1.4.3 正切函数的性质与图象

探究

你能否根据研究正弦函数、余弦函数的图象与性质的经验，以同样的方法研究正切函数的图象与性质？

有了前面的知识准备，我们可以从一个新的角度来研究正切函数的性质.

(1) 周期性

由诱导公式

$$\tan(x+\pi)=\tan x,\ x\in\mathbf{R},\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

可知，正切函数是周期函数，周期是 π[1].

(2) 奇偶性

由诱导公式

$$\tan(-x)=-\tan x,\ x\in\mathbf{R},\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

可知，正切函数是奇函数.

(3) 单调性

如图 1.4-8(Ⅰ)(Ⅱ)，由正切线的变化规律可以得出，正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数. 又由正切函数的周期性可知，**正切函数在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 内都是增函数.**

[1] 本书证明从略. 同学们可以从图象上观察出这一结论. 也可以利用单位圆中的正切线来讨论正切函数的周期性、奇偶性.

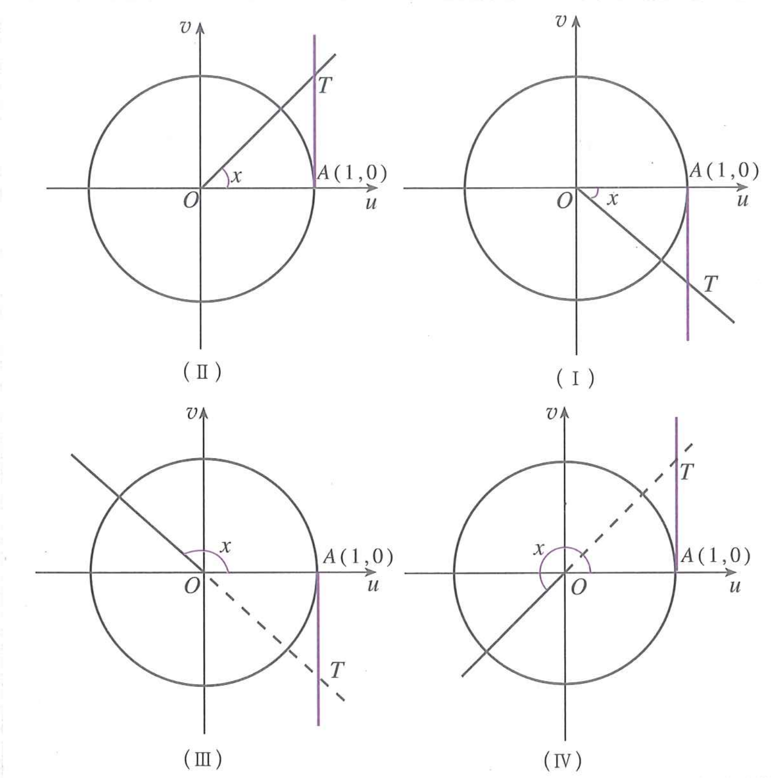

图 1.4-8

(4) 值域

如图 1.4-8（Ⅰ），当 x 大于 $-\frac{\pi}{2}$ 且无限接近 $-\frac{\pi}{2}$ 时，正切线 AT 向 Ov 轴的负方向无限延伸；如图 1.4-8（Ⅱ）当 x 小于 $\frac{\pi}{2}$ 且无限接近 $\frac{\pi}{2}$ 时，正切线 AT 向 Ov 轴的正方向无限延伸. 因此，$\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内可以取任意实数，但没有最大值、最小值.

因此，**正切函数的值域是实数集 R.**

下面，利用正切线画出函数

$$y=\tan x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

的图象（图 1.4-9）.

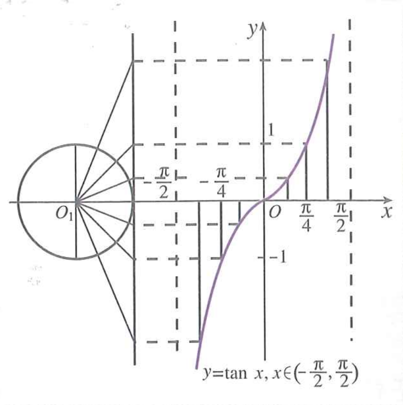

图 1.4-9

你能类比正弦函数图象的作法，说说图 1.4-9 的作法吗？

根据正切函数的周期性，只要把上述图象向左、右扩展，就可以得到正切函数

$$y=\tan x,\ x\in\mathbf{R},\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

的图象，我们把它叫做正切曲线（图 1.4-10）.

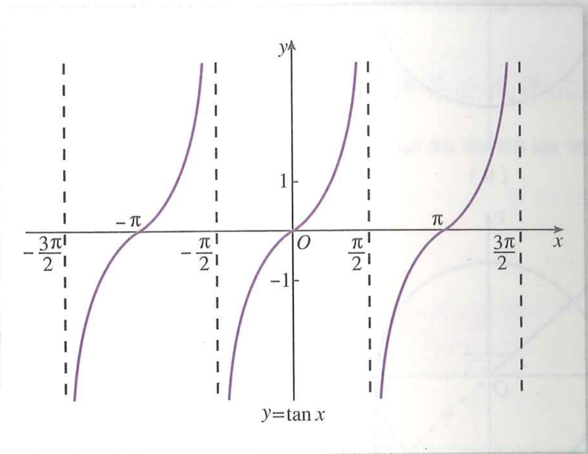

图 1.4-10

从图 1.4-10 可以看出，正切曲线是被相互平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 所隔开的无穷多支曲线组成的.

思考

你能从正切函数的图象出发，讨论它的性质吗？

例 6 求函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域、周期和单调区间.

解：函数的自变量 x 应满足

$$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z},$$

即

$$x\neq 2k+\frac{1}{3},\ k\in\mathbf{Z}.$$

所以，函数的定义域是 $\left\{x\,\middle|\,x\neq 2k+\frac{1}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

由于

$$f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}+\pi\right)$$
$$=\tan\left[\frac{\pi}{2}(x+2)+\frac{\pi}{3}\right]=f(x+2),$$

因此函数的周期为 2.

由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 解得

$$-\frac{5}{3}+2k<x<\frac{1}{3}+2k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

因此，函数的单调递增区间是

$$\left(-\frac{5}{3}+2k,\ \frac{1}{3}+2k\right),\ k\in\mathbf{Z}.$$

练习

1. 根据图 1.4-9，写出利用正切线画函数

$$y=\tan x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

图象的方法.

2. 观察正切曲线，写出满足下列条件的 x 值的范围：

（1）$\tan x>0$；　（2）$\tan x=0$；　（3）$\tan x<0$.

3. 求函数 $y=\tan 3x$ 的定义域.

4. 求下列函数的周期：

（1）$y=\tan 2x$，$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$；

（2）$y=5\tan\frac{x}{2}$，$x\neq(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$.

5.（1）正切函数在整个定义域内是增函数吗？为什么？

（2）正切函数会不会在某一区间内是减函数？为什么？

6. 利用正切函数的单调性比较下列各组中两个正切值的大小：

（1）$\tan 138°$ 与 $\tan 143°$；

（2）$\tan\left(-\frac{13}{4}\pi\right)$ 与 $\tan\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$.