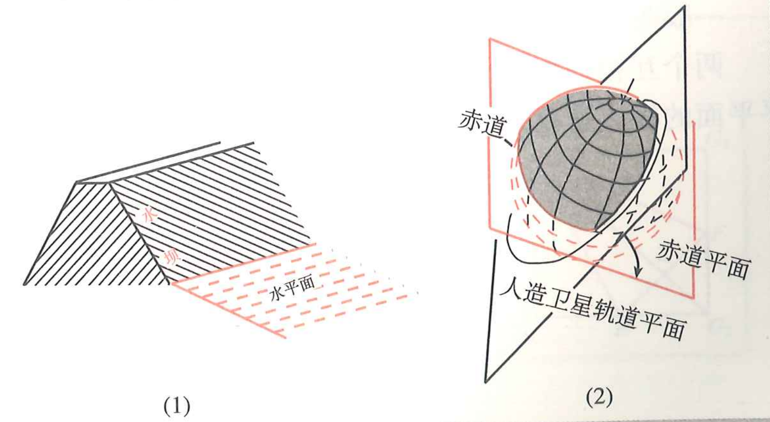
2.3.2 平面与平面垂直的判定

为了解决实际问题，人们需要研究两个平面所成的角. 如图 2.3-10，修筑水坝时，为了使水坝坚固耐用，必须使水坝面与水平面成适当的角度；发射人造地球卫星时，也要根据需要，使卫星轨道平面与地球赤道平面成一定的角度. 为此，我们引入二面角的概念，研究两个平面所成的角.



(1)　(2)

图 2.3-10

如图 2.3-11，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**（dihedral angle）．这条直线叫做**二面角的棱**，这两个半平面叫做**二面角的面**．棱为 AB、面分别为 α，β 的二面角记作二面角 α-AB-β．有时为了方便，也可在 α，β 内（棱以外的半平面部分）分别取点 P，Q，将这个二面角记作二面角 P-AB-Q❶．如果棱记作 l，那么这个二面角记作二面角 α-l-β 或 P-l-Q．

平面内的一条直线把平面分成两部分，这两部分通常称为半平面．

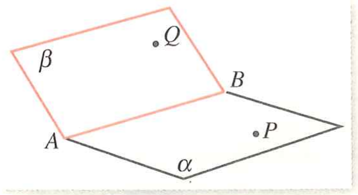


图 2.3-11

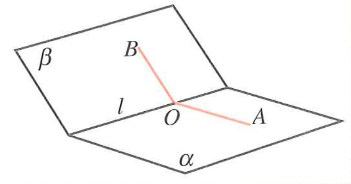


图 2.3-12

我们常说"把门开大一些"，是指哪个角大一些？我们应该怎样刻画二面角的大小呢？

如图 2.3-12，在二面角 α-l-β 的棱 l 上任取一点 O，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做**二面角的平面角**．

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度．平面角是直角的二面角叫做直二面角．

$\angle AOB$ 的大小与点 O 在 l 上的位置有关吗？为什么？

观察

教室相邻的两个墙面与地面可以构成几个二面角？分别指出构成这些二面角的面、棱、平面角及其度数．

教室里的墙面所在平面与地面所在平面相交，它们所成的二面角是直二面角，我们常说墙面直立于地面上．

一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这**两个平面互相垂直**．

两个互相垂直的平面通常画成图 2.3-13 的样子，此时，把直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直．平面 α 与 β 垂直，记作 $\alpha\perp\beta$．

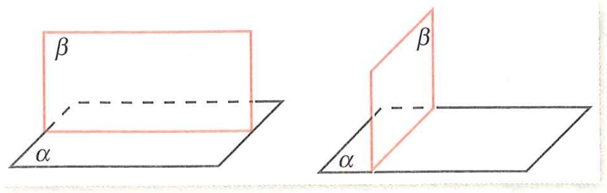


图 2.3-13

❶ 也可记作"$^{2}\angle AB$"．

一般地，我们有下面判定两个平面互相垂直的定理．

定理 **一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直．**

这个定理说明，可以由直线与平面垂直证明平面与平面垂直．

例 3 如图 2.3-14，AB 是⊙O 的直径，PA 垂直于⊙O所在的平面，C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点，求证：平面 $PAC\perp$平面 PBC．

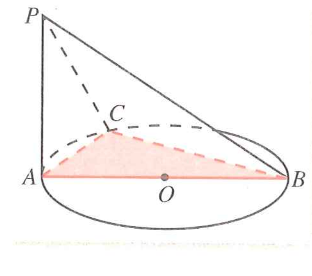


图 2.3-14

证明： 设⊙O 所在平面为 α，由已知条件，

$PA\perp\alpha$，BC 在 α 内，

所以 $PA\perp BC$．

因为点 C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点，AB 是⊙O 的直径，

所以，$\angle BCA$ 是直角，即 $BC\perp AC$．

又因为 PA 与 AC 是△PAC 所在平面内的两条相交直线，

所以，$BC\perp$平面 PAC．

又因为 BC 在平面 PBC 内，

所以，平面 $PAC\perp$平面 PBC．

探究

如图 2.3-15，已知 $AB\perp$平面 BCD，$BC\perp CD$，你能发现哪些平面互相垂直，为什么？

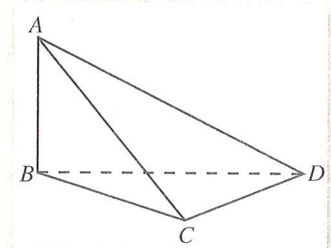
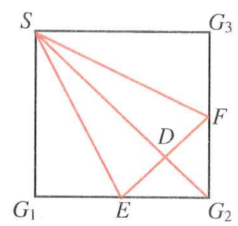


图 2.3-15

练 习

如图，正方形 $SG_1G_2G_3$ 中，E，F 分别是 G_1G_2，G_2G_3 的中点，D 是 EF 的中点，现在沿 SE，SF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1，G_2，G_3 三点重合，重合后的点记为 G，则在四面体S-EFG中必有（　　）



(A) $SG\perp$△EFG 所在平面　　(B) $SD\perp$△EFG 所在平面

(C) $GF\perp$△SEF 所在平面　　(D) $GD\perp$△SEF 所在平面