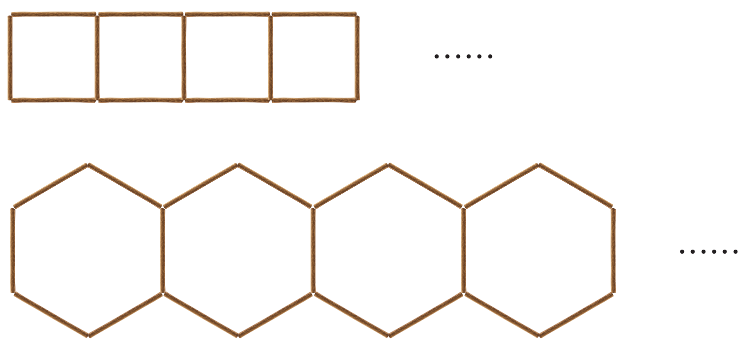


图 5 – 4

我们可以列表分析：

	连续摆放的个数 / 个	使用小木棍的根数 / 根
正方形	x	$4+3(x-1)=3x+1$
六边形	y	$6+5(y-1)=5y+1$
关　系	正方形比六边形多 4 个	共用了 110 根小木棍

解： 设连续摆放了 x 个正方形和 y 个六边形，那么连续摆 x 个正方形用了 $(3x+1)$ 根小木棍，连续摆 y 个六边形用了 $(5y+1)$ 根小木棍，根据题意列方程组，得

$$\begin{cases}x=y+4, & ①\\(3x+1)+(5y+1)=110. & ②\end{cases}$$

把①代入②，整理，得

$$8y=96.$$

$$y=12.$$

把 $y=12$ 代入①，得

$$x=16.$$

$$\therefore \begin{cases} x=16, \\ y=12. \end{cases}$$

答：连续摆放了 16 个正方形和 12 个六边形 .

列二元一次方程组解决实际问题的主要步骤是什么？

思考

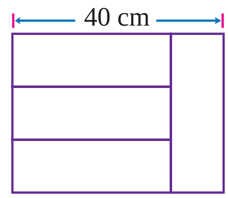
练习

1. 为支援西部开发，东方投资公司和南方发展有限公司共投资 267 万元 . 已知东方投资公司比南方发展有限公司多投资 17 万元，这两个公司各投资多少万元？
2. 小明家某月共缴纳电话费和上网费 135.8 元，已知他家的电话费比上网费少 35.6 元，这个月小明家的电话费和上网费各多少元？
3. 学校和博物馆相距 24 千米 . 已知王盟比李婷每小时多走 1 千米，他们分别从学校和博物馆同时出发相向而行，3 小时后相遇，王盟和李婷每小时各走多少千米？

习 题 5-3

★基础★

1. 一个长方形的周长是 100 厘米，当这个长方形的长减少 10 厘米、宽增加 10 厘米时，长方形恰好变为一个正方形，原来长方形的长和宽各是多少？
2. 在美化校园的劳动中，七年级（1）班比七年级（2）班多植树 12 棵，已知两个班共植树 50 棵，两班各植树多少棵？
3. 王洋家去年结余了 16 000 元．今年又增加了新的养殖项目，预计到年底可以结余 25 000 元，并且今年的收入比去年增加 20%，支出增加 10%．去年的收入和支出各是多少元？（结余 = 收入 − 支出）
4. 东、西两个车站相距 153 千米，甲、乙两车同时从东、西两个车站相向而行，3 小时后两车相遇，已知甲车比乙车多走 15 千米，甲、乙两车的速度各是多少？
5. 我国古代的数学著作《孙子算经》中有这样一道“鸡兔同笼”题：今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何．你能列二元一次方程组解这道题吗？
6. 如图，用 4 块相同的小长方形木块拼成一个大长方形，小长方形木块的长和宽各是多少？



（第 6 题）

★★提升★★

1. 一个梯形上底的 2 倍比下底短 3 厘米，上底、下底的和的一半为 18 厘米，这个梯形的上底、下底的长各是多少厘米？
2. 已知代数式 $kx+b$，当 $x=-3$，$x=2$ 时，代数式的值分别是 4 和 -11，求当代数式的值为 -3 时，x 的值．
3. 已知 x，y 是有理数，求满足 $(2x-y+1)^2+|5x-2y-3|=0$ 的 x，y 的值．
4. 如果 $5a^{m+n}b^2$ 与 $-12a^3b^{m-n}$ 是同类项，求 m，n 的值．
5. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}3x-4y=m,\\x+2y=2m+3\end{cases}$ 的解 x，y 是一对相反数，试求 m 的值．
6. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x-y=2m,\\x+3y=m-1\end{cases}$ 的解满足 $x<y$，求 m 的取值范围．

7. 中学生百队足球杯赛规定，胜 1 场得 3 分，平 1 场得 1 分，负 1 场得 0 分． 在这次杯赛中红帆队共赛 8 场，一共得了 17 分，其中踢平的场数是所负场数的 2 倍．试问该队胜、负各多少场．

★★★拓展★★★

在学校为七年级同学进行体检时，校医室的体重计出现了故障，只能称出 60 千克以上的质量，恰好参加体检的大多数同学的体重不足 60 千克．要使体检顺利进行，你能利用方程组的知识，为校医设计一种称体重的方案吗?

阅读理解

数学文化

我国古代有趣的百鸡问题

我国古代有个广为流传的“百鸡问题”．它的原文是这样叙述的：“今有鸡翁一，直[①]钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一．凡百钱买鸡百只，问鸡翁母雏几何．”它的意思是：五文钱可以买 1 只公鸡，三文钱可以买 1 只母鸡，一文钱可以买 3 只小鸡．现在要用一百文钱买 100 只鸡，问可以买公鸡、母鸡、小鸡各多少只．这个问题与我国南北朝时期的北魏数学家张丘建有关．

公元 5 世纪末，张丘建出生在一个贫苦的家庭里，父亲靠劳作辛辛苦苦挣钱养活全家．

张丘建从小聪明好学，特别喜欢看数学书，十二三岁就读完了中国古代三大数学名著《周髀算经》、《九章算术》和《孙子算经》．邻居们有了难题都来问他，他都能很快地解决，因此，大家称他“张神童”．

民间的传说很快传到了宰相的耳朵里，他为了试试张丘建的本

① “直”同现代文中的“值”，指价值．

事，特地把他的父亲叫到府中，给了他父亲一百文钱，让他买公鸡、母鸡、小鸡共 100 只送来，鸡的价钱如前所述．

他的父亲闷闷不乐地回到家中，不住地唉声叹气．张丘建问清缘由后，叫父亲不要着急．第二天，张丘建让父亲带上 4 只公鸡、18 只母鸡和 78 只小鸡去见宰相．宰相一看，这 100 只鸡正好值一百文钱．宰相心中暗喜，但他却不动声色地又给了张丘建父亲一百文钱，让他再送 100 只鸡来，但是不能和这次送的一样．

张丘建让父亲带上 8 只公鸡、11 只母鸡和 81 只小鸡给宰相，宰相见后赞叹不已．宰相为了再考考张丘建，又给了张丘建父亲一百文钱，要他再送 100 只鸡来，但是不能和前两次送过的一样，张丘建思考片刻后，让父亲给宰相送去 12 只公鸡、4 只母鸡和 84 只小鸡．

宰相真正认识到张丘建的才华，认为“张神童”果然名不虚传，于是把他招进府中加以培养．张丘建刻苦好学，在数学方面取得了很大的成就，他写出了著名的《张丘建算经》．这本著作是我国古代著名的十大“算经”之一，“百鸡问题”就收录在其中．

如果你想了解更多的我国古代数学问题，请上网或去图书馆查阅，用以开阔你的视野，增长你的学识．

探索

请你用列方程组的方法来表示“百鸡问题”，并求出它的解．

阅读理解

矩阵的简单介绍

这是中华人民共和国成立60周年国庆阅兵式中女民兵方阵的照片．在数学中也可以把一些数字排成一个方阵．

把下面日历中的某些数字框起来，可以研究它们之间的某种关系．

日	一	二	三	四	五	六
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23/30	24	25	26	27	28	29

我们可以把框起来的数用下面矩形[1]数表的形式表示：

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 13 \\ 18 & 19 & 20 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

又如，王宏君、李小明、张萍和李力四位同学某次考试的语文、数学、英语的成绩，也可以排列成一个矩形数表：

$$\begin{array}{c} \\ \text{王宏君} \\ \text{李小明} \\ \text{张　萍} \\ \text{李　力} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{语文} & \text{数学} & \text{英语} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 85 & 93 & 95 \\ 97 & 82 & 93 \\ 79 & 89 & 94 \\ 87 & 85 & 83 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2)$$

① 矩形即长方形．

经过 44 年的努力和拼搏，中国足球队终于在 2001 年冲出了亚洲，走向了世界．下面表格中的内容是亚洲十强赛 B 组的比赛结果：

队　名	胜	平	负
中　国	6	1	1
阿联酋	3	2	3
乌兹别克斯坦	3	1	4
卡塔尔	2	3	3
阿　曼	1	3	4

规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分，你能计算一下各队的总积分吗？

表中的数据也可以排成一个矩形数表：

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

像 (1)、(2)、(3) 这样把几个数排列成一个矩形的数表，两边用括号括起来，就得到一个矩阵．像 (1) 中的矩形数表是正方形的，这样的矩阵也叫方阵．

在数学中常用一个大写字母表示矩阵，例如

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}\text{等}.$$

对于二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ x+y=3, \end{cases}$ 我们可以把 x，y 的系数分离出来组成一个矩阵：$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，这个矩阵叫做二元一次方程组的系数矩阵；如果把方程右边的常数也对应写进去，得到的矩阵叫做二元一次

次方程组的增广矩阵．矩阵在研究多元一次方程组中有广泛的应用．

用加减消元法解二元一次方程组的过程，就是对方程组中各方程中未知数的系数进行变换的过程．

下面我们把解方程组 $\begin{cases}x+y=7,\\3x+2y=18\end{cases}$ 的过程与相对应的矩阵放在一起，请你观察方程组的变形与对应的矩阵之间的变化有什么关系，各矩阵中的数是怎样得到的．

$$\begin{cases}x+y=7, & ①\\3x+2y=18. & ②\end{cases}\qquad\begin{bmatrix}1 & 1 & 7\\3 & 2 & 18\end{bmatrix}$$

①×2，得

$$\begin{cases}2x+2y=14, & ③\\3x+2y=18. & ②\end{cases}\qquad\begin{bmatrix}2 & 2 & 14\\3 & 2 & 18\end{bmatrix}$$

②－③，得

$$\begin{cases}x+0y=4, & ④\\3x+2y=18. & ②\end{cases}\qquad\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\3 & 2 & 18\end{bmatrix}$$

④×(－3)＋②，得

$$\begin{cases}x+0y=4, & ④\\0x+2y=6. & ⑤\end{cases}\qquad\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

⑤ ÷2，得

$$\begin{cases}x+0y=4, & ④\\0x+y=3. & ⑥\end{cases}\qquad\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$$

解二元一次方程组与矩阵的对应非常有意思吧．

矩阵在数学和其他学科中还有许多的应用，有兴趣的同学可以从图书馆或互联网上查找、阅读这方面的材料．

回顾与整理

知识要点

本章学习的知识主要有：二元一次方程、二元一次方程的解、二元一次方程组及其解法、二元一次方程组的应用．

1. 二元一次方程和它的解．

一般地，经过整理后，可化为 $ax+by=c$（其中 a，b，c 是已知数，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$）的方程叫做二元一次方程．使二元一次方程的左右两边相等的一对 x 和 y 的值，叫做这个方程的一个解．我们把它们联立在一起，写成 $\begin{cases} x=m, \\ y=n \end{cases}$ 的形式．

一般地，一个二元一次方程有无数个解．对于一个二元一次方程我们总可以把它改写为用含一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式，这种表示方法对今后的学习很有帮助．

2. 二元一次方程组和它的解法．

把含有相同未知数的两个二元一次方程联立在一起，就组成一个二元一次方程组．这两个二元一次方程的公共解叫做这个二元一次方程组的解．

解二元一次方程组的基本思想是通过消元把二元一次方程组转化为一元一次方程去求解．消元的方法有代入消元法和加减消元法．

$$\boxed{\text{二元一次方程组}} \xrightarrow[\text{代入消元或加减消元}]{\text{转化}} \boxed{\text{一元一次方程}}$$

3. 二元一次方程组的应用．

应用二元一次方程组可以解决许多实际问题．解决问题的关键是弄清问题中含有的两个独立的相等关系，进而通过设出两个未知数，列出由两个方程组成的方程组来求解．

注意：解后要对求出的解进行验证，看它是否符合实际问题．

学习指导

1. 转化、化归的方法是解决许多问题的基本方法．

我们应注意运用转化、化归的方法学习二元一次方程组的解法．

世界上许多事物都是可以互相转化的．当我们遇到新问题或比较复杂的问题时，总是希望把问题化归为我们已经掌握的、熟悉的、较为简单的问题去解决，这是解决许多问题的基本思路．在探求二元一次方程组的解法时，则是通过具体的代入消元法和加减消元法来实现这种转化的．

2. 学会观察、分析和比较．

选择恰当的方法解二元一次方程组，可以使求解的过程简捷、明了，这就要在求解前认真观察二元一次方程组的特点，通过分析、比较来选择适当的方法．

实际上，做任何事情，我们一般都要先观察思考，进行分析、比较，再决策实施．这是一种良好的思维习惯，也是今后处理问题所必需具有的素质．学习数学不仅仅使我们学到一些数学知识，更重要的是使我们学会用数学的眼光去分析问题和解决问题，养成良好的思维习惯，使我们变得更加聪明．

3. 注重应用，在解决问题中学会创造．

应用一元一次方程和二元一次方程组解决实际问题，能使我们分析问题、解决问题的能力及应用数学的意识得到提高．

复　习　题

★基础★

1. 如果 $(m-3)x+2y^{|m-2|}+8=0$ 是关于 x，y 的二元一次方程，试求 m 的值．
2. 请判断下面的两对数是不是方程 $2x-y=5$ 的解：

(1) $\begin{cases} x=2, \\ y=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$

3. 填空：

(1) 在方程 $2x-3y=-1$ 中，当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时，$y=$________；当 $y=-3$ 时，$x=$________．

(2) 已知方程 $3x+y-1=0$，如果用含 x 的代数式表示 y，那么 $y=$____________；如果用含 y 的代数式表示 x，那么 $x=$____________．

4. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ x-y=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y=-5, \\ 3x-4y=-2; \end{cases}$

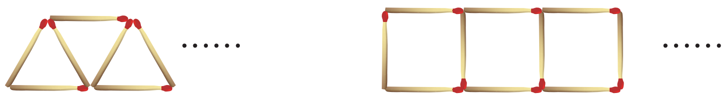
(3) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x-2y=6; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x+3y=2, \\ 2x-y=3; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x-y=4, \\ 2x+y=6; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x+2y=3. \end{cases}$

5. 一个正方体，其中有一对相对的面上的数的和是 29，差是 7，这两个数各是多少?
6. 实验中学到信息中心和图书馆的距离之和为 13.5 千米．已知实验中学到信息中心的距离比它到图书馆的距离远 4 千米，那么实验中学到信息中心和图书馆的距离各是多少千米?
7. 一个两位数，个位上的数字与十位上的数字的和是 11，如果个位上的数字比十位上的数字大 5，求这个两位数．
8. 有 60 公顷土地需要绿化，计划在上面种植经济植物和常绿植物．如果经济植物和常绿植物各占 50%，那么需要投资 42 万元；如果经济植物占 40%，常绿植物占 60%，那么需要投资 40.8 万元．种植每公顷经济植物和常绿植物各需要投资多少万元?
9. 每年的 3 月 12 日是植树节．某校七年级有 183 名学生参加植树节活动，在活动中男生平均每人挖 3 个树坑，女生平均每人种 6 棵树，这样恰好使挖好的树坑都能种上树．该年级参加植树的男、女生各有多少人?

★★提升★★

1. 某工厂车间生产甲、乙两种零部件，已知 1 个甲零部件和 2 个乙零部件配套成一个完整产品，每个工人每天可生产 14 个甲零部件或 20 个乙零部件．现有 60 名工人，问应安排多少个工人生产甲零部件，多少个工人生产乙零部件，才能使生产出来的两种零部件刚好配套．
2. 如图，用火柴棍连续搭建三角形和正方形，公共边只用一根火柴棍．如果搭建三角形和正方形共用了 77 根火柴棍，并且三角形的个数比正方形的个数少 5 个，那么一共能连续搭建三角形、正方形各多少个？



（第 2 题）

3. 一个梯形，如果两底之和是 18，两底之差是 10，且梯形的高恰好等于一底的长度，求这个梯形的面积．
4. 在学校合唱节上，七年级（1）班、（2）班共有 80 人参加歌咏比赛，两班合出 1 名指挥，如果（1）班比（2）班参加唱歌的人数多 7 人，两个班各有多少人参加这次歌咏比赛？

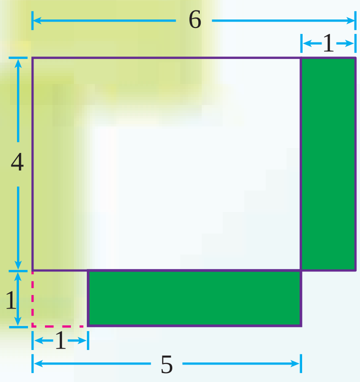
*5. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x+y=5,\\2y+z=-3,\\2z+x=7;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}3x-2y+z=1,\\x-y+z=4,\\x+2y-z=7.\end{cases}$

★★★拓展★★★

1. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x-4y=10,\\x-my=5\end{cases}$ 和 $\begin{cases}3x+y=4n,\\2x+my=1\end{cases}$ 的解相同，试求 m，n 的值．
2. 七年级（1）班计划用 100 元购买甲、乙、丙三种小礼品作为联欢会的奖品，它们的单价分别为 4 元、3 元和 1 元．如果甲种礼品不得少于 10 件，乙种礼品比甲种礼品多 3 件，并且购买甲种礼品的总金额不得超过 50 元，那么适合以上要求的购买方案有几种？请你协助班委会制定购买礼品的方案．

第六章
整式的运算



从下面的运算中，你能发现什么规律吗?

$1\times3=3=2^2-1$,

$2\times4=8=3^2-1$,

$3\times5=15=4^2-1$,

$4\times6=24=5^2-1$,

……

如果你能发现规律,请用代数式把这个规律表示出来.

你能用几何图形来表示上面运算中的数量关系吗?

一 整式的加减法

6.1 整式的加减法

我们已经学习过整式的概念，并会通过去括号、合并同类项把整式化简.

交流

1. 回忆一下什么叫单项式，什么叫多项式，什么叫同类项.
2. 合并同类项需要按怎样的法则进行?
3. 去括号法则是什么?

例 1 先用横线标出同类项，然后合并同类项：

(1) $3x^2-2xy+3y^2-3xy+2y^2-x^2$；

(2) $2a^2b+3ab^2+a^3-5-a^2b-3ab^2+8$.

解：(1) $\underline{3x^2}\ \underline{-2xy}\ \underline{+3y^2}\ \underline{-3xy}\ \underline{+2y^2}\ \underline{-x^2}$

$=(3-1)x^2+(-2-3)xy+(3+2)y^2$

$=2x^2-5xy+5y^2$；

(2) $\underline{2a^2b}\ \underline{+3ab^2}+a^3\ \underline{-5}\ \underline{-a^2b}\ \underline{-3ab^2}\ \underline{+8}$

$=(2-1)a^2b+(3-3)ab^2+a^3+(-5+8)$

$=a^3+a^2b+3$.

当同类项的系数互为相反数时，出现了什么特殊情况?

为了计算方便，把多项式的各项按照某一个字母的指数从大到小的顺序排列起来，叫做把多项式按这个字母**降幂排列**. 反之，叫做把多项式按这个字母**升幂排列**. 在例 1(1) 中，$2x^2-5xy+5y^2$ 就是按字母 x 的降幂排列，而对于字母 y 则是升幂排列.

实践

1. 把多项式 $2x^2-5xy+5y^2$ 按字母 y 降幂排列.
2. 把多项式 a^3+a^2b+3 按字母 a 升幂排列.

例 2 先去括号，再合并同类项：

(1) $m^2n+mn+(3m^2n-2mn-5)$；

(2) $2x^2-3y^2+1-(x^2-2xy-y^2-4)$.

解：(1) $m^2n+mn+(3m^2n-2mn-5)$

$=m^2n+mn+3m^2n-2mn-5$

$=4m^2n-mn-5$；

(2) $2x^2-3y^2+1-(x^2-2xy-y^2-4)$

$=2x^2-3y^2+1-x^2+2xy+y^2+4$

$=x^2+2xy-2y^2+5$.

去掉括号和括号前的“+”或“−”时，区别是什么？

练习

先去括号，再合并同类项：

(1) $5ab^2-2a^2b+(a^2b-6ab^2-2)$；

(2) $9-m^2+2n^2-(6n^2-3m^2-5)$；

(3) $2xy^2-3x^2y-5xy-(5xy-3x^2y-3xy^2)$.

整式的加减就是单项式、多项式的加减．利用去括号法则与合并同类项的方法，我们就可以进行整式的加减运算．

例 3 求 $3x^2-5xy+6y^2$ 与 $4x^2-4xy-7y^2$ 的和与差．

解：$(3x^2-5xy+6y^2)+(4x^2-4xy-7y^2)$

$=3x^2-5xy+6y^2+4x^2-4xy-7y^2$

$=7x^2-9xy-y^2$；

怎样把文字语言“翻译”成数学式子？

$$(3x^2-5xy+6y^2)-(4x^2-4xy-7y^2)$$
$$=3x^2-5xy+6y^2-4x^2+4xy+7y^2$$
$$=-x^2-xy+13y^2.$$

在上面例 3 的运算中，每步运算的根据是什么？你能说出做整式加减运算的步骤吗？

思考

练习

1. 计算：

(1) $(3x^2-y^2-2xy)+(y^2-xy-2x^2)$；

(2) $(8ab-a^2+b^2)-(a^2-b^2+8ab)$.

2. 求 $7x^2-5y^2-xy$ 与 $-4x^2-3xy+y^2$ 的和与差 .

例 4 计算：

(1) $3(a^2-4a+3)+5(-5a^2+a-2)$；

(2) $3m^2-4(2m^2-3mn+2n^2)+7n^2$.

解： (1) $3(a^2-4a+3)+5(-5a^2+a-2)$

$$=3a^2-12a+9-25a^2+5a-10$$
$$=-22a^2-7a-1；$$

(2) $3m^2-4(2m^2-3mn+2n^2)+7n^2$

$$=3m^2-8m^2+12mn-8n^2+7n^2$$
$$=-5m^2+12mn-n^2.$$

在运算中都使用了哪些运算律？应当注意什么问题？

练习

计算：

(1) $5(11x^3-2x^2)+2(x^3+x^2)$；

(2) $2\left(\frac{3}{2}x^3y-2y^3\right)-3(x^3y+2y^2)$.

习 题 6－1

★基础★

1. 把下列多项式按字母 x 先做降幂排列，再做升幂排列：

(1) $7x-12x^2+9$；　　(2) $6+4x^2-3x-x^3$.

2. 计算：

(1) $(5x^2+2-x)+(-x^2-5x-3)$；

(2) $(2x^2-3x+1)-(5-3x+x^2)$；

(3) $(4a+6b+3c)+(4c-2b-5a)$；

(4) $(x^3-3x^2y+3xy^2)-(x^3-3x^2y-3xy^2-y^3)$.

3. 计算：

(1) $\left(2a^2-\frac{1}{2}+3a\right)-4\left(a-a^2+\frac{1}{2}\right)$;

(2) $\frac{1}{2}(3x^2-4x-2)-\frac{3}{4}(x^2-2x-1)$.

★★提升★★

1. 长方形的宽为 $3a+2b$，长比宽多 $a-b$，求这个长方形的周长.
2. 三个连续奇数，中间一个是 $2n-1$，那么这三个数的和是多少?
3. 已知 $A=2x^2-5xy-3y^2$，$B=2x^2+3xy-4y^2$，且 $A+B-C=0$，求 C.

★★★ 拓展 ★★★

对于有理数 x，y，定义新运算 $x * y = ax + by + c$，其中 a，b，c 是常数，等式右边是通常的加法与乘法运算．已知 $3 * 5 = 15$，$4 * 7 = 28$，求 $1 * 1$ 的值．

二、整式的乘法

6.2 幂的运算

1. 同底数幂的乘法

有一种电子计算机，每秒可以做 10^8 次运算，那么 10^3 秒可以做多少次运算呢？

$a^m \cdot a^n$（m，n 都是正整数）等于什么？

1. 10^3 秒可以做 $10^8 \times 10^3$ 次运算，那么 $10^8 \times 10^3 = ?$
2. 怎样进行同底数幂的乘法运算呢？

思考

实践

计算：$10^2 \times 10^3 =$ ________；

$10^3 \times 10^5 =$ ________；

$10^5 \times 10^4 =$ ________．

试说出每个运算步骤的根据，并观察条件与结论中指数的关系．

计算：$a^2 \cdot a^3 =$ ________；

$a^3 \cdot a^5 =$ ________；

$a^5 \cdot a^4 =$ ________．

说出每个运算步骤的根据，并猜想：

$$a^m \cdot a^n = \underline{\qquad\qquad}.$$

你能写出运算步骤吗？

实际上，根据幂的意义，有

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m\text{个}a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(m+n)\text{个}a} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

这就是说，**同底数的幂相乘，底数不变，指数相加**.

同底数幂乘法的运算性质

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n 都是正整数）.

当三个或三个以上的同底数幂相乘时，是否也符合上述性质？请你把三个同底数幂相乘的性质用公式表示出来.

思考

例 1 计算：

(1) $3^5 \times 3^6$；　　(2) $x^3 \cdot x^{12}$.

解： (1) $3^5 \times 3^6 = 3^{5+6} = 3^{11}$；

(2) $x^3 \cdot x^{12} = x^{3+12} = x^{15}$.

例 2 计算：

(1) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5$；　　(2) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$.

解： (1) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5 = a^{2+3+5} = a^{10}$；

(2) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^{1+2+3+4} = x^{10}$.

注意：字母 x 的指数是 1，而不是 0！

例 3 计算：$x \cdot x^4 + x^3 \cdot x^2$

解： $x \cdot x^4 + x^3 \cdot x^2$

$= x^{1+4} + x^{3+2}$

$= x^5 + x^5$

$= 2x^5$.

练习

1. 口答：

(1) 10×10^5；　(2) $5^3 \times 5^4 \times 5^6$；　(3) $x \cdot x^6$；

(4) $m^2 \cdot m \cdot m^3$；　(5) $b \cdot b \cdot b$；　(6) $y^3 \cdot y^5 \cdot y^2 \cdot y^3$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来．

(1) $x^3 \cdot x^2 = x^6$；　(2) $a^3 \cdot a^3 = 2a^3$；　(3) $m^5 \cdot m^5 = m^{10}$；

(4) $y \cdot y^3 = y^3$；　(5) $x^2 \cdot x^2 = 2x^4$；　(6) $n^3 \cdot n^3 = 2n^9$.

3. 计算：

(1) $a \cdot a^3 + a^2 \cdot a^2$；　(2) $x^3 \cdot x^2 - x \cdot x^4$.

2. 幂的乘方

现在我们来研究幂的乘方有什么运算性质．

即 $(a^m)^n$ 等于什么？（m，n 都是正整数）

我们已经遇到过类似的问题，想一想应该按怎样的思路去研究．

实践

计算：$(10^3)^2 =$ ________；

$(5^2)^4 =$ ________；

$(a^2)^3 =$ ________．

说出每个运算步骤的根据，并猜想：

$$(a^m)^n = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

你能写出运算步骤吗？

实际上，根据幂的意义和同底数幂乘法的运算性质，有

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n\text{ 个 }a^m}$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

这就是说，**幂的乘方，底数不变，指数相乘**．

幂的乘方的运算性质

$(a^m)^n = a^{mn}$（m，n 都是正整数）.

例 4 计算：

(1) $(10^5)^2$；　(2) $(x^5)^6$；

(3) $(x^2)^{10}$；　(4) $(y^2)^3 \cdot y$.

解：(1) $(10^5)^2 = 10^{5\times2} = 10^{10}$；

(2) $(x^5)^6 = x^{5\times6} = x^{30}$；

(3) $(x^2)^{10} = x^{2\times10} = x^{20}$；

(4) $(y^2)^3 \cdot y = y^{2\times3} \cdot y = y^{6+1} = y^7$.

练习

1. 计算：

(1) $(5^2)^6$；　(2) $(x^4)^3$；　(3) $(x^{100})^{20}$；

(4) $(a^5)^2 \cdot a^3$；　(5) $(x^3)^3 \cdot (x^2)^5$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来．

(1) $(x^2)^5 = x^7$；　(2) $x^4 + x^4 = x^8$；

(3) $x^2 \cdot x^3 = x^6$；　(4) $a^2 \cdot (a^3)^2 = a^8$；

(5) $(a^m)^n = (a^n)^m$（m，n 都是正整数）.

3. 积的乘方

下面我们用类似的方法，来研究积的乘方有什么运算性质．

即：当 n 是正整数时，怎样计算 $(ab)^n$？

你能用已有的经验，设计出研究问题的思路吗？

实践

计算：$(ab)^2=$________;

$(ab)^3=$________;

$(ab)^4=$________.

说出每个运算步骤的根据，并猜想：

$$(ab)^n=\_\_\_\_\_\_.$$

实际上，根据幂的意义和乘法的交换律、结合律，有

$$\begin{aligned}(ab)^n &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\ &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\ &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.\end{aligned}$$

这就是说，**积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘**.

积的乘方的运算性质

$(ab)^n=a^nb^n$（n 是正整数）.

上面的性质对于两个以上因式的积的乘方是否也适合?

比如，$(abc)^n=$______（n 是正整数）.

思考

例 5 计算：

(1) $(-5y)^3$；　(2) $(2m^2n)^4$；　(3) $(-3x^2y^3)^2$.

解：(1) $(-5y)^3=(-5)^3\cdot y^3=-125y^3$；

(2) $(2m^2n)^4=2^4\cdot(m^2)^4\cdot n^4=16m^8n^4$；

(3) $(-3x^2y^3)^2=(-3)^2\cdot(x^2)^2\cdot(y^3)^2=9x^4y^6$.

练习

1. 计算：

(1) $(2m)^2$； (2) $(a^2b^3)^4$； (3) $(-a^3b^2)^2$； (4) $(-2x^3y^4)^3$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来.

(1) $(xy^2)^3=xy^6$； (2) $(3ab)^2=6a^2b^2$；

(3) $(-2m^2)^2=-4m^4$； (4) $(-2x^2y^3)^3=8x^6y^9$.

思考

$-a^n$（n 是正整数）表示的意义是什么？$(-a)^n$（n 是正整数）表示的意义是什么？它们有什么不同？

例 6 计算：

(1) $-x^2\cdot x^4$； (2) $(-m)\cdot(-m)^3$.

解： (1) $-x^2\cdot x^4=-(x^2\cdot x^4)=-x^{2+4}=-x^6$；

(2) $(-m)\cdot(-m)^3=(-m)^{1+3}=(-m)^4=m^4$.

例 7 计算：

(1) $x\cdot x^2\cdot x^3+(x^2)^3+(-3x^3)^2$；

(2) $(-a^3)^2\cdot a^3-(3a^3)^3+a^2\cdot a^7$.

解： (1) $x\cdot x^2\cdot x^3+(x^2)^3+(-3x^3)^2$

$=x^6+x^6+9x^6$

$=11x^6$；

(2) $(-a^3)^2\cdot a^3-(3a^3)^3+a^2\cdot a^7$

$=a^6\cdot a^3-27a^9+a^9$

$=a^9-27a^9+a^9$

$=-25a^9$.

练习

1. 计算：

(1) $(-x)^4 \cdot (-x)^6$； (2) $-a^3 \cdot a$；

(3) $(-m)^2 \cdot m^3$； (4) $-x \cdot x^2 \cdot x^3$.

2. 计算：

(1) $(-m)^4 \cdot m + m^2 \cdot (-m)^3$； (2) $a^{10} \cdot a^5 - (-2a^5)^3 + (-a^3)^5$.

习 题 6－2

★基础★

1. 计算：

(1) $x^3 \cdot x^3$； (2) $m^2 \cdot m^3$； (3) $a^3 + a^3$；

(4) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$； (5) $10^2 \cdot 10 \cdot 10^5$； (6) $y^3 \cdot y^2 \cdot y^4$.

2. 计算：

(1) $x^2 \cdot x^5 - x^3 \cdot x^4$； (2) $m^3 \cdot m^3 + m \cdot m^5$；

(3) $a \cdot a^3 \cdot a^2 + a^2 \cdot a^4$； (4) $x^2 \cdot x^4 + x^3 \cdot x^2 \cdot x$.

3. 计算：

(1) $(x^4)^2$； (2) $(m^3)^6$； (3) $-(a^5)^2$； (4) $-(y^2)^3$.

4. 计算，并说明运算的依据．

(1) $(x^2)^4$； (2) $x^2 \cdot x^4$； (3) $(m^5)^5$； (4) $m^5 \cdot m^5$.

5. 计算，并说明运算的依据．

(1) $x^3 + x^3$； (2) $x^3 - x^3$； (3) $(x^3)^3$； (4) $(xy)^3$.

6. 计算：

(1) $(x^2y)^3$； (2) $(-mn^3)^2$； (3) $(-x^2y^3)^5$； (4) $-(-3xy^3)^3$.

7. 下面的运算对不对？如果不对，请改正过来．

(1) $(-x^5)^2 = -x^7$； (2) $(xy^2)^5 = xy^{10}$；

(3) $(2mn)^3 = 6m^3n^3$； (4) $(-2a^3)^2 = -4a^5$.

8. 计算：

(1) $-x^3 \cdot x^4$； (2) $-a \cdot (-a)^4$；

(3) $-y^3 \cdot (-y)^2$； (4) $-(-a)^5 \cdot (-a)$.

★★提升★★

1. 计算：

(1) $(-x)^5\cdot x^2\cdot(-x)^4$； (2) $-a^2\cdot(-a)^4\cdot(-a)^3$；

(3) $-m^4\cdot m^6\cdot(-m)^8$； (4) $-(-p)^5\cdot(-p)^3\cdot(-p)^2$.

2. 计算：

(1) $(-2)^5\cdot(-2)^7\cdot 2^6$； (2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4$；

(3) $10^2\cdot 10\cdot 10^m$（m 是正整数）； (4) $3^n\cdot(-3)^5\cdot 3^n$（n 是正整数）.

3. 把下列各式化成 $(x-y)^n$ 的形式：

(1) $(x-y)\cdot(x-y)^3\cdot(x-y)^2$； (2) $(x-y)^3\cdot(y-x)^2\cdot(y-x)$；

(3) $(x-y)\cdot(x-y)^4\cdot(y-x)^4$； (4) $(x-y)\cdot(y-x)^3\cdot(y-x)^4$.

4. 计算：（m，n 是正整数）

(1) $(-a)^m\cdot a^n$； (2) $[-5^m\cdot(-5)^n]^2$.

5. 用简便方法计算：

(1) $\left[(-6)^8\times\left(\frac{1}{6}\right)^8\right]^5$； (2) $(-8)^{2\,003}\times(-0.125)^{2\,000}$.

★★★拓展★★★

已知：$2^m=3$，$2^n=5$. 求 2^{3m+2n} 的值 .

6.3 整式的乘法

1. 单项式与单项式相乘

实践

某颗人造地球卫星绕地球运行的速度是 7.9×10^3 米 / 秒，那么这颗卫星绕地球运行一年（一年以 3.2×10^7 秒计算）走过的路程是多少米？

你在运算中应用了什么运算律和运算性质？

根据单项式的概念、运算律和同底数幂的乘法性质，做下列计算：

(1) $2x \cdot 3xy$；　　(2) $3xy^2 \cdot 4x^3y$；　　(3) $3ab^2 \cdot a^2b^3c$.

由计算的过程和结果，你能归纳出单项式与单项式相乘的运算方法吗？

一般地，**单项式相乘，先把它们的系数相乘，作为积的系数；再把相同字母的幂相乘所得的积，分别作为积的因式，并把只在一个单项式里出现的字母的幂也作为积的因式**.

例 1 计算：

(1) $(-3m^3n^2) \cdot (7mn^3)$；　　(2) $\frac{4}{3}x^2y^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}x\right)$.

解： (1) $(-3m^3n^2) \cdot (7mn^3)$

$= [(-3) \times 7] \cdot (m^3 \cdot m) \cdot (n^2 \cdot n^3)$

$= -21m^4n^5$；

(2) $\frac{4}{3}x^2y^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}x\right)$

$= \left[\frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right] \cdot (x^2 \cdot x) \cdot y^3$

$= -2x^3y^3$.

练习

1. 计算：

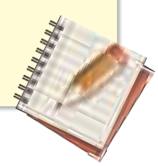
(1) $7x^2 \cdot 5x^3$；　　(2) $3mn \cdot (-2m^2n^3)$；

(3) $-\frac{1}{2}a^2 \cdot (-4a^3b)$；　　(4) $(-3xy) \cdot \left(-\frac{1}{6}x^2y\right)$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来.

(1) $3x^2 \cdot 5x^3 = 15x^6$；　　(2) $3m^3 \cdot 2m^3 = 6m^3$；

(3) $7a^3b^2 \cdot 2abc = 14a^4b^3$；　　(4) $2xy \cdot 3x^2y = 6x^3y$.



例 2 计算：

按照怎样的顺序进行运算？

(1) $2xy \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2yz\right) \cdot (-3xz^2)$；

(2) $2x^6y^2 \cdot x^3y + (-25x^8y^2)(-xy)$.

解：(1) $2xy\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2yz\right)\cdot(-3xz^2)$

$=\left[2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-3)\right]\cdot(x\cdot x^2\cdot x)\cdot(y\cdot y)\cdot(z\cdot z^2)$

$=3x^4y^2z^3$；

(2) $2x^6y^2\cdot x^3y+(-25x^8y^2)(-xy)$

$=2x^9y^3+25x^9y^3$

$=27x^9y^3$.

练习

1. 计算：

(1) $(6a^2b)\cdot(-2ab^2c)\cdot\left(-\frac{1}{4}b^2c^3\right)$；

(2) $(-0.2x^3y)\cdot(-0.3x^2y^3)\cdot(25xyz)$.

2. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{4}a^3b^3c\right)+\frac{5}{6}abc\cdot(ab)^2$；

(2) $(-2x^2)(xy^3)-2x^2y(-4xy^2)$.

3. 光的速度大约是 3×10^5 千米 / 秒，太阳光射到地球上约需 5×10^2 秒，那么地球和太阳之间的距离大约是多少米？（用科学记数法表示）

2. 单项式与多项式相乘

在学习了单项式乘法的基础上，我们来研究单项式与多项式的乘法 .

思考

是否能把单项式与多项式相乘，转化为单项式与单项式相乘？转化的依据是什么？

如果用字母 m 表示单项式，用 $a+b+c$ 表示多项式，单项式与多项式相乘就是进行形如

$$m(a+b+c)$$

这个运算可以依照哪个运算律来进行？

的运算．

由于代数式中的字母都表示数，所以乘法对加法的分配律对于代数式仍然成立，从而有

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

这个运算律可以用图 6－1 所示的几何图形加以说明．

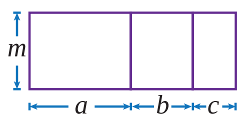


图 6－1

$m(a+b+c)=$__________.

所以，**单项式与多项式相乘，就是用单项式分别乘多项式的每一项，再把所得的积相加**．

例 3 计算：

(1) $-2xy\cdot(3x^2+2xy-y^2)$；　　(2) $(2ab^2-ab+4b)\cdot ab$.

解： (1) $-2xy\cdot(3x^2+2xy-y^2)$

$=(-2xy)\cdot(3x^2)+(-2xy)\cdot(2xy)+(-2xy)\cdot(-y^2)$

$=-6x^3y-4x^2y^2+2xy^3$；

(2) $(2ab^2-ab+4b)\cdot ab$

$=(2ab^2)\cdot(ab)-(ab)\cdot(ab)+(4b)\cdot(ab)$

$=2a^2b^3-a^2b^2+4ab^2$.

例 4 计算：$2x^2\cdot\left(\frac{1}{2}xy+y^2\right)-5x\cdot(x^2y-xy^2)$．

解： $2x^2\cdot\left(\frac{1}{2}xy+y^2\right)-5x\cdot(x^2y-xy^2)$

$=x^3y+2x^2y^2-5x^3y+5x^2y^2$

$=-4x^3y+7x^2y^2$.

要防止在运算中产生符号的错误！

练习

1. 计算：

(1) $2x(3x^2+1)$；

(2) $-4\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x\right)$；

(3) $-2y\left(3y^2-\frac{7}{2}y-1\right)$；

(4) $\left(\frac{5}{3}x^2-2xy+y^2\right)\cdot 3x^2y$.

2. 计算：

(1) $-x^2(-2xy)+3x(x^2y-1)$；

(2) $x-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x^2-x+1)$.

例 5 如图 6－2，计算四边形 $AECF$ 的面积 .

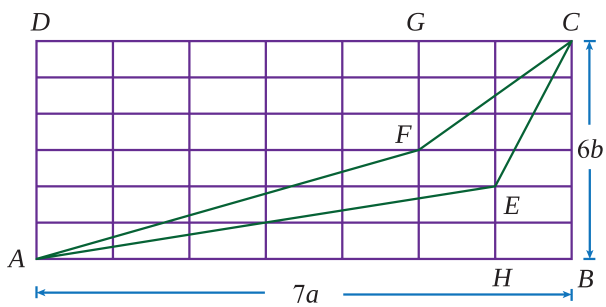


图 6－2

分析： 四边形 $AECF$ 的面积即长方形 $ABCD$ 的面积减去梯形 $ADGF$、三角形 GCF、三角形 AHE、梯形 $HBCE$ 四个部分的面积 .

解： 四边形 $AECF$ 的面积为

$$7a\cdot 6b-\frac{1}{2}(3b+6b)\cdot 5a-\frac{1}{2}\cdot 3b\cdot 2a-\frac{1}{2}\cdot 6a\cdot 2b-\frac{1}{2}(2b+6b)\cdot a$$

$$=42ab-\frac{45}{2}ab-3ab-6ab-4ab$$

$$=\frac{13}{2}ab.$$

3. 多项式与多项式相乘

下面研究多项式与多项式的乘法．形如 $(m+n)(a+b+c)$ 的运算应当怎

样进行？

思考

是否能够把多项式与多项式相乘转化为单项式与多项式相乘？

如果先把 $(m+n)$ 看做一个单项式，就可以把多项式与多项式相乘转化为单项式与多项式相乘．利用我们已经学过的知识，可以知道

$$\begin{aligned}&(m+n)(a+b+c)\\=&(m+n)a+(m+n)b+(m+n)c\\=&ma+na+mb+nb+mc+nc.\end{aligned}$$

探索

以上多项式与多项式乘法的意义，可以用图 6－3 解释吗？请你试一试．

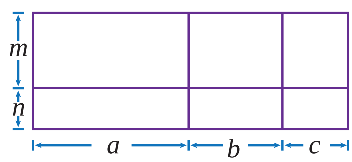


图 6－3

这就是说，多项式和多项式相乘可以这样进行：**用其中一个多项式的每一项去乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加**．

例 6 计算：

(1) $(x+3y)(5x+6y)$；　　(2) $(2a-3b)(a+4b)$.

解：(1) $(x+3y)(5x+6y)$

$=5x^2+6xy+15xy+18y^2$

$=5x^2+21xy+18y^2$；

(2) $(2a-3b)(a+4b)$

$=2a^2+8ab-3ab-12b^2$

$=2a^2+5ab-12b^2$.

例 7 计算：

(1) $(x+1)(x+4)$； (2) $(m-2)(m+3)$.

解： (1) $(x+1)(x+4)$

$=x^2+x+4x+4$

$=x^2+(1+4)x+4$

$=x^2+5x+4$；

(2) $(m-2)(m+3)$

$=m^2-2m+3m-6$

$=m^2+(-2+3)m-6$

$=m^2+m-6$.

思考

你能找到形如 $(x+a)$ 和 $(x+b)$ 的两个一次二项式相乘的规律吗？

$(x+a)(x+b)=$________________.

例 8 计算：

(1) $(3x-2)(x-1)+(x+1)(x+2)$； (2) $(a-b)(a^2+3ab+b^2)$.

解： (1) $(3x-2)(x-1)+(x+1)(x+2)$

$=3x^2-(3+2)x+2+x^2+(2+1)x+2$

$=4x^2-2x+4$；

(2) $(a-b)(a^2+3ab+b^2)$

$=a^3+3a^2b+ab^2-a^2b-3ab^2-b^3$

$=a^3+2a^2b-2ab^2-b^3$.

练习

1. 计算：

(1) $(x+4)(x+7)$； (2) $(a+5)(a-9)$；

(3) $(y-3)(y+10)$； (4) $(m-12)(m-11)$.

2. 计算：

(1) $(2a-3b)(2a+3b+4)$；

(2) $(3a-1)(a+1)+(2a+3)(2a-7)$；

(3) $(x-1)(3x-2)-(x+1)(x+2)$；

(4) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

例 9 如图 6－4，用含有 x 的代数式表示槽型钢材的体积．

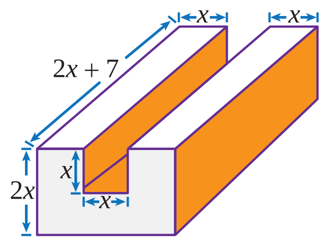


图 6－4

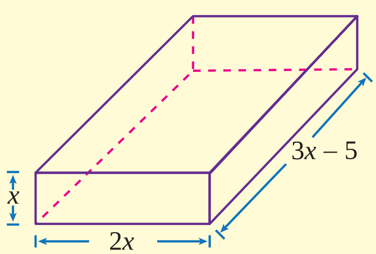
解： 槽型钢材的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2x\cdot 3x\cdot(2x+7)-x\cdot x\cdot(2x+7)\\ &= 6x^2(2x+7)-x^2(2x+7)\\ &= 12x^3+42x^2-2x^3-7x^2\\ &= 10x^3+35x^2. \end{aligned}$$

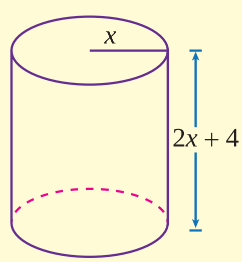
想一想，不规则几何体的体积常用什么方法计算．

练习

如图，用代数式表示下面各图中几何体的体积．



(1)



(2)

习 题 6-3

★基础★

1. 计算：

(1) $5x^3\cdot 4xy$； (2) $(-3ab^2)\cdot(-2a^2b)$；

(3) $(-6xy^2z^3)\cdot 3x^2y^3$； (4) $(xy)^3\cdot(-x^3y^2)$.

2. 计算：

(1) $(3x^4y)\cdot(-2xy^3)^4$； (2) $(-5m^2n^3)^2\cdot(4m^4n)^2$；

(3) $\left(-\frac{3}{5}x^2y\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}xy^3\right)$； (4) $\left(-\frac{4}{7}ab^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a^2b^3c\right)^3$.

3. 计算：

(1) $(2\times10^5)\times(6\times10^4)$； (2) $(2.4\times10^3)\times(3.2\times10^8)$；

(3) $(0.8\times10^8)\times(1.5\times10^6)^3$； (4) $\left(\frac{1}{2}\times10^2\right)^5\times(4\times10^3)^3$.

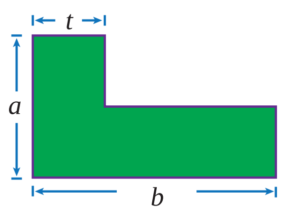
4. 计算：

(1) $-(a^2b)^3+2a^2b\cdot(-3a^2b)^2$； (2) $\left(-\frac{3}{4}a^3b^2c\right)+\frac{5}{6}abc\cdot(ab)^2$.

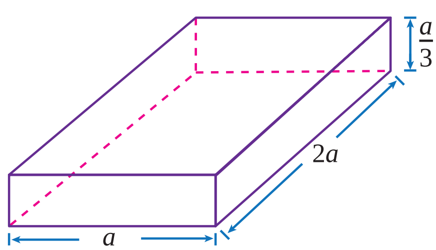
5. 如图所示是角钢的截面.

(1) 写出表示截面面积的代数式；

(2) 当 $a=13.56$ mm，$b=19.98$ mm，$t=6.25$ mm 时，用计算器求出它的面积（精确到 1 mm²）.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，计算长方体的表面积和体积.

7. 计算：

(1) $2x^2(x-y+1)$； (2) $-4x\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$；

(3) $(3x^2y-3xy^2)(-xy)$；　　(4) $\left(5m^2-\frac{4}{9}m+1\right)(-3m^2n)$.

8. 计算：

(1) $(2x)^2\cdot\left(2x^2-\frac{5}{8}x-\frac{9}{16}\right)$；

(2) $-a^2(-2ab)+3a(a^2b-1)$；

(3) $(-2ab^2)^2\cdot(3a^2b-2ab-4b)$；

(4) $2ab(a^2b+ab-ab^2)-ab^2(a^2-3ab+2a)$.

9. 计算：

(1) $(3x-1)(x+5)$；　　(2) $(3x+4)(4x-9)$；

(3) $(5a-6b)(3a-2b)$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}x-4\right)\left(2y-\frac{1}{4}\right)$.

10. 计算：

(1) $(x-3y)(x-6y-1)$；

(2) $(3a-b)(3a+b+5)$；

(3) $(2x-1)(x^2-x-1)$；

(4) $2x(x^2-2x+3)-(x+5)(2x-3)$；

(5) $3(2a+1)(2a-1)-4(3a-2)(3a+5)$.

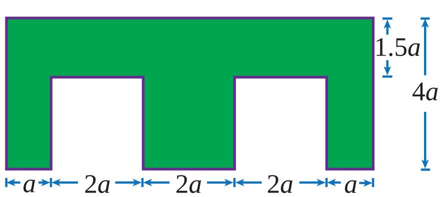
★★提升★★

1. 计算：

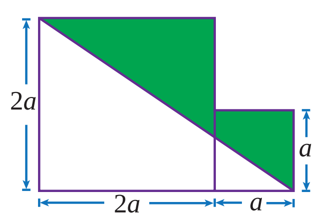
(1) $(-2a)^6-(-3a^3)^2-[-(2a)^2]^3$；　　(2) $(-3ab^3)^3\cdot(4a^2b)^2+5a^4b^5\cdot18a^3b^6$.

2. 光的速度大约是 3×10^5 千米 / 秒，从太阳系以外距离地球最近的一颗恒星（比邻星）发出的光，需要 4 年时间才能到达地球．如果 1 年以 3.2×10^7 秒计算，求这颗恒星与地球之间的距离．

3. 如图，计算变压器铁芯片截面的面积（长度单位：cm）.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 边长分别为 a 和 $2a$ 的两个正方形按如图的样式摆放，求图中绿色部分的面积．

5. 先化简，再求值：

(1) $6m^2-5m(-m+2n-1)+4m\left(-3m-\dfrac{5}{2}n-\dfrac{3}{4}\right)$，其中 $m=-1$，$n=\dfrac{1}{20}$；

(2) $3(-4x+y)(x-y)+2(3x-2y)(x+3y)$，其中 $x=-2$，$y=1$.

6. 解方程：

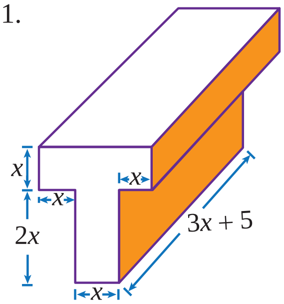
(1) $x(x+3)-x(1-2x)=9+3x^2$；

(2) $6x^2-(2x+3)(3x-2)=0$.

7. 观察如图所示零件：

(1) 用含 x 的代数式表示零件的体积；

(2) 当 $x=206.56$ mm 时，求零件的体积.（利用计算器计算）

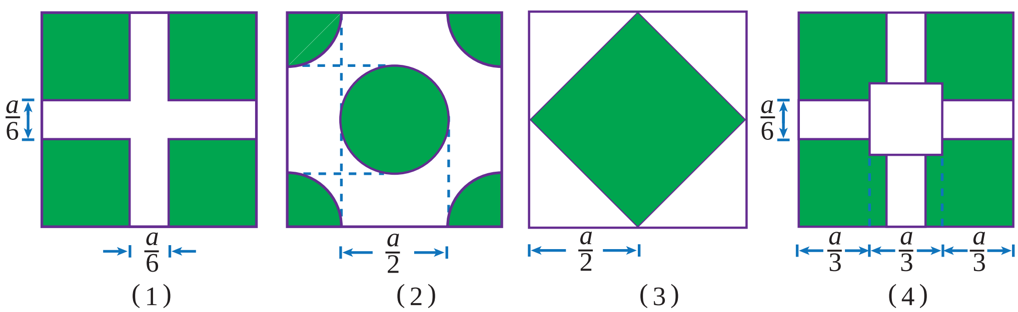


（第 7 题）

★★★ 拓展 ★★★

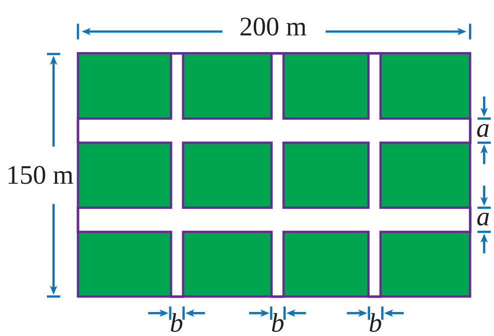
1. (1) 在一个边长为 a 的正方形地块上，开辟出一部分作为花坛. 下面给了四种设计方案，请你分别写出花坛（图中绿色部分）面积 S 的表达式，并计算当 $a=10$ m 时的花坛面积.

(2) 请你再给出另外两种设计方案，并计算当 $a=10$ m 时的花坛面积.



（第 1 题）

2. 某农场有一块长方形耕地，尺寸如图所示. 要在这块土地上沿东西方向挖 2 条主干水渠，宽均为 a 米；沿南北方向挖 3 条支水渠，宽均为 b 米. 那么挖完水渠以后，余下的耕地面积为多少？



（第 2 题）

6.4 乘法公式

1. 完全平方公式

探索

学校操场中有一块边长为 108 m 的正方形空地，为购买草坪进行绿化，需要计算空地的面积，你能通过画图求得这块正方形空地的面积吗？

通过画图，我们发现可以将这个正方形分割成四部分（如图 6－5），即两个正方形和两个一模一样的长方形，分别口算四部分的面积就可以求得整个正方形的面积．

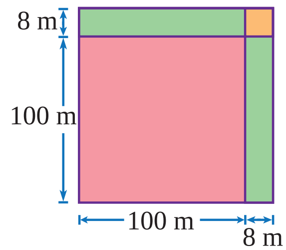


图 6－5

思考

如果这块正方形空地的边长是 $a+b$，那么它的面积是多少呢？你能用整式乘法的知识进行解释吗？

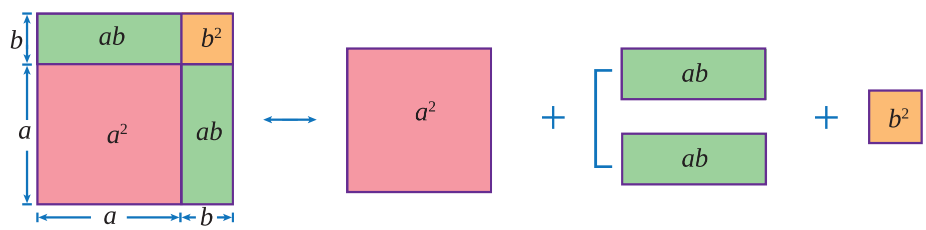


图 6－6

如图 6－6，我们发现 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$．可以利用多项式和多项式相乘的知识进行解释：

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2\\
&=(a+b)(a+b)\\
&=a^2+ab+ab+b^2\\
&=a^2+2ab+b^2.
\end{aligned}
$$

思考

这个规律用文字语言如何表述？怎样形式的整式乘法可以使用它简化运算？

两数和的平方，等于它们的平方和，加上它们的积的 2 倍.

我们把这个规律叫做**两数和的完全平方公式**.

两数和的完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

在公式中，字母 a 和 b 可以是含字母的代数式，也可以是单独的数. 在运用公式进行运算时，应注意区分哪个是 a，哪个是 b.

例 1 运用两数和的完全平方公式计算：

(1) $(x+3)^2$；　　(2) $(3m+4n)^2$.

解： (1) $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$；

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}$$

为了运用公式，需要将谁看成 a，将谁看成 b？

(2) $(3m+4n)^2=(3m)^2+2\cdot(3m)\cdot(4n)+(4n)^2=9m^2+24mn+16n^2$.

$$\boxed{(a\ +\ b)^2\ =\ a^2\ +\ 2\cdot a\cdot b\ +\ b^2}$$

练习

运用两数和的完全平方公式计算：

(1) $(x+2)^2$；　　(2) $(7+m)^2$；　　(3) $(5x+2y)^2$；　　(4) $\left(2x+\dfrac{y}{2}\right)^2$.

例 2 运用两数和的完全平方公式计算：

(1) 107^2；　　(2) $(a+b+c)^2$.

分析： (1) 将 107^2 写成 $(100+7)^2$，转化为可用两数和的完全平方公式的形式；(2) 把 $a+b$ 看成一个整体，将 $(a+b+c)^2$ 写成 $[(a+b)+c]^2$ 的形式，

就可以应用公式了．

解：(1) 107^2

$= (100+7)^2$

$= 100^2 + 2\times 100\times 7 + 7^2$

$= 11\ 449$；

(2) $(a+b+c)^2$

$= [(a+b)+c]^2$

$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

通过做第(2)题，你能发现什么规律吗?

思考

两数差的完全平方公式如何推导？你能把这个公式用文字语言表述出来吗?

两数差的平方，等于它们的平方和，减去它们的积的 2 倍．

两数差的完全平方公式

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

两数和与两数差的完全平方公式，统称为**完全平方公式**．

例 3 运用两数差的完全平方公式计算：

(1) $(2x-1)^2$；　　(2) $(3m-2n)^2$.

解：(1) $(2x-1)^2$

$= (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2$

$= 4x^2 - 4x + 1$；

(2) $(3m-2n)^2$

$= (3m)^2 - 2\cdot 3m\cdot 2n + (2n)^2$

$= 9m^2 - 12mn + 4n^2.$

想一想，怎样与公式相对应．

交流

仿照用正方形和长方形面积表示两数和的完全平方公式的方法，试解释两数差的完全平方公式，并与同学交流你的想法和结果．

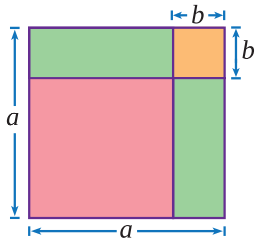


图 6－7

如图 6－7，ab 表示的是哪部分图形的面积？重复减去的面积怎么办？

练习

1. 运用完全平方公式计算：

（1）102^2； （2）199^2.

2. 运用完全平方公式计算：

（1）$(x+3y)^2$； （2）$(4m-5n)^2$；

（3）$(x-2y)^2-(2x+y)^2$； （4）$\left(\frac{1}{2}x^2-3y\right)^2$.

问题解决

发现和运用规律：

（1）观察 $15^2=225$，$25^2=625$，$35^2=1\,225$，$45^2=2\,025$，…，你能发现和猜想出什么规律吗？如果能，请证明这个规律．

（2）运用已经证明的规律计算：

55^2，75^2，85^2，95^2，105^2，195^2.

2. 平方差公式

思考

前面我们学习了两数和的平方、两数差的平方，它们的结果都是三项，如果用两数的和与两数的差相乘，结果如何呢？

实践

计算下面各题：

(1) $(a+5)(a-5)=$______；　(2) $(m+3)(m-3)=$______；

(3) $(3x+7)(3x-7)=$______；　(4) $(5a+b)(5a-b)=$______；

(5) $(n+3m)(n-3m)=$______；　(6) $(x+2y)(x-2y)=$______.

通过计算你发现了什么规律？

两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差 .

思考

整式乘法具有怎样的特点时，可以用这个规律去简化计算？如何推导这个规律呢？

类似的，可以利用多项式和多项式相乘的知识进行解释：

$$\begin{aligned}&(a+b)(a-b)\\=&a^2-ab+ab-b^2\\=&a^2-b^2.\end{aligned}$$

我们把这个规律叫做平方差公式 .

平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

怎样用图 6－8 中图形的面积来解释平方差公式？

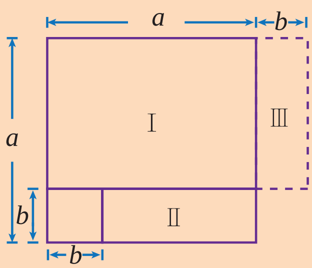


图 6－8

思考

例 4 运用平方差公式计算：

(1) $(m+8)(m-8)$；　　　　(2) $(2a+5b)(2a-5b)$.

解： (1) $(m+8)(m-8)=m^2-8^2=m^2-64$；

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

(2) $(2a+5b)(2a-5b)=(2a)^2-(5b)^2=4a^2-25b^2$.

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

注意： (1) 应用这个公式的条件是：两个因式中有一项完全相同，另一项互为相反数；

(2) 公式中的 a 和 b 可以表示数或代数式 .

例 5 运用平方差公式计算：

(1) $(4y+3x)(3x-4y)$；　　　　(2) $(-4a-1)(4a-1)$.

解： (1) $(4y+3x)(3x-4y)$

$=(3x+4y)(3x-4y)$

$=(3x)^2-(4y)^2$

$=9x^2-16y^2$；

怎样转化为符合公式条件的形式？

(2) $(-4a-1)(4a-1)$

$=(-1-4a)(-1+4a)$

$=(-1)^2-(4a)^2$

$=1-16a^2$.

或 $(-4a-1)(4a-1)$

$=-(4a+1)(4a-1)$

$=-[(4a)^2-1^2]=-(16a^2-1)$

$=1-16a^2$.

练习

1. 运用平方差公式计算（口答）：

(1) $(x-y)(x+y)$；　　　　(2) $(x+3y)(x-3y)$；

(3) $(2+a)(2-a)$；　　　　(4) $(1-3m)(1+3m)$.

2. 运用平方差公式计算：

(1) $(x+2y)(-x+2y)$；　　　　(2) $(3m-5n)(5n+3m)$；

(3) $(-1+x)(-1-x)$；　　　　(4) $(-2b-5)(2b-5)$.

例 6 运用平方差公式计算：

(1) 59.8×60.2；　　　　(2) $(p+q)(p^2+q^2)(p-q)$.

解：(1) 59.8×60.2

$=(60-0.2)(60+0.2)$

$=60^2-(0.2)^2$

$=3\,600-0.04$

$=3\,599.96$；

(2) $(p+q)(p^2+q^2)(p-q)$

$=(p+q)(p-q)(p^2+q^2)$

$=(p^2-q^2)(p^2+q^2)$

$=p^4-q^4$.

例 7 计算：

(1) $(2x+1)(2x-1)-(3-2x)(-2x-3)$；

(2) $(3a-4b)(4b+3a)-(2b-a)(2b+3a)$.

解：(1) $(2x+1)(2x-1)-(3-2x)(-2x-3)$

$=(2x+1)(2x-1)+(3-2x)(3+2x)$

$=[(2x)^2-1]+[3^2-(2x)^2]$

$=4x^2-1+9-4x^2$

$=8$；

不符合公式时，还要按一般的方法运算．

(2) $(3a-4b)(4b+3a)-(2b-a)(2b+3a)$

$=[(3a)^2-(4b)^2]-(4b^2+6ab-2ab-3a^2)$

$=9a^2-16b^2-4b^2-4ab+3a^2$

$=12a^2-4ab-20b^2$.

练习

运用平方差公式计算：

(1) 97×103；　　　　(2) 1.02×0.98；

(3) $(x-2)(x^2+4)(x+2)$；　　　　(4) $(2a+3b)(4a+5b)(2a-3b)(5b-4a)$.

例 8 运用乘法公式计算 $(2y+x)^2(x-2y)^2$.

分析： 运用加法交换律，将 $2y+x$ 变形为 $x+2y$，这样 $(x+2y)(x-2y)$ 符合平方差公式，然后运用积的乘方公式将原式变形为 $[(x+2y)(x-2y)]^2$，再运用乘法公式计算 .

解： $(2y+x)^2(x-2y)^2$

$=[(x+2y)(x-2y)]^2$

$=(x^2-4y^2)^2$

$=x^4-8x^2y^2+16y^4$.

例 9 有一个正方形花园，如果它的边长增加 3 米，那么花园面积将增加 39 平方米，求原来花园的面积 .

解： 如图 6－9，设原正方形花园的边长为 x 米，那么增加后的边长为 $(x+3)$ 米 .

由题意，得

$(x+3)^2-x^2=39.$

$x^2+6x+9-x^2=39.$

$x=5.$

$\therefore\quad x^2=25.$

答：原来花园的面积为 25 平方米 .

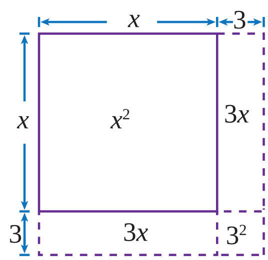


图 6－9

习　题　6－4

★基础★

1. 填空：

(1) $107^2=(\quad+\quad)^2=(\quad)^2+2(\quad)(\quad)+(\quad)^2=(\qquad)$；

(2) $93^2=(\quad-\quad)^2=(\quad)^2-2(\quad)(\quad)+(\quad)^2=(\qquad)$；

(3) $(x+2)(x-2)=(\qquad)^2-(\qquad)^2$.

2. 运用完全平方公式计算：

(1) $(a-2b)^2$；　(2) $(3x+2y)^2$；　(3) $(4a-3b)^2$；

(4) $(-2-x)^2$；　(5) $(1.5+2x)^2$；　(6) $\left(\frac{3}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^2$.

3. 运用完全平方公式计算：

(1) 0.98^2；　(2) 895^2；　(3) 109^2；　(4) 14.5^2.

4. 运用平方差公式计算：

(1) $(x+2y)(x-2y)$； (2) $(3a-2b)(3a+2b)$； (3) $(-1+4x)(-1-4x)$；

(4) $(-4a-b)(b-4a)$； (5) 29.8×30.2； (6) 10.98×11.02.

5. 计算：

(1) $(x+4)(x^2+16)(x-4)$；

(2) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$；

(3) $(x-3y)(x+3y)-(x+y)(x-y)$；

(4) $(2a-b)(b+2a)-(2b-3a)(2b+3a)$.

6. 运用乘法公式计算：

(1) $(x+y-1)^2$； (2) $[(2a+b)(b-2a)]^2$；

(3) $(a+b-2c)(a-b+2c)$； (4) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

★★提升★★

1. 填空：

(1) $(5a+2b)(\qquad)=25a^2-4b^2$；

(2) $(2x+y)(\qquad)=y^2-4x^2$；

(3) $(\qquad)(a-1)=1-a^2$.

2. 先化简，再求值：$(5y+1)(5y-1)-5(y+25y^2)$，其中 $y=\frac{2}{5}$.

3. 解方程：$(x+1)(x-1)-(x+2)(x-3)=9$.

4. 解不等式：$(3x+4)(3x-4)<9(x-2)(x+3)$.

5. 你能再想出一种用几何图形演示的方法来说明平方差公式吗?

6. 化简求值：

(1) $(x+y)^2-(x-y)^2$，其中 $x=\frac{2}{3}$， $y=\frac{3}{2}$；

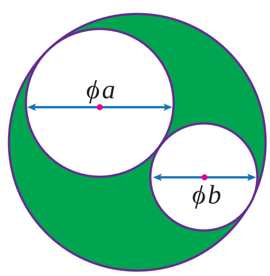
(2) $5(a+b)(a-b)-[2(a+b)]^2-(a-b)^2$，其中 $a=\frac{1}{3}$， $b=\frac{1}{2}$.

7. 解方程：$(4x+5)^2-(4x+5)(4x-5)=0$.

8. 解不等式：$2y(1+3y)\leqslant 3(y-2)^2+3(y+2)^2$.

9. 现有一张正方形纸片，如果边长缩短 3 厘米，那么所得的正方形的面积就比原正方形的面积减少 27 厘米^2，求原正方形的边长 .

10. 如图，一块直径为 $a+b$ 的圆形钢板，从中挖去直径分别为 a 与 b 的两个圆，求剩下钢板的面积 .（ϕ 表示圆的直径）



（第 10 题）

11. 比较下面各算式结果的大小：（在横线上选填“>”、“<”或“=”）

4^2+3^2____$2\times4\times3$；$(-2)^2+1^2$____$2\times(-2)\times1$；

2^2+7^2____$2\times2\times7$；11^2+12^2____$2\times11\times12$.

通过观察归纳，写出反映这种规律的一般结论，并加以证明 .

★★★ 拓展 ★★★

1. 计算：$\left(3+\dfrac{1}{3}\right)\left(3^2+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(3^4+\dfrac{1}{3^4}\right)\left(3^8+\dfrac{1}{3^8}\right)\left(3^{16}+\dfrac{1}{3^{16}}\right)$.

2. 观察下列等式：

$9-1=8$，$16-4=12$，$25-9=16$，$36-16=20$，….

这些等式反映出正整数间的某种规律 . 设 n 表示正整数，试写出第 n 个等式的表达式，并加以证明 .

三、整式的除法

6.5 整式的除法

1. 同底数幂的除法

实践

$$2^5\div2^3=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2}=\underline{\qquad\qquad\qquad};$$

$$10^6\div10^2=\underline{\qquad\qquad\qquad};$$

$$2^3\div2^3=\underline{\qquad\qquad\qquad};$$

$$2^3\div2^5=\frac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2}=\underline{\qquad\qquad\qquad};$$

$$10^2\div10^6=\frac{10\times10}{10\times10\times10\times10\times10\times10}=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

思考

根据上面的计算，你能归纳出 $a^m \div a^n(a \neq 0, m, n$ 都是正整数）的运算公式吗？

可以发现：

当 $m>n$ 时，所得的商是 a^{m-n}；

当 $m=n$ 时，所得的商是 1；

当 $m<n$ 时，所得的商是 $\frac{1}{a^{n-m}}$.

这里用到了分类讨论思想！

能否把三种情况的计算方法统一呢？

我们发现，在上面的计算中出现了 1，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{10^4}$ 这样的结果．当规定 $2^0=1$，$2^{-2}=\frac{1}{2^2}$，$10^{-4}=\frac{1}{10^4}$ 时，就可以把三种情况的计算方法统一运用公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 来计算了．

一般地，我们规定：

(1) 一个不等于零的数的零次幂等于 1，即

$$a^0 = 1(a \neq 0);$$

(2) 任何一个不等于零的数 a 的 $-p$（p 是正整数）次幂，等于 a 的 p 次幂的倒数，即

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}(a \neq 0).$$

这样，我们就得到了同底数幂的除法运算性质：**同底数的幂相除，底数不变，指数相减**．

同底数幂除法的运算性质

$$a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0,\ m,\ n \text{ 都是正整数}).$$

例 1 计算：

(1) $x^7 \div x^3$； (2) $m^2 \div m^5$；

(3) $(ax)^4 \div ax$； (4) $\left(-\frac{1}{2}my\right)^3 \div \left(-\frac{1}{2}my\right)^6$.

解：(1) $x^7 \div x^3 = x^{7-3} = x^4$；　　(2) $m^2 \div m^5 = m^{2-5} = m^{-3} = \dfrac{1}{m^3}$；

(3) $(ax)^4 \div ax = (ax)^{4-1} = (ax)^3 = a^3x^3$；

(4) $\left(-\dfrac{1}{2}my\right)^3 \div \left(-\dfrac{1}{2}my\right)^6$

$$= \left(-\frac{1}{2}my\right)^{3-6}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}my\right)^{-3}$$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}my\right)^3}$$

$$= -\frac{8}{m^3y^3}.$$

关键是把 $-\dfrac{1}{2}my$ 看做一个整体！

练习

1. 计算：

(1) $x^4 \div x^2$；　　(2) $x^3 \div x^3$；

(3) $(-3)^5 \div (-3)^2$；　　(4) $(-2x)^3 \div (-2x)^2$；

(5) $(-m^2n)^5 \div (-m^2n)^2$；　　(6) $(-xy^3)^4 \div (-xy^3)^6$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来．

(1) $x^6 \div x^2 = x^3$；　　(2) $m^{3n} \div m^n = m^3$；

(3) $(-x)^4 \div (-x)^2 = -x^2$；　　(4) $(-a)^5 \div (-a)^2 = a^3$.

我们已经学过用科学记数法把绝对值大于 1 的数记作 $a \times 10^n$ 的形式，其中 a 是含有一位整数的小数，n 等于原数的整数部分的位数减去 1．比如：

$$298\,000 = 2.98 \times 10^5,$$

$$-3\,245\,000 = -3.245 \times 10^6.$$

对于绝对值小于 1 的数，怎样用科学记数法表示呢？

$$\because\quad 0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1},\ 0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2},\ 0.001 = \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3},\cdots,$$

$\therefore \quad 0.\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}0}1 = 10^{-n}$（$n$ 是正整数）.

你能发现零的个数与指数的关系吗？

这样，绝对值小于 1 的数也可以用科学记数法来表示 .

例 2 用科学记数法表示下列各数：

（1）0.000 04；（2）$-$0.000 007 18.

解：（1）$0.000\,04 = 4 \times 10^{-5}$；

（2）$-0.000\,007\,18 = -7.18 \times 10^{-6}$.

交流

当绝对值小于 1 的数记为 $a \times 10^{-n}$ 的形式时，其中 a，n 是怎样的数？

例 3 已知 1 纳米 $= \dfrac{1}{10^9}$ 米 . 如果某种植物花粉的直径是 35 000 纳米，那么这种花粉的直径等于多少米？请用科学记数法表示 .

解： $35\,000 \times \dfrac{1}{10^9} = 3.5 \times 10^4 \times 10^{-9} = 3.5 \times 10^{-5}$（米）.

答：这种花粉的直径等于 3.5×10^{-5} 米 .

练习

用科学记数法表示下列各数：

（1）2 503 000；（2）0.050 56；

（3）0.000 038 9；（4）$-$0.000 451.

2. 单项式除以单项式

思考

怎样做单项式与单项式的除法运算呢？比如，$6x^2yz^3 \div 3xz^2 = ?$

我们可以利用乘法与除法的关系来试一试．

交流

你能再举一个例子试一试，并观察、归纳出单项式除以单项式的运算法则吗？

一般地，**单项式与单项式相除，把系数和同底数的幂分别相除，所得的商作为商的因式，对于只在被除式中出现的字母，连同它的指数作为商的因式．**

例 4 计算：

(1) $36a^3b^4 \div 9a^2b$；　　(2) $-3x^2y^4m \div 12x^2y$.

解：(1) $36a^3b^4 \div 9a^2b$

$$= \frac{36}{9}a^{3-2}b^{4-1}$$

$$= 4ab^3;$$

(2) $-3x^2y^4m \div 12x^2y$

$$= -\frac{3}{12}x^{2-2}y^{4-1}m$$

$$= -\frac{1}{4}y^3m.$$

练习

计算：

(1) $6a^2b \div (-2ab)$；　　(2) $-10x^3y^3 \div 6xy^2$；

(3) $-21x^3y^4z \div (-7x^3y^3)$；　　(4) $-42a^7b^3 \div (-6a^2b^3)$.

3. 多项式除以单项式

怎样做多项式除以单项式的运算呢？我们能不能把多项式除以单项式转化为单项式除以单项式呢？

思考

交流

你能归纳出多项式除以单项式的运算法则吗？

可以发现，一般地，**多项式除以单项式，就是用这个单项式去除多项式的每一项，再把所得的商相加**.

例 5 计算：

(1) $(12x^3-18x^2+6x)\div(-6x)$；

(2) $(42a^3b^4+28a^2b^3-2ab^2)\div 7ab^2$.

要防止在运算中产生符号的错误！

解：(1) $(12x^3-18x^2+6x)\div(-6x)$

$=12x^3\div(-6x)-18x^2\div(-6x)+6x\div(-6x)$

$=-2x^2+3x-1$；

(2) $(42a^3b^4+28a^2b^3-2ab^2)\div 7ab^2$

$=42a^3b^4\div 7ab^2+28a^2b^3\div 7ab^2-2ab^2\div 7ab^2$

$=6a^2b^2+4ab-\dfrac{2}{7}$.

练习

计算：

(1) $(5a^2b-4ab)\div ab$；

(2) $(12x^2y-8xy)\div 8xy$；

(3) $(4mn^3-6m^3n^2)\div(-2mn^2)$；

(4) $(5x^3+10x^2+5x)\div 5x$.

习　题　6－5

★基础★

1. 计算：

(1) $x^{10} \div x^7$；　　(2) $x^2 \div x^6$；

(3) $(ab)^6 \div (ab)^3$；　　(4) $\left(-\frac{1}{3}a\right)^4 \div \left(-\frac{1}{3}a\right)$.

2. 计算：

(1) $(y^2)^8 \div y^8$；　　(2) $(x^3)^5 \div (x^2)^6$；

(3) $-a^9 \div (a^2)^3$；　　(4) $(x-y)^2 \div (x-y)^6$.

3. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 0.000 25；　　(2) −0.000 008 2；

(3) −34 650 000；　　(4) −0.000 564 7.

4. 一个电子的静止质量 m_e 约为 $5.485\,8 \times 10^{-4}$ 原子质量单位，用小数把它表示出来 .

5. 计算：

(1) $63x^3y^8 \div (-7x^2y^5)$；　　(2) $-12a^6b^3 \div \frac{1}{2}a^2b^2$；

(3) $-\frac{3}{4}x^3y^2m^4 \div \left(-\frac{5}{8}xy^2\right)$；　　(4) $\left(-\frac{2}{3}m^4n^2\right) \div \frac{1}{3}m^2n$.

6. 计算：

(1) $(8x^4 - 5x^3) \div (-2x^2)$；

(2) $(45a^3b^2 - 12a^2b^3) \div 3a^2b$；

(3) $(-28xy^3 + 77xy^2 - 84x) \div (-7x)$；

(4) $\left(-\frac{5}{12}xyz^2 - x^2yz + \frac{3}{4}xy^2z\right) \div \frac{1}{12}xyz$.

★★提升★★

1. 计算：

(1) $(x^2 \cdot x^3)^4 \div (x^3 \cdot x)^5$；　　(2) $x^2 \cdot x^4 - x^3 \cdot x^4 \div x$.

2. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^0$；　　(2) $0.5^{-2} \times (-0.5)^0 + (-0.5)^2 \times 0.5^{-1}$.

3. 计算：

(1) $5r^4c^3 \div (-5r^2c)^2$；　　(2) $45(x^2y^3z)^2 \div (-3x^4y^5z^2)$.

4. 计算：

(1) $[(2x+y)^2 - y(y+4x) - 8x] \div 2x$；

(2) $[(a+b)(a-b) - (a-b)^2 + 2b(a-b)] \div 4b$.

5. 雷达发出的微波以 3×10^5 千米 / 秒的速度射向飞机，飞机再将微波反射回来，经过 12.6 微秒后雷达收到反射微波．试问飞机与雷达之间的距离是多少千米．(1 微秒 $= 10^{-6}$ 秒)

6. 请按下列流程：$\boxed{n} \to \boxed{\text{平方}} \to \boxed{+n} \to \boxed{\div n} \to \boxed{-n} \to \boxed{\text{结果}}$，分别计算当 $n=3$，5，7，9 等数时的结果．你能发现什么规律？请说明理由．

★★★ 拓展 ★★★

1. 观察下列各式，你会发现什么规律？

$1 \times 3 + 1 = 4 = 2^2$；

$2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2$；

$3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2$；

……

请写出第 n 行式子（n 是正整数）．

2. 已知 a 是一个正数，比较 $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$，$\left(\frac{1}{a}\right)^0$，$\frac{1}{a}$ 的大小．

3. 已知：m，n 为正整数，$m+3^n$ 能被 11 整除．求证：$m+3^{n+5}$ 也能被 11 整除．

阅读理解

杨辉三角

在学习过两数和的完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 以后，不妨将公式从两个方面进行推广：一是从指数推广，研究 $(a+b)^3$，$(a+b)^4$，…，找出展开式的项、项数、次数和系数的规律；二是从项数推广，研究 $(a+b+c)^2$，$(a+b+c+d)^2$，…，找出展开式的项、项数、次数和系数的规律．

下面讨论第一方面的问题．

我们知道：

$$(a+b)^1=a+b\ ;$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\ ;$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\ ;$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\ ;$$

……

借助图 6－10 所示的系数表，请你观察分析并概括展开式中项的组成、项数、次数和系数的规律．

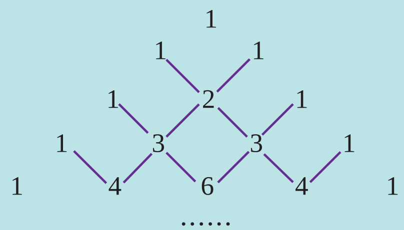


图 6－10

有了这样一个系数表，我们就能很容易地写出 $(a+b)^5$，$(a+b)^6$ 等展开式各项的系数，再研究项数与次数的规律，就不难写出各项了．

请同学们研究讨论展开式的项、项数与次数的规律，写出 $(a+b)^5$，$(a+b)^6$ 的展开式，并用多项式的乘法加以验证．

上面所列出的二项展开式的系数表，在我国宋朝数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》中就已经出现，人们称它为“杨辉三角”．西方人认为这个表是法国数学家帕斯卡 1654 年发现的，称它为“帕斯卡三角形”，它比杨辉的发现晚了近 400 年．实际上，在我国北宋数学家贾宪所著的《开方作法本源》中，已经出现了这个系数表，所以此表也称为“贾宪三角”，它比帕斯卡的发现早了近 600 年，这体现了中华民族古代灿烂的文化．

回顾与整理

知识要点

本章学习的主要内容是：整式的加减法运算和整式的乘除法运算，后者又包括幂的运算和乘法公式等．

1. 整式的加减法．

运用去括号法则，通过合并同类项进行整式的加减法运算．

2. 幂的运算．

(1) 同底数的幂相乘．

同底数的幂相乘，底数不变，指数相加．用式子表示为：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}(m, n \text{ 都是正整数}).$$

(2) 幂的乘方．

幂的乘方，底数不变，指数相乘．用式子表示为：

$$(a^m)^n = a^{mn}(m, n \text{ 都是正整数}).$$

(3) 积的乘方．

积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘．用式子表示为：

$$(ab)^n = a^n b^n(n \text{ 是正整数}).$$

(4) 同底数的幂相除．

同底数的幂相除，底数不变，指数相减．用式子表示为：

$$a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0, m, n \text{ 都是正整数}).$$

(5) 规定 $a^0 = 1(a \neq 0)$；$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$ $(a \neq 0, p \text{ 是正整数})$.

3. 整式的乘法．

(1) 单项式与单项式相乘．

单项式与单项式相乘，先把它们的系数相乘，再把相同字母的幂相乘所得的积，分别作为积的因式，并把只在一个单项式里出现的字母的幂也作为积的因式．

(2) 单项式与多项式相乘．

单项式与多项式相乘，就是用单项式分别乘多项式的每一项，

知识要点

再把所得的积相加．

(3) 多项式与多项式相乘．

多项式与多项式相乘，就是用其中一个多项式的每一项去乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加．

4. 乘法公式．

(1) 两数和(差)的完全平方公式．

两个数的和(差)的平方，等于它们的平方和，加上(减去)它们的积的 2 倍．用式子表示为：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

(2) 平方差公式．

两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差．用式子表示为：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

5. 整式的除法．

(1) 单项式除以单项式．

单项式除以单项式，把系数和同底数的幂分别相除，所得的商作为商的因式，对于只在被除式中出现的字母，则连同它的指数作为商的因式．

(2) 多项式除以单项式．

多项式除以单项式，用这个单项式去除多项式的每一项，再把所得的商相加．

学习指导

1. 学习整式的运算性质与法则，应注意运用类比的思想方法，通过与整数的运算性质和法则相比较，理解整式的运算性质和法则．

2. 在研究整式的运算性质和法则的过程中，多次运用了由具体到抽象，由特殊到一般的思维方法，体现了“特殊——一般—特殊”的认识规律．我们需要深刻地领会和体验这些方法与规律．

学习指导

3. 在本章对问题的探究过程中，经常运用“转化”的思想方法．比如多项式与多项式相乘，首先要转化为多项式乘单项式，再转化为单项式乘单项式，最后转化为有理数的运算和幂的运算．转化思想是解决数学问题的一种常用方法，需要认真掌握．

复习题

★基础★

1. 下面运算中，结果正确的是（　　）．

A. $a^2 \cdot a^4 = a^8$　　B. $x + x = 2x$

C. $(2xy)^3 = 6x^3y^3$　　D. $(-a^3)^4 = a^7$

2. 下面运算中，结果正确的是（　　）．

A. $2a^2 + 3a^2 = 5a^4$　　B. $(2a^2)^3 = 8a^5$

C. $2a^3(-a^2) = -2a^5$　　D. $6a^{2m} \div 2a^m = 3a^2$

3. 下面运算中，结果正确的是（　　）．

A. $(2a - 3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$　　B. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

C. $\left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ab + b^2$　　D. $(0.3a - 0.2b)^2 = \frac{9}{100}a^2 + \frac{3}{25}ab + \frac{1}{25}b^2$

4. 下面运算中，结果错误的是（　　）．

A. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$　　B. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

C. $a^3 \cdot b \cdot b = a^3b^2$　　D. $(a^2)^3 = a^6$

5. 计算：

(1) $(-x)^3 \cdot x^2 \cdot (-x)^4$；　　(2) $-(-a)^2 \cdot (-a)^7 \cdot (-a)^4$；

(3) $(-b)^4 \cdot (-b)^2 - (-b)^5 \cdot (-b)$；　　(4) $(-x)^7 \cdot (-x)^2 - (-x)^4 \cdot x^5$.

6. 计算：

(1) $-(a^4)^2 \cdot (a^2)^3$；　　(2) $(-a^3)^2 \cdot (-a^2)^3$；

(3) $(ab^2)^2 \cdot (-a^3b)^3 \cdot (-5ab)$；　　(4) $(ab)^3 \cdot 2a^2 \cdot (2a^2b^3)^2$.

7. 计算：

(1) $(2x^4)\cdot(3x^3)$；

(2) $(-5ab^2)\cdot(-2bd^2)$；

(3) $\left(-\frac{1}{4}ab^2\right)\cdot\left(-2a^3bc\right)$；

(4) $-\frac{3}{2}ab^3c\cdot\frac{1}{3}a^2bc\cdot\left(-8abc^4\right)$.

8. 计算：

(1) $3(a-2b+c)-4(2a+b-c)+5(3a+b-2c)$；

(2) $4\left(\frac{1}{2}a+1\right)-\frac{3}{2}(2a-1)+\frac{1}{6}(3a+2)$；

(3) $-\frac{3}{2}x(2-3x+4x^2-6x^4)$；

(4) $6xy^2\left(2-\frac{1}{3}xy^4\right)+\left(-\frac{1}{2}xy^3\right)^2$.

9. 计算：

(1) $(3x+4y)(2x-y)$；

(2) $(2x-7y)(2x+4y)$；

(3) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$；

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)$.

10. 计算：

(1) $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$；

(2) $\left(-0.3x+\frac{1}{2}y\right)^2$；

(3) $(2y+3x)(-3x-2y)$；

(4) $(3a-b+c)(3a+b-c)$.

11. 计算：

(1) $\left(a-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}+a\right)$；

(2) $(-xy+0.5)(-xy-0.5)$；

(3) $(x^n+1)(x^n-1)$；

(4) $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)$.

12. 计算：

(1) $(xy)^5\div(-xy)$；

(2) $(x^3)^2\cdot(x^4)^3\div(x^2)^4$；

(3) $(x^4)^3\div(x^3)^2\cdot(x^2)^4$；

(4) $(a^{x-1})^2\cdot a^{x+1}\div a^{2x-1}$.

13. 计算：

(1) $(-3ab^2)^3\div(-3ab^2)$；

(2) $48x^3y^6\div 8x^3y$；

(3) $(8a^2b-4ab^2)\div(-4ab)$；

(4) $(25m^4n^3+15m^3n^2-10m^2n)\div 5m^2n$.

★★提升★★

1. 解方程：

(1) $(2x+1)(x+5)=(x-2)(2x+5)$；

(2) $2(2y+1)^2-8(y+1)(y-1)=0$.

2. 解不等式：

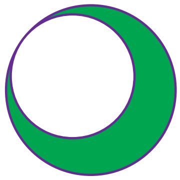
(1) $2(x-2)(x+3)>(2x-1)(x+5)$；

(2) $(3x+4)(3x-4)<9(x-2)(x+3)$.

3. 如图，大圆的直径为 a，大圆和小圆的直径之差为 d.

(1) 求小圆的直径与绿色部分的面积 S；

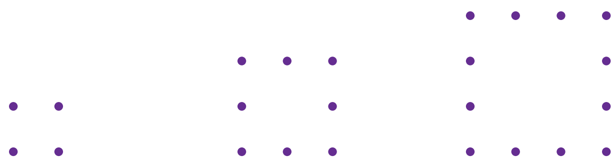
(2) 当 $a=5.12$ cm，$d=2.24$ cm，π 取 3.14 时，求绿色部分的面积 S（用计算器计算，结果精确到 1 cm^2）.



（第 3 题）

★★★ 拓展 ★★★

1. 如图，各正方形的图案中，每条边上有 n（$n\geqslant 2$）个圆点，每个图中圆点的总数是 S. 按此规律推测出 S 与 n 的关系式为 ________________ .



$n=2$，$S=4$　　$n=3$，$S=8$　　$n=4$，$S=12$

（第 1 题）

2. 当 x，y 为何值时，多项式 $x^2+y^2-4x+6y+28$ 有最小值？求出这个最小值 .

3. 有一个同学发现了一个有趣的数学规律：

$3^2=2+2^2+3$，$4^2=3+3^2+4$，$5^2=4+4^2+5$，$\cdots$.

即一个正整数的平方等于它前面一个相邻数加上这个相邻数的平方，再加上这个数本身的和 . 他试了许多数都对，但无法对所有的数都进行试验 . 请你用学过的数学知识和方法帮助他解决这个问题，并说明这是怎样的一个规律 .

4. 观察、归纳：

$(x-1)(x+1)=x^2-1$；

$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$；

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$；

……

写出一般的表达式，并计算 $1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63}$.

哥德巴赫猜想

命题 1

每一个大于 4 的偶数都可以表示为两个奇素数之和．

命题 2

每一个大于 7 的奇数都可以表示为三个奇素数之和．

第七章 观察、猜想与证明

你知道哥德巴赫猜想吗？这颗被人们誉为数学王冠上的“宝石”吸引了众多的数学爱好者．我国著名数学家陈景润为证明哥德巴赫猜想做出了突出的贡献．到目前为止，陈景润的结果仍是最佳结果．虽然现在的研究离攻克它看似只有一步之遥，但这一步却又是那么遥远……

猜想终究还是猜想，它在未经过理论上的论证之前，还不能和真理画上等号．

一 观察与实验

认识来源于实践，观察与实验是我们认识事物的重要方法．学习数学同样如此，通过观察与实验，我们可以发现许多规律．

7.1 观察

历史上的很多发明创造源于观察．例如鲁班观察丝茅草，发明了锯条；瓦特观察水烧开后水壶盖被水蒸气顶开，发明了蒸汽机……

瓦特塑像

蒸汽机

交流

1. 在一个晴朗的夜晚，如果你在野外迷失了方向，你有办法确定朝北的方向吗？结合图 7－1 加以说明．

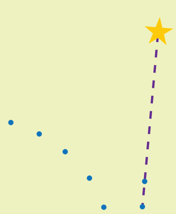


图 7－1

2. 在图 7－2 中，有一条直线 a，一条射线 b 和一条线段 c. 请观察它们的位置，并动脑筋思考一下，a，b，c 之间有没有交点 . 动手画一画，和你观察得出的结论进行比较 .

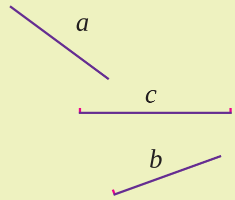


图 7－2

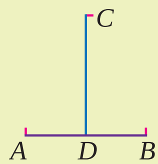


图 7－3

3. 在图 7－3 中，AB，CD 是两条线段 . 请观察 AB，CD 的长短一样吗？量一量，然后和你观察得出的结论进行比较 .

4. 如图 7－4，请观察，图中的 4 条红色线条是直的吗？动手画一画，并和你观察的结论进行比较 .

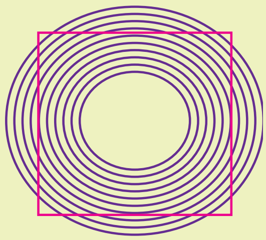


图 7－4

5. 在一个正方体模型的六个面上，分别标上数字 1，2，3，4，5，6. 图 7－5 是从三个不同方向看到的几个数字 . 观察图形中的数字特点，那么，“1”相对面上的数字是__________；“2”相对面上的数字是__________；“3”相对面上的数字是__________.

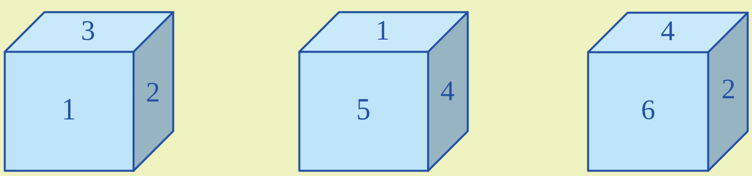


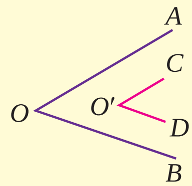
图 7－5

通过以上的问题，你认为只凭观察做出的判断可靠吗？

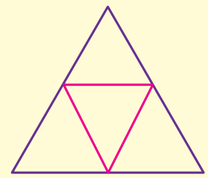
我们知道，观察是获得感性认识的重要途径，但观察得到的结果是否正确，还需要经过验证 . 正如恩格斯所说：“单凭观察所得的经验，是决不能充分证明必然性的 .”

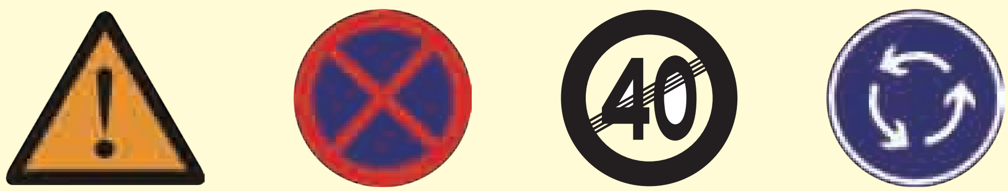
练习

1. 观察图中的 $\angle AOB$ 和 $\angle CO'D$，你认为哪一个角大？用量角器量一量，并和你观察得出的结论进行比较．
2. 观察图中有多少个三角形．
3. 观察下列交通标志，看看它们是否具有对称性．



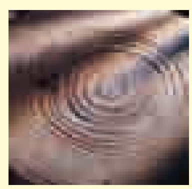
（第 1 题）


（第 2 题）



（第 3 题）

4. 观察树的年轮，你可以得到什么结论？


（第 4 题）

7.2 实验

实验是人们认识事物的一种有目的的探索过程，一般是为了检验某种猜想或理论而进行的操作或活动．

探索

1. 有 12 个乒乓球，它们的形状、大小和颜色都相同，其中有 11 个球的质量相等，有 1 个球略重一点．你能用最少的次数找出这个质量略重的乒乓球吗？可以用天平验证．

2. 用图 7－6 所示的两块形状、大小相同的三角尺，你能拼出多少个形状不同的三角形？能拼出多少个形状不同的四边形？

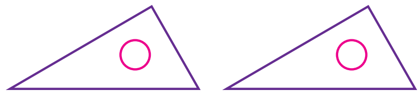
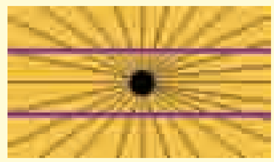


图 7－6

练习



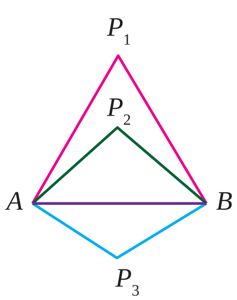
（第 1 题）

1. 图中的两条紫色的线条是平行的吗？
2. 画一条直线、一条射线和一条线段，使它们一共有三个交点．

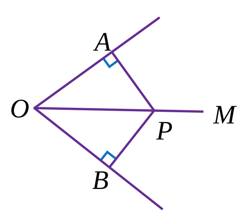
习　题　7－1

★基础★

1. 如图，AB 是一条线段，$P_1A=P_1B$，$P_2A=P_2B$，$P_3A=P_3B$，判断 P_1，P_2，P_3 三点的位置有什么特点．用直尺量量看．
2. 如图，OM 为 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 是射线 OM 上的一点，$PA\perp OA$ 于点 A，$PB\perp OB$ 于点 B，分别度量 PA，PB 的长度，并判断它们的数量关系；如果在射线 OM 上再取几个不同位置的点 P，然后向角的两边作垂线段，刚才的数量关系还存在吗？

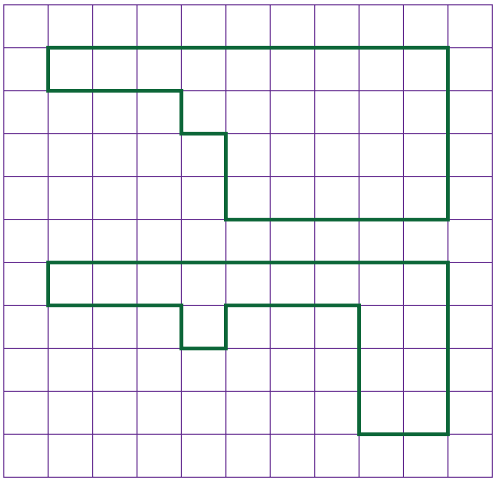


（第 1 题）

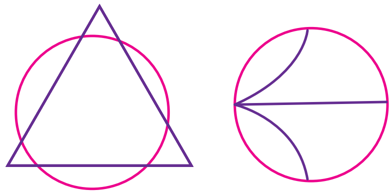


（第 2 题）

3. 观察下列网格中的图形，判断它们周长的大小 .



（第 3 题）



（1）　　（2）

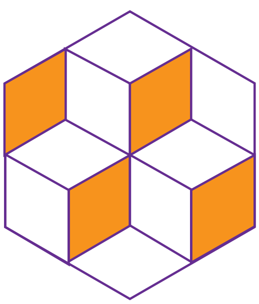
（第 4 题）

（第 5 题）

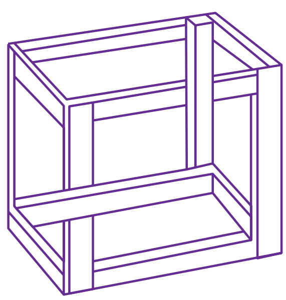
4. 观察给出的两个图形，你能分别用一笔画出来吗？试试看 .（每部分既不能重复，也不能遗漏）
5. 用剪刀把长方形纸片剪成两部分，使剪得的两部分恰能拼接成一个三角形，并画出拼接后的示意图 .

★★提升★★

1. 图中可以观察到的正方体共有多少个？说说你是怎样观察的 .



（第 1 题）

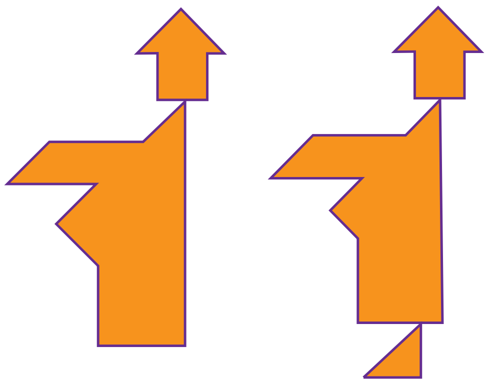


（第 2 题）

2. 观察这个立体图，你能发现图中有什么错误吗？
3. 手拿一枚硬币，向上抛出若干次（比如 50 次），统计一下硬币落地后正面朝上的次数 . 计算它占抛出总次数的百分比是多少 .

★★★拓展★★★

小明和小白分别用七巧板拼出一个人的形状，但是小明发现他拼出的人形少了一只脚，脚跑到哪里去了？拼拼看 .



二、归纳与类比

归纳、类比是寻求规律与结论的两个重要的方法 .

7.3 归纳

交流

1. 已知：如图 7－7(1)，在线段 AB 上取 1 个点 C，图中共有________条线段；如图 7－7(2)，在线段 AB 上取 2 个点 C，D，图中共有________条线段；如图 7－7(3)，在线段 AB 上取 3 个点 C，D，E，图中共有________条线段（均包括线段 AB 在内）. 如果在线段 AB 上取 9 个点，那么共有多少条线段？你能算得出来吗？如果在 AB 上取 99 个点呢？

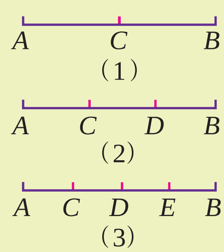


图 7－7

2. 我们曾学过三角形的3个内角的和等于180°. 观察图7－8，我们看到四边形可以被分成2个三角形，那么四边形4个内角的和等于多少度？五边形可以被分成3个三角形，那么五边形5个内角的和等于多少度？

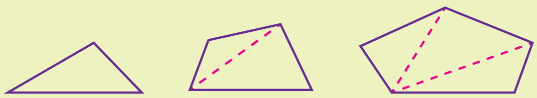


图7－8

你能归纳出六边形6个内角的和等于多少度吗？ n 边形呢？

下面我们把同学们得出的结论归纳、整理如下：

1. 设在线段 AB 上取1个点时，得到线段的总数为 S_1；取2个点时，得到线段的总数为 S_2；取3个点时，得到线段的总数为 S_3……那么 $S_1=3$，$S_2=6$，$S_3=10$，⋯.

我们把3，6，10分解成几个正整数的和，得

$$S_1=3=1+2,$$
$$S_2=6=1+2+3,$$
$$S_3=10=1+2+3+4.$$

我们发现得到的线段总数可以分解成若干个正整数的和，其中：

(1) 第一个加数是1；

(2) 各个加数都是连续的整数；

(3) 最后一个加数比所取点的个数多1.

于是

$$S_9=1+2+3+\cdots+8+9+10=55,$$
$$S_{99}=1+2+3+\cdots+99+100=5\ 050.$$

2. 三角形的内角和等于180°，即 $180°=(3-2)\times180°$；

四边形的内角和等于360°，即 $360°=(4-2)\times180°$；

五边形的内角和等于540°，即 $540°=(5-2)\times180°$.

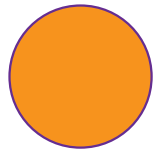
我们发现它们的内角和分别等于边数与2的差再乘180°，因此，六边形的内角和 $=(6-2)\times180°=720°$，n 边形的内角和 $=(n-2)\times180°$.

以上规律是从几个特殊的情况中归纳出来的，我们可以根据这个规律去解

决类似的问题．这种根据一些（但不是全部）特殊情况归纳出一般性的结论的方法，叫做不完全归纳法．

探索

一张薄圆饼，如果不许把饼折叠，只能用刀去切这张圆饼，请同学们共同探讨以下几个问题：



1. 切一刀，最多可以切成____________块；
2. 切两刀，最多可以切成____________块；
3. 切三刀，最多可以切成____________块．

把得出的结果分解成若干个正整数的和，你能归纳出什么规律？

照此规律回答：如果切十刀，那么最多可以切成多少块？

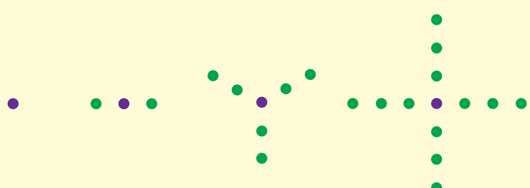
练习

1. 一串有趣的图案按一定规律排列，请仔细观察，按此规律画出的第 10 个图案是__________；在前 16 个图案中有__________个“”，第 2012 个图案是__________．

 ……

（第 1 题）

2. 李祥用棋子摆出了四个不同的图案（如图）．请你仔细观察其中的规律，然后画出按此规律排列的第五个图案，看一看第五个图案中一共有多少个棋子．你能归纳出一个一般性的结论吗？
3. 探究 2^n 的结果的个位数字的规律，并说出 $2^{1\,000}$ 的个位数字（n 是正整数）．



（第 2 题）

交流

利用不完全归纳法得到的结论都是正确的吗?

下面的问题也许会给我们一些启示:

刘丽同学在第一次、第二次、第三次、第四次能力检测中都得了第一名. 同学们说:“下一次能力检测的第一名非她莫属.”你认为这种判断可靠吗?

关于不完全归纳法的可靠性问题，有人请教大数学家欧拉，他举出了下面的例子:

对于代数式 a^2+a+41，把其中的 a 分别用一些自然数代入:

当 $a=0$ 时，$a^2+a+41=41$;

当 $a=1$ 时，$a^2+a+41=43$;

当 $a=2$ 时，$a^2+a+41=47$;

当 $a=3$ 时，$a^2+a+41=53$.

人们发现 41，43，47，53 都是质数.

继续往下算，一直计算到:

当 $a=38$ 时，$a^2+a+41=1\,523$;

当 $a=39$ 时，$a^2+a+41=1\,601$.

由以上 40 次实验得到的值都是质数，这时有人就断定无论 a 取什么自然数，代数式 a^2+a+41 的值都是质数.

恰恰当 $a=40$ 时，
$$\begin{aligned}a^2+a+41&=40^2+40+41\\&=40(40+1)+41\\&=41\times41\\&=41^2.\end{aligned}$$

当 $a=40$ 时，a^2+a+41 的值不是一个质数，而是一个合数. 因此，上面用不完全归纳法得出的结论是错误的.

运用不完全归纳法可以由一些特殊性的前提，得出一般性的结论，帮助我们认识和发现事物的规律，在数学的学习过程中起着重要的作用. 但同时我们也要注意它的局限性，因为借助不完全归纳法得到的结论有时可能是不正确的.

7.4 类比

在 7.3 节我们研究了这样一个问题：在一条线段上取若干个点，然后数线段的条数．我们运用不完全归纳法发现了其中的规律．

现在我们要研究另外一个问题：在一个角的内部，从顶点引出若干条射线，求图中共有多少个小于平角的角．

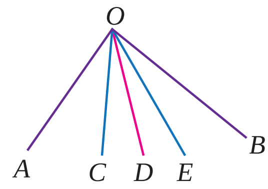


图 7－9

通过比较我们发现，这两个问题有类似之处，于是我们仿照数线段的方法去处理数角的问题，就能较快地找到思路．

对照图 7－9，请你计算图中小于平角的角的个数：

$S_1 =$ ______________________________；

$S_2 =$ ______________________________；

$S_3 =$ ______________________________；

……

那么　$S_9 =$ ______________________________；

$S_{99} =$ ______________________________．

处理这类问题时运用了类比的方法．

通过对两个或两类研究对象进行比较，找出它们之间某些属性的相同点或相似点，以此为依据，推测它们的其他属性也可能有相同或相似的结论，这种推理方法称为类比．科学上不少重要的假设，都是通过类比提出来的；数学上不少重要的发现，也是由类比提供的线索．牛顿曾把地球上物体的运动，特别是自由落体运动与天体运动进行类比，提出了万有引力定律．德国著名的物理学家开普勒曾说："我珍惜类比胜于任何别的东西，它是我最可信赖的老师，它能揭示自然界的秘密，在几何学中它应该是最不容忽视的．"

交流

小明在学习解不等式时，类比解方程的方法解不等式 $\frac{-2x+4}{-3}>0$，

他的做法对吗？给你带来了什么启示？

解方程：$\dfrac{-2x+4}{-3}=0$.

去分母得 $-2x+4=0$.

移项得 $-2x=-4$.

系数化 1 得 $x=2$.

解不等式：$\dfrac{-2x+4}{-3}>0$.

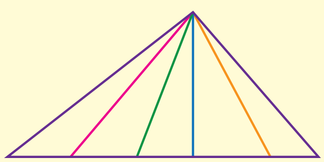
去分母得 $-2x+4>0$.

移项得 $-2x>-4$.

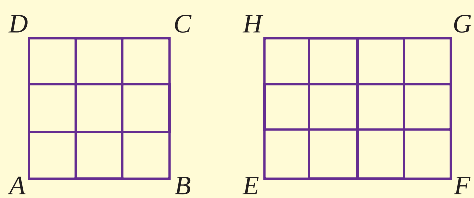
系数化 1 得 $x>2$.

练习

1. 如图，在一个三角形的一条边上取四个点，把这些点与这条边所对的顶点连接起来．问图中共有多少个三角形．请你通过与数线段或数角的问题进行类比来思考．
2. 柳青同学通过学习已经知道：在如图所示的正方形 $ABCD$ 中，如果各边都被三等分，那么图中正方形的总数为 $3\times3+2\times2+1\times1=14$. 于是，他把这种计算方法类比到图中长方形 $EFGH$ 中，已知该长方形各边上最短的线段分别相等，于是得出图中正方形的总数为 $3\times4+2\times3+1\times2=20$. 你认为他得出的结论正确吗？



（第 1 题）



（第 2 题）

习　题　7－2

★基础★

1. 能被 3 整除的数有什么特点呢？先观察下面一组数：

21——由于 $2+1=3$，3 能被 3 整除，所以 21 也能被 3 整除；

504——由于 $5+0+4=9$，9 能被 3 整除，所以 504 也能被 3 整除；

3 762——由于 $3+7+6+2=18$，18 能被 3 整除，所以 3 762 也能被 3 整除 .

请你按照上述方法判断 21 534 768 能否被 3 整除 .

2. 从下面的关系中归纳出规律，然后进行计算：

$$1\times 3=3，而 3=2^2-1；$$
$$3\times 5=15，而 15=4^2-1；$$
$$5\times 7=35，而 35=6^2-1；$$
……

将你归纳出的规律用只含一个字母的式子表示出来，第 n 行式子是：______________（n 是正整数），并按此规律计算：$19\times 21=$ ________________.

★★ 提升 ★★

1. 观察下面三个等式：

$$7^2=49；$$
$$67^2=4\ 489；$$
$$667^2=444\ 889.$$

依据你归纳出来的规律回答：$6\ 667^2=$ ________________.

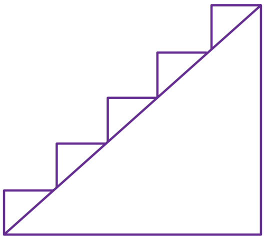
用计算器验算结果的正确性 .

2. 刘虹用类比的方法，将解方程的方法运用到解不等式中 . 你认为她解不等式的方法正确吗？为什么？

解关于 x 的方程：$ax=b(a\neq 0)$.	解关于 x 的不等式：$ax<b(a\neq 0)$.
解：$ax=b$.	解：$ax<b$.
$\because\ a\neq 0$,	$\because\ a\neq 0$,
$\therefore\ x=\dfrac{b}{a}$.	$\therefore\ x<\dfrac{b}{a}$.

★★★ 拓展 ★★★

如图，一段楼梯共有五个台阶 . 现在规定：上楼时，每次只能迈一个台阶或两个台阶 . 问从楼梯底部到楼梯顶部一共有多少种不同的迈法？试用不完全归纳的方法进行探求 .



三 猜想与证明

7.5 猜想

科学家牛顿曾经说过:“没有大胆的猜想就做不出伟大的发现.”

我们借助于以往的经验或直觉思维,对某一命题做出猜测,这便是猜想.其中最有代表性的猜想便是章前页提到的哥德巴赫猜想.

1742年,德国数学家哥德巴赫在给大数学家欧拉的一封信中,提出了把一个整数表示成奇素数之和的猜测,这就是著名的“哥德巴赫猜想”.

每一个大于4的偶数都可以表示为两个奇素数之和,如$6=3+3$,$8=3+5$,$14=3+11=7+7$,….

每一个大于7的奇数都可以表示为三个奇素数之和,如$9=3+3+3$,$11=3+3+5$,….

尽管这只是一种猜想,但屡经检验都没有被推翻.有人甚至对3.3×10^7以下的每一个大于4的偶数一一进行检验,都表明它是正确的,随着计算机技术的发展,数学家们发现哥德巴赫猜想对于更大的数依然成立.但是自然数是无限的,检验还不能代替证明.200多年来,众多的数学家为解决这一猜想付出了艰辛的劳动,但迄今为止,这一猜想尚未得到彻底的解决.

通过观察、实验、归纳、类比可以得出猜想,这是认识事物的有效途径之一.

交流

用两根长度都是12厘米的细铁丝,分别围成一个正方形和一个圆(图7-10).猜想:这两个图形的面积哪一个大?并进行验证.

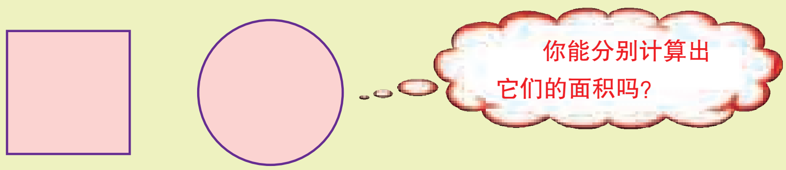
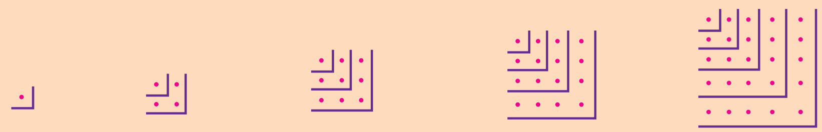


图7-10

思考

观察下面的点阵图和相应的等式，做出猜想：



$n=1$，　$n=2$，　$n=3$，　$n=4$，　$n=5$，

$1=1^2$；　$1+3=2^2$；　$1+3+5=3^2$；　$1+3+5+7=4^2$；　______________；

第 n 个点阵图相对应的等式是____________________．

练习

1. 天安门广场的面积约为 4.4×10^5 平方米．估计一下，它的百万分之一大约相当于(　　)．

   A. 教室地面的面积　　　　B. 黑板的面积

   C. 课桌面的面积　　　　　D. 铅笔盒盖的面积

2. 观察下列等式，然后做出猜想，它的第 n 个等式怎样表示(n 是自然数)．

   $9\times0+1=1$；　　$9\times1+2=11$；

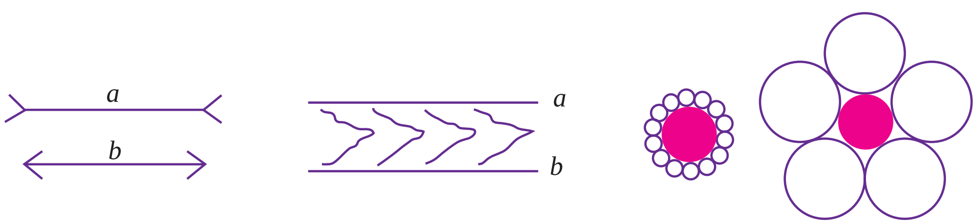
   $9\times2+3=21$；　　$9\times3+4=31$；

   $9\times4+5=41$；　　……

7.6 证明

用观察、实验、归纳、类比、猜想等方法，可以发现很多规律，但是，有时也可能出现一些偏差．

请你先仔细观看图 7－11 中的三个图，然后和同学一起讨论下面的问题．



(1)　　(2)　　(3)

图 7－11

交流

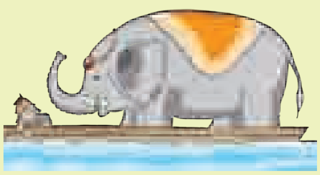
1. 图 7－11(1) 中，a，b 两条线段哪一条长一些？
2. 图 7－11(2) 中，a，b 两条线段之间哪一端宽一些？
3. 图 7－11(3) 中，两个红色的圆哪一个大一些？

通过观察、实验、归纳、类比、猜想得出的结论还需要通过证明来确认它的正确性.

1. 生活中的说理

交流

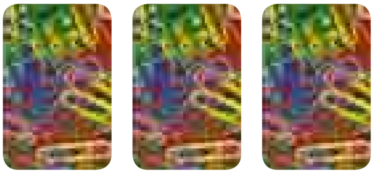
同学们还记得“曹冲称象”的故事吗？叙述一下这个故事，并回答下面的问题：为什么石头的质量可以表示大象的质量？这里用到了一个大家公认的事实——等量代换.



探索

请同学们用扑克牌做一个推理的游戏：桌面上有三张扑克牌，排成一排，已知：

“至少”的含义是什么？



(1) K右边的两张牌中至少有一张是A;

(2) A 左边的两张牌中也有一张是 A;

(3) 黑桃左边的两张牌中至少有一张是梅花;

(4) 梅花右边的两张牌中也有一张是梅花.

你能判断出这三张扑克牌各是什么吗？

练习

1. 甲、乙、丙、丁四个人共有三个姓. 甲说:“我和你们三人都不同姓.” 乙说:“我

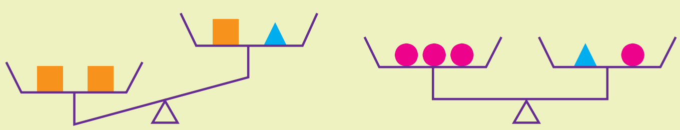
和丙、丁也不同姓.”那么，甲、乙、丙、丁四个人中，哪两个人同姓呢？你是怎样推断的？

2. 从前有一个国王，他企图谋杀一个大臣．国王对这个大臣说：“我已经写好了两个阄，一个写有‘杀’字，另一个写有‘赦’字.你从里面抓一个，抓到哪一个，我就按上面的方法处置你.”这位聪明的大臣已事先得知两个阄上写的都是“杀”字，无论他抓到哪一个，都逃脱不了死亡的命运，但这位大臣动用逻辑的方法想出了一个好主意，从而免去了杀身之祸．你知道这位大臣想出的是什么主意吗？他这样做的依据是什么？

2. 数学中的说理

交流

设●、▲、■分别表示三种不同的物体．现用天平称了两次，结果如图 7－12 所示．请你根据天平显示的情况判断这三种物体中，哪种物体最重，并说明理由．



（1）　　（2）

图 7－12

例 1 请在括号内填写解方程的根据．

$3x-2=x+4.$

$3x-x=4+2$　（　　　　　　）.

$2x=6$　（　　　　　　）.

$x=3$　（　　　　　　）.

解： $3x-2=x+4.$

$3x-x=4+2$　（等式的基本性质 1）.

$2x=6$　（逆用乘法对加法的分配律）.

$x=3$　（等式的基本性质 2）.

例 2 已知：如图 7－13，C，D 是线段 AB 上的两个点，且 $AC=BD$，试判断：AD 等于 BC 吗？为什么？

解： $AD=BC$.

因为　$AC=BD$　（已知），

　　　$CD=CD$　（已知），

所以　$AC+CD=BD+CD$　（等式的基本性质 1）.

即　　$AD=BC$.

图 7－13

你还能用其他方法说明 AD 与 BC 相等吗？

3. 定义、命题、基本事实、定理

在数学中，进行运算或判断时都离不开推理．推理时经常要用到定义、命题、基本事实、定理等作为推理的依据，并用规范、简明的数学语言进行表达．下面先学习四个有关的概念．

（1）定义：对一个名词或术语的意义的说明叫做**定义**．

比如，含有未知数的等式叫做方程，就是方程的定义；

又如，直线上一点和它一旁的部分叫做射线，就是射线的定义．

（2）命题：判断某一件事情的语句叫做**命题**．

例如：“两条直线相交，有且只有一个交点”，“两个奇数的和是偶数”都是命题．

命题由题设和结论两部分组成．题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项．命题常可以写成“如果……，那么……”的形式，“如果”后面接的部分是题设，“那么”后面接的部分是结论．

例如：“两条直线相交，有且只有一个交点”，可以写成“如果两条直线相交，那么它们有且只有一个交点”．其中“两条直线相交”是题设，“有且只有一个交点”是结论．

上面所举出的两个命题都是正确的，也就是说，如果题设成立，那么结论一定成立，像这样的命题，称之为“真命题”．

还有一些命题，题设成立时，结论不一定成立．例如：“两个锐角的和是钝角”，“有理数的绝对值是正数”，它们都是不正确的命题，称之为“假命题”．假命题可以通过举反例加以说明．例如利用“0 的绝对值是 0，而不是正数”，来说明“有理数的绝对值是正数”是一个假命题．

命题的题设和结论可以互换．例如：“如果 $x=1$，那么 $x^2=1$”，交换题设和结论后为“如果 $x^2=1$，那么 $x=1$”．这两个命题称为互逆命题，其中一个叫做“原命题”，另一个叫做原命题的“逆命题”．原命题成立，逆命题不一定成立．

(3) 基本事实 .

人们在长期实践中获得的一些真命题，可以直接作为推理依据的事实。如我们已经知道的“两点确定一条直线”，“两点之间线段最短”，“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”，它们都是基本事实 .

在实际中还常用到一些事实：

① 等量加等量，和相等 . 即：

如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$.

② 等量减等量，差相等 . 即：

如果 $a=b$，那么 $a-c=b-c$.

③ 等量的同倍量相等 . 即：

如果 $a=b$，那么 $ac=bc$.

④ 等量的同分量相等 . 即：

如果 $a=b$，且 $c\neq 0$，那么 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$.

⑤ 等量代换 . 即：

如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$.

(4) 定理：用逻辑的方法判断为正确，并作为推理依据的真命题叫做**定理** .

例 3 已知：如图 7－14，BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线，$\angle 1=\angle C$.

求证：$\angle 2=\angle C$.

注意∠1、∠2 与∠C 的关系 .

证明： $\because$ BE 是 $\angle ABC$ 的平分线 （已知），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$ （角平分线的定义）.

$\because$ $\angle 1=\angle C$ （已知），

$\therefore$ $\angle 2=\angle C$ （等量代换）.

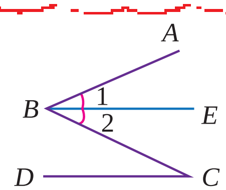


图 7－14

例 4 已知：如图 7－15，$\angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 1+\angle 3=90°$. 试判断 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的关系 .

解： $\because$ $\angle 1+\angle 2=90°$ （已知），

$\therefore$ $\angle 2=90°-\angle 1$ （等量减等量，差相等）.

$\because$ $\angle 1+\angle 3=90°$ （已知），

$\therefore$ $\angle 3=90°-\angle 1$ （等量减等量，差相等）.

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$ （等量代换）.

即 $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 相等 .

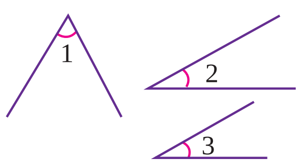
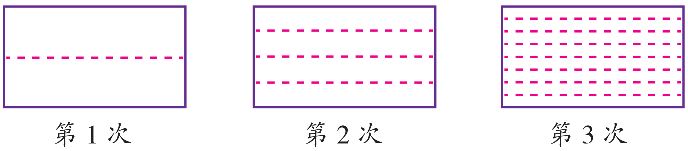


图 7－15

习　题　7－3

★基础★

1. 假期中小明和父母一起到甲、乙两个城市旅游，小明发现两个城市中使用的人民币的新旧程度不同：在甲城市中，面值 10 元、50 元和 100 元的三种人民币的新旧程度基本相同；在乙城市中，面值 10 元的人民币比较旧，而面值 50 元和 100 元的人民币比较新 . 你能通过这些信息判断两个城市的发展水平哪个更高吗？
2. 一张长方形的纸对折后出现一条折痕（如图）；继续对折出现三条折痕；再继续对折，出现七条折痕……那么，当对折四次后，一共出现多少条折痕？猜猜看 .



（第 2 题）

3. 如图所示的大小相同的两个长方形中，各有若干个三角形，设第一个长方形中绿色部分的面积为 m，第二个长方形中绿色部分的面积为 n，试判断 m，n 的大小关系 .

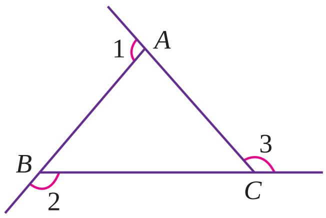
（第 3 题）

4. 指出下列命题的题设和结论，并判断它们是真命题还是假命题，如果是假命题，请举出一个反例 .
   (1) 三条边都相等的三角形是等边三角形；
   (2) 一个负数与一个正数的和是负数；
   (3) 平角的度数是 180°.
5. 判断命题 $|a| = a$ 的真假 .

★★提升★★

1. 已知正数 a 比它的倒数小，那么 a 的取值范围是________.
2. 试判断三个连续奇数的和是哪一个正整数的倍数，为什么？
3. 甲、乙、丙三人中一个是教师，一个是护士，一个是工人 . 现在只知道丙比工人年龄大，甲和护士不同岁，护士比乙年龄小 . 请你猜猜他们当中谁是教师，并说明理由 .

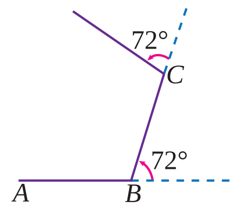
4. 我们知道，三角形的内角和为 180°，四边形的内角和为 360°，五边形的内角和为 540°……它们的内角和随着边数的增加而增加．图中的∠1，∠2，∠3 叫做三角形 *ABC* 的外角．猜想：当多边形的边数增加时，它们的外角的和有无变化？



（第 4 题）

★★★ 拓展 ★★★

如图，某人从 *A* 处出发，向东走 10 米到达 *B* 处，再向左转 72° 走 10 米到达 *C* 处……照此方法行走，拐过 4 次弯后再走 10 米，他在何处？



四 简单几何图形中的推理

7.7 几种简单几何图形及其推理

1. 余角、补角

如果两个角的和等于 90°，那么称这两个角互为**余角**．

如图 7－16，在三角尺中，$\angle A = 30°$，$\angle B = 60°$，有 $\angle A + \angle B = 90°$，那么称 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互为余角．

类似的，如果两个角的和等于 180°，那么称这两个角互为**补角**．

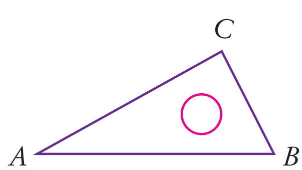


图 7－16

由第 125 页的例 4，不难总结出：

同角（或等角）的余角相等．

类似的，还可以总结出：

同角（或等角）的补角相等．

交流

1. 如图 7－17，$OC \perp AB$ 于点 O，$\angle 1 = \angle 2$，问：图中共有多少对互为余角的角？

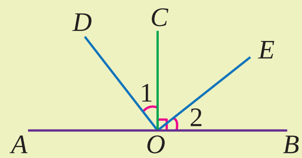


图 7－17

注意互为余角的两个角只和这两个角的度数有关，与这两个角的位置无关．

2. 如图 7－18，O 是直线 AB 上一点，$\angle 1 = \angle 2$．问：图中共有多少对互为补角的角？

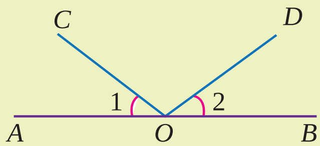


图 7－18

注意 $\angle 1 = \angle 2$ 这一条件！

2. 对顶角

如果两个角有共同的顶点，并且其中一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，那么称这两个角互为**对顶角**．

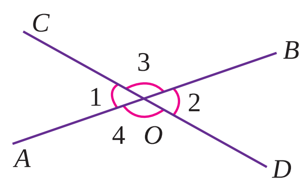


图 7－19

如图 7－19，直线 AB，CD 相交于点 O，我们称 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 为对顶角，$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 也是对顶角．

实践

已知：如图 7－20，直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle 1 = 65°$，你能求出 $\angle 2$ 的度数吗？改变 $\angle 1$ 的度数再试一试．你从中发现了什么规律？

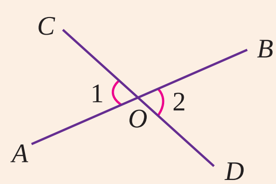


图 7－20

已知：如图 7－20，直线 AB，CD 相交于点 O．

求证：$\angle 1 = \angle 2$．

证明： $\because$ AOB 是直线，

$\therefore$ $\angle 1 + \angle COB = 180°$．

$\because$ COD 是直线，

$\therefore$ $\angle 2+\angle COB=180°$.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$ （同角的补角相等）.

由此得到对顶角的性质：

对顶角相等．

例 如图 7－21，直线 AB，CD 相交于点 O，$OE\perp AB$ 于点 O，$\angle COE=55°$，求 $\angle BOD$ 的度数．

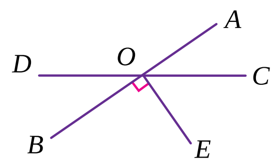


图 7－21

解： $\because$ $OE\perp AB$ 于点 O （已知），

$\therefore$ $\angle AOE=90°$ （垂直定义）.

$\because$ $\angle COE=55°$ （已知），

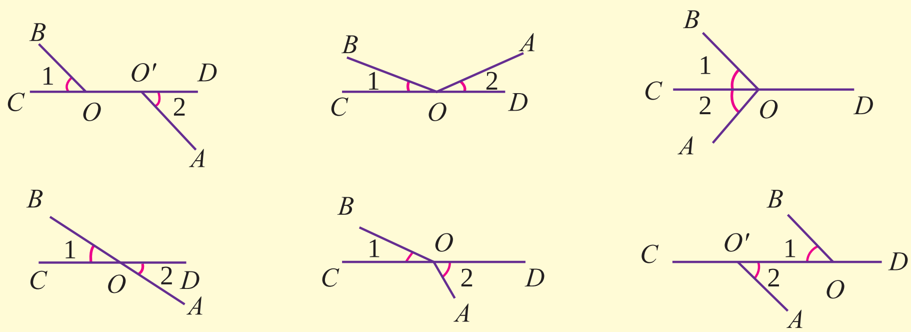
$\therefore$ $\angle AOC=\angle AOE-\angle COE=90°-55°=35°$.

$\because$ 直线 AB，CD 相交于点 O （已知），

$\therefore$ $\angle BOD=\angle AOC=35°$ （对顶角相等）.

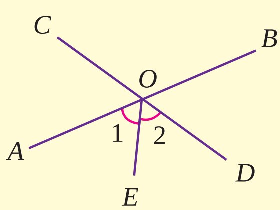
练习

1. 下面的图中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角吗？



（第 1 题）

2. 如图，AB，CD 相交于点 O，OE 是 $\angle AOD$ 的角平分线，又 $\angle COB=120°$，求 $\angle 1$ 的度数．



（第 2 题）

3. 平行线

我们在第三章中曾学过“在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线”，平行线应用很广泛．怎样准确地作平行线呢？可以利用三角尺与直尺，照图 7－22 的方法去做．

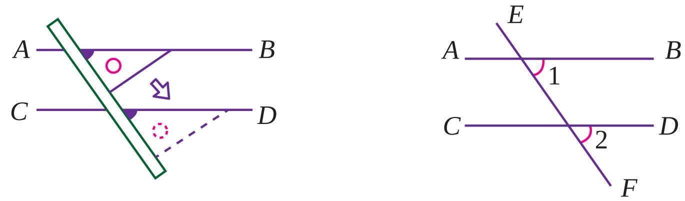


图 7－22

第一步：作直线 AB，并用三角尺的一条边贴住直线 AB；

第二步：用直尺紧靠三角尺的另一条边；

第三步：沿直尺下移三角尺；

第四步：沿三角尺的边作出直线 CD.

这样，就得到 $AB \parallel CD$.

实践

请你动手作一条直线 AB，在直线 AB 外作一点 C，然后过点 C 作 AB 的平行线，你能作出几条？

通过作图，可以发现：

基本事实　过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行．

你能说出∠1 与∠2 的位置特点吗？

按上述方法作平行线的根据是什么呢？请你猜想它和图 7－22 中的∠1＝∠2 是否有关．

两条直线 AB，CD 被直线 EF 所截，得到八个角（图 7－23）．其中∠1 与∠2，∠3 与∠4，∠5 与∠6，∠7 与∠8 分别叫做**同位角**；∠3 与∠8，∠1 与∠6 分别叫做**内错角**；∠1 与∠8，∠3 与∠6 分别叫做**同旁内角**．

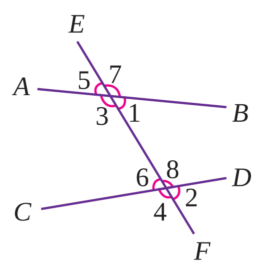
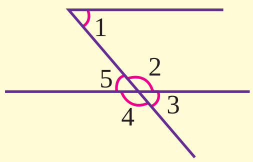


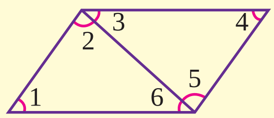
图 7－23

练习

1. 指出图中的同位角、内错角和同旁内角 .
2. 指出图中的内错角 .



（第 1 题）



（第 2 题）

下面我们利用计算机演示当“三线八角”满足什么条件时，$AB \parallel CD$.

用计算机画出图 7－24，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，EF 与 AB，CD 的交点分别为点 M，N. 分别显示八个角的测量值，然后让直线 AB 绕点 M 旋转，各个角的测量值就会发生变化 . 观察图形的变化，当这八个角的测量值具有哪些关系时，AB 与 CD 平行？

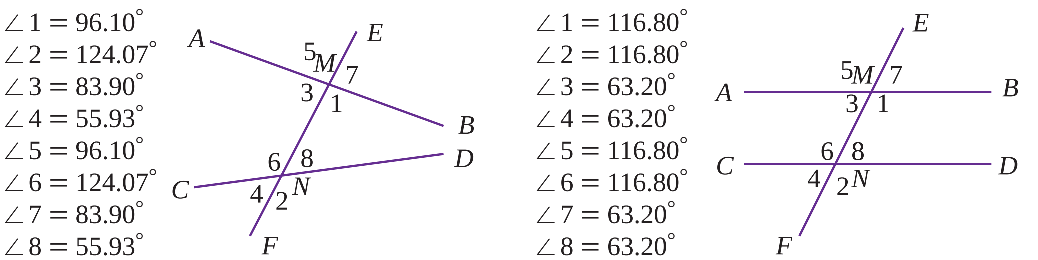


图 7－24

通过以上的计算机演示，我们发现，当 $\angle 1 = \angle 2$ 或 $\angle 3 = \angle 4$ 或 $\angle 5 = \angle 6$ 或 $\angle 7 = \angle 8$ 时，直线 AB 与 CD 平行 . 用推三角尺作平行线的方法就是依据这个道理 . 人们在长期实践中总结出判定两条直线平行的方法：

基本事实　两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行（简记为：**同位角相等，两直线平行**）.

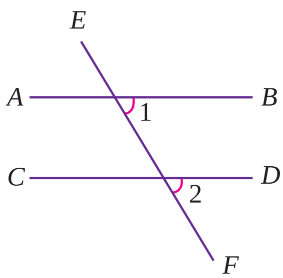


图 7－25

如图 7－25，用符号语言表示：

$\because \quad \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \quad AB \parallel CD$.

思考

如图 7－26，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，当内错角 $\angle 1=\angle 3$ 时，你能推出 $AB \parallel CD$ 吗？

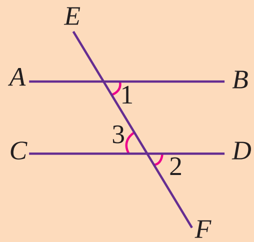


图 7－26

我们看到，$\because$ $\angle 2=\angle 3$（对顶角相等），

且 $\angle 1=\angle 3$（已知），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

这样由上面的基本事实不难推出 $AB \parallel CD$.

由此得到：

判定定理　两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行（简记为：**内错角相等，两直线平行**）.

如图 7－26，用符号语言表示：

$\because$ $\angle 1=\angle 3$，

$\therefore$ $AB \parallel CD$.

类似的，还可以推出：

判定定理　两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行（简记为：**同旁内角互补，两直线平行**）.

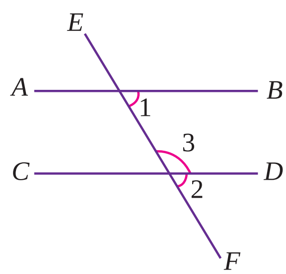


图 7－27

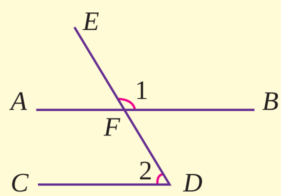
如图 7－27，用符号语言表示：

$\because$ $\angle 1+\angle 3=180°$，

$\therefore$ $AB \parallel CD$.

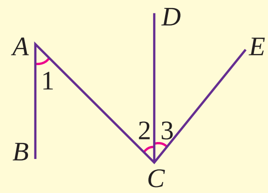
练习

1. 已知：如图，直线 AB，CD 被直线 ED 所截，$\angle 1=130°$，$\angle 2=50°$. 求证：$AB \parallel CD$.（请用三种方法证明）



（第 1 题）

2. 已知：如图，$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 3$. 求证：$AB \parallel CD$.



（第 2 题）

平行线有什么性质呢？

实践

下面请同学们做一个实验：

每人在练习本上作两条平行线 AB，CD，再任意作一条直线 EF，使它和 AB，CD 分别相交，然后用量角器分别度量其中任意一组同位角，看看它们的度数之间有什么关系 .

已知：如图 7－28，直线 AB，CD 被 EF 所截，$AB \parallel CD$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

在此采用一种特殊的方法：假设 $\angle 1 \neq \angle 2$，过点 O 作直线 $A'B'$，使 $\angle EOB'=\angle 2$. 根据“同位角相等，两直线平行”，可得 $A'B' \parallel CD$. 这样，过点 O 就有两条直线 AB，$A'B'$ 平行于 CD，这与“过直线外一点有且仅有一条直线与这条直线平行”矛盾，说明 $\angle 1 \neq \angle 2$ 的假设是不对的，于是有 $\angle 1=\angle 2$. 我们称这种方法为**反证法** .

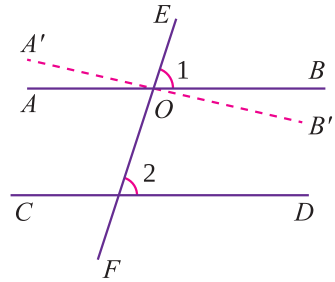


图 7－28

于是得到平行线的性质：

性质定理　两条平行线被第三条直线所截，得到的同位角相等（简记为：**两直线平行，同位角相等**）.

如图 7－29，用符号语言表示：

$\because$　$AB \parallel CD$，

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$.

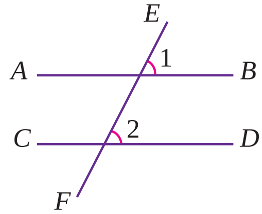


图 7－29

思考

如图 7－30，直线 $AB \parallel CD$，它们被直线 EF 所截．不经过度量，你能推出内错角 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 之间有什么关系吗？

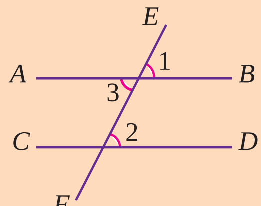


图 7－30

不难推出，因为 $AB \parallel CD$，由“两直线平行，同位角相等”得 $\angle 1 = \angle 2$，又因为 $\angle 1 = \angle 3$，所以 $\angle 2 = \angle 3$.

由此得到平行线的另一个性质：

性质定理　两条平行线被第三条直线所截，得到的内错角相等（简记为：**两直线平行，内错角相等**）.

如图 7－30，用符号语言表示为：

$\because$　$AB \parallel CD$，

$\therefore$　$\angle 2 = \angle 3$.

思考

如图 7－31，直线 $AB \parallel CD$，它们被直线 EF 所截，那么同旁内角 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 之间有什么关系？

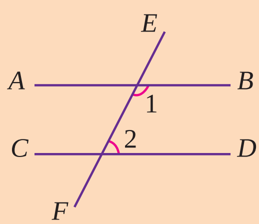


图 7－31

不难发现：

性质定理　两条平行线被第三条直线所截，得到的同旁内角互补（简记为：**两直线平行，同旁内角互补**）.

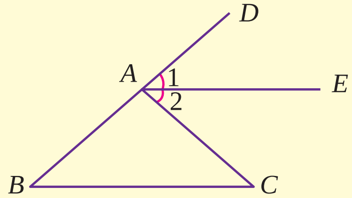
如图 7－31，用符号语言表示：

$\because$　$AB \parallel CD$，

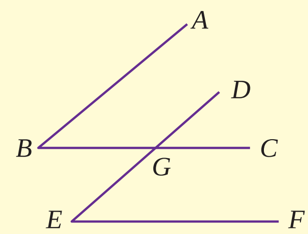
$\therefore$　$\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

练习

1. 已知：如图，$AE \parallel BC$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\angle B=\angle C$.
2. 已知：如图，$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$. 求证：$\angle B=\angle E$.



（第 1 题）



（第 2 题）

交流

如图 7－32，AB，CD 相交于点 O，如果 $\angle A=\angle B$，那么 $\angle C$ 与 $\angle D$ 之间有什么关系？为什么？

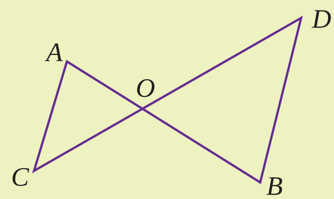


图 7－32

实践

用推三角尺作平行线的方法作直线 AB 的平行线 CD，再作直线 CD 的平行线 EF. 请你观察并判断直线 AB 与 EF 的位置关系，并尝试说明理由 .

由此得出性质：**平行于同一条直线的两条直线平行** .

如图 7－33，用符号语言表示：

$\because$　$AB \parallel CD$，$EF \parallel CD$，

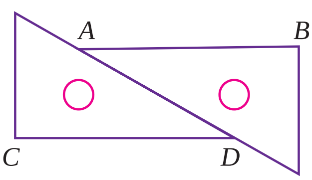
$\therefore$　$AB \parallel EF$.

图 7－33

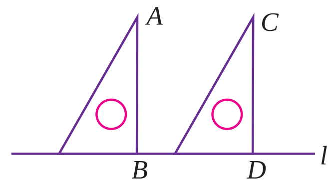
习　题　7-4

★基础★

1. 把两块形状、大小相同的三角尺按照如图所示的样子放置，图中 AB 与 CD 平行吗？请说明理由 .

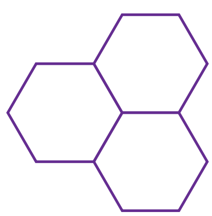


（第 1 题）

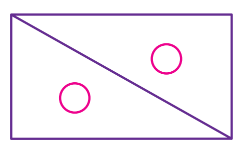


（第 2 题）

2. 如图，把一块三角尺的一条直角边贴在直线 l 上，沿它的另一条直角边作出直线 AB，再按照同样的方法作出直线 CD. AB 与 CD 平行吗？为什么？由此可总结出：垂直于同一条直线的两条直线平行 .
3. 图中的三个六边形中，每个角都等于 120°. 图中有平行线吗？如果有，请指出来，并说明它们为什么平行 .

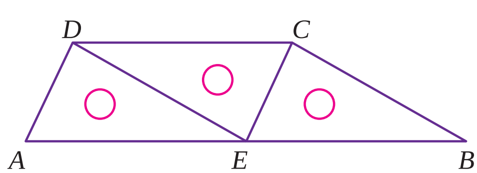


（第 3 题）

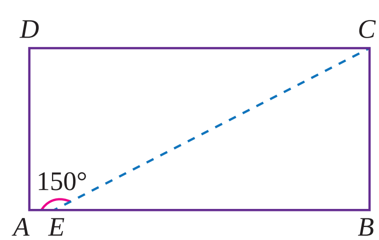


（第 4 题）

4. 用两块形状、大小相同的三角尺拼成如图所示的图形 . 图中有平行线吗？如果有，请指出来，并说明理由 .
5. 用三块形状、大小相同的三角尺拼成如图所示的图形 . 图中有平行线吗？请说明理由 .



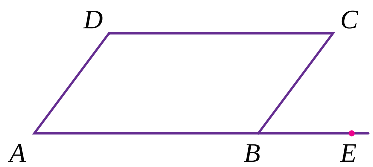
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，欲从点 C 作一条线 CE 与 AB 边交于点 E，使 $\angle CEA = 150°$. 应该怎样作?

7. 已知：如图，四边形 $ABCD$，点 E 是 AB 的延长线上的一点 .



（第 7 题）

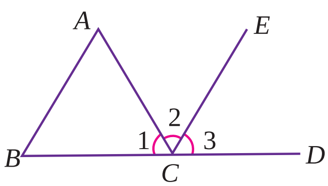
（1）如果 $\angle CBE = \angle A$，那么可以判定哪两条直线平行? 根据是什么?

（2）如果 $\angle CBE = \angle C$，那么可以判定哪两条直线平行? 根据是什么?

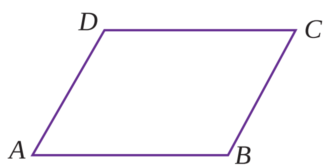
（3）如果 $\angle C + \angle CBA = 180°$，那么可以判定哪两条直线平行? 根据是什么?

★★ 提升 ★★

1. 如图，$\angle A$，$\angle B$，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 都等于 $60°$. 求证：$AB \parallel CE$.（用三种方法证明）



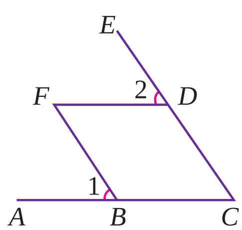
（第 1 题）



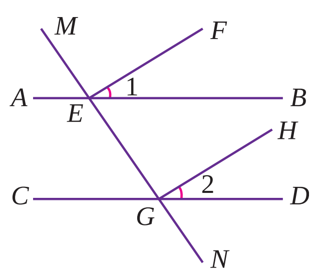
（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$. 求证：$\angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$.

3. 已知：如图，CBA，CDE 都是射线，点 F 是 $\angle ACE$ 内一点，且 $\angle 1 = \angle C$，$\angle 1 = \angle 2$. 试判断 $FD \parallel AC$ 吗? 为什么?



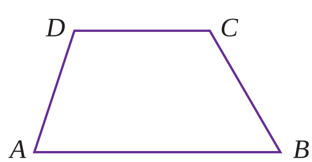
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，$AB \parallel CD$，直线 MN 分别与 AB，CD 交于点 E 和点 G，$EF \parallel GH$. 求证：$\angle 1 = \angle 2$.

5. 已知：如图，$\angle A + \angle D = 180°$. 求证：$\angle B + \angle C = 180°$.

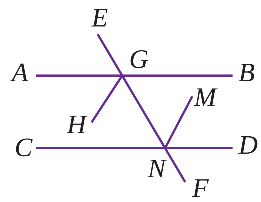


（第 5 题）

★★★ 拓展 ★★★

1. 一口井深 8 尺[①]，一只蜗牛从井底往上爬，白天爬 3 尺，夜里往下滑 2 尺．如果蜗牛从某一天清晨往上爬，那么几天可以爬到地面？

2. 如图，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，交点分别为 G，N，GH，NM 是两条射线．问：图中共有多少对内错角？



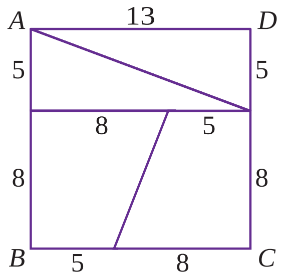
（第 2 题）

综合与实践

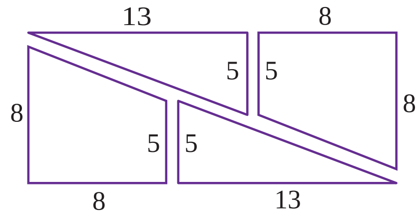
面积怎么丢失了

已知：如图 7 − 34(1)，有一个边长为 13 的正方形 $ABCD$，按图中所示的方法将它分割成两个直角三角形和两个梯形，再将这个正方形沿分割线剪开，得到四个小图形．有位同学用如图 7 − 34(2) 的形式拼了一个长方形．

当计算它们的面积时，却发现正方形的面积为 $13 \times 13 = 169$，而长方形的面积为 $8 \times 21 = 168$．想想看，丢失的面积跑到哪里去了？



(1)



(2)

图 7 − 34

① 1 尺 = $\frac{1}{3}$ 米．

阅读理解

从两架飞机相撞谈直觉思维

1965年12月4日，在美国纽约某机场上空，一架由螺旋桨推进的大型客机“LC1049”和一架波音707型喷气客机正一高一低相对飞行．由于机场上空云量多，在10 000多英尺[①]的高空出现了一条倾斜的白色云带．两架飞机的驾驶员都产生了一种错觉，以为对方就要和自己相撞．于是两架飞机的驾驶员都急忙采取措施，想避开对方，高的向下降，低的向上升，结果造成两机相撞．“LC1049”飞机在迫降时起火，造成四人死亡、多人受伤的悲剧．事后经过严密的调查，发现造成这次事故的元凶竟是“视错觉”．

我们知道，观察是人们认识事物的一种重要方法．靠人的眼睛观察事物，在很多情况下都能够得到正确的结论．但是，单凭眼睛观察，在某些情况下可能由于角度、视觉等原因，会造成错觉，出现偏差，也就是说眼睛有时也会欺骗人．

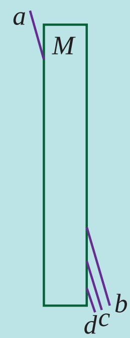


图 7－35

请看图7－35，观察平面M左边的直线a和右边的直线b，c，d中的哪一条在一条直线上．也许你会认为a和c在一条直线上．其实，只要用直尺比一下，就会发现a和b在一条直线上．这是由于a和b之间有一个平面M干扰了我们的视觉，使我们产生了错觉．前面提到的两机相撞事件，就是因为两机之间有一条倾斜的白色云带，它的情况和图7－35中的情况类似．

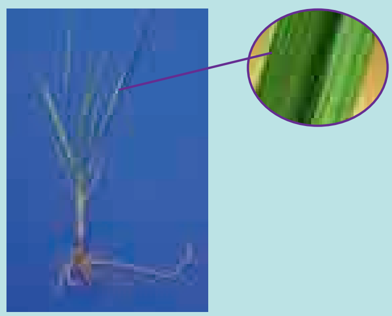
以上的例子说明，有时候只凭眼睛观察做出的判断会出现一些误差甚至错误，虽然如此，但是观察仍然不失为人们认识事物的一种重要方法．

① 1英尺≈0.304 8米．

阅读理解

从鲁班发明锯条谈类比推理

春秋时期，鲁国有一位杰出的工匠叫鲁班．有一次，他负责承造一座大宫殿，需要很多木材．他吩咐徒弟们上山去砍伐大树，但当时还没有发明锯子，只能用斧头去砍，砍得很慢，木料供应不上．鲁班十分着急，他决定亲自上山看看．



山很陡，路很不好走．鲁班爬山时，用手拉着丝茅草，一用力，手就被草划破了，流了血．当时鲁班感到很惊奇，一棵小草竟会这么厉害．由于他急着上山，也没有仔细想．回来的路上，他拔下一棵丝茅草，决定带回去看个究竟．到家后，他左看右看，发现丝茅草的两边有许多小细齿．这些细齿虽小，却很锋利，往手上一拉，手就被划破了．这提醒了鲁班，他想：如果像丝茅草那样，把铁片打成带齿的形状，用它去锯树，不是同样锋利吗？于是，他和铁匠一起试制了一条带齿的铁片，拿去锯树，果然成功了．有了锯子，木料供应的速度问题得到解决，盖宫殿的任务如期完成．

鲁班发明锯子的过程，就是运用了类比推理的方法．鲁班根据丝茅草有锋利的小细齿可以划破手指的事实，进行类比推理，把铁片做成带细齿的形状去锯树，这样便发明了锯子．

在数学中，应用类比推理的地方也是很多的，我们以后还会经常接触到．

回顾与整理

知识要点

1. 观察、实验、归纳、类比、猜想是人们认识事物的重要方法，但是按这些方法得出的结论还需要上升到理性认识．

2. 推理是人们研究问题的一种重要方法．定义、基本事实、定理都可以作为推理的依据．

3. 平行线的判定方法与平行线的性质是互逆的．

$$\text{两直线平行} \underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}} \text{同位角相等}$$

$$\text{两直线平行} \underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}} \text{内错角相等}$$

$$\text{两直线平行} \underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}} \text{同旁内角互补}$$

另外，判定两条直线平行还有一种方法：

平行于同一条直线的两条直线平行．

学习指导

1. 认识从实践开始．要善于观察周围的事物，利用观察、实验、归纳、类比、猜想等方法去发现事物的规律．

2. 数学是思维的体操．要学会运用说理、推理的方法去处理问题，提高思维的严谨性．

3. 推理能力的培养是一个循序渐进的过程，要慢慢体会推理过程，逐步提高推理能力．

复 习 题

★基础★

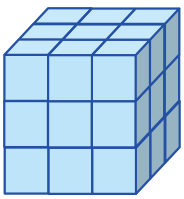
1. 你能用 6 根火柴棍首尾相接拼出 4 个三角形吗？试试看 .
2. 将数学、物理、化学、英语四门课分配给四位教师，甲可以教物理、化学；乙可以教数学、英语；丙可以教数学、物理、化学；丁只能教化学 . 为了使他们都有工作，并且每人只教一门课，那么只能派________教师教数学 .
3. 有一组数 5，8，13，21，34，…，照此规律，这组数的第 9 个数是________.
4. 有一个正方体的木块，表面都涂上同样的颜色，将木块按如图所示的方法切成若干个小正方体，那么：

(1) 只有一面有颜色的小正方体共有________个；

(2) 只有两面有颜色的小正方体共有________个；

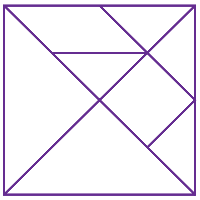
(3) 只有三面有颜色的小正方体共有________个；

(4) 各面都没有颜色的小正方体共有________个 .

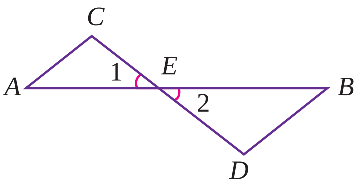


(第 4 题)

5. 画出如图所示的图案 .

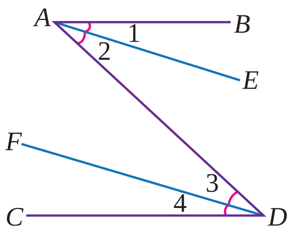


(第 5 题)

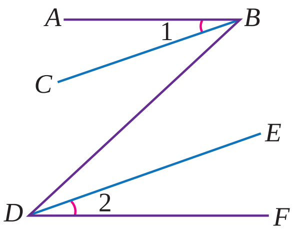


(第 6 题)

6. 已知：如图，AB，CD 相交于点 E，$\angle A=\angle 1$，$\angle B=\angle 2$. 求证：$AC \parallel BD$.
7. 已知：如图，$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$. 求证：$AB \parallel CD$.
8. 已知：如图，$AB \parallel DF$，$BC \parallel DE$. 求证：$\angle 1=\angle 2$.



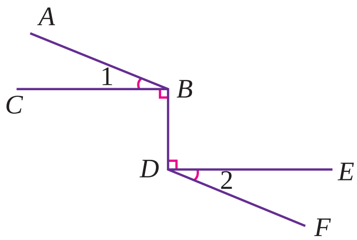
(第 7 题)



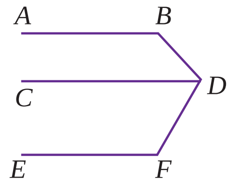
(第 8 题)

★★提升★★

1. 已知：如图，$CB \perp BD$ 于点 B，$BD \perp DE$ 于点 D，$\angle 1 = \angle 2$．求证：$AB \parallel DF$.

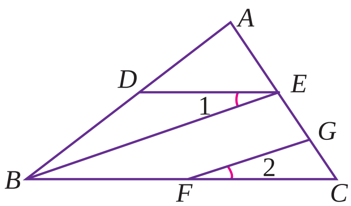


（第 1 题）

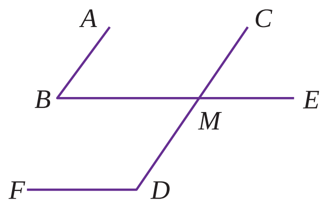


（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB \parallel CD$，$CD \parallel EF$．求证：$\angle B + \angle BDF + \angle F = 360°$.
3. 已知：如图，$DE \parallel BC$，$BE \parallel FG$．求证：$\angle 1 = \angle 2$.

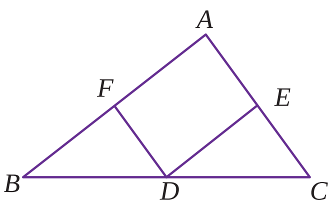


（第 3 题）

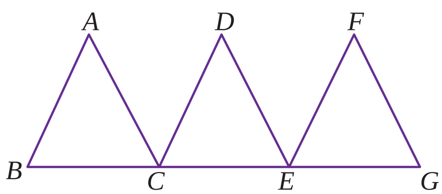


（第 4 题）

4. 已知：如图，$AB \parallel CD$，$BE \parallel FD$．求证：$\angle B + \angle D = 180°$.
5. 已知：如图，$DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$．求证：$\angle A = \angle FDE$.
6. 已知：如图，$AB \parallel CD$，$AC \parallel DE$，$CD \parallel EF$，$DE \parallel FG$．求证：$\angle A = \angle F$.



（第 5 题）

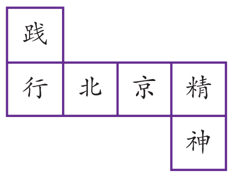


（第 6 题）

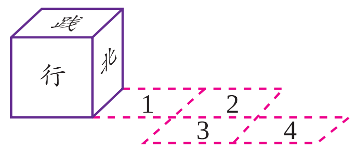
★★★拓展★★★

1. 图（1）是一个小正方体的侧面展开图，小正方体从图（2）所示的位置依次翻到第 1 格、第 2 格、第 3 格、第 4 格，这时小正方体朝上一面的字是（　　）.

A. 北　　　　B. 京　　　　C. 精　　　　D. 神



（1）



（2）

（第 1 题）

2. 符号“f”表示一种运算，它对一些数的运算如下：

$f(1)=1+\frac{2}{1}$，　$f(2)=1+\frac{2}{2}$，　$f(3)=1+\frac{2}{3}$，　$f(4)=1+\frac{2}{4}$，…

（1）利用以上运算的规律写出 $f(n)=$____________________（n 是正整数）；

（2）计算 $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot \cdots \cdot f(100)=$________________________.

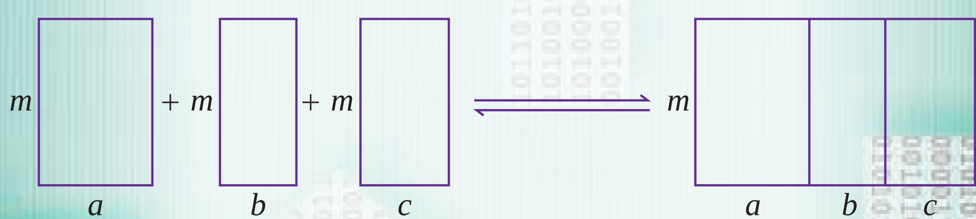
3. 有一个棋盘，共有 64 个小方格．如果在第 1 个方格内放 1 粒米，在第 2 个方格内放 2 粒米，在第 3 个方格内放 4 粒米，在第 4 个方格内放 8 粒米……以后每一个方格内放的数量都等于上一个方格内数量的 2 倍，那么，当 64 个方格都放满后，请你估计第 64 个方格内有多少粒米．

第八章 因式分解

我们学习过整数的乘法运算，并且会把一个整数分解为几个质数的积的形式.

类似的，我们学习了整式的乘法运算.你是否也能把一个整式分解为几个整式的积的形式呢?

$$ma+mb+mc \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} m(a+b+c)$$



8.1 因式分解

回忆整数的乘法运算，我们已经会求几个整数的积，并且可以把一个整数分解为几个质数的积的形式．例如：

$$6=2\times3;$$
$$84=2^2\times3\times7;$$
$$360=2^3\times3^2\times5.$$

其中，每一个质数都是原来整数的一个约数（或因数）.

类似的，我们也做过以下一些变形，把一些整式写成了几个整式的积的形式：

$$36x^5y^6=(2xy)\cdot(3x^2y^2)\cdot(6x^2y^3);$$
$$7.037\times(-14)+7.037\times(-10)+7.037\times(+24)=7.037\times(-14-10+24);$$
$$6a^2b+10a^2b+15a^2b=(6+10+15)a^2b.$$

又如：

$$x^2-4=(x+2)(x-2);$$
$$x^2+6x+9=(x+3)^2;$$
……

你还能举出类似的例子吗？观察一下，等号两边的整式各有什么特征．

思考

这些等式都表示了一个整式化为几个整式的积的形式．其中，每一个分解后的整式称做原来整式的一个**因式**．

对其中的多项式所做的变形，我们定义如下：把一个多项式化为几个整式乘积的形式，叫做把这个多项式**因式分解**，也叫做将多项式**分解因式**．

可以看出，因式分解和整式乘法是相反方向的变形．如：

$$x^2-4\ \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}}\ (x+2)(x-2)$$

练 习

下列从左到右的变形，哪些是因式分解，哪些不是因式分解？

(1) $(x+5)(x-5)=x^2-25$；

(2) $x^2-9=(x+3)(x-3)$；

(3) $x^2+x+1=x(x+1)+1$；

(4) $m^2n+mn^2+m=m(mn+n^2+1)$.

8.2 提公因式法

思考

多项式 $ma+mb+mc$ 的各项分别由哪些因式组成？它们的相同的因式是什么？怎样将这个多项式因式分解？

把等式 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ 反过来，得到 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

我们把各项都含有的因式叫多项式各项的**公因式**．比如多项式 $ma+mb+mc$ 的公因式是 m，可以将它提取出来，得到公因式 m 与多项式 $a+b+c$ 的乘积，这种因式分解的方法就叫做**提公因式法**．

练 习

1. 填空：

(1) $6x+14y=$______$(3x+7y)$；

(2) $3xy+6xz=3x($______$)$；

(3) $7m^3-49m^2=$______$(m-7)$；

(4) $3x+6xy+12xz=3x($________$)$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $mx - my$；　　(2) $abc - acd$；

(3) $9x^3 - 6x^2 - 18x$；　　(4) $2mn - 4m^2n + 2m$.

思考

1. 怎样确定多项式各项的公因式？
2. 遇到多项式的首项系数是负数该怎么办？

例 1 把下列各式分解因式：

(1) $6x^4y^3 - 12x^2y^4z$；　　(2) $-3a^2x + 6axy - 3a$.

解： (1) $6x^4y^3 - 12x^2y^4z$

$$= 6x^2y^3 \cdot x^2 - 6x^2y^3 \cdot 2yz$$

$$= 6x^2y^3(x^2 - 2yz)；$$

首项系数的符号有什么特点？

(2) $-3a^2x + 6axy - 3a$

$$= -(3a^2x - 6axy + 3a)$$

$$= -3a(ax - 2xy + 1).$$

结果中的“1”还用写吗？

交流

在多项式的因式分解中应当注意什么？

可以看到，多项式的各项的公因式可以这样组成：

(1) 公因式的系数，是多项式中各项系数的最大公约数；

(2) 公因式中字母的指数，是各项中都含有的字母的指数中次数最低的；

(3) 遇到多项式的首项系数为负时，要把负号提取出来，并把括号内各项都改变符号；

(4) 因式分解后要注意检查提取公因式后的另一个因式的项数与分解前是否一致，不要丢项 .

练习

把下列各式分解因式：

(1) $6a^2b-10ab^2$；　　(2) $3abc^2-15ab^2c+9a^2bc$；

(3) $-2m^3-7mn+14mn^3$；　　(4) $56x^3yz+14x^2y^2z-21x^4y$.

例 2 把下列各式分解因式：

(1) $3a(x+y)-2b(x+y)$；

(2) $12(m-n)^3+18(n-m)^2$；

(3) $4p^2(a+3)-3p^2(a+3)^2$.

第（2）题有公因式吗？公因式是什么？

解：(1) $3a(x+y)-2b(x+y)$

$=(x+y)(3a-2b)$；

(2) $12(m-n)^3+18(n-m)^2$

$=12(m-n)^3+18(m-n)^2$

$=6(m-n)^2[2(m-n)+3]$

$=6(m-n)^2(2m-2n+3)$；

(3) $4p^2(a+3)-3p^2(a+3)^2$

$=p^2(a+3)[4-3(a+3)]$

$=p^2(a+3)(-3a-5)$

$=-p^2(a+3)(3a+5)$.

练习

把下列各式分解因式：

(1) $5x(a-b)-7y(a-b)$；　　(2) $a(a+b)-5(a+b)$；

(3) $xy(x-y)-x(y-x)$；　　(4) $5m(p^2-q)^3-4n(q-p^2)^2$.

习　题　8－1

★基础★

1. 把下列各式分解因式：

(1) $6a^4b^3-12a^2b^4c$；

(2) $8m^3n^2-mn^3p$；

(3) $15x^3y^2-10x^2y$；

(4) $-18a^2b^4+27a^3b^3$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $-8a^2b-4ab+12b^2$；

(2) $12x^3y^3-8x^2y^3+4x^2y^2$；

(3) $-4x^3y^2+28x^2y-2xy$；

(4) $-4a^3b^4+12a^2b^5-16ab^6$.

★★提升★★

1. 把下列各式分解因式：

(1) $(2x+y)(2x-3y)-3x(2x+y)$；

(2) $4a(m-n)-2b(n-m)$；

(3) $7m(x-5)^3-2n(x-5)^2$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $3p^2(a-x)-2p^2(x-a)$；

(2) $a(x+y)+b(x+y)-c(x+y)$；

(3) $3a^2b(2x-y)-6ab^2(y-2x)$.

★★★拓展★★★

用简便方法计算下列各题：

(1) $2.89\times3.51+3.11\times3.51-3.51\times4$；

(2) $\pi R_1^2+\pi R_2^2-\pi R_3^2$，其中 π 取 3.14，$R_1=8$，$R_2=15$，$R_3=16$.

8.3 公式法

1. 运用平方差公式分解因式

把平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 反过来，就得到因式分解的公式：

平方差公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

也就是，**两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积**.

交流

具有怎样特征的多项式可以运用这个公式进行因式分解?

例 1 把下列各式分解因式：

(1) $4m^2-n^2$；　　(2) $1-25x^2y^2$.

分析：

(1) $4m^2-n^2=(2m)^2-(n)^2=(2m+n)(2m-n)$.

$$\boxed{a^2 \quad - \quad b^2 \quad = \quad (a \; + \; b)(\; a \; - b)}$$

(2) 同理可找到本题中的 $a=1$，$b=5xy$.

解： (1) $4m^2-n^2$

$=(2m)^2-n^2$

$=(2m+n)(2m-n)$；

(2) $1-25x^2y^2$

$=1^2-(5xy)^2$

$=(1+5xy)(1-5xy)$.

思考

把 $4m^2$ 化为 $(2m)^2$，$25x^2y^2$ 化为 $(5xy)^2$ 的根据是什么?

练习

1. 填空：

(1) $4x^2=(\qquad)^2$；

(2) $\frac{4}{9}y^2=(\qquad)^2$；

(3) $49a^4=(\qquad)^2$；

(4) $100m^4n^2=(\qquad)^2$；

(5) $0.01x^2y^6=(\qquad)^2$；

(6) $\frac{9}{25}x^4y^2=(\qquad)^2$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $25-x^2$；

(2) $9-y^2$；

(3) $81x^2-64y^2$；

(4) $0.25a^2-b^2$.

例 2 把 $(2x+3y)^2-(3x+2y)^2$ 分解因式.

怎样才能运用平方差公式分解因式?

解： $(2x+3y)^2-(3x+2y)^2$

$=[(2x+3y)+(3x+2y)][(2x+3y)-(3x+2y)]$

$=(2x+3y+3x+2y)(2x+3y-3x-2y)$

$=5(x+y)(y-x)$.

练习

把下列各式分解因式：

(1) $(x+m)^2-(x+n)^2$；

(2) $z^2-(x+y)^2$；

(3) $49(a+3b)^2-c^2$；

(4) $(m+n-3)^2-(3m-2n)^2$.

2. 运用完全平方公式分解因式

把完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 反过来，就得到因式分解的公式：

完全平方公式

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

也就是，**两个数的平方和，加上（或减去）这两个数的积的 2 倍，等于这两个数的和（或差）的平方**.

交流

具有怎样特征的多项式可以运用这两个公式分解因式？

例 3 把下列各式分解因式：

(1) x^2+6x+9；

(2) $16m^2-40mn+25n^2$；

(3) $x^4-2x^2y^3+y^6$；

(4) $(m+n)^2-12(m+n)+36$.

看一看，它们符合完全平方公式吗？

分析： 对于复杂的题目，如第(2)小题，仍然可以用以下方式找到公式中的 a，b.

$$16m^2-40mn+25n^2=(4m)^2-2\cdot(4m)\cdot(5n)+(5n)^2=(4m-5n)^2.$$

$$a^2 \;-\; 2\cdot a\cdot b \;+\; b^2 \;=\; (a-b)^2$$

解： (1) x^2+6x+9

$=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2$

$=(x+3)^2$；

(2) $16m^2-40mn+25n^2$

$=(4m)^2-2\cdot(4m)\cdot(5n)+(5n)^2$

$=(4m-5n)^2$；

(3) $x^4-2x^2y^3+y^6$

$=(x^2)^2-2x^2y^3+(y^3)^2$

$=(x^2-y^3)^2$；

(4) $(m+n)^2-12(m+n)+36$

$=(m+n-6)^2$.

思考

运用完全平方公式分解因式时，结果是“和”的完全平方，还是“差”的完全平方，由什么决定？

练习

1. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2+10x+25$；　　(2) $9y^2-6y+1$；

(3) $1-20m+100m^2$；　　(4) $m^2+4mn+4n^2$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $4x^2-28xy+49y^2$；　　(2) $4m^6+52m^3n^2+169n^4$；

(3) $36m^2-12m^3-27m$；　　(4) $64x^6+80x^3y^2+25y^4$.

例 4 把下列各式分解因式：

(1) $2x^2-18$；　　(2) $256m^4-81n^4$；

(3) $16x^2-(x^2+4)^2$；　　(4) $81a^4-72a^2b^2+16b^4$.

解：(1) $2x^2-18$

$=2(x^2-9)$

$=2(x+3)(x-3)$；

(2) $256m^4-81n^4$

$=(16m^2)^2-(9n^2)^2$

$=(16m^2+9n^2)(16m^2-9n^2)$

$=(16m^2+9n^2)(4m+3n)(4m-3n)$；

(3) $16x^2-(x^2+4)^2$

$=(4x)^2-(x^2+4)^2$

$=-(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)$

$=-(x+2)^2(x-2)^2$；

(4) $81a^4-72a^2b^2+16b^4$

$=(9a^2-4b^2)^2$

$=(3a+2b)^2(3a-2b)^2$.

例 5 把下列各式分解因式：

(1) $16x^2y-16x^3-4xy^2$；　　(2) $(x^2+1)^2-4x(x^2+1)+4x^2$.

解：(1) $16x^2y-16x^3-4xy^2$

$=4x(4xy-4x^2-y^2)$

$=-4x(4x^2-4xy+y^2)$

$=-4x(2x-y)^2$；

(2) $(x^2+1)^2-4x(x^2+1)+4x^2$

$=(x^2+1)^2-2\cdot(x^2+1)\cdot 2x+(2x)^2$

$=[(x^2+1)-2x]^2$

$=(x^2-2x+1)^2$

$=(x-1)^4$.

探究学习

对二次三项式因式分解的探究

1. 我们学习过 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，请你由此探究一个将二次项系数是 1 的二次三项式进行因式分解的公式．

试用你得到的公式，将下列二次三项式分解因式：

(1) x^2-5x+6；

(2) x^2-x-12.

2. 对于二次项系数不为 1 的二次三项式，能用上面类似的方法进行因式分解吗?

试用你想到的方法，将下列二次三项式分解因式：

(1) $3x^2-11x+10$；

(2) $6x^2-11x-10$.

问题解决

1. 经过怎样的转化，可以将下面的多项式进行因式分解？从中可以找到什么规律？

(1) $2x^3+x^2-6x-3$；　　(2) x^2-x-4y^2+2y；

(3) $a^2+b^2+2ab-c^2$；　　(4) $a^2-c^2+2bc-b^2$.

2. 分解因式：x^3+x^2-12.

通过变形进行因式分解比较困难，图形计算器可以直接完成这个过程．

按键步骤如下：

开机　1　1　菜单　3　2　X　^　3　▶

+　X　x^2　−　1　2　,　X　enter

如图 8－1，所以 $x^3+x^2-12=(x-2)(x^2+3x+6)$.

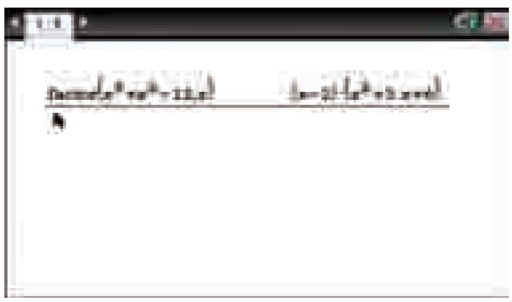


图 8－1

习　题　8－2

★基础★

1. 把下列各式分解因式：

(1) $1-a^2$；　　(2) $4x^2-25y^2$；

(3) $(2a+x)^2-(a-x)^2$；　　(4) $4(a+2b)^2-25(a-b)^2$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $-4+b^2$；
(2) $\frac{16}{25}x^2-\frac{9}{49}y^2$；
(3) $-4+12x-9x^2$；
(4) $x^2y^2-4xy+4$.

★★ 提升 ★★

1. 把下列各式分解因式：
(1) $4m(a-b)-2n(b-a)$；
(2) $x(x-y)^2-xy(y-x)^2$；
(3) $81a^4-16b^4$；
(4) $(a-b)-(a^2-b^2)$.
2. 把下列各式分解因式：
(1) a^2b-b^3；
(2) $18m^2n^2-12mn+2$；
(3) $(n^2+1)^2+4n(n^2+1)+4n^2$.
3. 把下列各式分解因式：
(1) $(p+q)^2-2r(p+q)+r^2$；
(2) $9(2x-y)^2-6(2x-y)+1$；
(3) $(x+2y)^2-10(x+2y)+25$；
(4) $(x+a)^2-6(x+a)(x-b)+9(x-b)^2$.

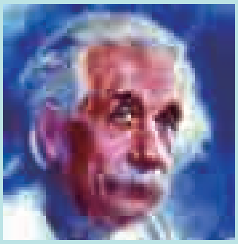
★★★ 拓展 ★★★

1. 两个连续奇数的平方差能被 8 整除吗？试说明理由 .
2. 一块边长为 $a=82.4$ m 的正方形草坪，在四个角各修建一个边长为 $b=6.2$ m 的正方形花坛，问余下的草坪面积多大 .

阅读理解

爱因斯坦的速算

爱因斯坦（1879 — 1955）是一位著名的物理学家，他在数学方面也有很高的造诣 .


爱因斯坦

有一天，他生病在家 . 一位朋友前去探望，为了让爱因斯坦消遣，出了一道计算题：2 976 × 2 924 . 题目刚刚出完，爱因斯坦就脱口而出“8 701 824”. 这位朋友十分惊讶，他请爱因

斯坦说出是怎样计算的．爱因斯坦说，他把 2 976 拆成 29 和 76，把 2 924 拆成 29 和 24，他发现前面两位数字都是 29，后面两位数字分别是 76 和 24，而它们的和是 100．分别计算 $29\times(29+1)=29\times30=870$，$76\times24=(50+26)(50-26)=50^2-26^2=1\ 824$，然后将 870 和 1 824 连着写出来，就得到乘积 8 701 824．这位朋友对爱因斯坦善于观察数字特征、灵活运用数学知识的能力十分佩服．

那么，爱因斯坦速算的理论根据是什么呢？

设　$29=a$，$76=b$，$24=c$，

那么　$2\ 976=100a+b$，$2\ 924=100a+c$，且 $b+c=100$.

由　$$\begin{aligned}(100a+b)(100a+c)&=10\ 000a^2+100a(b+c)+bc\\&=10\ 000a^2+100a\times100+bc\\&=10\ 000a(a+1)+bc.\end{aligned}$$

这样，$$\begin{aligned}2\ 976\times2\ 924&=10\ 000\times29\times(29+1)+76\times24\\&=870\times10\ 000+1\ 824\\&=8\ 701\ 824.\end{aligned}$$

通过爱因斯坦速算的故事，你可以想到什么呢？

回顾与整理

知识要点

本章学习的主要内容是因式分解的概念和因式分解的基本方法．

1. 因式分解的概念．

把一个多项式化为几个整式乘积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做将多项式分解因式．

2. 因式分解的基本方法．

知识要点

(1) 提公因式法.

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

(2) 公式法.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2.$$

学习指导

1. 学习多项式的因式分解，应当注意运用类比的思想方法，通过与整数的因数分解相比较，加深对因式分解概念的理解.

2. 注意提高观察式子结构特点的能力，加强把一个式子看做一个字母的换元思想的练习，为今后应用因式分解打好基础.

3. 要透彻理解多项式的乘法运算与因式分解变形的联系与区别. 它们都可以看做整式的恒等变形，但变形的方向正好相反.

复 习 题

★基础★

1. 把下列各式分解因式：

(1) $5m^2n-15mn^2$；　(2) $a^4-a^3-a^2$；

(3) $-7x^3y^2-21x^2y^3$；　(4) $-4a^3b^4+12a^2b^5-16ab^6$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $4ab^2-8a^2b$；　(2) $-15xy-5x^2$；

(3) $x^3y^3+x^2y^2-xy$；　(4) $-27x^2y+9xy^2-18xy$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $(x-y)^3-(y-x)^2$；　(2) $5a^2(x-y)+10a(y-x)$；

(3) $(m-n)^2-10(n-m)+25$；　(4) $(x+y)^2-2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$.

4. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2+12xy+36y^2$；　(2) $1-8xy^2+16x^2y^4$；

(3) x^4-8x^2+16；　(4) $4(x-y)^2-4(x-y)+1$.

5. 把下列各式分解因式：

(1) $18x^3-27x^4-3x^2$；　(2) x^4-18x^2+81；

(3) $16a^2b^4-8ab^2c^2+c^4$；　(4) $9(2x-y)^2-6(2x-y)+1$.

★★ 提升 ★★

1. 把下列各式分解因式：

(1) $a(x-3)(y-2)+b(3-x)(2-y)$；

(2) $6x(a^2-b^2)-18y(a-b)$.

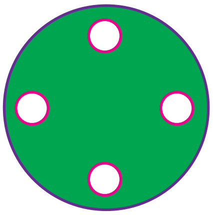
2. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{2}{3}xy$；

(2) $16n^2(n-3)^2+72n(n-3)+81$.

3. 写出一个二项式，再把它分解因式．(要求：二项式含有字母 a 和 b，系数、次数不限，并能先用提公因式法再用公式法分解)

4. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上，冲去半径为 r 的四个小圆，利用因式分解计算当 $R=7.8$ cm，$r=1.1$ cm 时剩余部分的面积．(π 取 3.14)



(第 4 题)

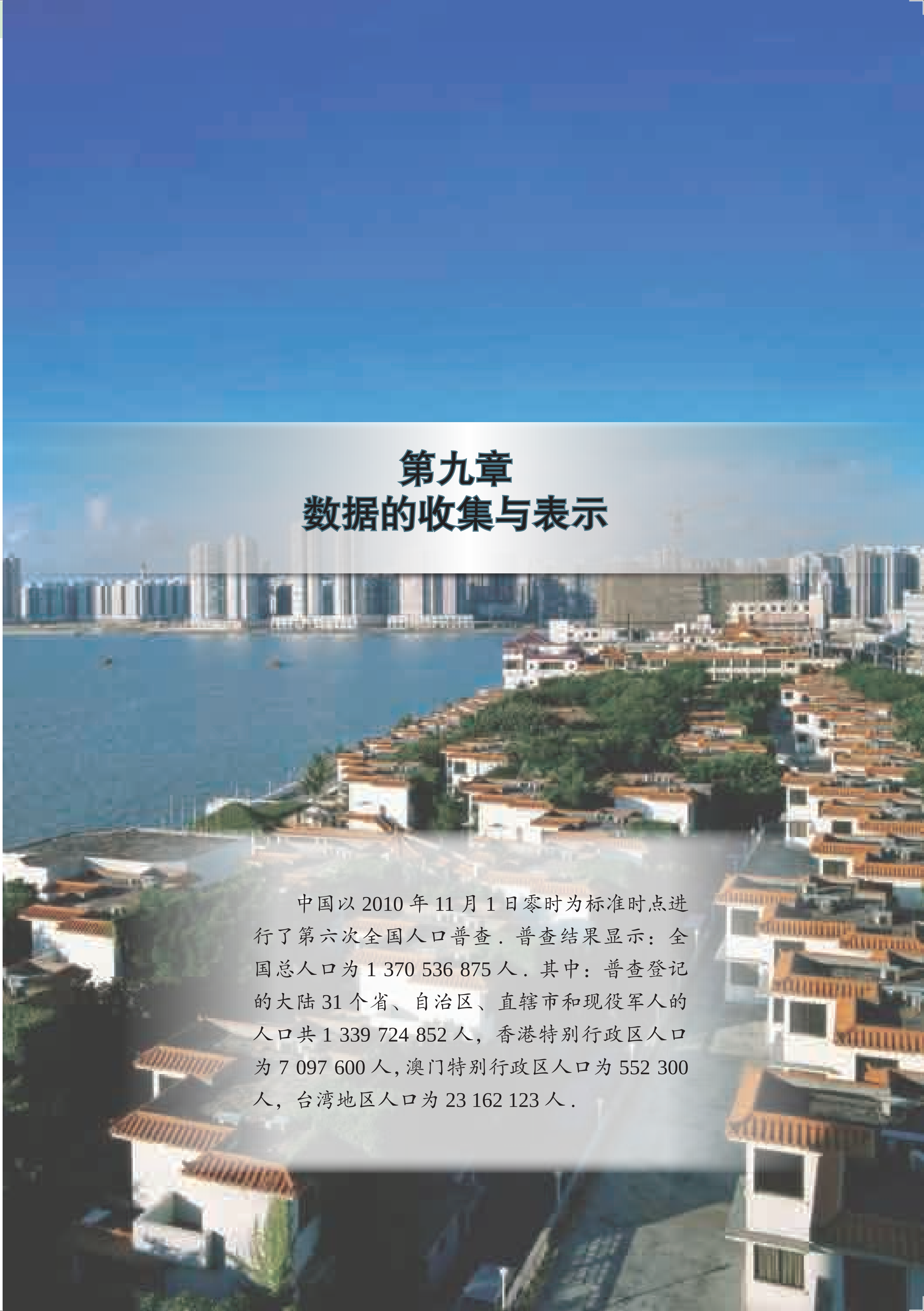
★★★ 拓展 ★★★

1. 把下列各式分解因式，并从中归纳出新的因式分解方法．

(1) $8ax+12ay-10bx-15by$；

(2) $2ab-a^2-b^2+4$.

2. 把两个相同的三位数连续写在一起，就得到一个六位数，我们称它为“连续数”．比如 234 234，378 378，926 926，…，请你试说明任何一个连续数都可以被 7，11，13 整除．



第九章
数据的收集与表示

中国以 2010 年 11 月 1 日零时为标准时点进行了第六次全国人口普查．普查结果显示：全国总人口为 1 370 536 875 人．其中：普查登记的大陆 31 个省、自治区、直辖市和现役军人的人口共 1 339 724 852 人，香港特别行政区人口为 7 097 600 人，澳门特别行政区人口为 552 300 人，台湾地区人口为 23 162 123 人．

一 数据的收集、整理与表示

9.1 总体与样本

当我们打开电视或浏览网页时，许多信息都是通过各种数据传递给我们的．比如，2010 年北京的空气质量优良天数占全年总天数的 88.4%，比 2005 年提高了 14.3 个百分点．又如，在 2010 年第六次全国人口普查中，同 2000 年第五次全国人口普查相比，每 10 万人中具有大学文化程度的由 3 611 人上升为 8 930 人．你知道它们都是怎么得到的吗?

交流

1. 某校七年级(1)班共有 40 名学生，现打算对他们每个人最喜欢的体育项目进行统计，你打算采用什么方法?

2. 要想了解某条河流的水质情况，你打算采用什么方法?

3. 某电器厂开发研制了一种新型节能灯，年产量 50 万只．现打算了解这种型号节能灯的使用寿命，可以采用什么方法?

在上面“交流”的第 1 题中，由于被调查的人数不是很多，我们可以对 40 个人逐一进行问卷调查，然后加以整理．这种方法叫做全面调查(也称为普查)．

在第 2 题中，由于河中水量很大，不可能对全部水质进行化验，所以可以采用抽样的方法对一部分水质进行化验，然后对整条河流的水质进行评估．这种方法叫做抽样调查．

在第 3 题中，要对灯泡的使用寿命进行统计，必须进行“破坏性试验”，当统计出某只灯泡的使用寿命时，它也就作废了，所以我们不可能对每一只灯泡都逐一试验，也只能采用抽样的方法进行调查．

练习

1. 举一个应用全面调查方法的例子.
2. 举一个应用抽样调查方法的例子.

在对数据进行统计时，我们把所要考察对象的全体叫做**总体**，其中的每一个考察对象叫做**个体**，从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个**样本**，样本中个体的数量叫做**样本的容量**.

在前面讲到的节能灯的例子中，欲统计这种型号节能灯的平均使用寿命，我们可以随机抽取 500 只节能灯进行试验. 这 50 万只节能灯的使用寿命是总体，其中每只节能灯的使用寿命是个体，所抽取的 500 只节能灯的使用寿命是总体中的一个样本，样本的容量是 500.

我国的杂交水稻育种专家袁隆平被誉为“杂交水稻之父”. 在一次育种试验中，为了测算一块 800 亩[①] 试验田里新培育的杂交水稻的产量，随机对其中的 10 亩杂交水稻的产量进行了检测. 在这个例子中，请指出总体、个体、样本、样本的容量各是什么.

思考

9.2 数据的收集与整理

问题 调查、分析某校七年级 (2) 班男生身高的状况.

调查目的 了解该班男生身高状况，并作为三年中跟踪调查的依据.

调查范围 七年级 (2) 班全体男生.

调查方法 由校医务室提供该班男生入学后体检的有关数据.

数据整理 根据调查目的，选择你认为合适的方法对数据加以整理.

① 1 亩 ≈ 666.7 平方米.

校医务室提供的数据如下（单位：厘米）：

白　羽 166，　曹利刚 165，　冯小军 164，　郭宏志 167，
高　枫 173，　靳江川 161，　金石开 163，　康建军 158，
李立春 160，　雷　鸣 164，　柳叶宏 168，　刘源源 170，
马　刚 165，　苏　岩 171，　田丰收 162，　王风歧 165，
俞力平 169，　朱　平 159，　张欣欣 162，　赵凯雨 168.

下面是甲、乙两个同学对以上数据进行的整理：

甲认为如果能对他们的身高从小到大进行排序，那么将有利于观察某个男生在所有男生中身高的位置，于是他设计了表格 1.

表格 1

（单位：厘米）

1	康建军：158	6	田丰收：162	11	马　刚：165	16	赵凯雨：168
2	朱　平：159	7	金石开：163	12	曹利刚：165	17	俞力平：169
3	李立春：160	8	雷　鸣：164	13	白　羽：166	18	刘源源：170
4	靳江川：161	9	冯小军：164	14	郭宏志：167	19	苏　岩：171
5	张欣欣：162	10	王风歧：165	15	柳叶宏：168	20	高　枫：173

乙认为如果把身高按范围进行分类，那么将能了解该班男生身高的大致分布情况，于是他设计了表格 2.

表格 2

（单位：厘米）

范　围	画　记	频　数
160 以下（含 160）	下	3
161 ~ 165（含 165）	正 止	9
166 ~ 170（含 170）	正 一	6
170 以上	丅	2

其中频数是指在某个范围内数据的个数 .

交流

甲、乙两个同学采取的整理方法各有什么特点？你认为他们整理数据的方法合理吗？你还有其他的整理方法吗？

实践

请了解本班的同学是否喜欢某电视节目．

调查的结果适用于学校的全体同学吗？适用于本地区的电视观众吗？

如果不适用，应该如何改进调查方法？

综合与实践

运动会成绩整理

在某校秋季田径运动会上，学校规定了获得 1 ~ 6 名的得分标准如下：

名　次	1	2	3	4	5	6
得　分	7 分	5 分	4 分	3 分	2 分	1 分
接力比赛	成绩加倍					
破校纪录	成绩加倍					

大会公布的女生比赛成绩如下：

七年级 (1) 班：百米赛跑　第 1 名，第 3 名，第 6 名；
　　　　　　　铅球比赛　第 2 名，第 3 名；
　　　　　　　跳高比赛　第 3 名，第 4 名；
　　　　　　　跳远比赛　第 1 名，第 4 名；
　　　　　　　400 米接力　第 1 名．

七年级(2)班：百米赛跑　第 2 名，第 5 名；
铅球比赛　第 4 名，第 5 名；
跳高比赛　第 1 名，第 6 名；
跳远比赛　第 3 名，第 5 名；
400 米接力　第 2 名．

七年级(3)班：百米赛跑　第 4 名；
铅球比赛　第 1 名(破校纪录)，第 6 名；
跳高比赛　第 2 名，第 5 名；
跳远比赛　第 2 名，第 6 名；
400 米接力　第 3 名．

请你根据以上的名次和规定，对各班所得的分数加以整理，并对其成绩加以排序．以下的表格可供参考．

得分 班次 项目	七年级(1)班	七年级(2)班	七年级(3)班
百米赛跑			
铅球比赛			
跳高比赛			
跳远比赛			
400 米接力			

练习

1. 下列调查中，适合用普查方法的是(　　)．
   A. 了解一批科学计算器的使用寿命
   B. 了解北京电视台《北京新闻》栏目的收视率
   C. 了解某种奶制品中蛋白质的含量
   D. 了解某班学生对“北京精神”的知晓率

2. 各小组分别搜集下列数据，并对数据加以整理．

（1）全班同学中姓氏分布情况；

（2）全班同学中订阅杂志数量情况；

（3）全班同学中最喜欢某种球类运动的人数；

（4）全班同学中最喜欢某部电视剧的人数．

9.3 数据的表示——扇形统计图

我们能用条形统计图和折线统计图直观且有效地表示收集、整理的数据，下面学习如何用扇形统计图来表示数据．

例 在某次数学测试中，满分为 100 分，测试内容及所占分值的分布情况如下．

一元一次不等式（组）：15 分；　二元一次方程组：15 分；

整式的运算：25 分；　观察、猜想与证明：20 分；

因式分解：10 分；　数据的收集与表示：15 分．

试用扇形统计图表示本次测试内容所占分值的分布情况．

分析： 如图 9－1，在圆中，点 O 是圆心，OA，OB 是半径，在圆周上 A，B 两点间的曲线称为圆弧．

两条半径 OA，OB 与弧 AB 组成的图形叫做**扇形**，两条半径所夹的角叫做**圆心角**．

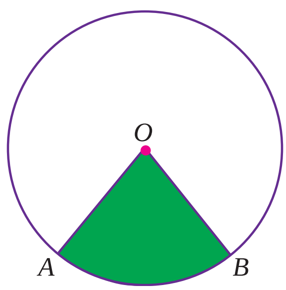


图 9－1

由于顶点在圆心的周角的度数为 360°，因此可以计算出扇形的圆心角的度数占周角的百分比．比如，当扇形的圆心角 $\angle AOB = 72°$ 时，这个扇形占圆面积的 20%，即 $\frac{72°}{360°} = \frac{1}{5} = 20\%$．

解： 先分别计算出各测试内容的分数占总分的百分比，再计算出表示每个百分比的扇形圆心角的度数，列出下表：

测试内容	所占分值	百分比	圆心角度数
一元一次不等式（组）	15	15%	$360^\circ\times15\%=54^\circ$
二元一次方程组	15	15%	$360^\circ\times15\%=54^\circ$
整式的运算	25	25%	$360^\circ\times25\%=90^\circ$
观察、猜想与证明	20	20%	$360^\circ\times20\%=72^\circ$
因式分解	10	10%	$360^\circ\times10\%=36^\circ$
数据的收集与表示	15	15%	$360^\circ\times15\%=54^\circ$

然后用量角器画出这些扇形（如图 9－2）.

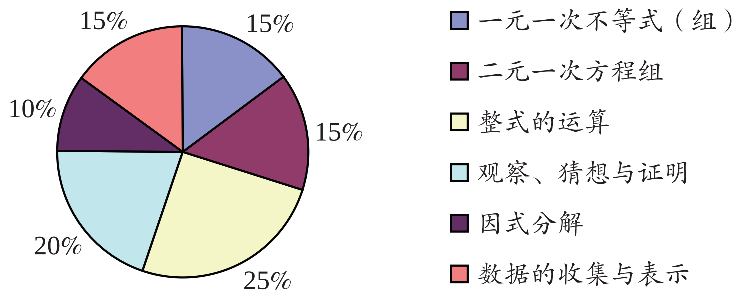


图 9－2

这种用扇形表示数据的方法，称为**扇形统计图**.

我们还可以把扇形统计图画成图 9－3 的形式.

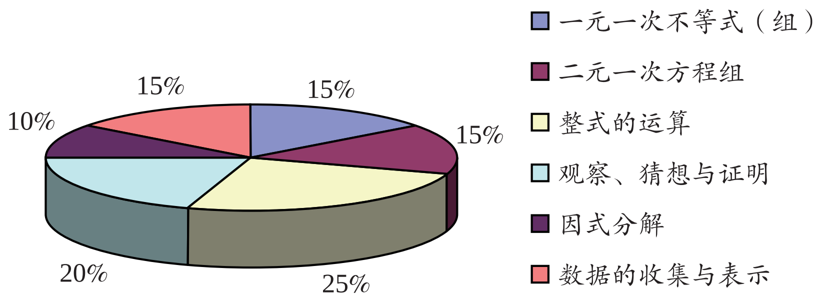


图 9－3

练习

七年级（3）班共有40名同学，骑自行车上学的有10人，乘公交车上学的有15人，步行的有10人，家长用车送的有5人．试用扇形统计图表示出该班同学采用不同方式上学的人数．

交流

条形统计图、折线统计图和扇形统计图分别适用于哪一类的实际问题？

9.4 用计算机绘制统计图

用计算机软件 Microsoft Excel 2003 制作扇形统计图的方法如下：

打开 Microsoft Excel 2003，将需要制图的数据输入到单元格中（图 9－4），选中需要制图的数据所在的单元格（图 9－5），单击 插入 — 图表 ，此时会出现一个“图表向导－4 步骤之 1－图表类型”对话框，在“标准类型”中选择“饼图”（图 9－6）；单击 下一步，进入“图表向导－4 步骤之 2－图表源数据”；继续单击 下一步，进入“图表向导－4 步骤之 3－图表选项”，在“数据标志”中选择“百分比”（图 9－7）；最后单击 完成 即可，所得图表如图 9－2 所示．

条形统计图和折线统计图的制作方法与扇形统计图的制作方法类似，只是在出现“图表向导－4 步骤之 1－图表类型”对话框时，在“标准类型”中选择“条形图”或“折线图”即可．

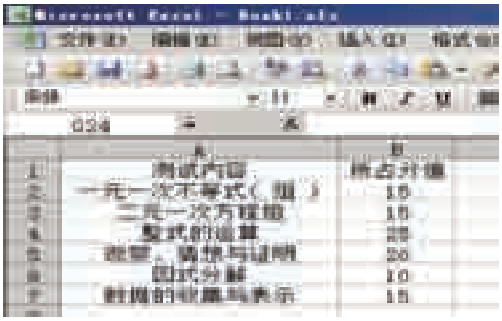


图 9－4

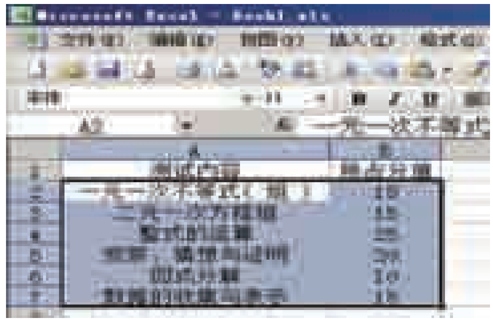


图 9－5

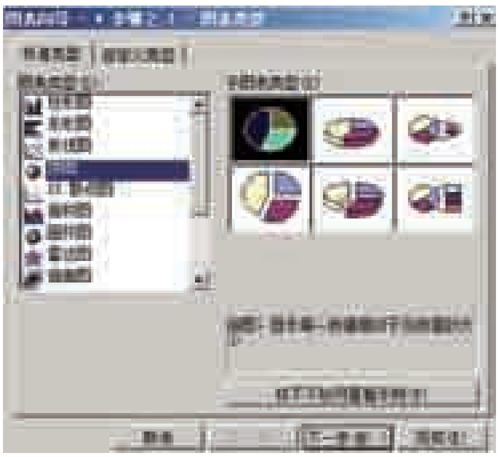


图 9－6

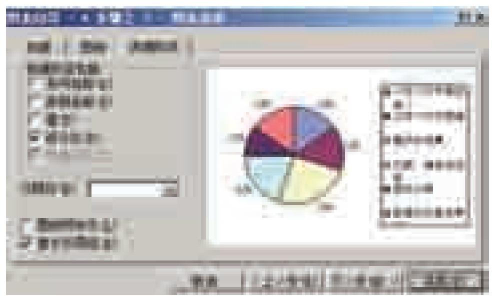


图 9－7

习　题　9－1

★基础★

1. 要统计全班同学登上八达岭长城的人数情况，你准备采取哪种方法进行调查？
2. 要想了解北京市市民习惯使用左手的人数占全市人口的比例，你认为应采用哪种调查方法？
3. 要想测算北京市市民拥有手机的人数占全市人口的比例，你认为应采取什么调查方法？
4. 某班在为西部地区儿童捐赠的图书中，文史类共 80 本，科普类共 60 本，教辅类共 120 本，其他共 140 本．试用扇形统计图反映出捐赠的各类图书的情况．

★★提升★★

对世界四大洋的面积取近似值，它们的面积如下所示．

北冰洋：1.3×10^7 千米 ^{2}；　　印度洋：7.5×10^7 千米 ^{2}；

大西洋：9.3×10^7 千米 ^{2}；　　太平洋：1.8×10^8 千米 ^{2}.

试用计算机绘制扇形统计图表示世界四大洋的面积．

★★★拓展★★★

查询有关资料，自编三道题目，分别用条形统计图、折线统计图和扇形统计图加以表示．

二、平均数、众数和中位数

9.5 平均数

问题一　小莉和小颖到射箭场练习射箭，教练让每人各射了 5 箭，她们的成绩如下（单位：环）．

小莉：4，6，5，10，3.

小颖：5，7，8，4，6.

教练问她们俩：“你们认为谁的射箭成绩好一些？”

小莉说：“我有一个满分 10 环，所以我的成绩好．”

小颖说：“我的平均成绩比小莉的高，所以我的成绩好．”

你觉得小莉和小颖谁说得有道理呢？

1. 算术平均数

把一组数据的和除以这组数据的总个数，得到的数值叫做这组数据的**算术平均数**，简称**平均数**．

实践

分别计算小莉和小颖 5 次射箭成绩的算术平均数．

小莉：$\frac{1}{5}(4+6+5+10+3)=\frac{1}{5}\times 28=5.6$(环).

小颖：$\frac{1}{5}(5+7+8+4+6)=\frac{1}{5}\times 30=6.0$(环).

显然小颖的平均成绩高于小莉的平均成绩，因此小颖的射箭成绩好一些．

探索

求数据 102，104，106，108，103，107 的算术平均数．用不同的计算方法试一试．

解法 1：$\frac{1}{6}\times(102+104+106+108+103+107)$

$=\frac{1}{6}\times 630$

$=105$；

解法 2：$\frac{1}{6}\times(102+104+106+108+103+107)$

$=\frac{1}{6}\times[(100+2)+(100+4)+(100+6)+(100+8)+(100+3)+(100+7)]$

$=\frac{1}{6}\times(600+30)$

$=100+5$

$=105.$

在解法 2 中，由于各数据都很接近 100，因此把 100 作为一个基数，再求出每个数据与 100 的差，求出差 2，4，6，8，3，7 的算术平均数，然后再加上 100 就可以了，这种求算术平均数的方法称为简化计算法 .

练习

求下列各组数据的算术平均数：

(1) 2 007，2 012，2 001，2 002，2 008，2 003，2 004；

(2) 991，993，995，992，990，997，999，998，1 000.

一组数据的算术平均数的计算公式如下：

设 n 个数据分别为 x_1，x_2，x_3，…，x_n，它们的算术平均数为 $\overline{x}$，那么

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n).$$

简化计算法的计算公式如下：

设接近平均数的常数为 a，n 个数据与 a 的差分别为 x_1-a，x_2-a，x_3-a，…，x_n-a，这些数据的算术平均数为 $\overline{x'}$，那么 n 个数据的算术平均数 $\overline{x}$ 为：

$$\overline{x}=\overline{x'}+a.$$

交流

在青年歌手大奖赛中，八位评委给选手甲的打分分别为：8.84，9.32，9.41，9.63，9.75，9.78，9.72，9.96. 去掉一个最高分，去掉一个最低分，然后求出其余数据的平均值，以此作为这位选手的最后得分 . 为什么要去掉最高分和最低分呢？

2. 加权平均数

问题二　在一次有 20 人参加的数学竞赛中，其中得 90 分的有 3 人，得

85 分的有 6 人，得 80 分的有 5 人，得 75 分的有 4 人，得 70 分的有 2 人．计算这些同学数学竞赛的平均成绩．

解： $\bar{x}=\dfrac{3\times 90+6\times 85+5\times 80+4\times 75+2\times 70}{3+6+5+4+2}$

$=\dfrac{1620}{20}$

$=81$（分）．

即这些同学数学竞赛的平均成绩是 81 分．

在一组数据中，数据重复出现的次数 f 叫做这个数据的**权数**，简称为这个数据的权．按照这种方法求出的平均数，叫做**加权平均数**．

加权平均数的计算公式为：

如果数据 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，x_3 出现 f_3 次……x_k 出现 f_k 次，这组数据的平均数为 $\bar{x}$，那么

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots+f_kx_k).$$

$$(\text{其中 } n=f_1+f_2+f_3+\cdots+f_k)$$

练习

求下列数据的平均数：

1，1，2，2，3，3，3，5，5，5，6，6，6，7，8，8，8，8，8.

用科学计算器求平均数快捷、准确．

例 8 袋小麦的质量分别为（单位：千克）：

97，98，98，99，100，101，101，102.

求这 8 袋小麦质量的平均数．

解：步骤如下：

	具体操作	结　果
A 型计算器	(97 + 98 × 2 + 99 + 100 + 101 × 2 + 102) ÷ 8 enter	99.5
B 型计算器	(97 + 98 × 2 + 99 + 100 + 101 × 2 + 102) ÷ 8 = S⇔D	99.5

答：这 8 袋小麦质量的平均数为 99.5(千克).

实践

为了检查一批盒装牙签的数量，随机抽出 100 盒进行抽样检测，检测结果如下表所示：

根　数	71	72	73	74	75	76	77	78	79
盒　数	7	16	19	20	16	15	4	1	2

1. 试用科学计算器求出每盒牙签数量的平均数.
2. 如果这批盒装牙签有 10 000 盒，试估计这批牙签的总数量.

9.6 众数和中位数

思考

为了了解某班同学的睡眠状况，对全班 45 名同学一天的平均睡眠时间统计如下：

平均睡眠时间 / 时	7.5	8	8.5	9
人　数	12	26	6	1

你认为该班同学的睡眠状况合理吗?

我们看到：在全班 45 名同学中，一天平均睡眠为 8 小时的人数最多，

我们称 8 小时为这组数据的众数 .

一组数据中出现次数最多的那个数据，叫做这组数据的**众数** .

交流

某城市 7 月份的日平均气温统计如下：

日平均气温 /℃	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
天　数	1	2	2	3	3	4	5	6	4	1

在日平均气温这组数据中，众数是多少？

我们看到：在以上表示气温的数据中，29 ℃出现的频数最多，我们就说这组数据中的众数是 29 ℃ .

将一组数据按大小依次排列，处于中间位置的那个数(或中间两数的平均数)，叫做这组数据的**中位数** . 中位数可以刻画一组数据的集中趋势 .

例 1 某校篮球队五名主力队员的身高分别为(单位：米)：1.68，1.80，1.76，1.75，1.70．在这组数据中，中位数是多少？

解： 将这组数据由小到大排列如下：

1.68，1.70，1.75，1.76，1.80.

由于这组数据的个数是奇数，所以这组数据的中位数为 1.75(米).

例 2 李萍同学在八次跳绳中，每半分钟跳的次数分别为：20，31，26，34，37，28，29，32．求这组数据的中位数 .

解： 将这组数据由小到大排列如下：

20，26，28，29，31，32，34，37.

由于这组数据的个数是偶数，处于中间位置的数据是 29 和 31，我们取这两个数的平均数作为这组数据的中位数，即

$$\frac{29+31}{2}=30.$$

所以这组数据的中位数是 30(次).

练习

1. 一组数据 5，4，4，3，4，3，2，3，5，3 的众数是多少？
2. 一组数据 11，3，4，4，6，11，10，11，5 的众数是多少？
3. 孙斌同学七次投掷铅球的成绩记录如下（单位：米）：

   5.1，5.3，5.8，5.9，5.0，5.2，5.8.

   指出这组数据的中位数．
4. 某班生物小组的八名同学各用 10 粒种子做发芽实验，几天后种子的出芽数分别为：

   8，7，10，6，5，4，9，6.

   求以上数据的众数和中位数．
5. 在某次数学能力测试中，七年级（1）班第 1 小组七名同学的成绩如下（单位：分）：

   50，80，72，95，63，78，100.

   求这组数据的中位数．

思考

1. 当一组数据的个数是奇数时，如何求它的中位数？
2. 当一组数据的个数是偶数时，如何求它的中位数？
3. 中位数是否会受到按大小顺序排列后极端数值的影响？

交流

某校为了合理地安排早自习的时间，随机地对该校 20 名同学从家到学校所用的时间进行了调查，数据如下（单位：分）：

15	35	50	10	60	80	40	30	20	120
30	45	15	35	25	30	45	30	55	60

用什么统计方法能比较科学地表示学生从家到学校所用的时间？

同学甲认为：采用求算术平均数的方法把 20 个数据全部用上了，因此以

它作为根据比较科学．他得出的统计结果为：

$$\frac{1}{20}\times 830=41.5(\text{分}).$$

同学乙认为：采用众数的方法可以代表较多的人的实际情况，结果比较可靠．于是他先列了一个表，如下：

时间 / 分	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	80	120
频　数	1	2	1	1	4	2	1	2	1	1	2	1	1

从表中看出所用时间的众数是 30，于是他把 30(分) 作为统计结果．

同学丙认为：平均数法受到极端数值 (比如 120 分) 的影响比较大，而利用众数的方法只能反映出其中一部分的状况，也存在缺点，因此他认为中位数可以比较客观地反映出实际情况．所以他把这组数据由小到大排列如下：

$$10\quad 15\quad 15\quad 20\quad 25\quad 30\quad 30\quad 30\quad 30\quad \boxed{35\quad 35}\quad 40\quad 45\quad 45\quad 50\quad 55\quad 60\quad 60\quad 80\quad 120$$

处于最中间的两个数是 35，35. 把它们的平均数 35(分) 作为统计结果简便、可靠．

在统计中，采用的方法不同，得到的结论也可能不同．

例 3 某公司共有 15 人，他们的月工资情况如下表．计算该公司的月工资的平均数、中位数和众数．

职　务	经　理	副经理	职　员
人　数	1	2	12
月工资 / 元	5 000	2 000	800

解： 该公司月工资的中位数和众数均为 800 元，而月工资的平均数为

$$5\,000\times\frac{1}{15}+2\,000\times\frac{2}{15}+800\times\frac{12}{15}=1\,240(\text{元}).$$

所以，该公司的月工资的平均数、中位数和众数分别是 1 240 元，800 元，800 元．

你能解释它们的实际意义吗?

练习

为了了解某种灯泡的使用寿命，随机抽取 100 只进行使用寿命试验，数据如下：

寿命 / 时	450	550	650	750	850
只　数	20	19	30	21	10

分别求出灯泡使用寿命这组数据的平均数、众数和中位数 .

习　题　9－2

★基础★

1. 一组数据 3，8，6，7，x 的平均数是 6，求 x 的值 .
2. 在一次歌咏比赛中，六个评委给周小红打的分数分别为：8.1，7.5，8.3，8.4，9.0，8.0. 为了尽可能减少人为因素的影响，去掉一个最高分，去掉一个最低分，那么，周小红的平均分是多少？
3. 已知数据 x_1，x_2，x_3 的平均数是 5，求数据 x_1+1，x_2+1，x_3+1 的平均数 .
4. 5 个数的平均数是 8，其中 4 个数的和是 36，求另一个数的值 .
5. 有 5 个数，前 3 个数的平均数是 6，后 2 个数的平均数是 8，求这 5 个数的平均数 .

★★提升★★

1. 春季运动会上 12 名男生的跳高成绩如下（单位：厘米）：

   158，157，161，158，158，165，160，164，158，166，165，164.

   这组数据的众数是多少？
2. 某同学在报纸上查阅了 5 月 1 日—5 月 15 日某地最高气温的一组数据，列成下表：

日　期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
气温 / ℃	20	24	23	26	23	21	18	19	22	23	26	27	26	28	29

(1) 求前 10 天最高气温的众数；

(2) 求后 10 天最高气温的众数 .

3. 一组数据 2，4，-3，0，x 的中位数是 1，求 x 的值 .

4. 已知 $a<b<c<d$，一组数据 a，a，b，c，d，b，c，c 中，它的众数是________，中位数是________.

★★★ 拓展 ★★★

一组数据 -3，-2，1，3，6，x 的中位数是 1.

(1) 求 x 的值；

(2) 求这组数据的平均数 .

综合与实践

利用树叶的特征对树木分类

(1) 收集三种不同树木的树叶，每种树叶的数量相同，比如，每种树选 10 片树叶 .

(2) 分类测量每种树叶的长和宽，列表记录所得到的数据 .

(3) 分别计算出树叶的长宽比，估计每种树木树叶的长宽比 .

(4) 验证估计的结果 .

阅读理解

谁的解法对

有一个数学问题：某人上山的速度是 v，沿原路返回的速度是 $2v$，问此人上山、下山的平均速度 $\bar{v}$ 是多少 .

小明看完题目后，他联想到求两个数 x_1，x_2 的平均数的方法，即 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，于是他很快便得出了这道题的答案：$\overline{v}=\dfrac{v+2v}{2}=\dfrac{3v}{2}$.

小军不同意小明的解法，他说："这个问题和学过的求平均数的问题不完全一样，它涉及路程、速度、时间之间的关系．由于下山速度是上山速度的 2 倍，所以当路程不变时，下山所用时间等于上山所用时间的一半．"于是他得出了下面的答案：

设上山时间为 t_1，下山时间为 t_2，由于下山速度是上山速度的 2 倍，所以下山时间为上山时间的一半，即 $t_2=\dfrac{1}{2}t_1$．

$$\therefore\quad \overline{v}=\frac{v+2v}{t_1+t_2}=\frac{3v}{t_1+\dfrac{t_1}{2}}=\frac{2v}{t_1}.$$

小刚说："速度的和除以时间的和不等于平均速度，平均速度应该等于路程的和除以时间的和，所以应该采用下面的方法求解．"小刚的解法是：

设单程的路程为 s，根据题意，得上山所用的时间为 $\dfrac{s}{v}$，下山所用的时间为 $\dfrac{s}{2v}$．那么往返所用的时间和为 $\dfrac{s}{v}+\dfrac{s}{2v}$．

$\therefore$ 往返的平均速度 $\overline{v}$ 为

$$\overline{v}=\frac{s+s}{\dfrac{s}{v}+\dfrac{s}{2v}}=\frac{2s}{\dfrac{3s}{2v}}=\frac{4v}{3}.$$

请你分析，小明、小军、小刚三位同学谁说得有道理．

回顾与整理

知识要点

1. 为了对生活中的事物做出合理的决策或可靠的预测，必须掌握数据的收集、整理方法，并会对结果作科学的分析和恰当的描述．

2. 数据的收集和整理的步骤是：

(1) 明确收集数据的目的．

(2) 确定被调查对象的范围．

(3) 选择收集与整理的方法．

(4) 写出分析报告．

3. 采用绘制扇形统计图可以鲜明生动地表示数据的百分比．

4. 用平均数（或加权平均数）、众数和中位数可以描述一组数据的集中趋势．

(1) 平均数公式：$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$；

$$\overline{x}=\overline{x'}+a.$$

(2) 加权平均数公式：$\overline{x}=\frac{1}{n}(f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots+f_kx_k)$.

（其中 $n=f_1+f_2+f_3+\cdots+f_k$）

(3) 众数：一组数据中出现次数最多的那个数据，叫做这组数据的众数．

(4) 中位数：一组数据按大小顺序依次排列，处于中间位置的数（或中间两数的平均数），叫做这组数据的中位数．

学习指导

1. 为了适应国民经济和科学技术的发展，收集与整理数据的意义显得更加重要，所以要认真学习统计的基础知识，加强统计观念，提高对事物的分析、决策和预测能力．

2. 正确掌握数据的收集、整理和表示的方法，养成认真、严谨的好习惯．

学习指导

3. 注意留心身边的各种问题，加强收集数据的意识，熟悉收集、整理和表示数据的方法.

4. 要学会选择合理、简捷的表示数据的方法，学会用计算机绘制统计图的方法.

5. 掌握用平均数、众数和中位数从各种不同的角度分析一组数据的集中趋势的方法，让平均数、众数和中位数等数据在解决实际问题中发挥应有的作用.

复 习 题

★基础★

1. 为了了解全班同学体重的状况，李新同学把一次体检中 25 名男同学的体重作了记录，整理如下(单位：千克)：

45	49	55	58	54	50	57	44	60	62	61	51	53
56	48	52	54	50	47	59	52	58	54	51	49	

请你设计一种统计的方法，对该班男生的体重进行分类，并提出建议.

2. 对全班同学最喜欢的体育项目进行统计,并把统计的结果设计成统计表. 这属于哪类调查?

3. 对 10 天的天气状况进行观测、记录，并设计一个统计表.

4. 全班同学每人分别投掷硬币两次，统计一下，正面朝上的次数共出现多少次，统计它占总投掷次数的百分比.

5. 统计一下全班同学家中收藏有中国古代四大名著《三国演义》、《水浒传》、《西游记》、《红楼梦》的数目，并分别用条形统计图和扇形统计图加以表示.

6. “众志成城，抗震救灾”. 某小组 7 名同学积极捐出自己的零花钱支援灾区. 他们捐款的数额分别是(单位：元)：50，20，50，30，50，25，135. 分别求这组数据的众数和中位数.

7. 某校在“爱护地球，绿化祖国”的活动中，组织同学开展植树造林活动. 为了解全校同学的植树情况，学校随机抽查了 100 名同学的植树情况，将调查数据整理如下表：

植树棵数 / 棵	4	5	6	8	10
人　数	30	22	25	15	8

那么这 100 名同学平均每人植树多少棵? 如果该校共有 1 000 名同学，请根据以上调查结果估计该校同学共植树多少棵.

★★提升★★

1. 对于数据 2，2，3，2，5，2，10，2，5，2，3，有以下几种说法：

(1) 众数是 2；　　(2) 众数与中位数的数值不等；

(3) 中位数与平均数相等；　　(4) 平均数与众数的数值相等 .

其中正确的结论有 (　　) 个 .

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 一组数据为 x，19，20，43，且 $20 < x < 28$，它们的平均数为一个整数，求这组数据的平均数 .

3. 已知数据 x_1，x_2，x_3，x_4 的平均数为 10，求数据 x_1+1，x_2+2，x_3+3，x_4+4 的平均数 .

4. 已知 m 个数据的平均数为 a，n 个数据的平均数为 b，那么这 $(m+n)$ 个数据的平均数是多少？

5. 在一次数学竞赛中，某班同学分成三组 . 甲组 16 人的平均分数为 75 分，乙组 10 人的平均分数为 76 分，丙组 14 人的平均分数为 80 分 . 求全班同学的平均成绩 .

6. 数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，数据 y_1，y_2，y_3，…，y_n 的平均数为 $\bar{y}$，那么数据 $2x_1-y_1$，$2x_2-y_2$，$2x_3-y_3$，…，$2x_n-y_n$ 的平均数是多少？

7. 在一次数学比赛中，七年级 (1) 班得 100 分的有 4 人，得 95 分的有 6 人，得 90 分的有 10 人，得 85 分的有 5 人，得 80 分的有 7 人，得 75 分的有 8 人，得 70 分的有 3 人，得 65 分的有 4 人，得 60 分的有 3 人 . 分别求出该班数学比赛成绩的平均分、众数和中位数 .

★★★拓展★★★

1. 现有 20 道选择题，评分标准为：答对 1 题得 3 分，答错 1 题扣 1 分，不答得 0 分 . 某学生答对 12 题，答错 5 题，3 题未答 . 求该学生的得分及平均每题的得分 .（结果保留 1 位小数）

2. 有一组数据各不相等，那么将这组数据的平均数与这组数据中的数进行比较，正确的结论是 (　　).

A. 这组数据的平均数大于这组数据中的每一个数

B. 这组数据的平均数小于这组数据中的每一个数

C. 这组数据的平均数一定等于其中的某一个数

D. 这组数据的平均数至少大于其中的一个数，且至少小于其中的一个数

3. 已知数据 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 的平均数为 k_1；a_6，a_7，a_8，a_9，a_{10} 的平均数为 k_2. k_1 与 k_2 的平均数为 k，a_1，a_2，a_3，…，a_8，a_9，a_{10} 的平均数为 m，那么 k 与 m 的大小关系是 (　　).

A. $k>m$　　B. $k<m$　　C. $k=m$　　D. 不能确定

附　录

部分中英文词汇索引