学科模块题答案解析

模块一　数量与代数式答案解析

一、选择题（共 20 题，每小题 2 分，共 40 分）

1.【答案】D。

【解析】-2020 的倒数为 $-\frac{1}{2020}$，所以 -2020 的倒数的绝对值是 $\frac{1}{2020}$，故本题选 D。

2.【答案】C。

【解析】绝对值大于 1 而小于 4 的整数有 $\pm2,\pm3$。故本题选 C。

3.【答案】B。

【解析】①4 是 64 的立方根，原式不符合题意；$\sqrt[3]{x^3}=x$，符合题意；③ $\sqrt{64}=8$，8 的立方根是 2，原式符合题意；④ $\sqrt[3]{(\pm8)^2}=\sqrt[3]{64}=4$，原式不符合题意。则正确的个数为 2 个。故本题选 B。

4.【答案】A。

【解析】π 的相反数是 $-\pi$，所以①不符合题意；只有符号不同的两个数互为相反数，所以②⑤不符合题意；$-(-3.8)$ 的相反数是 -3.8，所以③不符合题意；0 的相反数是 0，等于它本身，所以④不符合题意；综上，5 个说法皆错，故本题选 A。

5.【答案】A。

【解析】①最大的负整数为 $-1,-1$ 的相反数是 $1,1$ 是最小的正整数，故符合题意；②相反数是本身的数是 $0,$ 故不符合题意；③当 $a<0$ 时，在数轴上表示 $-a$ 的点为正数，在原点的右边，故不符合题意；④在数轴上 7 与 9 之间的整数为 $8,8$ 的相反数是 $-8,$ 故符合题意。故本题选 A。

6.【答案】C。

【解析】①5 是 25 的算术平方根，符合题意；② $\frac{5}{6}$ 是 $\frac{25}{36}$ 的一个平方根，符合题意；③ $(-4)^2$ 的平方根是 ±4，不符合题意；④立方根和算术平方根都等于自身的数是 0 和 1，符合题意。故本题选 C。

7.【答案】B。

【解析】A. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，符合平方差公式，不符合题意；

B. $(-a+b)(a-b)=-(a-b)^2=-a^2+2ab-b^2$, 符合完全平方公式，符合题意；

C. $(-a-b)(a-b)=-(a+b)(a-b)=-a^2+b^2$, 符合平方差公式，不符合题意；

D. $(a+b)(b-a)=(b+a)(b-a)=b^2-a^2$, 符合平方差公式，不符合题意；故本题选 B。

8.【答案】B。

【解析】①互为相反数的两个数相加和为 0, 移项后两边加上绝对值是相等的，所以互为相反数的两个数绝对值相等，故①符合题意；所以②不符合题意；③因为 $2\neq-2$，但 $|2|=|-2|$，故③不符合题意；④因为 $|2|=|-2|$，但 $2\neq-2$，所以④不符合题意。故本题选 B。

9. 【答案】B。

【解析】A. $-2a^2+4a=-2a(a-2)$，故此选项错误；B. $3ax^2-6axy+3ay^2=3a(x^2-2xy+y^2)=3a(x-y)^2$，故此选项正确；C. $2x^2+3x^3+x=x(2x+3x^2+1)$, 故此选项错误；D. m^2+n^2 不能因式分解，故此选项错误。故本题选 B。

10.【答案】B。

【解析】分式 $\frac{ab}{a-b}$ 中 $,a,b$ 扩大 2 倍，则分式的值为 $\frac{2a\cdot2b}{2a-2b}=\frac{2ab}{a-b}$，故本题选 B。

11.【答案】C。

【解析】分式的分子和分母同时除以 $(a+b)$, 应得 $2a+2b$, 即 A 不正确，

12.【答案】B。

【解析】由题意，得 $1-(x-2)=x$ 故本题选 B。

13.【答案】C。

【解析】A.分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的分子、分母变化的倍数不一样，所以该分式与分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的值不相等，故本选项不符合题意；B.分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的分子、分母变化的倍数不一样，所以该分式与分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的值不相等，故本选项不符合题意；C.分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的分子、分母同时乘以不为零的因式 $(x-3)$, 分式的值不变，所以该分式与分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的值相等，故本选项符合题意。D.分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的分子、分母变化的倍数不一样，所以该分式与分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的值不相等，故本选项不符合题

意；故本题选 C。

14.【答案】B

【解析】由数轴的定义得:$1<a<2$ $\therefore -2<-a<-1 \therefore |a|<2$ 又$\because -a<b<a$，$\therefore b$ 到原点的距离一定小于 2，观察四个选项，只有选项 B 符合。故本题选 B。

15.【答案】D。

【解析】a 是关于 x 的一元二次方 $(x-m)(x-n)+1=0$ 的根，$\therefore (a-m)(a-n)+1=0$ $\therefore (a-m)(a-n)=-1<0,$ $\therefore m<n,$ $\therefore m<a<n,$ 同理 $:m<b<n, \because a<b, \therefore m<a<b<n.$ 故本题选 D。

16.【答案】C。

【解析】$\sqrt{4}, -\frac{10}{3}, 0.212121$ 是有理数，$\sqrt{2}$ 是无理数，故本题选 C。

17.【答案】B。

【解析】因为 a 能整除 19，所以 $19\div a$ 的值是一个整数，因为 $19=1\times 19,$ 所以 a 是 1 或 19。故本题选 B。

18.【答案】D。

【解析】画树状图如下：

共有 12 种等可能的结果，停止转动后两个转盘上指针所指的数字恰好都能被 3 整除的结果有 2 种，同时转动两个转盘，停止转动后。两个转盘上指针所指的数字恰好都能被 3 整除的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$。故本题选 D。

19.【答案】D。

【解析】不大于 3 的整数绝对值有 0，1，2，3，因为互为相反数的两个数的绝对值相等，所以绝对值不大于 3 的整数是 $0,\pm1,\pm2,\pm3$；故本题选 D。

20.【答案】B。

【解析】（1）无理数就是开方开不尽的数，例如：2.121121112(两个 2 之间多一个 1)是

无理数，但不是开方开不尽的数，故不符合题意；（2）零不是无理数，故不符合题意；（3）无理数是无限不循环小数，故符合题意；（4）数轴上的点与实数一一对应，故无理数也可以在数轴上表示，故符合题意；综上，正确的说法只有 2 个。故本题选 B。

模块二　复数模块答案解析部分

一、单选题

1.【答案】C

【解析】因为$Z=\dfrac{-1-2i}{(1+i)^2}=\dfrac{-1-2i}{2i}=\dfrac{-1}{2i}-1=\dfrac{-i}{2i^2}-1=-1+\dfrac{1}{2}i$，所以.$\overline{Z}=-1+\dfrac{1}{2}i$。故本题选 C。

2.【答案】C

【解析】$\because \overline{Z}=3-4i$，$\therefore i\overline{Z}=i(3-4i)=4+3i$，所以$\left|i\overline{Z}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，故本题选 C。

3.【答案】C

【解析】因为，$Z(1+i)^3=1-i \Leftrightarrow Z=\dfrac{1-i}{(1+i)^3}=\dfrac{1-i}{2(i-1)}=-\dfrac{1}{2}$, 所以复数 Z 对应的点是$(-\dfrac{1}{2},0)$，所以在直线$x=-\dfrac{1}{2}$上。故本题选 C。

4.【答案】B

【解析】由题得$Z=\dfrac{5}{2-i}=\dfrac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{5(2+i)}{5}=2+\mathrm{i}$, 故本题选 B.

5.【答案】C

【解析】由题得，$Z=\dfrac{2+i}{1-2i}+1+i=\dfrac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}+1+i=\dfrac{5i}{5}+1+i=1+2\mathrm{i}$, 所以.$\overline{Z}=1-2i$，$\therefore Z$ 的虚部为-2。故本题选 C.

6.【答案】D

【解析】$\because Z=1-i$，则$\overline{Z}=1+i$，$\therefore (1-i)\overline{Z}=(1-i)(1+i)=1-\mathrm{i}^2=2$ 3。故本题选 D

7.【答案】D

【解析】因为$Z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$，所以复数$z$的共轭复数为$\overline{Z}=i$，$a=0,b=1$则$a+b=0+1=1$，故本题选 D。

8.【答案】B

【解析】$a+bi=\dfrac{2+i}{i}=1-2i$，$\therefore a=1,b=-2$，$\therefore a+b=-1$。故本题选 B。

9.【答案】D

【解析】$\because i^{2020}=\left(i^4\right)^{505}=1$，在等式 $z(3+i)=3+i^{2020}$ 两边同时除以 $3+i$ 得 $Z=\dfrac{3+i^{2020}}{3+i}=\dfrac{4(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{6}{5}-\dfrac{2}{5}i\therefore\overline{Z}=\dfrac{6}{5}+\dfrac{2}{5}i$，因此，复数 Z 的虚部为$\dfrac{2}{5}$。故本题选 D。

10.【答案】D

【解析】由题可得$Z=\dfrac{3-i}{i}-1=-2-3i$，即z的共轭复数$\overline{Z}=-2+3i$，故本题选 D

二、填空题

1.【答案】1-3i

【解析】因为，$Z=\dfrac{10i}{3+i}=\dfrac{10i(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{10(1+3i)}{10}=1+3i$，所以$\overline{Z}=1-3i$。

2.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】由，$Z.Z_0=2Z+Z_0$，得 $(Z_0-2)Z=Z_0$，，$\because$ $Z_0=3+i$，，$\therefore Z=\dfrac{3+i}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+i)(1-i)}{(1+\mathrm{i})(1-i)}=2-i$，则$|Z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$。

3.【答案】$2\sqrt{5}$

【解析】$\because$ 复数 z 满足 $iZ=2+4i$，，$\therefore$ $Z=\dfrac{2+4i}{\mathrm{i}}=\dfrac{2i+4i^2}{i^2}=4-2i$，$\therefore$ $|Z|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$。

4.【答案】24；-7-24i

【解析】$\because Z=(3+4i)^2=3^2+2\times3\times4i+(4i)^2=-7+24i$，$\therefore$复数 z 的虚部为 24，进

而由复数 z 和其共轭复数的关系，从而求出复数 z 的共轭复数 $\overline{Z}=-7-24i$。

5.【答案】$\sqrt{5}$；1+2i

【解析】由图可知，$\overrightarrow{OA}=(2,-1)$，所以 $Z=2-i$,，所以，$|Z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，

$Zi=(2-i).i=1+2i$。

6.【答案】-3-2i

【解析】由 $Z=3-2i$,，则 $\overline{Z}=3+2i$，所以 $-\overline{Z}=-3-2i$。

7.【答案】$\sqrt{10}$

【解析】,$\because(Z-2)i=1+i$，$\therefore Z=\dfrac{1+i}{i}+2=\dfrac{1+3i}{i}=3-i$, $|Z|=\sqrt{10}$，故本题选 $\sqrt{10}$。

8.【答案】2

【解析】由题意，复数 $z=\dfrac{2+6i}{3-i}=\dfrac{(2+6i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{20i}{10}=2i$，所以复数 z 的虚部为 2.

9.【答案】2

【解析】$\because z=\dfrac{3+2i}{i}=\dfrac{3i-2}{-1}=2-3i$，$\therefore$ 复数 z 的实部为 2。

10.【答案】-2+3i

【解析】由题可知，A,B,C 点坐标为 $(-4,1),(3,2),(1,5)$，故可得 $\overrightarrow{BC}=(-2,3)$，故其对应复数为.$-2+3i$。

三、解答题

1.【答案】解：因为复数 $z=(a-2)+3i$(a 是实数)是纯虚数，所以 $a-2=0$，解得 $a=2$，所以 $\dfrac{a+i}{1+ai}=\dfrac{2+i}{1+2i}=\dfrac{(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{4-3i}{5}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$

2.【答案】(1) 解：$\because z$ 是纯虚数，$\therefore\begin{cases}m^2-3m+2=0\\m-1\neq0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=1\text{或}m=2\\m\neq1\end{cases}$，$\therefore m=2$

（2）解：z 所对应的点是 $(m^2-3m+2,m-1)$，$\because z$ 所对应的点在直线 $y=2x+1$ 的上方，即 $m-1>2(m^2-3m+2)+1$，化简得 $2m^2-7m+6<0$，即 $(m-2)(2m-3)<0$，$\therefore\dfrac{3}{2}<m<2$.

3.【答案】(1) 解：$z=\dfrac{a}{1+2i}+i=\dfrac{a(1-2i)}{(1-2i)(1+2i)}+i=\dfrac{a-2ai}{5}+i=\dfrac{a}{5}+\dfrac{5-2a}{5}i$，若 $z\in R$，则 $\dfrac{5-2a}{5}=0$，得 $a=\dfrac{5}{2}$，此时 $z=\dfrac{1}{2}$；

（2）解：若z在复平面内对应的点位于第一象限，则$\frac{a}{5}>0$且$\frac{5-2a}{5}>0$，得$\begin{cases}a>0\\a<\frac{5}{2}\end{cases}$，即$0<a<\frac{5}{2}$，即$a$的取值范围是$0<a<\frac{5}{2}$.

4.【答案】（1）解：因为$z\cdot z_0=2z+z_0$，所以$z_0=\frac{2z}{z-1}=\frac{2(1-2i)}{-2i}=2+i$，所以复数$z_0$的共轭复数为$2-i$.

（2）解：因为z是关于x的方程$x^2-mx+5=0$的一个虚根，所以$(1-2i)^2-m(1-2i)+5=0$，即$(2-m)+(2m-4)i=0$。又因为m是实数，所以$m=2$.

5.【答案】（1）解：因为$z_1=m-2i$为纯虚数，所以$m=0$．又$n=1$，所以$z_1=-2i$，$z_2=1-i$，从而$z_1+z_2=1-3i$．因此$|z_1+z_2|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

（2）解：因为$z_1=(\overline{z_2})^2$，所以$m-2i=(1+ni)^2$，即$m-2i=(1-n^2)+2ni$．又m，n为实数，所以$\begin{cases}m=1-n^2,\\-2=2n,\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=0,\\n=-1.\end{cases}$。

6.【答案】（1）解：∵复数$z=a+bi(a,b\in R)$，且存在实数t使$a-bi=\frac{2+4i}{t}-3ati$成立，∴$ta-tbi=2+(4-3at^2)i$，∴$ta=2$，　$-tb=4-3at^2$，∴$-b\cdot\frac{2}{a}=4-3a\cdot\frac{4}{a^2}$，∴$-2b=4a-12$，∴$2a+b=6$，即$2a+b$为定值。

（2）解：由（1）有$b=6-2a$，∵$z=a+bi(a,b\in R)$，$|z-2|<5$，∴$\sqrt{(a-2)^2+(6-2a)^2}<5$，∴整理得$5a^2-28a+15<0$，∴$\frac{3}{5}<a<5$，∵$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(6-2a)^2}$，∴$|z|^2=5a^2-24a+36=5\left(a-\frac{12}{5}\right)^2+\frac{36}{5}$，$\frac{3}{5}<a<5$，∴$\frac{36}{5}\le|z|<41$，∴$|z|$的取值范围为.$\left[\frac{6\sqrt{5}}{5},\sqrt{41}\right)$。

7.【答案】（1）解：因为$z_1=m-2i$为纯虚数，所以$m=0$．又$n=1$，所以$z_1=-2i$，$z_2=1-i$，从而$z_1+z_2=1-3i$．因此$|z_1+z_2|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$。

（2）解：因为$z_1=(\overline{z_2})^2$，所以$m-2i=(1+ni)^2$，即$m-2i=(1-n^2)+2ni$．又m，n为实数，所以$\begin{cases}m=1-n^2,\\-2=2n,\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=0,\\n=-1.\end{cases}$

8.【答案】(1)解：∵$z=1-i$，∴$z^2-z=(1-i)^2-(1-i)=1-2i+i^2-1+i=-1-i$

（2）解：∵$z_1=2i$，$z_2=2+i$，∴$\frac{z_1+z_2}{z}=\frac{2i+2+i}{1-i}=\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$

9.【答案】（1）解：设$z=a+bi(a,b\in R且a>0)$，由$|Z|=\sqrt{5}$，得$a^2+b^2=5$，又复数$(1+3i)(a+bi)=(a-3b)+(3a+b)i$在复平面内对应的点在第一、三象限的角平分线上，则$a-3b=3a+b$，即$a=-2b$．由$\begin{cases}a=-2b\\a^2+b^2=5\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=1\end{cases}$（舍去）∴$z=2-i$

（2）解：由题意得$\overline{z}+m^2(1+i)-2i+2m-5=m^2+2\mathrm{m}-3+(m^2-1)\mathrm{i}$，∵复数$\overline{z}+m^2(1+\mathrm{i})-2\mathrm{i}+2m-5$为纯虚数，∴$\begin{cases}m^2-1\neq0\\m^2+2m-3=0\end{cases}$解得 m=-3，∴实数$m$的值为$-3$

10.【答案】（1）解：当$m=1$时，$z=3-4i$，∴$\frac{z}{1+i}=\frac{3-4i}{1+i}=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$

（2）解：∵复数z在复平面内对应的点位于第二象限，∴$\begin{cases}m^2+2m<0\\m^2-2m-3>0\end{cases}$，解得$-2<m<-1$，所以$m$的取值范围是$(-2,-1)$.

模块三　集合和逻辑答案解析部分

一、单选题

1.【答案】B

【解析】由题意得，A={x|-1<x<4}，B={0，1，2，3}，∴A∩B={0，1，2，3}，故本题选 B

2.【答案】A

【解析】当 $\cos\varphi=0$ 时，$\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，故“$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$”是“$\cos\varphi=0$”的充分不必要条件。故本题选 A.

3.【答案】B

【解析】$\because A=\{x|\log_2(x-2)<1\}=\{x|0<x-2<2\}=(2,4)$，$B=\{x|x^2-3x-4<0\}=(-1,4)$，$\because \cup=R$，则 $C_uA=(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$，因此，$C_uA\cap B=(-1,2]$。故本题选 B.

4.【答案】B

【解析】命题 $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\le\sin x$ 的否定是 $\exists x_o\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x_0>\sin x_0$，故本题选 B。

5.【答案】B

【解析】由$a^2>a$，则 $a>1$ 或 $a<0$，由 $a>1$ 可以推出，$a>1$ 或 $a<0$，反之不成立。所以“$a^2>a$”是“$a>1$”的必要不充分条件。故本题选 B

6.【答案】C

【解析】$A\cup B=\{-1,2,3,4,5\}$。故本题选 C。

7.【答案】D

【解析】由题意，根据全称命题与存在性命题的关系，可得命题“$\forall x\in R$，$x^2+1\ge0$”的否定为“$\exists x\in R$，$x^2+1<0$”。故本题选 D.

8.【答案】A

【解析】解：命题乙为“$|x-1|<3$”解得：．$-2<x<4$。又命题甲为“$0<x<3$”，因为$(0,3)\not\subset(-2,4)$，那么甲是乙的充分不必要条件。故本题选 A。

9.【答案】C

【解析】解：因为$\begin{cases}x+y=5\\3x-4y=-6\end{cases}$，所以$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$。所以解集为$\{(2,3)\}$。故本题选 C。

10.【答案】A

【解析】由 $P=\{x|x=2k,k\in N\}$ 可得集合 P 是由全体非负偶数构成的即

$\mathrm{P}=\{0,2,4,6,\ldots\}$ $\mathrm{M}=\left\{x\left|x=2^{2k+1},k\in N\right.\right\}=\left\{x\left|x=2\times 4^{k},k\in N\right.\right\}$ 集合 M 是由 $4^{k}(k\in N)$ 的 2 倍构成的，即 $M=\{2,8,32,128,\ldots\}$，所以 $M\subseteq P$。故本题选 A。

11.【答案】D

【解析】因为甲：$(x-m)(y-n)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x-m<0\\y-n>0\end{cases}$或$\begin{cases}x-m>0\\y-n<0\end{cases}$，所以甲是乙的必要不充分条件。故本题选 D。

12.【答案】C

【解析】因为 $A=\left\{x\left|x^{2}-2x<0\right.\right\}=\left\{x\left|0<x<2\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x\geq 1\right.\right\}$，所以 $\mathrm{C_u}B=\{x\mid x<1\}$，所以 $A\cup\left(\mathrm{C_u}B\right)=\{x\mid x<2\}$。故本题选 C

13.【答案】A

【解析】$A=\left\{x\left|1<2^{x}\leq 16\right.\right\}=\left\{x\left|0<x\leq 4\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x-6}\geq 0\right.\right\}=\{x\mid\ x\leq \text{或}x>6\}$，$C_{R}B=\{x\mid 1<x\leq 6\}$，$A\cap C_{R}B=\{x\mid 1<x\leq 4\}$。故本题选 A。

14.【答案】D

【解析】因为“有一个”，“至少存在一个”，“有些”均为存在量词，即 ABC 不合题意；“每个”是全称量词，即 D 符合题意。故本题选 D

15.【答案】C

【解析】若 $a=1$，则 $2a-1=1$，矛盾；若 $2a-1=1$，则 $a=1$，矛盾，故 $2a^{2}-1=1$，解得 $a=1$（舍）或 $a=-1$，故 $M=\{-1,-3,1\}$，元素之和为-3，故本题选 C.

16.【答案】D

【解析】解：当 $a=-1,b=-2$ 时，$a>b$，但$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}<1$；当 $a=-2,b=-1$ 时，$\frac{a}{b}>1$，但 $a<b$；综上，“$a>b$”是“$\frac{a}{b}>1$”的既不充分也不必要条件，故本题选 D.

17.【答案】B

【解析】解：对于命题 $P:\begin{cases}a>-3\\b>-3\end{cases}$ $a+b>-6$，可得到 $a+b>-6$，但是 ab 与 9 没有关系，当命题 $\mathrm{q}:\begin{cases}a+b>-6\\ab>9\end{cases}$，整理，$(a+3)(b+3)=ab+3(a+b)+9>9+9-18=0$；即得到$\begin{cases}a>-3\\b>-3\end{cases}$故 p 是 q 的必要不充分条件。故本题选 B.

18.【答案】A

【解析】因为 $a>2$ 且 $b>2$，由不等式的性质，可得 $a+b>4$，故是充分条件，又当 a＝1，b＝7 时，满足 a+b>4，但不满足 $a>2$ 且 $b>2$，故不是必要条件，故本题选 A.

19.【答案】B

【解析】因为 $\{x|2-x\geq 0\}=\{x|\ x\leq 2\}$，所以 $x\in\{x|0\leq x\leq 2\}\Leftrightarrow x\in\{x|\ x\leq 2\}$，所以是必要不充分条件，故本题选 B.

20.【答案】D

【解析】命题$p:\forall x\in A$，$2x\in B$，则$\neg p:\exists x\in A$，$2x\notin B$，故本题选 D。

21.【答案】D

【解析】若$\tan\alpha=2$，则 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$，若 $\tan 2\alpha=\dfrac{4}{5}$ 即 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$ 则 $\tan\alpha=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{4}$，所以“$\tan\alpha=2$”是“$\tan 2\alpha=\dfrac{4}{5}$”既不充分也不必要条件。故本题选 D.

22.【答案】B

【解析】若$\lg a>\lg b+1$，则有$\lg a>\lg 10b$，因此有$a>10b>0$，故$a>b$；反之，若$a>b$，当其中有负数时，q不成立，故p是q的必要不充分条件。故本题选 B

23.【答案】D

【解析】解不等式$e^{x^2-x-2}>1$，可得$x^2-x-2>0$，解得$x<-1$或$x>2$。由于“$x>k$”是“$e^{x^2-x-2}>1$”的充分条件，则$\{x|x>k\}\subseteq\{x|x<-1或x>2\}$，$\therefore k\geq 2$，因此，实数$k$的取值范围是$[2,+\infty)$，故本题选 D.

24.【答案】C

【解析】A.当$x=\frac{1}{2},y=4$时，满足$p:\begin{cases}x+y>2\\xy>1\end{cases}$，不满足$q:x>1$，$y>1$，所以$p$与$q$不等价；故错误；

B.因为$p:(x-1)^2+(y-2)^2=0$，则$x=1$且$y=2$，因为$q:(x-1)(y-2)=0$，则$x=1$或$y=2$，p与q不等价；故错误；C.因为$p:0<\frac{1}{x}<1$，解得$x>1$，又$q:x>1$，p与q等价；故正确；D.如不等式$x^2+2x-3>0$的解集是$\{x|x<-3或x>1\}$，不等式$-x^2-2x+3>0$的解集是$\{x|-3<x<1\}$，故错误；故本题选 C

25.【答案】B

【解析】解：由“$a^3<8$”得$a<2$，由“$|a-1|<1$”解得$0<a<2$，$a<2$推不出$0<a<2$，$0<a<2$可推出$a<2$，故“$a^3<8$”是“$|a-1|<1$”的必要不充分条件，故本题选 B.

26.【答案】C

【解析】充分性：$\because m,n$互为异面直线，且$m//\alpha,n//\alpha$，则α内必存在两条相交直线m',n'，使得$m//m',n//n'$，若$l\perp n$且$l\perp m$，则$l\perp n'$且$l\perp m'$，$\therefore l\perp\alpha$，故充分性成立；必要性：$\because m,n$互为异面直线，且$m//\alpha,n//\alpha$，则α内必存在两条相交直线m',n'，使得$m//m',n//n'$，若$l\perp\alpha$，则$l\perp n'$且$l\perp m'$，$\therefore l\perp n$且$l\perp m$，故必要性成立，$\therefore$“$l\perp n$且$l\perp m$”是“$l\perp\alpha$”的充要条件。故本题选 C.

27.【答案】B

【解析】当$x\in(0,2]$时，$f(x)=2^x-1\in(0,3]$，因为$f(x)$是定义在$[-2,2]$上的奇函数，所以$f(0)=0$，当$x_1\in[-2,2]$时，$f(x_1)=2^{x_1}-1\in[-3,3]$，记$A=[-3,3]$，$g(x)=(x-1)^2+m-1$，对称轴为$x=1$，函数$g(x)$在$[-2,1)$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增，所以$g_{\max}(x)=g(-2)=8+m$，$g_{\min}(x)=g(1)=m-1$，即当$x_2\in[-2,2]$时，$g(x_2)\in[m-1,8+m]$，记$B=[m-1,8+m]$，对于任意$x_1\in[-2,2]$，存在$x_2\in[-2,2]$，使得$g(x_2)=f(x_1)$等价于$A\subseteq B$，所以$\{\begin{matrix}m-1\le-3\\8+m\ge3\end{matrix}$，解得$m\in[-5,-2]$。故本题选 B

28.【答案】A

【解析】①命题p：$\forall x\in R,x^2+x<0$，则命题p的否定是$\exists x\in R,x^2+x\ge0$，所以该命题是假命题；②化简命题p：$0\le x\le1$，命题q：$x<1$，则p是q成立的非充分非必要条件，所以该命题是假命题；③在等比数列$\{b_n\}$中，若$b_5=2$，$b_9=8$，则$b_7=\pm4$，但是等比数列的奇数项都是同号的，所以要舍去-4，所以$b_7=4$.所以该命题是假命题.所以有 0 个真命题。故本题选 A.

29.【答案】A

【解析】充分性：$f(x)$是 R 上的奇函数，所以$f(-x)=-f(x)$。所以$f(x)f(-x)=f(x)\cdot[-f(x)]=-[f(x)]^2\le0$，满足充分性。必要性：对任意$x\in R$均有$f(x)f(-x)\le0$，不能推出$f(-x)=-f(x)$，不满足必要性。所以“$f(x)$是 R 上的奇函数”是“对任意$x\in R$均有$f(x)f(-x)\le0$”的充分不必要条件。故本题选 A

30.【答案】B

【解析】$\because p: \exists x > 0, e^x - ax\langle 1, \therefore \neg p: \forall x\rangle 0, e^x - ax \geq 1 \Rightarrow \forall x > 0, a \leq \frac{e^x-1}{x}$，设 $u(x) = \frac{e^x-1}{x}$，则 $\forall x > 0, a \leq (\frac{e^x-1}{x})_{\min}$，$u(x) = \frac{e^x-1}{x}, u'(x) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$, 可得 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$，则$\neg p: a \leq 1, \therefore p: a > 1$；由$q$:函数$f(x) = -(a-1)^x$是减函数，可知$q: a > 2$，故$p$是$q$的必要不充分条件，故本题选 B。

模块四　方程与不等式答案解析部分

一、单选题（共 25 题；共 50 分）

1【答案】A

【解析】由 $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geq 0$，A 符合题意；当 $x=0$ 时，B 不正确；由 $y=2^x$ 为增函数知当 $x..y$ 时，$2^x\geq 2^y$，C 不符合题意；当 $x=0,y=-1$ 时，D 不正确。故本题选 A

2【答案】D

【解析】设直线的倾斜角为 θ，则因为 $a\in R$，所以 $1-a^2\leq 1$ $\tan\theta=\dfrac{a^2-1}{a-4}=1-a^2$，即，$\tan\theta\leq 1$

因为 $\theta\in R$，所以 $0<\theta\leq\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$，所以直线的倾斜角取值范围是 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi)$。故本题选 D

3【答案】A

【解析】由题意，两点 $A(a-1,a+1),B(a,a)$，可得 $k_{AB}=\dfrac{a+1-a}{a-1-a}=-1$；线段 AB 的中点为 $(\dfrac{2a-1}{2},\dfrac{2a+1}{2})$；因为两点 $A(a-1,a+1),B(a,a)$ 关于直线 l 对称，则 $k_l=1$，所以直线方程为 $y-\dfrac{2a+1}{2}=x-\dfrac{2a-1}{2}$，整理得 $x-y+1=0$。故本题选 A。

4【答案】C

【解析】因为一元二次不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集是 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})$，所以 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，所以 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=-p,-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=q$，解得 $p=\dfrac{1}{6},q=-\dfrac{1}{6}$，所以 $p+q=0$，故本题选 C。

5【答案】B

【解析】因为 $a,b\in R^+$，且，$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$；所以 $2a+b=(2a+b)(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b})=5+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geq 5+\sqrt{\dfrac{2b}{a}.\dfrac{2a}{b}}$；当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1\\ \dfrac{2b}{a}=\dfrac{2a}{b}\end{cases}$，即 $a=b=3$ 时，取等号，所以 $a+b=6$，故本题选 B。

6【答案】D

【解析】∵|8x+9|<7，∴ $-2<x<-\dfrac{1}{4}$，即不等式 $ax^2+bx-2>0$ 的解集为 $(-2,-\dfrac{1}{4})$，故-2 和 $-\dfrac{1}{4}$ 为方程 $ax^2+bx-2=0$ 的根，由韦达定理得 $\begin{cases}-\dfrac{b}{a}=-2-\dfrac{1}{4}\\ -\dfrac{2}{a}=(-2)\left(-\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$，解得 $a=-4,b=-9$，故本题选 D。

7【答案】C

【解析】设曲线 C 上点的坐标为 $(t^2,\sqrt{2}t)$，则 C 上的点到直线 1 的距离，

$d=\frac{|t^2-2t+3|}{\sqrt{3}}=\frac{|(t-1)^2+2|}{\sqrt{3}}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；即 C 上的点到直线 1 的距离的最小值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．故本题选 C

8【答案】B

【解析】解法一：由题得，$x+y=(\frac{1}{x}+\frac{9}{y})(x+y)=1+\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+9\geq1+2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{9x}{y}}+9=16$，取等条件为

$\begin{cases}x>0y>0\\ \frac{y}{x}=\frac{9x}{y}\\ \frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1\end{cases}$，即$\begin{cases}x=4\\y=12\end{cases}$，故本题选 B。

解法二：由 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$ 得 $9x+y-xy=0$ 即 $(x-1)(y-9)=9$；又 $x>1,y>9$，

∴x+y$=(x-1)+(y-9)+10\geq2\sqrt{(x-1)(y-9)}+10=16$，取等条件为$\begin{cases}x>0y>0\\x-1=y-9\\ \frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1\end{cases}$，即$\begin{cases}x=4\\y=12\end{cases}$，故本题选 B。

9【答案】B

【解析】直线$l_1:ax+3y+3=0$和直线$l_2:x+(a-2)y+1=0$平行，⑴当 a=2 时，直线l_1：2x+3y+3＝0，直线l_2：x+1＝0，显然不适合题意；⑵当 a≠2 时，由$\frac{a}{1}=\frac{3}{a-2}\neq\frac{3}{1}$解得 a＝﹣1．∴实数 a 的值为﹣1。故本题选 B。

10【答案】A

【解析】把直线方程化为斜截式：$y=\frac{2}{3}x+2$，可知斜率 $k=\frac{2}{3}$，截距 $b=2$，故本题选 A

11【答案】C

【解析】由$\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，化简得$4ab-3b^2=0$，所以 $b=0$ 或 $4a=3b$，所以，直线l的方程为 $x=0$ 或 $3x+4y=0$，故本题选 C。

12【答案】C

【解析】∵直线 $kx-y+2k+1=0$ 与 $x+2y-4=0$ 的交点在第四象限，即 $2k+1\neq0$，联立方程：

$\begin{cases}kx-y+2k+1=0\\x+2y-4=0\end{cases}$；解得$\begin{cases}x=\frac{2-4k}{2k+1}\\y=\frac{6k+1}{2k+1}\end{cases}$，即$\begin{cases}x=\frac{2-4k}{2k+1}>0\\y=\frac{6k+1}{2k+1}<0\end{cases}$，解得：$-\frac{1}{2}<k<-\frac{1}{6}$，故本题选 C

13【答案】A

【解析】根据题意，$\frac{1}{a}=\frac{2a+b}{a}=1+\frac{a+b}{a}$，因为 $a>0,b>0$；所以 $\frac{1}{a}+\frac{2a}{a+b}=1+\frac{a+b}{a}+\frac{2a}{a+b}\ge 1+2\sqrt{\frac{a+b}{a}\cdot\frac{2a}{a+b}}=1+2\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{a+b}{a}=\frac{2a}{a+b}$，即 $a+b=\sqrt{2}a$ 时等号成立，故$\frac{1}{a}+\frac{2a}{a+b}$有最小值为 $2\sqrt{2}+1$。故本题选 A

14【答案】D

【解析】因为不等式（x＋5）（3－2x）≥6 等价于 $2x^2+7x-9\le 0$，所以（2x+9）(x-1)≤0，

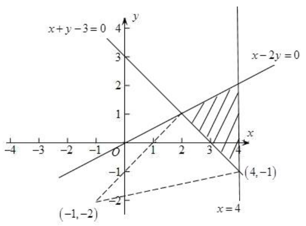
解得$-\frac{9}{2}\le x\le 1$，故本题选 D。

15【答案】B

【解析】$\because M-N=a^2+3ab-(5ab-b^2)=a-2ab+b^2=(a-b)^2\ge 0$，$\therefore M\ge N$，故本题选 B

16【答案】B

【解析】画出$\begin{cases}x+y\ge 3\\ x-2y\ge 0\\ x\le 4\end{cases}$表示的平面区域，如下：



$\frac{y+2}{x+1}$可看作是过可行域内的点，与点（-1，-2）的直线的斜率，则$\frac{y+2}{x+1}$的最小值是$\frac{1}{5}$，故本题选 B。

17【答案】B

【解析】因为点 D 是线段 BC 上任意一点（不包含端点），所以 $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}(0<t<1)$，则，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+t(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，因为 $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，所以 m=1-t，n = t，

所以 m + n = 1．因为 0 < t < 1，所以 m > 0，n > 0，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)=\frac{n}{m}+\frac{4m}{n}+5\ge 4+5=9$，

当且仅当 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{2}{3}$时，等号成立。故本题选 B

18【答案】D

【解析】由二次函数和一元二次方程以及一元二次不等式的关系，以及二次函数的对称性可得，方程的两根之和为$-a=6$，解得 a=-6，又 $x^2-6x+c-1=0$ 的两根之差为 2，由韦达定理得 $\sqrt{(-6)^2-4(c-1)}=2$，解得 $c=9$。故本题选 D。

二、填空题（共 15 题；共 30 分）

26【答案】$(-\infty,-4)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】不等式 $\frac{1-2x}{x+4}\le 0$ 等价于 $\begin{cases}(1-2x)(x+4)\le 0\\ x+4\ne 0\end{cases}$，解得 $x\in(-\infty,-4)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，故本题答案为 $(-\infty,-4)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$。

27【答案】{x丨0≤x≤4}

【解析】由 $(x-2)^2\le 4$，得 $-2\le x-2\le 2$，解得：$0\le x\le 4$，所以解集为{x|0≤x≤4}，故本题答案为{x|0≤x≤4}

28【答案】-2

【解析】因为关于 x 的不等式 $ax+2<0$ 的解集为(1，+∞)，所以 $a<0$，且 $x>-\frac{2}{a}$，所以 $-\frac{2}{a}=1$，得 $a=-2$。故本题答案为-2。

29【答案】3

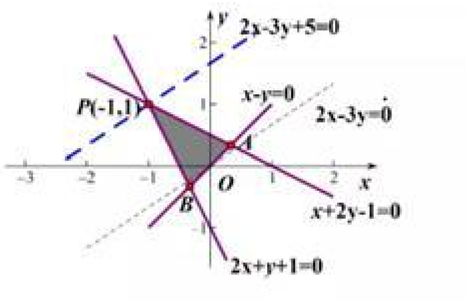
【解析】$\sqrt{a^2+b^2}$可以理解为点，到点，的距离，又∵点，在直线 $3x+4y=15$ 上，∴$\sqrt{a^2+b^2}$的最小值等于点，到直线 $3x+4y-15=0$ 的距离，且 $d=\frac{|3\times 0+4\times 0-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$。故本题答案为 3

30【答案】-35

【解析】因为 x、y 的二元一次方程组 $\begin{cases}7x-by=3\\ ax+5y=2\end{cases}$ 有无穷多组解，所以直线 7x-by＝3 与直线 ax+5y=2 重合，所以 $\frac{7}{a}=\frac{-b}{5}=\frac{3}{2}$，解得，$a=\frac{14}{3},b=-\frac{15}{2}$。所以 $ab=-35$，故本题答案答案为-35

31【答案】-5

【解析】作出约约束条件的可行域，是以 P(-1，1)，($\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$)，($-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$)为顶点的三角形区域.



法 1：直接验证，得 zP=−5，zA=$-\frac{1}{3}$，zB=$\frac{1}{3}$，故在 P 点处取得最小值-5．法 2：目标函数变为 y=$\frac{2}{3}$x-$\frac{z}{3}$，故 z 的最小值，即求纵截距的最大值-$\frac{z}{3}$。当直线 y=$\frac{2}{3}$x-$\frac{z}{3}$经过点 P(-1，1)时，纵截距最大，此时 z=2×(-1)-3×1=-5，即为所求。

32【答案】$2\sqrt{6}+4$

【解析】由题意因为 $x+y=1$，所以$\frac{y}{x}+\frac{2}{xy}=(\frac{y}{x}+\frac{2}{xy})(x+y)=y+\frac{y^2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{x}$，

$(y+\frac{y^2}{1-y})+(\frac{2}{y}+\frac{2}{x})(x+y)=\frac{y-y^2+y^2}{1-y}+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+4=\frac{y}{1-y}+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+4=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+4=\frac{3y}{x}+\frac{2x}{y}+4\geq$

$2\sqrt{6}+4$

，当且仅当$\frac{3y}{x}=\frac{2x}{y}$，即 $x=3-\sqrt{6},y=\sqrt{6}-2$ 时等号成立，故本题答案为 $2\sqrt{6}+4$

33【答案】9

【解析】由事件 A，B 互为对立事件，其概率分别 P(A)＝$\frac{1}{y}$，P(B)＝$\frac{4}{x}$，且 x>0，y>0，所以 P(A)＋P(B)＝$\frac{1}{y}$＋$\frac{4}{x}$＝1，所以 $x+y=(x+y)(\frac{1}{y}+\frac{4}{x})=5+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq 5+2\sqrt{\frac{4y}{x}.\frac{x}{y}}=9$，当且仅当 x＝6，y＝3 时取等号，所以 x＋y 的最小值为 9。故本题答案为 9

34【答案】2；18

【解析】(1) 由 $f(x)\leq 3$ 可得：$x^2-2x\leq 0$，解得 $0\leq x\leq 2$，所以区间长度为 2-0=2

(2) 由 $f(x)\leq m$ 得：$x^2-2x+3-m\leq 0$，设不等式的解为 $x_1\leq x\leq x_2$，则$x_1+x_2=2$，$x_1.x_2=3-m$，因为不等式 $f(x)\leq m$ 的解集的区间长度为 8，所以 $x_2-x_1=8$，故 $(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=8^2$，即 $4-4(3-m)=64$，解得 $m=18$，故本题答案为 2；18。

35【答案】$\frac{9}{8}$

【解析】因为 $(x+1+y+4)(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{y+4})=5+\frac{y+4}{x+1}+\frac{4(x+1)}{y+4}\geq 5+2\sqrt{\frac{y+4}{x+1}.\frac{4(x+1)}{y+4}}=9$，当且仅当 $\frac{y+4}{x+1}=\frac{4(x+1)}{y+4}$，时等号成立。$(x+1+y+4)(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{y+4})=5+\frac{y+4}{x+1}+\frac{4(x+1)}{y+4}\geq 5+2\sqrt{\frac{y+4}{x+1}.\frac{4(x+1)}{y+4}}=9$，所以 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+4}\geq\frac{9}{x+1+y+4}$，因为 $x+y=3$，所以 $\frac{1}{x+1}+\frac{4}{y+4}\geq\frac{9}{8}$。故本题答案为 $\frac{9}{8}$。

36【答案】-3≤a≤1

【解析】当 a-1=0，即 $a=1$ 时，不等式化为-1>0，其解集为∅，符合题意；当 $a-1\neq 0$，即 $a\neq 1$时，由不等式 $(a-1)x^2+(a-1)x-1>0$ 的解集为∅得，$\begin{cases} a-1<0 \\ \Delta=(a-1)^2+4(a-1)\leq 0 \end{cases}$ 解得-3≤a≤1，综上所述：a 的取值范围是-3≤a≤1。故本题答案为-3≤a≤1

37【答案】13

【解析】不等式$x^2+ax+b<0$ 的解集是（-3，1）即方程$x^2+ax+b=0$ 的两根为-3，1

由根与系数的关系可得$\begin{cases}-3+1=-a\\-3\times1=b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$，则$a^2+b^2=2^2+(-3)^2=13$，故本题答案为13

38【答案】[1，+∞)

【解析】由题意，不等式，$(2x-3)(x+1)\le0$解得$-1\le x\le\frac{3}{2}$，其中有整数-1，0，1，因为不等式组$\begin{cases}(2x-3)(x+1)\le0\\x>a\end{cases}$没有整数解，故不等式组的解集为$a<x\le\frac{3}{2}$且其范围内没有整数，所以$a\ge1$，即实数$a$的取值范围是[1，+∞)

39【答案】(－∞，－2]∪[2，+∞)

【解析】$f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$，令$t=\ln x$，则$t\ne0$，原函数等价于$y=t+\frac{1}{t}$，当$t>0$时，$y=t+\frac{1}{t}\geqslant2$，当且仅当$t=1$时取等；当$t<0$时，$y=t+\frac{1}{t}=-(-t-\frac{1}{t})\le-2$，当且仅当t=－1时取等；综上所述，$f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$的值域为：(－∞，－2]∪[2，+∞)。故本题答案为(－∞，－2]∪[2，+∞)

40【答案】(0，$\frac{1}{100}$]∪[100，+∞)

【解析】∵直线$y=x\lg(ac)+1$与直线$y=x\lg(bc)-1$互相垂直，$\lg(ac).\lg(bc)=-1$，即$(\lg a+\lg c)(\lg b+\lg c)=-1$，整理可得$\lg^2c+(\lg a+\lg b)\lg c+\lg a\lg b+1=0$，∵a，b，c>0，所以上式中lg$c$有解，$\Delta=(\lg a+\lg b)^2-4(\lg a\lg b+1)\ge0$，即$\lg^2\frac{a}{b}-4\ge0$，$\therefore\frac{a}{b}\ge100$或$0<\frac{a}{b}\le\frac{1}{100}$。故本题答案为(0，$\frac{1}{100}$]∪[100，+∞)。

三、解答题（共5题，共50分）

41【答案】

(Ⅰ)由已知，知$a+b=1$，$\frac{a+4}{a}+\frac{1}{b}=1+\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1+(\frac{4}{a}+\frac{1}{b})(a+b)=1+4+1+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geq6+4=10$，∴当且仅当$\begin{cases}a+b=1\\\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}\end{cases}$即$\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=\frac{1}{3}\end{cases}$，等号成立。∴$\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b}$最小值为$\frac{9}{2}$。

(Ⅱ)$a+b=1$，∵$f(x)\le0$，∴$ax^2-x+1-a\le0$，∴$(x-1)[ax-(1-a)]\le0$，$x_1=1,x_2=\frac{1-a}{a}$。当$1=\frac{1-a}{a}$时，即$a=\frac{1}{2}$，不等式的解集为$\{1\}$；当$1>\frac{1-a}{a}$时，即$\frac{1}{2}<a<1$，不等式的解集为$[\frac{1-a}{a},1]$；当$1<\frac{1-a}{a}$时，即$0<a<\frac{1}{2}$，不等式的解集为$[1,\frac{1-a}{a}]$

42【答案】(1)解：由$x^2-3x-28\le0$得$-4\le x\le7$，所以集合$\mathrm{M}=[-4,7]$，由$x^2-x-2>0$得$x>2$

或 $x<-1$，所以集合 N=（$-\infty$，$-1)\cup(2$，$+\infty)$，所以 $M\cap N=[-4,-1)\cup(2,7]$。

（2）解：不等式 $ax^2+bx-1>0$ 的解集是{x|3<x<4}，则 $a<0$。3，4 为方程 $ax^2+bx-1=0$ 的两个实数根，所以 $3+4=-\frac{b}{a},3\times4=-\frac{1}{a}$，解得 $a=-\frac{1}{12},b=\frac{7}{12}$；

43【答案】解：⑴若 $a=0$，则原不等式为 $-x-1>0$，解得 $x<-1$，从而原不等式的解集为区间（$-\infty$，-1)；

⑵若 a≠0，则方程 $ax^2+(a-1)x-1=0$ 的解为 $x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=-1$。①若 $a>0$，则原不等式可化为 $x^2+(1-\frac{1}{a})x-\frac{1}{a}>0$，因为函数 $y=x^2+(1-\frac{1}{a})x-\frac{1}{a}$ 的图象是开口向上的抛物线，且 $\frac{1}{a}>-1$，所以原不等式的解集为（$-\infty$，$-1)\cup(\frac{1}{a}$，$+\infty)$

②若 $a<0$，则原不等式可化为 $x^2+(1-\frac{1}{a})x-\frac{1}{a}<0$，因为函数 $y=x^2+(1-\frac{1}{a})x-\frac{1}{a}$ 的图象是开口向上的抛物线，所以当 $-1<a<0$ 时，$\frac{1}{a}<-1$，从而原不等式的解集为区间 $\left(\frac{1}{a},-1\right)$；当 $a=-1$ 时，$\frac{1}{a}=-1$，从而原不等式的解集为 $\varnothing$；当 $a<-1$ 时，$-1<\frac{1}{a}<0$，从而原不等式的解集为区间 $(-1,\frac{1}{a})$；

综上，若 $a<-1$，则原不等式的解集为区间 $(-1,\frac{1}{a})$；若 $a=-1$，则原不等式的解集为 $\varnothing$；若 $-1<a<0$，则原不等式的解集为区间 $\left(\frac{1}{a},-1\right)$；若 $a=0$，则原不等式的解集为区间（$-\infty$，-1)；若 $a>0$，则原不等式的解集为（$-\infty$，$-1)\cup(\frac{1}{a}$，$+\infty)$

44【答案】（1）解：因为不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(0,3)$，所以 0 和 3 是方程 $f(x)=0$ 的两个根，即

$\begin{cases}0^2+b\cdot0+c=0\\3^2+b\cdot3+c=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=-3\\c=0\end{cases}$，所以函数 $f(x)$ 的解析式为：$f(x)=x^2-3x$

（2）解：不等式 $f(x)=x^2-3x>0$ 的解集为：（$-\infty$，$0)\cup(3$，$+\infty)$，不等式 $f(x+t)=(x+t)^2-3(x+t)>0$ 的解集为：$(-t,3-t)$，当 $t\geq3$ 时，不等式组 $\begin{cases}f(x)>0\\f(x+t)<0\end{cases}$ 的解集为 $(-t,3-t)$，$(-t,3-t)$ 中至少有 2 个整数，不满足题意，舍去；当 $0<t<3$ 时，不等式组 $\begin{cases}f(x)>0\\f(x+t)<0\end{cases}$ 的解集为 $(-t,0)$，因为满足不等式组，的整数解有且只有一个，所以 $-1\in(-t,0)$，$-2\notin(-t,0)$，即 $\begin{cases}-t<-1\\-2\leq-t\end{cases}$，解得 $1<t\leq2$；综上，正实数 t 的取值范围是，

45【答案】（1）解：∵，$x-1>0$ $x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geq2\sqrt{(x-1).\frac{1}{x-1}}+1=3$，当且仅当 $x-1=1$，即 $x=2$ 时取等号，$\therefore x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值为 3；

（2）解：因为 a，b 均为正实数，且 $\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1$，$\therefore a+b=(a+b)\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\right)=10+\frac{3b}{a}+\frac{2a}{b}\geq10+2\sqrt{\frac{3b}{a}.\frac{2a}{b}}=18$，

当且仅当$\frac{2a}{b}=\frac{8b}{a}$，即 $a=2b$ 时取等号，结合$\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1$，解得 $a=12,b=6$，符合题意，∴a+b 的最小值 18。

模块五　函数答案解析部分

一、单选题（共 25 题；共 50 分）

1.【答案】B

【解析】由题意可得 $x^2-2x-8>0$，解得 $x>4$ 或 $x<-2$，所以函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$。故本题选 B。

2.【答案】B

【解析】因为函数是幂函数，所以 $n^2+2n-2=1$，所以 $n=-3$ 或 $n=1$，当 $n=-3$ 时 $f(x)=x^{18}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，不合题意，当 $n=1$ 时 $f(x)=x^{-2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，成立。故本题选 B。

3.【答案】C

【解析】因为 $f(x)=\begin{cases}1+2^{x-1},x\geq 2\\ |x-1|+3,x<2\end{cases}$，所以 $f(0)=4$，所以 $f(f(0))=f(4)=1+2^3=9$。故本题选 C

4.【答案】C

【解析】因为 $y=0.8^x$ 为单调减函数，所以 $0.8^0>0.8^{0.8}>0.8^{0.9}$，$\therefore 1>a>b$。因为 $y=1.2^x$ 为单调减函数，所以 $c=1.2^{0.8}>1.2^0=1$，即 $b<a<c$。故本题选 C

5.【答案】B

【解析】因为函数 $y=x$ 定义域为 R，而 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 定义域为 $[0,+\infty)$，$u=\sqrt[3]{v^3}=v$ 定义域为 R，$s=\sqrt{t^2}=|t|=\begin{cases}t,t\geq 0\\ -t,t<0\end{cases},m=\dfrac{n^2}{n}$ 定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，故本题选 B。

6.【答案】C

【解析】由 $a^{2b}=N$，可得 $2b=\log_a N$，解得 $b=\dfrac{1}{2}\log_a N=\log_{a^2}N$。故本题选 C

7.【答案】B

【解析】A．当 $a=s=t=2$ 时，$2^2+2^2\neq 2^{2+2}$，故错误；B．根据指数幂的运算性质可知：同底数幂相乘，底数不变指数相加，B 符合题意；C．当 $a=2,s=t=4$ 时，$\log_2 4+\log_2 4\neq\log_2(4+4)$，故错误；D．当 $a=s=t=4$ 时，$\log_2 2\cdot\log_2 2\neq\log_2(2\times 2)$，故错误，故本题选 B.

8.【答案】C

【解析】因为 $f(x)=x-6+\ln x$，所以 $f(2)=2-6+\ln 2=-4+\ln 2<0$，$f(3)=3-6+\ln 3=-3+\ln 3<0$，$f(4)=4-6+\ln 4=-3+2\ln 2<0$，$f(5)=5-6+\ln 5=-1+\ln 5>0$，$f(6)=6-6+\ln 3=\ln 6>0$，由零点存在性定理，可得函数 $f(x)=x-6+\ln x$ 的零点所在区间应是$(4,5)$，即 C 符合题意，ABD 不符合题意。故本题选 C.

9.【答案】A

【解析】因为 $f(x)=(2m+3)x^{m^2-2}$ 是幂函数，所以$2m+3=1$，所以$m=-1$，故本题选 A。

10.【答案】B

【解析】A.$f(x)=x^2+1$，函数的定义域是R，并且满足$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数，A 不正确；B.$f(x)=x+\frac{2}{x}$的定义域是$\{x|x\neq 0\}$，满足$f(-x)=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数，B 符合题意；C.$f(x)=x^2+x$的定义域是R，即不满足$f(-x)=f(x)$，也不满足$f(-x)=-f(x)$，所以函数既不是奇函数，也不是偶函数，C 不正确；D.$f(x)=2x+1$的定义域是R，即不满足$f(-x)=f(x)$，也不满足$f(-x)=-f(x)$，所以函数既不是奇函数，也不是偶函数；D 不正确。故本题选 B

11.【答案】D

【解析】对于 A，函数 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}$ 的定义域为$\{x|x\neq 2\}$，不关于原点对称，所以$f(x)$为非奇非偶函数，A 不符合题意；对于 B，由 $\frac{1+x}{1-x}\geq 0$ 可得函数 $f(x)=(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的定义域为$[-1,1)$，不关于原点对称，所以$f(x)$为非奇非偶函数，B 不符合题意；对于 C，函数$f(x)=1$不是奇函数，C 不符合题意；对于 D，由$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\|x+3|-3\neq 0\end{cases}$可得$-1\leq x\leq 1$且$x\neq 0$，所以函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+3|-3}$ 的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$，关于原点对称，所以 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+3-3}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$，所以 $f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-f(x)$，所以函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+3|-3}$ 是奇函数，D 符合题意。故本题选 D.

12.【答案】A

【解析】当$a>1$时，指数函数 $y=a^x$ 为增函数，二次函数 $y=(a-1)x^2$ 的图象开口向上，且函数 $y=(a-1)x^2$ 图象的对称轴为y轴，因此，函数 $y=a^x$ 和 $y=(a-1)x^2$ 的图象只可能是 A 选项中的图象。故本题选 A。

13.【答案】A

【解析】由 $f\left(x-1\right)=x^2+4x-5=\left(x-1\right)^2+6\left(x-1\right)$，所以 $f\left(x\right)=x^2+6x$ 。故本题选 A。

14.【答案】B

【解析】由 $2^a=3,3^b=2$ ，得 $a=\log_2 3,b=\log_3 2,ab=1$ ，$f\left(-1\right)=a^{-1}-1-b=-1<0$ ，$f\left(0\right)=1-b=1-\log_3 2>0$ 。所以零点在区间$(-1,0)$。故本题选 B。

15.【答案】D

【解析】由题意，得 $\frac{1}{x}<1$，当 x<0 时显然成立，当 x>0 时，x>1。综上可得：实数 x 的取值范围是(-∞，0)∪(1，+∞)。故本题选 D。

16.【答案】B

【解析】由题意知 $f(x)$ 是 $\left(a+\frac{4}{a},-b^2+4b\right)$ 上的奇函数，$\therefore a+\frac{4}{a}-b^2+4b=0,a<0$ ，即 $(b-2)^2+\left(\sqrt{-a}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2=0$，解得$a=-2,b=2$，$g\left(-\sqrt{2}\right)=-f\left(\sqrt{2}\right)=-2-\sqrt{2}a+b=-2+2\sqrt{2}+2=2\sqrt{2}$ 。故本题选 B。

17.【答案】D

【解析】对任意 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且 $x_1<x_2$ 都有 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，∴函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，结合选项可知，A：$f\left(x\right)=\sqrt{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，不符合题意，B：$f\left(x\right)=x-\frac{2}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，不符合题意，C：$f\left(x\right)=x^2+x-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，不符合题意，D：$f\left(x\right)=-x^3$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递减，符合题意。故本题选 D。

18.【答案】C

【解析】若 $\log_3\left(xy\right)$ 为正整数，则 $xy=3^n\left(n\in N^+\right)$，则 x，y 共有以下几种情况：$x=1,y=1;x=1,y=3;x=1,y=9;x=3,y=1;x=3,y=3;x=3,y=9;$ 共 6 个。故本题选 C.

19.【答案】D

【解析】由指数函数的单调性有：$a=6^{0.7}>6^0=1,b=0.7^6<0.7^0=1$，由对数函数的单调性有：$c=\log_{0.7}6<\log_{0.7}1=0$，所以 $a>b>c$ 。故本题选 D。

20.【答案】B

【解析】由题意知$\begin{cases} m^2-m-1=1 \\ -5m-3<0 \end{cases}$，$\therefore m=2$。故本题选 B。

21.【答案】D

【解析】由题，$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，因为$f(-x)=\dfrac{e^{-x}+1}{-x^3(e^{-x}+1)}=\dfrac{e^x+1}{x^3(e^x+1)}=f(x)$所以$f(x)$是偶函数，图象关于$y$轴对称，故排除 A、C；又因为$f(x)=\dfrac{e^x+1}{x^3(e^x+1)}=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x^3(e^x-1)}$，则当$x\to+\infty$时，$x^3\to+\infty$，$e^x-1\to+\infty$，所以$f(x)\to 0$，故本题选 D。

22.【答案】A

【解析】法一(直接法)：由$\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi=1$知$2\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又由锐角$\varphi$知：$\varphi-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以$\varphi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，从而有：$f(x)=\dfrac{1}{2}-\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}+\pi\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{7\pi}{6}\right)$，因此要得到函数$f(x)=\dfrac{1}{2}-\sin^2(x+\varphi)$的图象，则可已将函数$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$的图象向左平移$\dfrac{7\pi}{12}$个单位长度。故本题选 A。

法二(验证)：由$\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi=1$知$2\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又由锐角$\varphi$知：$\varphi-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以$\varphi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，从而有$f(x)=\dfrac{1}{2}-\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，故将函数$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$的图象向左平移$\dfrac{7\pi}{12}$个单位长度得$y=\dfrac{1}{2}\sin 2\left(x+\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{7\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left[\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]=\dfrac{1}{2}\cos\left[2x+\dfrac{2\pi}{3}\right]$，故本题选 A。

23.【答案】B

【解析】$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left[90°-\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$ 故本题选 B.【分析】由于$\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)+\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$=90°，于是根据互余两角的三角函数之间的关系求解即可。

24.【答案】D

【解析】$\dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\beta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\beta}{2}}=\tan^2\dfrac{\beta}{2}$，$\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{1}{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

$=\tan^2\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]=\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$，因为$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in(0,\pi)$，所以

$\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right),\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right),\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，因此由 $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$，得：$\tan^2\frac{\beta}{2}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),\therefore\tan\frac{\beta}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$，$\therefore\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\therefore\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$。故本题选 D。

25.【答案】B

【解析】由函数图象知：$A=2,\frac{3T}{4}=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\pi}{4}$，所以 $T=\pi,\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，又函数图象过点 $\left(\frac{5\pi}{12},2\right)$

所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，解得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3},k\in Z$，又因为 $-\pi<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)$ 的解析式为：$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$。故本题选 B。

二、解答题（共 20 题，共 40 分）

26.【答案】$-\frac{\pi}{4}$

【解析】已知函数 $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，令 x-$\frac{\pi}{4}=k\pi-\frac{\pi}{2},k\in Z$，解得 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in Z$。

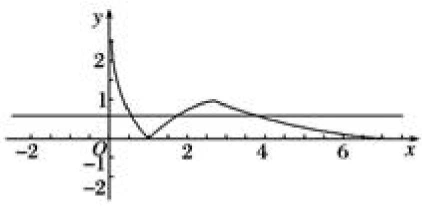
所以其图象的对称轴中距离 y 轴最近的一条对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{4}$。

27.【答案】$-\frac{3}{5}$

【解析】由题意可知，$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{1}{3}$，解得 $\tan\theta=2$，则 $\cos2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{3}{5}$。

28.【答案】$\left(2e+\frac{1}{e},e^2+2\right)$

【解析】画出函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,0<x\le e\\2-\ln x,x>e\end{cases}$ 的图象（如图所示）.



不妨令 $a<b<c$，则由已知和图象，得 $0<a<1<b<e<c<e^2$，且 $-\ln a=\ln b=2-\ln c$，则 $ab=1,bc=e^2$，则 $a+b+c=\frac{1}{b}+b+\frac{e^2}{b}=b+\frac{1+e^2}{b}$，因为 $\left(b+\frac{1+e^2}{b}\right)'=1-\frac{1+e^2}{b^2}<0$ 在 $b\in(1,e)$ 恒成立，所以 $b+\frac{1+e^2}{b}$ 在 $b\in(1,e)$ 单调递减，所以 $2e+\frac{1}{e}<b+\frac{1+e^2}{b}<2+e$。

29.【答案】$\left[\sqrt{2},+\infty\right)$

【解析】因为 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 可得 $x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，则 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(1,\sqrt{2}\right]$，因为 $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),m\geq\sin x+\cos x$ 恒成立，所以只需 $m\geq\sqrt{2}$，故实数 m 的取值范围为 $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$。

30.【答案】(-12，0]

【解析】因为命题“$\exists x\in R,$，使得 $ax^2+ax-3\geq 0$”是假命题，所以其否定“$\forall x\in R,ax^2+ax-3<0$”为真命题，当 $a=0$ 时，不等式为 $-3<0$，符合题意；当 $a\neq 0$ 时，则需满足 $\begin{cases}a<0\\ \triangle=a^2+12a<0\end{cases}$，解得 $-12<a<0$；综上，实数 a 的取值范围为(-12，0]。

31.【答案】-8

【解析】当 $x>0$ 时，$f(x)=x^{\frac{3}{4}}$，得 $f(16)=16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-16)=-f(16)=-8$。

32.【答案】7；奇

【解析】函数 $y=g(x)=f(x)+x$ 为偶函数，由 $f(2)=3$，则 $g(2)=f(2)+2=5$，所以 $g(-2)=f(-2)-2=g(2)=5$，所以 $f(-2)=7$，$y=h(x)=\frac{f(x)}{x}+1=\frac{f(x)+x}{x}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域关于原点对称．因为 $g(-x)=g(x)=f(x)+x$，所以 $h(-x)=\frac{f(-x)+(-x)}{-x}=\frac{f(x)+x}{-x}=-h(x)$，所以函数为奇函数。

33.【答案】$\frac{5}{6}$

【解析】$(\frac{1}{2})^{\log_2 3}+\lg(\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}})-\lg(\sqrt{2})$

$=2^{-\log_2 3}+\lg(\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{5})^2})-\lg\sqrt{2}=\frac{1}{3}+\lg 2\sqrt{5}-\lg\sqrt{2}=\frac{1}{3}+\lg\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}+\lg\sqrt{10}=\frac{5}{6}$,

34.【答案】a＜7

【解析】因为 $|x-4|+|x+3|>a$ 恒成立，所以 $(|x-4|+|x+3|)_{\min}>a$，因为

$|x-4|+|x+3|\geq|(x-4)-(x+3)|=7$，所以 a＜7。故本题选 a＜7

35.【答案】$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

【解析】由 $x>0$，$y>0$，且 $\log_2 2^x+\log_2 4^y=2$，根据对数的运算性质，可得 $x\log_2 2+y\log_2 4=x+2y=2$，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}(x+2y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=\frac{1}{2}(3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y})\geq\frac{1}{2}\cdot(3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}})=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$，即$x=2\sqrt{2}-2,y=2-\sqrt{2}$时，等号成立，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值是$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

36.【答案】-14

【解析】令$g(x)=ax^7+bx$，则$g(-x)=-ax^7-bx=-g(x)$，所以$g(x)=ax^7+bx$是奇函数；又 $f(2014)=10=g(2014)-2$，所以 $g(2014)=12$，因此 $g(-2014)=-12$，所以 $f(-2014)=g(-2014)-2=-14$。

37.【答案】[1，3]

【解析】奇函数$f(x)$在$(-\infty,0]$单调递减，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$单调递减，所以$f(x)$在 R 上单调递减，$f(1)=-2,f(-1)=2$，$-2\leq f(x-2)\leq 2$即$-1\leq x-2\leq 1$，所以$x\in[1,3]$.

38.【答案】$(-4,-2\sqrt{3})$

【解析】设$t=2^x$，$\because x>0$，$\therefore t>1$，即函数$f(x)=4^x+a\cdot 2^x+3$等价为$g(t)=t^2+a\cdot t+3$在$(1,+\infty)$上有两个不同零点，$\because g(0)=3>0$，$\therefore$满足$\begin{cases}-\frac{a}{2}>0\\ g(1)>0\\ \Delta=a^2-12>0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a<0\\ 1+a+3>0\\ a>2\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\ 1+a+3>0,\\ a<-2\sqrt{3}\end{cases}$

即$\begin{cases}a<0\\ a>-4\\ a>2\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\ a>-4\\ a<-2\sqrt{3}\end{cases}$，$\therefore -4<a<-2\sqrt{3}$。故实数$a$的取值范围$(-4,-2\sqrt{3})$。

39.【答案】1；$(\frac{1}{2}，+\infty)$

【解析】解：①当$x\leqslant 1$时，$f(x)=x+1$，$\therefore x+1=2$，$\therefore x=1$，当$x>1$时，$f(x)=x^2-2x+3$，$\therefore x^2-2x+3=2$，解得：$x=1$（舍去），综上所述，若$f(x)=2$，则$x=1$. ②(i)当$x\leqslant 1$时，$x-1\leqslant 0$，$\therefore$不等式$f(x)+f(x-1)>2$可化为：$x+1+(x-1)+1>2$，即$2x+1>2$，解得：$x>\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{1}{2}<x\leqslant 1$，

(ii)当$1 < x \leqslant 2$时，$x-1 \leqslant 1$，$\therefore$不等式$f(x)+f(x-1)>2$可化为：$x^2-2x+3+(x-1)+1>2$，

即$x^2-x+3>2$，$\because \triangle = 1-4<0$，$\therefore 1<x\leqslant 2$，

(iii) 当 $x>2$ 时，$x-1>1$，$\therefore$ 不等式 $f(x)+f(x-1)>2$ 可化为：$x^2-2x+3+(x-1)^2-2(x-1)+3>2$，即$2x^2-6x+7>0$，$\because \triangle = 36-4\times 2\times 7=-20<0$，$\therefore x>2$，

综上所述，x取值范围是：$(\frac{1}{2}, +\infty)$。

40.【答案】$f^{-1}(x)=-\sqrt{x}(x>4)$

【解析】由$f(x)=x^2(x<-2)$有$f(x)>4$，故其反函数满足$x=[f^{-1}(x)]^2$，又$f(x)=x^2(x<-2)$，故$f^{-1}(x)=-\sqrt{x}(x>4)$。故本题选$f^{-1}(x)=-\sqrt{x}(x>4)$

41.【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解析】由函数图像可得：$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}=\sqrt{|AB|^2-4^2}=3$，所以$\omega=\frac{\pi}{3}$。

42.【答案】0

【解析】由题意，$f(2020)=a\sin(2020\pi+\alpha)+b\cos(2020\pi-\beta)+1=a\sin\alpha+b\cos(-\beta)+1$

$=a\sin\alpha+b\cos\beta+1=2$，所以 $a\sin\alpha+b\cos\beta=1$，所以 $f(2021)=a\sin(2021\pi+\alpha)+b\cos(2021\pi-\beta)+1$

$=a\sin(\pi+\alpha)+b\cos(\pi-\beta)+1=-a\sin\alpha-b\cos\beta+1=-1+1=0$。

43.【答案】±1

【解析】由$f(x)$是幂函数得$m^3-m+1=1$，解得$m=0$或$m=\pm1$，$m=0$时，$f(x)=x^{\frac{7}{5}}$是奇函数，不合题意。$m=-1$时，$f(x)=x^{\frac{4}{5}}$是偶函数，$m=1$时，$f(x)=x^{\frac{6}{5}}$是偶函数。故本题选±1.

44.【答案】1010

【解析】解：因为$f(x)$是奇函数，$f(-x)=-f(x)$，所以$a_{n+1}-(a_n+\cos\frac{n\pi}{2})=0$，$a_{a+1}=a_n+\cos\frac{n\pi}{2}$，

$a_1=1$，$a_2=a_1+\cos\frac{\pi}{2}=1$，$a_3=a_2+\cos\frac{2\pi}{2}=0$，$a_4=a_3+\cos\frac{3\pi}{2}=0$，如此继续，得 $a_{n+4}=a_n.S_{2020}=505(a_1+a_2+a_3+a_4)=505\times 2=1010$。

45.【答案】{1}

【解析】由于函数$f(x)$定义在R上的偶函数，在$[0,+\infty)$是增函数，由$f(x^2+ax+b)\le f(2x^2+4x+1)$可得$f(|x^2+ax+b|)\le f(|2x^2+4x+1|)$，所以，$|x^2+ax+b|\le|2x^2+4x+1|$，解方程$2x^2+4x+1=0$可得$x_1=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$，令$g(x)=x^2+ax+b$，则$|g(\frac{-2+\sqrt{2}}{2})|\le 0$，$|g(\frac{-2-\sqrt{2}}{2})|\le 0$，所以，$x_1=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$是方程$x^2+ax+b=0$的两根，由韦达定理可得$\begin{cases}-a=x_1+x_2=-2\\ b=x_1x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$，由$a^{\sin\frac{\pi}{2}x}\ge b^{2x-x^2-2}$可得$2^{\sin\frac{\pi x}{2}}\ge 2^{x^2-2x+2}$，所以，$x^2-2x+2\le\sin\frac{\pi x}{2}$，因为$x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ge 1$，$-1\le\sin\frac{\pi x}{2}\le 1$，所以$\begin{cases}x^2-2x+2=1\\ \sin\frac{\pi x}{2}=1\end{cases}$，解得$x=1$。

三、解答题（共 15 题，共 150 分）

46.【答案】(1) 解：由$f(1)=f(2)$得$1+k=2+\frac{k}{2}$，解得$k=2$，所以$f(x)=x+\frac{2}{x}$

（2）解：$\forall x_2>x_1>\sqrt{2}$，则 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2+\frac{2}{x_2})-(x_1+\frac{2}{x_1})$，

$=(x_2-x_1)+(\frac{2}{x_2}-\frac{2}{x_1})=(x_2-x_1)+\frac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}=(x_2-x_1)\frac{(x_1x_2-2)}{x_1x_2}$，$\because x_2>x_1>\sqrt{2}$，$\therefore x_2-x_1>0, x_2x_1>2$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x_2)>f(x_1)$，所以函数$f(x)$在区间$(\sqrt{2},+\infty)$上单调递增。

47.【答案】(1)解：对于函数$f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$，有$\frac{2-x}{x-1}\ge 0$，即$\frac{x-2}{x-1}\le 0$，解得$1<x\le 2$，即$A=\{x|1<x\le 2\}$.

$\because m-2x-x^2=-(x+1)^2+m+1\le m+1$，则$0<3^{m-2x-x^2}\le 3^{m+1}$，则$-1<g(x)\le 3^{m+1}-1$，

即$B=(-1,3^{m+1}-1]$;

（2）解：由$A\cup B=B$，得$A\subseteq B$，所以，$3^{m+1}-1\ge 2$，即$3^{m+1}\ge 3$，解得$m\ge 0$，因此，实数m的取值范围是$[0,+\infty)$.

48.【答案】（1）解：函数$f(x)$的定义域是R，因为$f(-x)=e^{-x}-e^{x}=-(e^{x}-e^{-x})=-f(x)$，即$f(-x)=-f(x)$，所以函数$f(x)$是奇函数；

（2）证明：任取$x_1,x_2\in R$，且$x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1}-e^{-x_1}-e^{x_2}+e^{-x_2}$ $=(e^{x_1}-e^{x_2})+\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{e^{x_1+x_2}}$ $=(e^{x_1}-e^{x_2})(1+\frac{1}{e^{x_1+x_2}})$，

$\because x_1<x_2,\therefore e^{x_1}-e^{x_2}<0$，$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，$\therefore f(x)$在 R 上单调递增.

（3）解：由（1）(2)知函数$f(x)$是奇函数，所以$f(1-m)\le -f(2m+1)=f(-2m-1)$。又函数$f(x)$是$R$上的增函数，所以$1-m\le -2m-1$，解得$m\le -2$。故实数$m$的取值范围是$(-\infty,-2]$。

49.【答案】（1）解：设$f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），则$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)$，$=2ax+a+b=2x+3$，$\therefore\begin{cases}2a=2\\a+b=3\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$，$\therefore f(x)=x^2+2x+c$。选择条件①：$f(x)=(x+1)^2+c-1$，$\therefore f(x)_{\min}=c-1=1$，即$c=2$，

选择条件②：$f(-2)=(-2)^2+2(-2)+c=2$，即$c=2$，选择条件③：$f(0)=c=2$，$\therefore f(x)=x^2+2x+2$.

（2）解：由题意$g(x)=x^2-2(1-t)x+2$，其对称轴为$x=t-1$，①当$t-1\le 1$，即$t\le 2$时，$g(x)_{\min}=g(1)=5-2t=-2$，解得$t=\frac{7}{2}$（舍）。②当$t-1>1$，即$t>2$时，$g(x)_{\min}=g(t-1)=-t^2+2t+1=-2$，解得$t=3$或$t=-1$(舍)，$\therefore t=3$。

50.【答案】（1）解：令$t=x^2+2x+a$，则其对称轴$x=-1$，$\therefore t=x^2+2x+a$在$[-2,-1]$上单调递减，在$[-1,2]$上单调递增；又$y=2^t$在R上单调递增，$\therefore f(x)$的增区间为$[-1,2]$，减区间为$[-2,-1]$;

（2）解：由（1）知$f(x)_{\max}=f(2)=2^{8+a}f(x)_{\max}=f(2)=2^{8+a}$.$\therefore 2^{8+a}=64=2^6$，$\therefore 8+a=6$，则$a=-2$，$\therefore f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{1}{8}$。

51.【答案】（1）解：要使函数有意义，则有$\begin{cases}2-2x>0\\x+4>0\end{cases}$，解得$-4<x<1$，所以函数$f(x)$的定义域为$(-4,1)$.

（2）解：函数可化$f(x)=\log_a(2-2x)+\log_a(x+4)=\log_a(-2x^2-6x+8)=\log_a[-2(x+\frac{3}{2})^2+\frac{25}{2}]$.

因为$-4<x<1$，所$0<-2(x+\frac{3}{2})^2+\frac{25}{2}\le\frac{25}{2}$，因为$a>1$，所以$\log_a[-2(x+\frac{3}{2})^2+\frac{25}{2}]\le\log_a\frac{25}{2}$，

即$f(x)_{\max}=\log_a\frac{25}{2}$，由$\log_a\frac{25}{2}=2$，解得$a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$。

52.【答案】（1）证明：$\because f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，$\therefore f(\frac{1}{x})=\frac{(\frac{1}{x})^2}{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{1}{1+x^2}$，$\therefore f(x)+f(\frac{1}{x})=1$；

（2）解：由（1）知$f(x)+f(\frac{1}{x})=1$，$\therefore f(2)+f(\frac{1}{2})=1$，$f(3)+f(\frac{1}{3})=1$，……，$f(2020)+f(\frac{1}{2020})=1$，

上述等式全部相加得$f(2)+f(\frac{1}{2})+f(3)+f(\frac{1}{3})+\cdots+f(2020)+f(\frac{1}{2020})=2019$.

53.【答案】（1）解：$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$，$\therefore f'(\pi)=0$；

（2）证明：令$g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，则$g'(x)=x\sin x-x^2=x(\sin x-x)$，当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，设

$t(x)=\sin x-x$，则$t'(x)=\cos x-1<0$，所以$t(x)$在$x\in(0,\frac{\pi}{2})$单调递减，$t(x)=\sin x-x<t(0)=0$，

即$\sin x<x$，所以$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，所以$g(x)<g(0)=0$，所以$f(x)<\frac{1}{3}x^3$.

（3）解：原题等价于$\sin x>kx$对$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立，即$k<\frac{\sin x}{x}$对$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立，令$h(x)=\frac{\sin x}{x}$，

则$h'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=-\frac{f(x)}{x^2}$。易知$f'(x)=x\sin x>0$，即$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$单调递增，所以$f(x)>f(0)=0$，

所以$h'(x)<0$，故$h(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$单调递减，所以$k\le h(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$。综上所述，$k$的最大值为$\frac{2}{\pi}$。

54.【答案】解：（Ⅰ）由题可知，$\begin{cases}f(-2)=\frac{-2m+n}{2}=-1\\f(0)=\frac{n}{4}=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=1\\n=0\end{cases}$；$\therefore$当$x\in(-4,0)$时，$f(x)=\frac{x}{x+4}$.

当$x\in(0,4)$时，$-x\in(-4,0)$，$f(x)=-f(-x)=-\frac{-x}{-x+4}=\frac{x}{-x+4}$，$\therefore x\in(0,4)$，$f(x)=\frac{x}{4-x}$。

（Ⅱ）$\because f(x)=\frac{x}{4-x}=-\frac{x-4+4}{x-4}=-1-\frac{4}{x-4}$，$\therefore$函数$f(x)$在$(0,4)$上为增函数.

证明：设 x_1，x_2 是 $(0,4)$ 上任意实数，且 $x_1 < x_2$。则 $f(x_1)-f(x_2)=(-1-\frac{4}{x_1-4})-(-1-\frac{4}{x_2-4})=-\frac{4}{x_1-4}+\frac{4}{x_2-4}=4\cdot\frac{x_1-x_2}{(x_1-4)(x_2-4)}$。$\because 0<x_1<4$，$0<x_2<4$且 $x_1<x_2$，$\therefore x_1-4<0$，$x_2-4<0$，$x_1-x_2<0$。$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即：$f(x_1)<f(x_2)$。$\therefore$函数$f(x)$在$(0,4)$上为增函数

55.【答案】解：（Ⅰ）由题意得$\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$，即$\begin{cases}a>0\\ 1-4a\le 0\end{cases}$，得$a\ge\frac{1}{4}$；

（Ⅱ）法一：由题意得$f(x)=ax^2+x+1$在$(-\infty,1)$恰有一个零点，又$f(x)$图象恒过点$(0,1)$

则$\begin{cases}a>0\\ \Delta=0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\ a\times 1^2+1+1\ge 0\end{cases}$或$a=0$。解得$a=\frac{1}{4}$或$-2\le a\le 0$。

法二：由题意得$f(x)=ax^2+x+1$在$(-\infty,1)$恰有一个零点，显然$x=0$不是零点，令$ax^2+x+1=0$，则$-a=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$，令$u=\frac{1}{x}\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，则$-a=u^2+u$，由图象得$a=\frac{1}{4}$或$-2\le a\le 0$。

56.【答案】(1)解：由题意，函数$f(x)=2^x$，又由不等式$f(2x)-f(x+1)>3$，可得$2^{2x}-2^{x+1}-3>0$，即$(2^x-3)(2^x+1)>0$，解得$2^x>3$，可得$x>\log_2 3$，所以不等式的解集为$\{x|x>\log_2 3\}$;

(2)解：由$g(x)=f(x)+f(|x|)=2^x+2^{|x|}$，①当$x\in[0,\frac{1}{2}]$时，$g(x)=2^{x+1}\in[2,2\sqrt{2}]$; ②当$x\in[-1,0)$时，$g(x)=2^x+\frac{1}{2^x}$，令$t=2^x$，则$y=t+\frac{1}{t},t\in[\frac{1}{2},1],y'=1-\frac{1}{t^2}<0$，即$y=t+\frac{1}{t}$在$[\frac{1}{2},1]$上为减函数，故$g(x)\in[2,\frac{5}{2}]$；综上得：当$x\in[-1,\frac{1}{2}]$时，函数$g(x)$的值域为$[2,2\sqrt{2}]$。

（3）解：由题意得，$\forall_{X1}\in(0,+\infty),g(2x_1)+ag(x_1)>[-2g(x_2)]_{min}$，当$x_2\in[-1,0]$，由（2）得$(g(x_2))_{max}=\frac{5}{2}$，所以$[-2g(x_2)]_{min}=-5$，所以$2\cdot(2^{x_1})^2+2a\cdot 2^{x_1}>-5$恒成立，即$a>-(\frac{5}{2\cdot 2^{x_1}}+2^{x_1})$恒成立，又$\frac{5}{2\cdot 2^{x_1}}+2^{x_1}\ge 2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}$，当且仅当$x_1=\log_2\frac{\sqrt{10}}{2}$时取等号，所以实数 a 的取值范围为$(-\sqrt{10},+\infty)$.

57.【答案】(1)解：依题意得$g(x)-f(x)\ge 0$对任意$x\in[-3,3]$恒成立，即$k\ge x^2+6x$对任意$x\in[-3,3]$恒成立，则$k\geqslant(x^2+6x)_{max},x\in[-3,3]$，当$x=3$时，$(x^2+6x)_{max}=27$。所以$k\ge 27$

（2）因存在x_1，$x_2 \in [-3,3]$，使$f(x_1) \le g(x_2)$成立，则有$[f(x)]_{\min} \le [g(x)]_{\max}$，因$f(x) = 2x^2 + 4x - k = 2(x+1)^2 - k - 2$，则$[f(x)]_{\min} = f(-1)$,。$g(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$，则$[g(x)]_{\max} = g(-3)$。于是$f(-1) \le g(-3)$，即$2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) - k \le (-3^2) - 2 \times (-3)$。解得$k \ge -17$。

58.【答案】（1）因为$f(x) = \ln x - ax + b$，所以$f'(x) = \frac{1}{x} - a$，又因为函数$f(x)$的图象在$x = 1$处的切线方程为$x + y - 3 = 0$，所以$f(1) = -a + b = 2$，$f'(1) = 1 - a = -1$，解得$a = 2$，$b = 4$。

（2）因为对$\forall x > 0$，$f(x) \le x_e^x - 3x + m$成立，所以$m \ge \ln x + x - xe^x + 4$恒成立，令$g(x) = \ln x + x - xe^x + 4$，$x > 0$；则$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 - (x+1)e^x = \frac{(x+1)(1-xe^x)}{x}$，设$g'(x_0) = 0$，$x_0 > 0$，则$e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$，从而$x_0 = -\ln x_0$，因为$g'(\frac{1}{2}) = 3(1 - \frac{\sqrt{e}}{2}) > 0$，$g'(1) = 2(1 - e) < 0$，所以$g'(\frac{1}{2}) \cdot g(1) < 0$，因为$g'(x)$的图象在$[\frac{1}{2}, 1]$上是不间断的，所以$\exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$，满足$g'(x_0) = 0$，当$x \in (0, x_0)$时，$g'(x) > 0$，$g(x)$单调递增；当$x \in (x_0, +\infty)$时，$g'(x) < 0$，$g(x)$单调递减。从而$g(x)$在$x = x_0$时取得最大值$g(x_0) = \ln x_0 + x_0 - x_0 e^{x_0} + 4 = -1 + 4 = 3$，所以$m$的取值范围为$m \ge 3$.

59.【答案】（1）$m = 1$，则$f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 8$，由$4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$，整理为$(2^x - 4)(2^x + 2) = 0$，因为$2^x + 2 > 0$，所以$2^x - 4 = 0$，可得$x = 2$。

（2）令$t = 2^x, t \in [1,4]$，由$t^2 - 2mt - 8 \ge -2$，即$m \le \frac{t^2-6}{2t}$，$\forall t \in [1,4]$恒成立，只需$m \le (\frac{t^2-6}{2t})_{\min}$，又$y = \frac{t^2-6}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{3}{t}$在$t \in [1,4]$上为增函数，当$t = 1$时，$y_{\min} = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$，所以$m \le -\frac{5}{2}$.

60.【答案】（1）$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot x + \ln x - k - 1 = \ln x - k$，①$k \le 0$时，因为$x > 1$，所以$f'(x) = \ln x - k > 0$，函数$f(x)$的单调递增区间是$(1, +\infty)$，无单调递减区间，无极值；

②当$k > 0$时，令$\ln x - k = 0$，解得$x = e^k$，当$1 < x < e^k$时，$f'(x) < 0$；当$x > e^k$，$f'(x) > 0$。所以函数$f(x)$的单调递减区间是$(1, e^k)$，单调递增区间是$(e^k, +\infty)$，在区间$(1, +\infty)$上的极小值为

$f(e^k)=(k-k-1)e^k=-e^k$，无极大值。

（2）由题意，$f(x)-4\ln x<0$，即问题转化为$(x-4)\ln x-(k+1)x<0$对于$x\in[e,e^2]$恒成立，即$k+1>\frac{(x-4)\ln x}{x}$对于$x\in[e,e^2]$恒成立，令$g(x)=\frac{(x-4)\ln x}{x}$，则$g'(x)=\frac{4\ln x+x-4}{x^2}$，令$t(x)=4\ln x+x-4,x\in[e,e^2]$，则$t'(x)=\frac{4}{x}+1>0$，所以$t(x)$在区间$[e,e^2]$上单调递增，故$t(x)_{\min}=t(e)=e-4+4=e>0$，故$g'(x)>0$，所以$g(x)$在区间$[e,e^2]$上单调递增，函数$g(x)_{\max}=g(e^2)=2-\frac{8}{e^2}$。要使$k+1>\frac{(x-4)\ln x}{x}$对于$x\in[e,e^2]$恒成立，只要$k+1>g(x)_{\max}$，所以$k+1>2-\frac{8}{e^2}$，即实数 k 的取值范围为$(1-\frac{8}{e^2},+\infty)$。

（3）解：证法 1 因为$f(x_1)=f(x_2)$，由（1）知，函数$f(x)$在区间$(0,e^k)$上单调递减，在区间$(e^k,+\infty)$上单调递增，且$f(e^{k+1})=0$。不妨设$x_1<x_2$，则$0<x_1<e^k<x_2<e^{k+1}$，要证$x_1x_2<e^{2k}$，只要证$x_2<\frac{e^{2k}}{x_1}$，即证$e^k<x_2<\frac{e^{2k}}{x_1}$。因为$f(x)$在区间$(e^k,+\infty)$上单调递增，所以$f(x_2)<f(\frac{e^{2k}}{x_1})$，又$f(x_1)=f(x_2)$，即证$f(x_1)<f(\frac{e^{2k}}{x_1})$，构造函数$h(x)=f(x)-f(\frac{e^{2k}}{x})=(\ln x-k-1)x-(\ln\frac{e^{2k}}{x}-k-1)\frac{e^{2k}}{x}$，即$h(x)=x\ln x-(k+1)x+e^{2k}(\frac{\ln x}{x}-\frac{k-1}{x})$，$x\in(0,e^k)$。

$h'(x)=\ln x+1-(k+1)+e^{2k}(\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{k-1}{x^2})=(\ln x-k)\frac{(x^2-e^{2k})}{x^2}$，因为$x\in(0,e^k)$，所以$\ln x-k<0,x^2<e^{2k}$，即$h'(x)>0$，所以函数$h(x)$在区间$(0,e^k)$上单调递增，故$h(x)<h(e^k)$，而$h(e^k)=f(e^k)-f(\frac{e^{2k}}{e^k})=0$，故$h(x)<0$，所以$f(x_1)<f(\frac{e^{2k}}{x_1})$，即$f(x_2)=f(x_1)<f(\frac{e^{2k}}{x_1})$，所以$x_1x_2<e^{2k}$成立。证法 2 要证$x_1x_2<e^{2k}$成立，只要证：$\ln x_1+\ln x_2<2k$。因为$x_1\neq x_2$，且$f(x_1)=f(x_2)$，所以$(\ln x_1-k-1)x_1=(\ln x_2-k-1)x_2$，即$x_1\ln x_1-x_2\ln x_2=(k+1)(x_1-x_2)$，

$x_1\ln x_1-x_2\ln x_1+x_2\ln x_1-x_2\ln x_2=(k+1)(x_1-x_2)$，即$(x_1-x_2)\ln x_1+x_2\ln\frac{x_1}{x_2}=(k+1)(x_1-x_2)$，

$k+1=\ln x_1+\frac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，同理$k+1=\ln x_2+\frac{x_1\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，从而$2k=\ln x_1+\ln x_2+\frac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}+\frac{x_1\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-2$，要证

$\ln x_1+\ln x_2<2k$，只要证$\frac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}+\frac{x_1\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-2>0$，令不妨设$x_1<x_2$，则$0<\frac{x_1}{x_2}=t<1$，即证$\frac{\ln t}{t-1}+\frac{\ln t}{1-\frac{1}{t}}-2>0$，

即证$\frac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$，即证$\ln t<2\frac{t-1}{t+1}$对$t\in(0,1)$恒成立，设$h(t)=\ln t-2\frac{t-1}{t+1}(0<t<1)$，

$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以$h(t)$在$t\in(0,1)$单调递增，$h(t)<h(1)=0$，得证，所以$x_1x_2<e^{2k}$.

模块六　数列答案解析部分

一、单选题

1.【答案】A

【解析】因为$a_3+a_5+a_7=3a_5=15$，$a_5=5$，$a_4+a_6+a_8=3a_6=21$，$a_6=7$，所以 $d=a_6-a_5=2$. 故本题选 A

2.【答案】A

【解析】设$b_n=a_n+n$，$\{b_n\}$为等比数列，设公比为 q，$b_2=a_2+2=3$，$b_3=a_3+3=9$，$\therefore q=3$ $\therefore b_4=b_3\cdot 3=9\times 3=27$，即$a_4+4=27$，$\therefore a_4=23$。故本题选 A。

3.【答案】A

【解析】∵数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_2=3$，$a_5=15$，$\therefore 15=3+3d$，$\therefore d=4$，$\therefore a_{11}=a_2+9d=3+36=39$，故本题选 A.

4.【答案】B

【解析】若“数列$\{a_n\}$为等差数列”成立，必有“$2a_2=a_1+a_3$”，而仅有“$2a_2=a_1+a_3$”成立，不能断定“数列$\{a_n\}$为等差数列”成立，必须满足对任何的 $n\in N^*$，都有 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$成立才可以，故“$2a_2=a_1+a_3$”是“数列$\{a_n\}$为等差数列”的必要不充分条件。故本题选 B

5.【答案】A

【解析】$\because a_4+a_5+a_6+a_7=2(a_1+a_{10})=4$，$\therefore a_1+a_{10}=2$，$\therefore S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5\times 2=10$.故本题选 A。

6.【答案】A

【解析】在等差数列$\{a_n\}$中，设公差为 d，由$a_2+a_8=10$,$a_3=7$，得$\begin{cases}a_1+d+a_1+7d=10\\a_1+2d=7\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=9\\d=-1\end{cases}$。故本题选 A.

7.【答案】D

【解析】令等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，又由$a_1+a_3=4$,$a_2+a_4=8$，知：$\begin{cases}a_1(1+q^2)=4\\a_1q(1+q^2)=8\end{cases}$，而$a_1\neq 0$，则解之得$\begin{cases}a_1=\frac{4}{5}\\q=2\end{cases}$；∴等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和；故数列的前 8 项和$S_8=\frac{4\times(2^8-1)}{5}=204$；故本题选 D。

8.【答案】C

【解析】在等比数列$\{a_n\}$中，可得$a_n=a_1q^{n-1}$，若$a_1>0,q>1$，可得$a_{n+1}-a_n=a_1(q^n-q^{n-1})=a_1q^{n-1}(q-1)>0$，即$a_{n+1}>a_n$，所以数列$\{a_n\}$为递增数列，故充分性是成立的；反之：若等比数列$\{a_n\}$为递增数列，即$a_{n+1}-a_n=a_1q^{n-1}(q-1)>0$，若$a_1>0$，则$q^{n-1}(q-1)>0$，可得 $q>1$，故必要性是成立的，所以“$q>1$”是“$\{a_n\}$是递增数列”的充分必要条件。故本题选 C.

9.【答案】A

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为q，由题知，$1=64q^3$，解得$q=\frac{1}{4}$,$a_1=\frac{a_2}{q}=64$,$\sqrt{a_1}=8$,$\sqrt{q}=\frac{1}{2}$，所以数列，是以8为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，所以$S_6=\frac{8\times[1-(\frac{1}{2})^6]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{4}$。故本题选：A.

10.【答案】B

【解析】解：因为$3+a_5=a_3+a_8$，由等差数列性质，若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$得，$\therefore a_6=3$.

S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6=33$．故本题选：B.

二、填空题

1.【答案】$\frac{n^2-n+2}{2}$

【解析】解：由题意可得：$a_{n+1}-a_n=n$且$a_1=1$，$\therefore a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=2$，…，$a_n-a_{n-1}=n-1$，以上$n-1$个式子相加可得，$a_n-a_1=1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，则$a_n=1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$，故本题答案为$\frac{n^2-n+2}{2}$

2.【答案】3；-5

【解析】，是方程$x^2-3x-5=0$的两根，则$a_3+a_{10}=3$，$\{a_n\}$是等差数列，故$a_5+a_8=a_3+a_{10}=3$；是方程$x^2-3x-5=0$的两根，则$a_3a_{10}=-5$，$\{a_n\}$是等比数列，故$a_6a_7=a_3a_{10}=-5$.

故本题答案为3；-5.

3.【答案】$a_n=\begin{cases}0.4\\0.4+0.3\times2^{n-1}\end{cases}$

【解析，设数列：0，3，6，12，24，48，96，192，…，为$\{c_n\}$，由题可知，该数列的通项公式为$c_n=\begin{cases}0,n=1\\3\cdot2^{n-2},n\geq2\end{cases}(n\in N^*)$，设将，中的每一项加上4得到数列$\{b_n\}$，则$b_n=\begin{cases}4,n=1\\3\cdot2^{n-2}+4,n\geq2\end{cases}(n\in N^*)$，最后将数列$\{b_n\}$中的每一项除以10，则可得到数列$a_n=\begin{cases}0.4,n=1\\\frac{3\cdot2^{n-2}+4}{10},n\geq2\end{cases}(n\in N^*)$，故本题答案为$a_n=\begin{cases}0.4\\0.4+0.3\times2^{n-1}\end{cases}$.

4.【答案】$a_n=2n-3$

【解析】数列的前n项和是不含常数项的关于实数n的二次函数，据此可得，该数列为等差数列，此数列的通项公式为：$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3$。

5.【答案】2

【解析】当$n=1$时，$a_1=S_1=1+3=4$，当$n=2$时，$a_2=S_2-S_1=(2^2+3\times2)-4=6$，所以

$d = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$。故本题答案为 2。

6.【答案】29

【解析】解：因为$a_{n+1} = a_n + 3$，所以$a_{n+1} - a_n = 3$，所以$\{a_n\}$是首项为 2，公差 d 为 3 的等差数列，即$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$，则$a_{10} = 3 \times 10 - 1 = 29$，故本题答案为 29。

7.【答案】$\frac{35}{2}$

【解析】设公差为 d，则有$\begin{cases} 2d = 6, \\ (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 7d), \end{cases}$解得$\begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 3, \end{cases}$，从而$a_n = 3n + 1$，故$\frac{S_{10}}{a_3} = \frac{35 \times 5}{10} = \frac{35}{2}$.故本题答案为$\frac{35}{2}$

8.【答案】4^{n-1}

【解析】因为公比 q=4，且前 3 项之和等于 21，所以$\frac{a_1(1-4^3)}{1-4} = 21 \Rightarrow a_1 = 1$，该数列的通项公式为$a_n = 1 \times 4^{n-1} = 4^{n-1}$，故本题答案为$4^{n-1}$

9.【答案】3

【解析】由题，可得$a_2 . a_6 = a_3{}^2$，$\because$等差数列$\{a_n\}$，$\therefore (a_1 + d)(a_1 + 5d) = (a_1 + 2d)^2$，即$- d(2a_1 + d) = 0$，$\because d \neq 0$，$\therefore 2a_1 + d = 0$，即$d = -2a_1$，$\therefore a_2 = a_1 + d = a_1 - 2a_1 = - a_1$，$a_3 = a_1 + 2d = a_1 - 4a_1 = -3a_1$，$\therefore q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-3a_1}{-a_1} = 3$。故本题答案为 3。

10.【答案】-1

【解析】$S_{11} = \frac{(a_1 + a_{11}) \times 11}{2} = 22 \therefore a_1 + a_{11} = 4 \therefore a_5 + a_7 = 4$，$a_7 = 1 \therefore a_5 = 3 \therefore d = -1$，故本题答案为$-1$。

三、解答题

1.【答案】（1）解：设等差数列$\{a_n\}$公差为 d，等比数列$\{b_n\}$公比为$q(q > 0)$，由题知$\begin{cases} a_2 = 3 \\ a_5 + a_9 = 26 \end{cases}$，即$\begin{cases} a_1 + d = 3 \\ 2a_1 + 12d = 26 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$，所以，$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 1$，又$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_3 = a_{14} = 27 \end{cases}$，解得$q^2 = 9$，又$q > 0$，所以$q = 3$，$\therefore b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 3^n$；

（2）解：$\because a_n \cdot b_n = (2n-1) \cdot 3^n$，

$T_n = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^n$，①

$3T_n = 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^n + (2n-1) \cdot 3^{n+1}$②

①−②得$-2T_n = 3 + 2(3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (2n-1) \cdot 3^{n+1} = 3 + 2 \cdot \frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \cdot 3^{n+1}$

$= 3 + 3^{n+1} - 9 - (2n-1) \cdot 3^{n+1} = -6 + (2-2n) \cdot 3^{n+1}$，

所以$T_n = 3 + (n-1) \cdot 3^{n+1}$.

2.【答案】（1）解：设等差数列的公差为 d，则$a_3 = a_1 + 2d = 1 + 2d$，$a_9 = a_1 + 8d = 1 + 8d$，因

为，成等比数列，所以$a_3^2=a_1.a_9$，即$(1+2\mathrm{d})^2=1+8\mathrm{d}$，整理为：$\mathrm{d}=0$（舍）或$\mathrm{d}=1$，所以$a_n=1+(n-1)\times 1=n$

（2）解：由（1）可知$\mathrm{b_n}=4^{\mathrm{n}}+2\mathrm{n}$，数列$\{4^{\mathrm{n}}\}$是以4为公比，4为首项的等比数列，前n项和为$\frac{4(4^{\mathrm{n}}-1)}{3}$，数列$\{2\mathrm{n}\}$是以2为首项，2为公差的等差数列，前n项和为$\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$。所以数列$\{\mathrm{b_n}\}$的前n项和为$\frac{4(4^{\mathrm{n}}-1)}{3}+\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$。

3.【答案】（1）解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为$\mathrm{d}(\mathrm{d}>0)$，因为$a_2=3$，若a_1,a_3-a_1,a_8+a_1，成等比数列，可得$\begin{cases}a_1+d=3\\ a_1(2a_1+7d)=(2d)^2\\ d>0\end{cases}$，解得$a_1=1,d=2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

（2）解：由（1）可得$b_n=\frac{3}{a_na_{n+1}}=\frac{3}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{3}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，所以$\mathrm{S_n}=\frac{3}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2\mathrm{n}-1}-\frac{1}{2\mathrm{n}+1})]=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{2\mathrm{n}+1})=\frac{3\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}$.

4.【答案】(1)解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由a_1,a_4,a_{10}成等比数列，可得$a_4^2=a_1.a_{10}$，即$(\mathrm{a_1}+3\mathrm{d})^2=\mathrm{a_1}(\mathrm{a_1}+9\mathrm{d})$，$\therefore a_1^2+6a_1d+9d^2=a_1^2+9a_1d$，$\because \mathrm{d}\neq 0$，$\therefore a_1=3d$，由数列$\{a_n\}$的前10项和为150，得$S_{10}=10a_1+45d=150$，即$30\mathrm{d}+45\mathrm{d}=150$，故$d=2,a_1=6$，故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+4$；

（2）解：$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+4)(2n+6)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})$，$\mathrm{T}_{100}=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{102}-\frac{1}{103})=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}-\frac{1}{103})=\frac{25}{309}$.

5.【答案】（1）解：∵数列$\{a_n\}$是等差数列，$\mathrm{S_n}$是其前n项和，$a_1=2,S_3=12$，

∴$\mathrm{S_3}=3\times 2+\frac{3\times 2}{2}\mathrm{d}=12$，解得$\mathrm{d}=2$，

∴$a_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

（2）解：∵$b_n=a_n+4^n=2n+4^n$，

∴$\mathrm{T_n}=2(1+2+3+\cdots+\mathrm{n})+(4+4^2+4^3+\cdots+4^{\mathrm{n}})=2\times\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}+\frac{4(1-4^{\mathrm{n}})}{1-4}=\mathrm{n}^2+\mathrm{n}+\frac{4^{\mathrm{n}+1}-4}{3}$.

6.【答案】(1)解：由，成等比数，得$a_3^2=a_1\cdot a_9$，即$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$，结合$a_1=1$，解得$\mathrm{d}=1$，$\mathrm{d}=0$（舍去），所以，.

(2)解：由于$\mathrm{b_n}=\frac{1}{\mathrm{S_n}}=\frac{2}{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}=2(\frac{1}{\mathrm{n}}-\frac{1}{\mathrm{n}+1})$，所以$\mathrm{T_n}=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+2(\frac{1}{\mathrm{n}}-\frac{1}{\mathrm{n}+1})=2(1-\frac{1}{\mathrm{n}+1})$，

7.【答案】(1)解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为$\mathrm{d}(\mathrm{d}\neq 0)$，因为前10项和为65，所以$\mathrm{S_{10}}=10\mathrm{a_1}+45\mathrm{d}=65$，因为$a_1$、$a_3$、$a_7$成等比数列，所以$a_3^2=a_1a_7$，即$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+6d)$，联立$\begin{cases}10a_1+45d=65\\ (a_1+2d)^2=a_1(a_1+6d)\end{cases}$，解得$a_1=2$，$\mathrm{d}=1$，故$a_n=n+1$.

（2）解：因为$a_n = n+1$，$b_n = 2^{a_n} + a_n$，所以$\mathrm{b_n} = 2^{n+1} + n + 1$，则$\mathrm{T_n} = 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} + 2 + 3 + \cdots + n + 1 = \frac{4(1-2^n)}{1-2} + \frac{(2+n+1)n}{2} = 2^{n+2} - 4 + \frac{n^2+3n}{2}$，故$\mathrm{T_n} = 2^{n+2} - 4 + \frac{n^2+3n}{2}$.

8.【答案】（1）解：因为数列$\{\frac{S_n}{n}\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以$\frac{S_n}{n} = n$，所以$S_n = n^2$，当 $n = 1$ 时，$a_1 = S_1 = 1$；当 $n \geq 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$，当 $n = 1$ 时，$a_1 = 1$ 也符合上式。所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n = 2n - 1 (n \in N^*)$.

（2）解：$b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$，所以数列$\{\mathrm{b_n}\}$的前 n 项和$\mathrm{T_n} = \mathrm{b_1} + \mathrm{b_2} + \cdots + \mathrm{b_n} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + \cdots + \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) = \frac{n}{2n+1}$，故$\mathrm{T_{2020}} = \frac{2020}{4041}$.

9.【答案】（1）解：由题得$a_1 q = 4$，$a_1^3 q^9 = 2^{12}$，因为数列$\{a_n\}$是各项为正数，所以$a_1 = 2, q = 2, \therefore a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$由题得$\mathrm{b_2} \cdot \mathrm{b_3} = 15$，$\mathrm{b_2} + \mathrm{b_3} = 8$.因为等差数列单调递增，所以$\mathrm{b_2} = 3, \mathrm{b_3} = 5$, ∴ $d = 2$, ∴ $\mathrm{b_n} = 3 + (n-2) \times 2 = 2n - 1$.

（2），：数列，的前 n 项和$\mathrm{T_n} = 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 5 + \cdots + 2^n \cdot (2n-1)$，

所以 $2\mathrm{T_n} = 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 3 + 2^4 \cdot 5 + \cdots + 2^{n+1} \cdot (2n-1)$，

两式相减得$-\mathrm{T_n} = 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + 2^3 \cdot 2 + \cdots + 2^n \cdot 2 - 2^{n+1}(2n-1)$

所以$-\mathrm{T_n} = 2 + \frac{8(1-2^{n-1})}{1-2} - 2^{n+1}(2n-1)$，

所以$\mathrm{T_n} = 6 + (2n-3)2^{n+1}$.

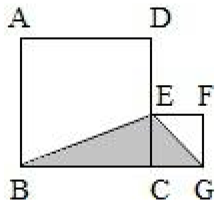
10. 【答案】（1）解：设$\{a_n\}$的公差为 d，则有$a_1 \cdot (a_3 + 1) = a_2^2$，即$(a_4 - 3d)(a_4 + 1 - d) = (a_4 - 2d)^2$又由$a_4 = 4$，得$(4 - 3d)(5 - d) = (4 - 2d)^2$，解得 $d = 1$ 或 $d = -4$(舍去)，故$a_n = n$

（2）解：由（1）可得：$\mathrm{b_n} = 2^n$，$\therefore S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot 2^n$，$\therefore 2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^{n+1}$，两式相减得：$S_n = n \cdot 2^{n+1} - 2 - 2^2 - \ldots - 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$，又$S_n$单调递增，$S_7 = 1538, S_8 = 3586$，所以使得$S_n < 2020$ 成立的最大整数 $n = 7$

模块七　平面几何答案解析部分

一、单选题（共 20 题，共 40 分）

1.【答案】D。



【解析】因为 $S_{\Delta BCE}=\frac{1}{2}\times CE\times BC$，又因为 $CE=CG$，$S_{\Delta GCE}=\frac{1}{2}\times CE\times CG=\frac{1}{2}\times CG^2$，又因为 $S_{\Delta BCE}:S_{\Delta GCE}=3:1$，所以 $\left(\frac{1}{2}\times CE\times BC\right):\left(\frac{1}{2}\times CE\times CG\right)=3:1$，即 $BC:CG=3:1, BC=3CG$，所以 $S_{正方形ABCD}=BC^2=3CG\times3CG=9CG^2$，$S_{正方形ECGF}=CG^2$，又因为 $S_{\Delta BCE}=\frac{1}{2}\times CE\times BC$，$CE=CG$，即 $S_{\Delta BCE}=\frac{1}{2}\times CE\times3CG=\frac{3}{2}\times CG^2$，所以大正方形中空白部分的面积为 $S_{正方形ABCD}-S_{\Delta BCE}=9CG^2-\frac{3}{2}CG^2=\frac{15}{2}CG^2$，小正方形空白部分的面积为 $\frac{1}{2}S_{正方形ECGF}=\frac{1}{2}CG^2$，所以两空白部分的比值为 $15:1$。故本题选 D。

2.【答案】C。

【解析】过平行四边形的中心点的直线，将平行四边形分为面积相等的两部分，故本题选 C。

3.【答案】C。

【解析】由 $\pi d=L=188.4$，π 取 3.14，代入解得 $d=60$。故本题选 C。

4.【答案】C。

【解析】设每个同学与老师的距离大约是 r 米因为π取 3.14，由题意可得 $18.84=2\pi r=6.28r\Rightarrow r=3$，故本题选 C。

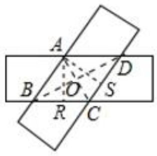
5.【答案】B。

【解析】由题意可知 $S_{平行四边ABCD}=2S_{\triangle ABD}=AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD=4\times10\cdot\sin\angle ABD=24$，$\therefore\sin\angle ABD=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$。故本题选 B。

6.【答案】C。

【解析】作 $AR\perp BC$ 于 R，$AS\perp CD$ 于 S，连接 AC，BD 交于点 O，由题意知 $AD/\!/BC$，$AB/\!/CD$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，由于两个矩形等宽，$\therefore AR=AS$，

$\because AR\cdot BC=AS\cdot CD$，$\therefore BC=CD$，所以平行四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AC\perp BD$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\because OA=3$，$OB=4$，$\therefore AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$。故本题选 C。

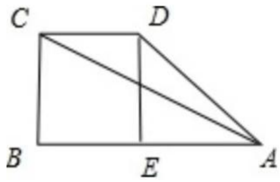


7.【答案】B。

【解析】把一个图形绕着某一点旋转$180°$，如果旋转后的图形能够与原来的重合，那么这个图形叫做中心对称图形。故本题选 B。

8.【答案】B。

【解析】如图，设$AB=2$，则$BC=CD=1$，作$ED\perp AB$于E，得$AD=\sqrt{2},AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}$，在$\triangle ACD$中，由余弦定理知$\cos\angle DAC=\dfrac{AD^2+AC^2-CD^2}{2AD\cdot AC}=\dfrac{2+5-1}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$。故本题选 B。



9.【答案】D。

【解析】由圆的内接四边形对角互补得，$\angle A+\angle BCD=180°$，$\because\angle BCD=180°-\angle DCE=115°$，$\angle A=65°$，$\angle BOD=2\angle A=130°$。故本题选 D。

10.【答案】B。

【解析】两点确定一条直线。故此题选 B。

11.【答案】D。

【解析】由题意可知两角之和为$90°$，故此题选 D。

12.【答案】C。

【解析】图形中心对称，把一个图形绕着某一点旋转$180°$，如果旋转后的图形能够与原来的重合，那么这个图形叫做中心对称图形。A 选项、B 选项为轴对称图形；D 选项为中心对称图形；C 选项，正方形既是轴对称图形又是中心对称图形。故本题选 C。

13.【答案】A。

【解析】由三角形相似可得，$\dfrac{1.6}{8}=\dfrac{BN}{6+BN}$，$BN=1.5;\dfrac{1.6}{8}=\dfrac{AM}{6+14+AM}$，$AM=5$；$AM-BN=3.5$米。增大了 3.5 米，故本题选 A。

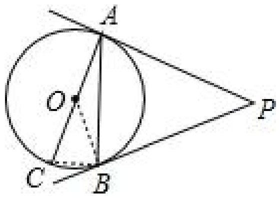
14.【答案】A。

【解析】圆心距 2 等于两圆的半径差，所以两圆内切，有一条公切线。故本题选 A。

15.【答案】D。

【解析】连接 BC、OB。∵PA、PB 是圆 O 的切线，A、B 为切点，$\angle OAP=\angle OBP=90°$，

而 $\angle P=40°$，∴$\angle AOB=180°-\angle P=140°$，∴$\angle BOC=40°$，∴$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=20°$。故本题选 D。



16.【答案】D。

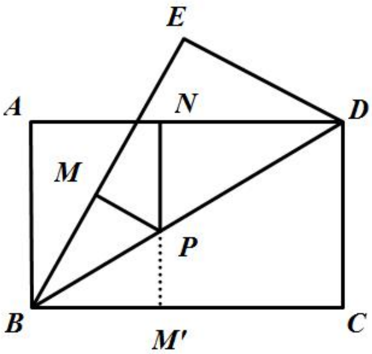
【解析】由于甲、乙两地都在东径$120°$，就是都在同一个大圆上，它们的纬度差是$120°$，就是大圆周的$\frac{1}{3}$，由于地球半径为R，则甲、乙两地球面距离可得为$\frac{2\pi}{3}R$。故本题选 D。

17.【答案】C。

【解析】设扇形圆心角为α，半径为R cm，则$\begin{cases}2R+\alpha\cdot R=6\\ \frac{1}{2}R^2\cdot\alpha=2\end{cases}$，解得$\alpha$=1 或 4。故本题选 C。

18.【答案】B。

【解析】由题意绘制如下图像，$PM'\perp BC$，由题意易证$PM=PM'$，∴$PM+PN=M'N=CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=6$。故本题选 B。



19.【答案】D。

【解析】A 选项根据菱形的定义可知正确；B 选项根据菱形的判定可知正确；C 选项根据矩形的定义可知正确；D 选项根据正方形的定义可知错误，故本题选 D。

20.【答案】C。

【解析】由题意可知$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C$，$\angle BCB'=\angle ACA'=20°$，又∵AC⊥$A'B'$，∴$\angle ACA'+\angle A'=90$，∴$\angle A'=70$，∴∠BAC= 70°。故本题选 C。

二、填空题（共 10 题；共 20 分）

1.【答案】$\frac{40}{3}$。

【解析】根据题意可知 $AB=AD=5$，那么 $CD=8$。故 $\tan C=\frac{5}{12}=\frac{DO}{8}\Rightarrow DO=\frac{10}{3}$。所以阴影部分三角形的面积为 $\frac{10}{3}\times 8\times\frac{1}{2}=\frac{40}{3}$。

2.【答案】$2n+1$。

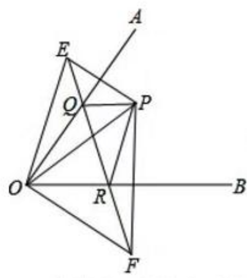
【解析】当三角形内有一个点时，可作出 3 个不重叠的三角形；当三角形内有两个点时，可作出 5 个不重叠的三角形；当三角形内有三个点时，可作出 7 个不重叠的三角形；以此类推，当三角形有 n 个点时，有不重叠的三角形 $2n+1$ 个。

3.【答案】60° 。

【解析】设△ ABC 的底角为 x，则顶角为 $180^\circ-2x$，∵△ABC 的底角等于△DEF 的顶角，∴△DEF 的顶角为 x，底角为 $\frac{180^\circ-x}{2}$，又∵△ABC 的底长等于△DEF 的腰长，△ABC 的腰长等于△DEF 的底长，∴有 $180^\circ-2x=\frac{180^\circ-x}{2}$，解得 $x=60^\circ$

4.【答案】$\sqrt{2}$。

【解析】如图所示，作出 P 点关于 OA 的对称点 E，作出 P 关于 OB 的对称点 F，连接 EF，交 OA 于 Q，交 OB 于 R，连接 PQ, PR, PE, PF, OE, OF，则 $PQ=EQ, PR=RF$，则△PQR 的周长 $=PQ+QR+PR=EQ+QR+RF=EF$，∵ $\angle AOP=\angle AOE$，$\angle POB=\angle FOB$，$\angle AOB=\angle AOP+\angle POB=45^\circ$，∴ $\angle EOF=90^\circ$，又∵ $OE=OP, OF=OP$，∴$OE=OF=1$，即△ EOF 是等腰直角三角形，∴ $EF=\sqrt{2}OP=\sqrt{2}$，∴△ PQR 周长最小值为 $\sqrt{2}$。



5.【答案】5；10。

【解析】由题意可知，圆的直径等于正方形的边长，即圆的直径为 10 m，圆的半径为 5 m。

6.【答案】$\frac{8}{3}$。

【解析】如图所示，阴影三角形所在的矩形面积为 $2\times 1=2$，所以原长方形的面积为 $2\div 3\times 4=\frac{8}{3}$ 平方厘米。

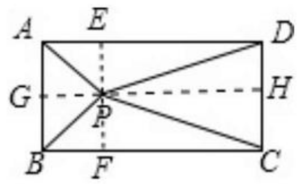
7.【答案】90°。

【解析】因为 $AB//CD$，所以 $\angle BAC+\angle ACD=180^\circ$，又因为 CE、AE 分别平分 $\angle ACD$，$\angle CAB$，所以

$\angle 1+\angle 2=90^\circ$。

8.【答案】$3\sqrt{2}$

【解析】过点 P 作 AB 的平行线分别交 DA、BC 于 E、F，过 P 作 BC 的平行线分别交 AB、CD 于 G、H。设 $AG=DH=a$，$BG=CH=b$，$AE=BF=c$，$DE=CF=d$，则 $AP^2=a^2+c^2$，$CP^2=b^2+d^2$，$BP^2=b^2+c^2$，$DP^2=d^2+a^2$，于是 $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$，又 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，所以 $DP^2=AP^2+CP^2-BP^2=3^2+5^2-4^2=18$，则 $DP=3\sqrt{2}$。



9.【答案】8。

【解析】∵ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，∴$\angle B=\angle C=45^\circ$，∵$\angle BDF+\angle B+\angle F=180^\circ$，

$\angle CDE+\angle B+\angle F=180^\circ$，∴$\angle F=45^\circ$，$\angle CED=45^\circ$，∴$\angle B=\angle F$，$\angle C=\angle CED$，∴$BD=DF$，$CD=DE$，∴$DE+DF=CD+BD=BC=8$。

10.【答案】$\dfrac{\pi}{4}$。

【解析】在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，∴ $AC=\sqrt{5}$，$AM=\sqrt{2}$，所求面积=

$$S_{扇形ACE}-S_{扇形AMN}==\frac{30\times\pi\times\left(\sqrt{5}\right)^2}{360}-\frac{30\times\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2}{360}=\frac{\pi}{4}。$$

三、解答题（共 10 题；共 80 分）

1.【答案】32。

【解析】∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $AD=BC$，$AD/\!/BC$，∵ $BE:EC=3:1$，∴ $BE:BC=3:4$，∴ $BE:AD=3:4$，∵ $AD/\!/BC$，∴ $\triangle FBE\backsim\triangle FDA$，∴ $\dfrac{S_{\triangle FBE}}{S_{\triangle FDA}}=\left(\dfrac{BE}{DA}\right)^2=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$，而 $S_{\triangle FBE}=18$，∴ $S_{\triangle FDA}=\dfrac{16}{9}\times 18=32$。

2.【答案】（1）见解析；（2）见解析。

【解析】（1）∵$AB=AE$，D 为线段 BE 的中点，∴$AD\perp BC$，∴$\angle C+\angle DAC=90^\circ$，

∵$\angle BAC=90^\circ$，∴$\angle BAD+\angle DAC=90^\circ$，∴$\angle C=\angle BAD$。

（2）∵$AF/\!/BC$，∴$\angle FAE=\angle AEB$，∵$AB=AE$，∴$\angle B=\angle AEB$，∴$\angle B=\angle FAE$，且 $\angle AEF=\angle BAC=90^\circ$，$AB=AE$。∴$\triangle ABC\cong\triangle EAF\left(\mathrm{ASA}\right)$，∴$AC=EF$。

3.【答案】（1）见解析；（2）见解析；（3）见解析。

【解析】（1）证明：由 $y=x+b$ 得 $A(-b,0)$，$B(0,\ b)$。∴ $\angle DAC=\angle OAB=45°$，又∵ $DC\perp x$ 轴，$DE\perp y$ 轴，∴ $\angle ACD=\angle CDE=90°$，∴$\angle ADC=45°$ 即 AD 平分 $\angle CDE$。

（2）证明：∵ $\angle ACD=90°$，$\angle ADC=45°$，∴ $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，同理可得，$\triangle BDE$ 是等腰直角三角形，∴ $AD=2\sqrt{CD}$，$BD=2\sqrt{DE}$。∴ $AD\cdot BD=2CD\cdot DE=2\times2=4$ 为定值。

（3）存在直线 AB，使得 $OBCD$ 为平行四边形。若 $OBCD$ 为平行四边形，则 $AO=AC$，$OB=CD$。由（1）知 $AO=BO$，$AC=CD$，设 $OB=a(a>0)$，∴$B(0,-a)$，$D(2a,\ a)$，∵D 在 $y=2x$ 上，∴ $2a\cdot a=2$，∴$a_1=-1$（舍去），$a_2=1$，∴$B(0,-1)$。又∵B 在 $y=x+b$ 上，∴ $b=-1$。即存在直线：$y=x-1$，使得四边形 $OBCD$ 为平行四边形。

4.【答案】（1）$90°$、$135°$、$45°$；（2）$\frac{3\sqrt{10}}{5}$ 和 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$。

【解析】（1）作图如下图 1、图 2 所示：在图 1 中，∵ $AD=CD$，∴$\angle ACD=\angle A=45°$，∴$\angle ADC=90°$；∵ $AB=AC$，$\angle A=45°$，∴$\angle B=\angle ACB=67.5°$，∴$\angle ECD=22.5°$，∵$DE=CE$，∴$\angle EDC=\angle ECD=22.5°$，∴$\angle DEC=135°$，∴$\angle BED=45°$，即三个等腰三角形的顶角分别为 $90°$、$135°$、$45°$；在图 2 中，∵$AD=DE$，∴$\angle DEA=\angle A=45°$，∴$\angle ADE=90°$，$\angle DEC=135°$；

∵$BC=DC$，∴$\angle CDB=\angle B=67.5°$，∴$\angle BCD=45°$，即三个等腰三角形的顶角分别为：$90°$、$135°$、$45°$。

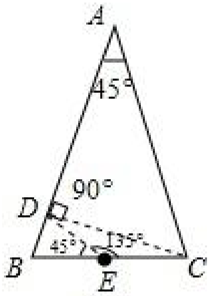


图1

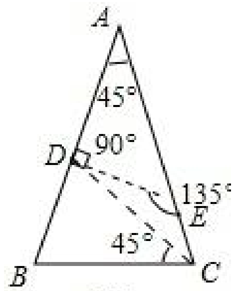


图2

（2）如图 3 所示，CD、AE 就是所求的三分线。设 $\angle B=\alpha$，则 $\angle DCB=\angle DCA=\angle EAC=\alpha$，$\angle ADE=\angle AED=2\alpha$，此时 $\triangle AEC\backsim\triangle BDC$，$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，设 $AE=AD=x$，$BD=CD=y$，

∵ $\triangle AEC\backsim\triangle BDC$，∴ $x:y=2:3$，∵ $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，∴ $2:x=(x+y):2$，解得 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{10}}{5}\\ y=\frac{3\sqrt{10}}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{2\sqrt{10}}{5}\\ y=-\frac{3\sqrt{10}}{5}\end{cases}$（负值舍去），∴ $AE=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，$CD=\frac{3\sqrt{10}}{5}$，即三分线长分别是 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ 和 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$。

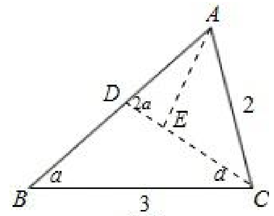
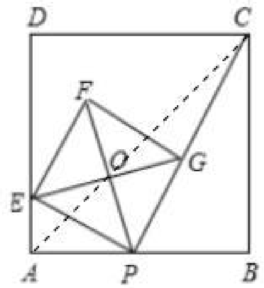


图3

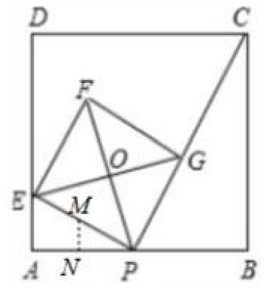
5.【答案】(1)$\frac{3}{4}$;(2)$2\sqrt{2}$;(3)$\frac{1}{2}$。

【解析】(1)因为四边形 $ABCD$、四边形 $PEFG$ 是正方形,所以 $\angle A=\angle B=90°$。因为 $PE\perp PC$,所以 $\angle EPA=\angle PCB$。因为 $\angle A=\angle B$,$\angle EPA=\angle PCB$,所以 $\triangle APE\backsim\triangle BCP$,所以 $\frac{AE}{BP}=\frac{AP}{BC}$,所以 $AE=\frac{3}{4}$。

(2)①证明:因为四边形 $PEFG$ 是正方形,所以 $\angle EOF=90°$,$\angle A=90°$,所以 A、P、O、E 四点共圆,所以点 O 一定在 $\triangle APE$ 的外接圆上。②连接 OA、AC,如下图:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $\angle B=90°$,$\angle BAC=45°$,所以 $AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$。因为 A、P、O、E 四点共圆,所以 $\angle OAP=\angle OEP=45°$,所以点 O 在 AC 上。当 P 运动到点 B 时,O 为 AC 的中点,$OA=2\sqrt{2}$。

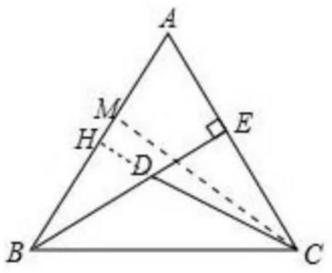


(3)设 $\triangle APE$ 的外接圆的圆心为 M,作 $MN\perp AB$ 于 N,如图所示:则 $MN/\!/AE$,因为 $ME=MP$,所以 $AN=PN$,所以 $MN=\frac{1}{2}AE$。设 $AP=x$,则 $BP=4-x$,由(1)得 $\triangle APE\backsim\triangle BCP$,所以 $\frac{AE}{BP}=\frac{AP}{BC}$,所以 $\frac{AE}{4-x}=\frac{x}{4}$,所以 $AE=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1$,所以 $x=2$ 时,AE 的最大值为 1,此时 MN 的值最大,为 $\frac{1}{2}$,即 $\triangle APE$ 的圆心到 AB 边的距离的最大值为 $\frac{1}{2}$。



6.【答案】$4\sqrt{5}$。

【解析】如图,作 $DH\perp AB$ 于 H,$CM\perp AB$ 于 M。



$\because BE\perp AC$，$\therefore \angle AEB=90°$，$\because \tan A=\dfrac{BE}{AE}=2$，设 $AE=a，BE=2a$，则有 $100=a^2+4a^2$，所以 $a^2==20，\therefore a=2\sqrt{5}$ 或 $-2\sqrt{5}$（舍弃），$\therefore$ $BE=2a=4\sqrt{5}，\because AB=AC，BE\perp AC，CM\perp AB$，$\therefore$ $CM=BE=4\sqrt{5}$（等腰三角形两腰上的高相等），$\because$ $\angle DBH=\angle ABE，\angle BHD=\angle BEA$，$\therefore$ $\sin\angle DBH=\dfrac{DH}{BD}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore$ $DH=\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$。$\therefore$ $CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD=CD+DH$，$\therefore CD+DH\geq CM$，$\therefore CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD\geq 4\sqrt{5}$，$\therefore CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$。

7.【答案】见解析。

【解析】分为三种情况计算，设 $AB=10\ \text{m}$，过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D，则 $\dfrac{1}{2}AB´\ CD=30$,即 $\dfrac{1}{2}$创10 $CD=30$，CD = 6 米，（1）当 AB 为底边时，$AD=DB=5$（米），$AC=BC=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$。（2）当以 AB 为腰且三角形为锐角三角形时，如图 2，$AB=AC=10$，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=8$，$BD=2$，$BC=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$。（3）当以 AB 为腰且三角形为钝角三角形时，如图3，$AB=BC=10$，$BD=\sqrt{10^2-6^2}=8$，$AD=10+8=18$，$AC=\sqrt{6^2+18^2}=6\sqrt{10}$。

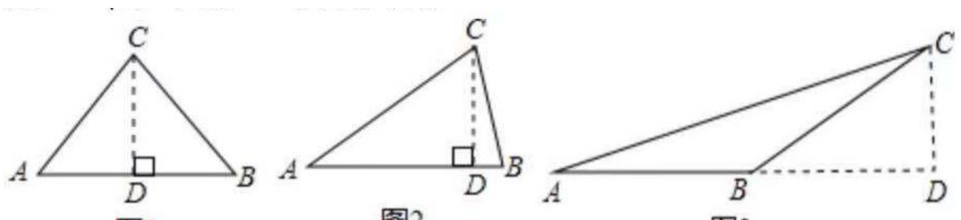
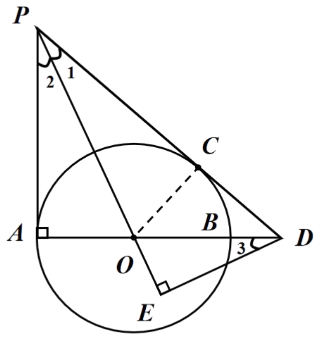


图1　图2　图3

8.【答案】（1）见解析；（2）$OE=\sqrt{5}$。

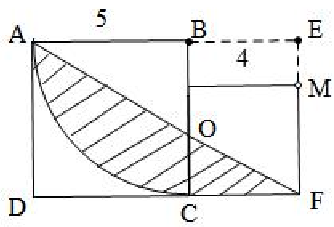
【解析】（1）由题意可先连接 OC，令 $\angle EPD$ 为 $\angle 1$，$\angle OPA$ 为 $\angle 2$，$\angle ODE$ 为 $\angle 3$，由 $\begin{cases}\angle PAO=\angle PCO=90°\\ PO=PO\\ OA=OC\end{cases}$ 可知 $\triangle PAO\cong\triangle PCO$，即 $\angle 1=\angle 2$，又由 $\begin{cases}\angle PAO=\angle DEO=90°\\ \angle POA=\angle DOE\end{cases}$ 可知 $\triangle PAO\backsim\triangle DEO$，即：$\angle 1=\angle 2=\angle 3$。即：$\angle EPD=\angle EDO$。

（2）由下图可知，$\tan\angle PDA=\frac{PA}{AD}=\frac{3}{4}$，又由（1）可知：$PA=PC$，故$AD=8$，可知$PD=10$，$CD=4$。令圆的半径为$x$，则在$\triangle COD$中，有：$x^2+4^2=(8-x)^2$，解得：$x=3$，则有$OD=AD-OA=5$，在$\triangle PAO$中，有：$PO=\sqrt{PA^2+AO^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，由（1）可知$\triangle PAO\backsim\triangle DEO$，即：$\frac{PO}{AO}=\frac{OD}{OE}$，可得：$OE=\frac{AO\cdot OD}{PO}=\frac{3\times5}{3\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，故：$OE=\sqrt{5}$。



9.【答案】$\frac{25\pi}{4}-\frac{5}{2}$。

【解析】如图，作AB的延长线与FM的延长线交于点E，由题可得阴影部分的面积可看成两个部分，$S_{阴影部分}=S_{左阴影部分}+S_{右阴影部分}$，$S_{左阴影部分}=\frac{1}{4}\pi AB^2-S_{\triangle ABO}$，$S_{右阴影部分}=S_{\triangle OCF}$，且$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}OB\cdot AB$，$S_{\triangle OCF}=\frac{1}{2}OC\cdot CF$，已知$AB=5$，$CF=4$，要求$OB$，$OC$的长，通过正方形的性质，易证$\triangle ABO\backsim\triangle OCF\backsim\triangle AEF$，则有$\frac{OB}{EF}=\frac{AB}{AE}=\frac{5}{5+4}$，$\frac{OC}{EF}=\frac{CF}{AE}=\frac{4}{5+4}$，得$OB=\frac{25}{9}$，$OC=\frac{20}{9}$，$\therefore S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times\frac{25}{9}\times5=\frac{125}{18}$，$S_{\triangle OCF}=\frac{1}{2}\times\frac{20}{9}\times4=\frac{40}{9}$，$S_{阴影部分}=S_{左阴影}+S_{右阴影}=\frac{25}{4}\pi-\frac{125}{18}+\frac{40}{9}=\frac{25}{4}\pi-\frac{5}{2}$。



10.【答案】49∶50。

【解析】由题可知甲长与宽的和是：3+2=5；乙长方形的长与宽的和是：4+3=7，5和7的最小公倍数是：5×7，甲与乙的面积比是：$[(3\times7)\times(2\times7)]:[(4\times5)\times(3\times5)]=49:50$。

模块八 立体几何答案解析部分

一、单选题（共 25 题；共 50 分）

1.【答案】B

【解析】$\left|a\right|=2,(a+2b)\cdot a=-6a^2+2ab=6ab=1$，b 在 a 方向上的投影为|b|cosθ=|b|·$\frac{ab}{|a||b|}$=$\frac{ab}{|a||b|}$=$\frac{1}{2}$，故本题选 B。

2.【答案】C

【解析】由 $AD_1 // BC_1$，可得 $\angle BC_1D$ 是 AD_1 与 C_1D 所成的角，易得 ΔBDC_1 为等边三角形，所以 $\angle BC_1D=60°$。故本题选 C。

3.【答案】B

【解析】半径为 20 的半圆卷成圆锥的侧面，则圆锥的底面圆周长为 $2\pi r=\pi\times 20$，所以底面圆的半径为 r=10，所以圆锥的高为 h=$\sqrt{20^2-10^2}$ =$10\sqrt{3}$。故本题选 B。

4.【答案】C

【解析】根据“柱脚”的三视图可知，该“柱脚”是由半圆柱和一个三棱柱组合而成，半圆柱的底面半圆的直径为4，高为2，故半圆柱的体积为，$\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2\times 2=4\pi$。三棱柱的底面三角形的一边长为4，该边上的高为2，该三棱柱的高为2，故该三棱柱体积为，$\frac{1}{2}\times 4\times 2\times 2=8$。所以该“柱脚”的体积为 8+4$\pi$。故本题选 C。

5.【答案】D

【解析】解：因为 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}=(\sin\theta,\cos\theta,\tan\theta),\vec{b}=(\cos\theta,\sin\theta,\frac{1}{\tan\theta})$，所以 $\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta+1=0$，即 $\sin 2\theta=-1$，所以 $2\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即 $\theta=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$。故本题选 D。

6.【答案】D

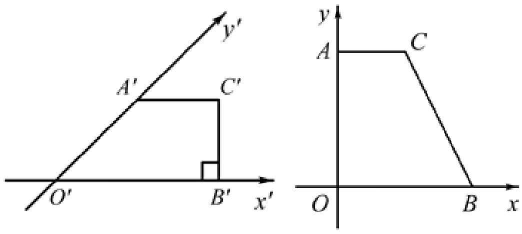
【解析】解：$\vec{a}=\left(2,-2,3\right)$，$\vec{a}=\left(-4,x+1,y-2\right)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，则设 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，$\therefore\begin{cases}2=-4\lambda\\-1=\left(x+1\right)\lambda\\3=\left(y-2\right)\lambda\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}\\x=1\\y=-4\end{cases}$，

$\therefore x+y=-3$。故本题选 D

7.【答案】C

【解析】根据图象可得，四边形$AOBC$水平放置的直观图为直角梯形，且 $\angle A'O'B'=\frac{\pi}{4}$，$O'B'\perp B'C'$，

$A'C'=B'C'=1$，$O'B'=2$，$\therefore A'O'=\sqrt{2}$，$AO=2A'O'=2\sqrt{2}$，$AC=A'C'=1$，$OB=O'B'=2$，且 $AO\perp OB$，$AC// OB$，所以，原四边形 $AOBC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}(AC+OB)\times AO=\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，故本题选 C。

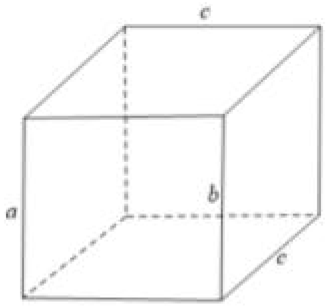


8.【答案】B

【解析】A 中，底面是正多边形，侧棱均相等的棱锥是正棱锥，故命题错误；B 中，长方体是直棱柱，沿着一组边的方向倾斜后变成斜棱柱，仍有两个侧面是矩形，故斜棱柱的侧面中可能有矩形，命题正确；C 中，用一个平行于底面的平面去截圆锥，得到的一定是一个圆锥和一个圆台，否则就不是一个圆锥和一个圆台，故命题错误；D 中，在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，两点连线，满足垂直底面的线才是圆柱的母线。故本题选 B.

9.【答案】C

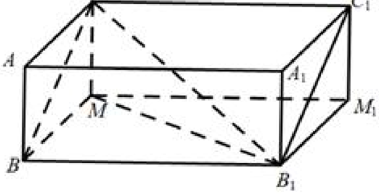
【解析】如图所示



b与c可能异面，也可能相交，不可能平行．用反证法证明一定不平行，假设$b//c$，又$a//b$，则$a//c$，这与已知a与c异面矛盾，所以假设不成立，故b与c不可能平行。故本题选 C.

10.【答案】A

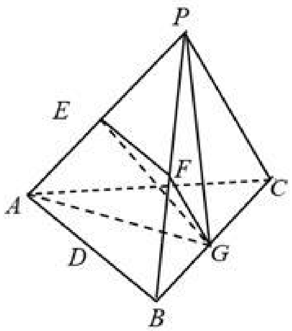
【解析】解：如图所示，$\because$直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有顶点都在同一球面上，且 $AB=AC=2$，$\angle BAC=90°$，$AA_1=2\sqrt{2}$，



∴可将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成长方体，其中 $AB=AC=BM=CM=2$，$AA_1=BB_1=4\sqrt{2}$，长方体的对角线 $CB_1=\sqrt{CM^2+MB_1^2}=\sqrt{CM^2+MB^2+BB_1^2}=\sqrt{2^2+2^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{10}$，即为球的直径，则球的半径 r 为 $\sqrt{10}$，∴球的表面积为 $S=4\pi r^2=4\pi\left(\sqrt{10}\right)^2=40\pi$。故本题选 A.

11.【答案】A

【解析】分别取 PA、PB、PC 的中点 E、F、G，连接 EF、EG、FG、GA、PG，如图：



由 $PB=PC=AB=AC=BC=4$ 可得 $PG=AG=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=2\sqrt{3}$，所以 EG⊥PA，在 $\triangle GPA$，$PG=AG=PA=2\sqrt{3}$，可得 $EG=3$，由中位线的性质可得 $EF// AB$ 且 $EF=\frac{1}{2}AB=2$，$FG// PC$ 且 $FG=\frac{1}{2}PC=2$，所以 $\angle GFE$ 或其补角即为异面直线 PC 与 AB 所成角，在 $\triangle GFE$ 中，$\cos\angle GFE=\frac{GF^2+EF^2-GE^2}{2GF\cdot EF}=\frac{4+4-9}{2\times2\times2}=-\frac{1}{8}$，所以异面直线 AB 与 PC 所成角的余弦值为 $\frac{1}{8}$，故本题选 A。

12.【答案】C

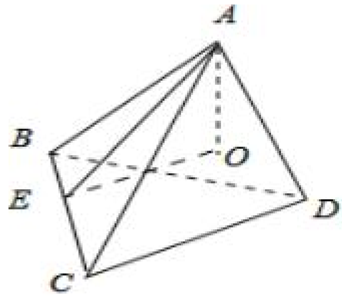
【解析】充分性：∵m,n 互为异面直线，且 $m//\alpha,n//\alpha$，则 α 内必存在两条相交直线 m',n'，使得 $m//m',n//n'$，若 $l\perp n$ 且 $l\perp m$，则 $l\perp n'$ 且 $l\perp m'$，∴ $l\perp\alpha$，故充分性成立；必要性：∵m,n 互为异面直线，且 $m//\alpha,n//\alpha$，则 α 内必存在两条相交直线 m',n'，使得 $m//m',n//n'$，若 $l\perp\alpha$，则 $l\perp n'$ 且 $l\perp m'$，∴$l\perp n$ 且 $l\perp m$，故必要性成立，∴“$l\perp n$ 且 $l\perp m$”是“$l\perp\alpha$”的充要条件。故本题选 C.

13.【答案】A

【解析】(1) 若 α、β、γ 为正方体相邻的三个面，两两垂直，故（1）错；(2) 根据 $\alpha\perp\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$ 若需得到 $m\perp n$ 则需要 m、n 同时垂直两平面的交线，故（2）错；(3) 根据 $m//\alpha,n\subset\alpha$，若需证 $m//n$，则需 m、n 共面，故（3）错；(4) 若 $\alpha//\beta,\gamma\cap\alpha=m,\gamma\cap\beta=n$，则 $m//n$，根据由面面平行证线线平行的判定定理可得该命题正确，故（4）正确．综上，以上命题只有一个命题正确，故本题选 A.

14.【答案】B

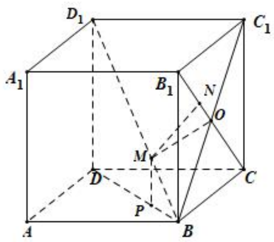
【解析】设 $AB=x,AC=y,\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理得：$BC^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}=x^2+y^2-xy\geq 2xy-xy=xy$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，又 $BC=\sqrt{3}$，$\therefore xy\leq 3$，过 A 作 $AO\perp$ 平面 BCD，作 $AE\perp BC$，连接 OE，



又 $\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}xy\cdot\sin\frac{\pi}{3}$，$\therefore AE=\frac{1}{2}xy$，易知，$\angle AEO$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角，大小为 θ，$\therefore AO=AE\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}xy=\frac{1}{6}xy\leq\frac{1}{2}$，$\therefore V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times AO\leq\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$，即三棱锥 A-BCD 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{8}$，故本题选 B。

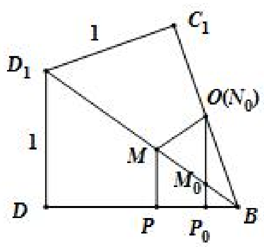
15.【答案】A

【解析】解：首先当固定 M 时，P 点应为 M 在平面 ABCD 中的射影，在 BD 上，且 MP⊥BD 于 P，为使 MN 最小，MN 应当垂直与 B1C，垂足为 N，



连接 BC_1，设 $BC_1\cap B_1C=O$ 则 $BC_1\perp B_1C$，由 $D_1C_1\perp$ 平面 BB_1CC_1 得 $C_1D_1\perp B_1C$，又 $\because D_1C_1\cap BC_1=C_1$，

$\therefore B_1C\perp$ 平面 BC_1D_1，由 $MN\perp B_1C$，$M\in$ 平面 BC_1D_1M，$\therefore MN\subset$ 平面 BC_1D_1，$\therefore$N 应为 BC_1，B_1C 的交点 O，将△BDD1 和△BC1D1 展开放到一个平面上，如图所示：



转化为求折线 PMO 的最小值，显然最小时 P、M、O 共线，且垂直于 BD，如图所示 M_0,P_0,N_0 为使

PM+MN 最小时，M，P，N 的位置.、显然 $\triangle BDD_1 \cong \triangle BC_1D_1$，$\therefore \angle DBD_1 = \angle C_1BD_1$，、

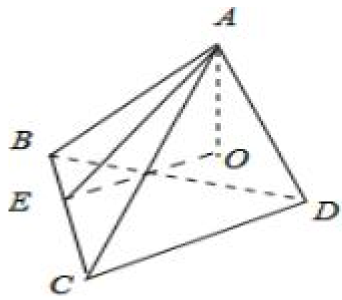
$\therefore$ $\sin\angle DBC_1 = \sin 2\angle DBD_1 = 2\sin\angle DBD_1\cos\angle DBD_1 = 2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，、

$P_0N_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin\angle DBC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}$。故本题选 A。

16.【答案】B

【解析】设 $AB = x, AB = y, \angle BAC = \frac{\pi}{3}$，由余弦定理得：$BC^2 = x^2 + y^2 - 2xyy\cos\frac{\pi}{3} = x^2 + y^2 - xy \ge xy$，

当且仅当$x = y$时取等号，又 $BC = \sqrt{3}, \therefore xy \le 3$，过$A$作$AO \perp$平面$BCD$，作$AE \perp BC$，连接$OE$，



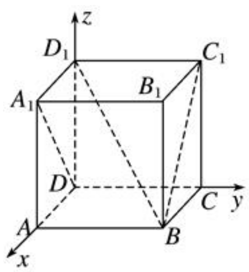
又 $\frac{1}{2}BC\cdot AE = \frac{1}{2}xy\cdot\sin\frac{\pi}{3}, \therefore AE = \frac{1}{2}xy$，易知，$\angle AEO$ 为二面角 A-BC-D 的平面角，大小为θ，

$AO = AE\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}xy = \frac{1}{6}xy \le \frac{1}{2}$，$V_{A-BCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times AO \le \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$，即三棱锥

A-BCD 体积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{8}$，故本题选 B。

17.【答案】C

【解析】如图所示，建立空间直角坐标系.



对于 $A_1(a,0,a), D(0,0,0), \mathrm{A}(a,0,0), B_1(a,a,a)$，$\therefore \overrightarrow{A_1D} = (-a,0,-a), \overrightarrow{AB_1} = (0,a,a)$，

$\therefore \cos\left\langle\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{AB_1}\right\rangle = \frac{\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{\left|\overrightarrow{A_1D}\right|\left|\overrightarrow{AB_1}\right|} = \frac{-a^2}{\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}a} = -\frac{1}{2}$，由于两异面直线的夹角范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$。$\therefore$异面直线$A_1D$

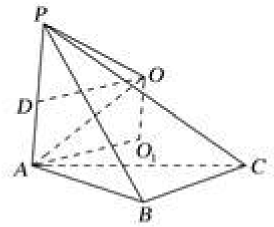
与AB_1所成的角为$60°$，同理：正方体的六个面中除了平面ADD_1A_1与BCC_1B_1的面对角线外，其他的面对

角线都与A_1D所成的角为$60°$，则共有 8 条，A 符合题意；对于 B，$C_1(0,a,a)$，$B(a,a,0)$，$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(-a,0,-a)\cdot(-a,0,a)=a^2-a^2=0$，∴直线$A_1D$与$BC_1$垂直，B 符合题意；对于 C，$D_1(0,0,a)$，∵$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(-a,0,-a)\cdot(-a,-a,a)=a^2-a^2=0$，∴直线$A_1D$与$BD_1$垂直，不平行，C 不符合题意；对于 D，三棱锥$A-A_1CD$的体积$V_{C-A_1AD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{1}{6}a^3$，D 符合题意；综上可知，只有 C 不正确。故本题选 C。

18.【答案】B

【解析】设 AB＝c，BC＝a，AC＝b，由题可得：$\sqrt{3}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times 2$，解得$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，因为∠ABC ＝ 120°，$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}ac\sin 120°$，所以 ac ＝ 6，由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos 120°=a^2+c^2-ac\geq 2ac+ac=3ac=18$，当且仅当 a＝c 时取等号，此时$b_{\min}=3\sqrt{2}$。设△ABC 外接圆的半径为 r，则$\frac{b}{\sin 120°}=2r$ (b 最小，则外接圆半径最小)，故$\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2r_{\min}$，所以$r_{\min}=\sqrt{6}$。

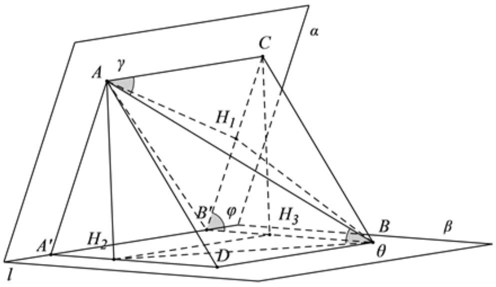
如图，设 O1 为△ABC 外接圆的圆心，D 为 PA 的中点，R 为球的半径，连接O_1A,O_1O,OA,OD,PO易得 $OO_1=1,R_2=r_2+OO_1^2=r_2+1$，当$r_{\min}=\sqrt{6}$时，$R_{\min}^2=6+1=7$，$R_{\min}=\sqrt{7}$，



故球 O 体积的最小值为$\frac{4}{3}\pi R_{\min}^2=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{7}\right)^3=\frac{28\sqrt{7}}{3}\pi$。故本题选 B。

19.【答案】B

【解析】直线AB与平面α，平面β所成角均为θ，与l所成角为γ，而$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$又$\sin(\gamma+\theta)=1$，可知：$\gamma+\theta=\frac{\pi}{2}$，若令二面角$\alpha-l-\beta$为$\varphi$，作$AA'\perp l$于$A'$，$BB'\perp l$于$B'$；过$A$作$AC//l$，过$B'$作$B'C\perp l$与$AC$交于$C$点；∴$l\perp$面$BB'C$，又$l\subset\alpha$，$l\subset\beta$，故面$BB'C\perp\alpha$，面$BB'C\perp\beta$，即$\angle BB'C=\varphi$；过$B$作$BD//l$，过$A'$作$A'D\perp l$与$BD$交于$D$点；



$\therefore l\perp$面$AA'D$，又$l\subset\alpha$，$l\subset\beta$，故面$AA'D\perp\alpha$，面$AA'D\perp\beta$，即$\angle AA'D=\varphi$；作$BH_1\perp B'C$于H_1，$AH_2\perp A'D$于H_2，连接AH_1、BH_2，即有$\angle BAH_1=\angle ABH_2=\theta$，且$\angle BAC=\angle DBA=\gamma$；

$\because \sin\theta=\frac{BH_1}{AB}=\frac{AH_2}{AB}=\cos\gamma=\frac{AC}{AB}=\frac{BD}{AB}$，即$BH_1=AH_2=AC=BD$，作$CH_3\perp BB'$有四边形$ACH_3H_2$为正方形，即$CH_3=AC$，$\therefore CH_3=BH_1$，有$Rt\triangle CH_3B\cong Rt\triangle BH_2C$，故$\triangle B'BC$为等腰三角形且$B'B=B'C$，

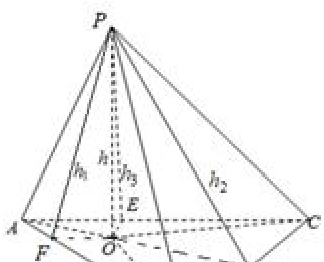
令$x=AC$，$y=BC$，则$AB=\sqrt{x^2+y^2}$，有$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，而$\angle CBH_2=\frac{\varphi}{2}$，$\therefore \cos\frac{\varphi}{2}=\frac{x}{y},\varphi\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，

又 $\sin(\gamma-\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$，

$\therefore \sin(\gamma-\theta)=1-2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}=1-\frac{2}{1+\frac{1}{x^2/y^2}}=1-\frac{2}{1+\frac{2}{\cos\varphi+1}}\le\frac{1}{7}$当$\varphi=\frac{\pi}{3}$时等号成立。故本题选 B。

20.【答案】C

【解析】作$PO\perp$面ABC，$PF\perp AB,PD\perp BC,PE\perp CA$，垂足分别为$O,F,D,E.\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为锐角，$\therefore$点 O 在三角形$ABC$的内部.如图所示：



连接OF,OD,OE，则$\angle PFO=\alpha_1,\angle PDO=\alpha_2,\angle PEO=\alpha_3$.设$PO=h,PF=h_1,PD=h_2,PE=h_3$，

$\therefore \sin\alpha_1=\frac{h}{h_1},\sin\alpha_2=\frac{h}{h_2},\sin\alpha_3=\frac{h}{h_3}$.$\because$三角形$ABC$为直角三角形，$C=90°,\therefore AB>AC,AB>BC$.又

$\because PA<PB<PC, \therefore h_1$与$h_2$、$h_1$与$h_3$大小关系不确定，$\therefore \alpha_1$与$\alpha_2$、$\alpha_1$与$\alpha_3$大小关系不确定。当 AC=BC 时，

$\because PA<PB<PC, \therefore h_2>h_3, \therefore \sin\alpha_2<\sin\alpha_3$，$\because \alpha_2,\alpha_3$均为锐角，$\therefore \alpha_2<\alpha_3$。故本题选 C。

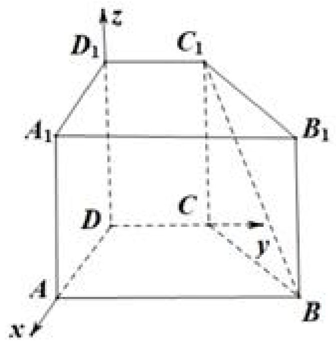
二、填空题（共 14 题；共 28 分）

21.【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】由题意，直线$l_1:(1-k)x+3y+k+3=0$与直线$l_2:x-ky-2=0$，因为l_1的方向向量是l_2的法向量，所以$l_1\perp l_2$，可得$(1-k)\times 1+3\times(-k)=0$，解得$k=\frac{1}{4}$。

22.【答案】$\frac{3\sqrt{17}}{17}$

【解析】因为四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是直四棱柱，$\angle A$为直角，$AB_{//}CD$，所以可以以D为坐标原点，以DA、DC、DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$D(0,0,0)$，$B(2,4,0)$，$C(0,1,0)$，$C_1(0,1,2)$，故$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,-3,2)$，因为$|\overrightarrow{DC}|=1$，$|\overrightarrow{BC_1}|=\sqrt{2^2+3^2+2^2}=\sqrt{17}$，所以$|\cos\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC_1}\rangle|=|\frac{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{DC}|\cdot|\overrightarrow{BC_1}|}|=|\frac{-3}{\sqrt{17}}|=\frac{3\sqrt{17}}{17}$，故异面直线$DC$与$BC_1$所成的角的余弦值为$\frac{3\sqrt{17}}{17}$。

23.【答案】$\frac{65}{7}$

【解析】因为$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面且$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，所以可设$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$，所以$(2x-y,-x+4y,3x-2y)=(7,5,\lambda)$，所以$\begin{cases}2x-y=7\\-x+4y=5\end{cases}$，所以$\begin{cases}x=\frac{33}{7}\\y=\frac{17}{7}\end{cases}$，所以$\lambda=3x-2y=\frac{99}{7}-\frac{34}{7}=\frac{65}{7}$，

24.【答案】3

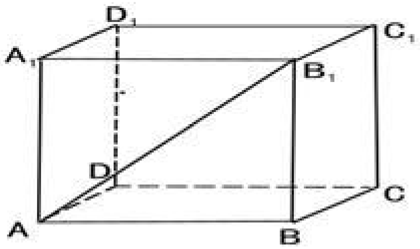
【解析】平面$PBD\cap\alpha=AC$，平面$PBD\cap\beta=BD$，由平面$\alpha_{//}$平面β，可得$AC_{//}BD$，由平面几何知识知，$\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PD}=\frac{AC}{BD}$。又$PA=2$，$AB=6$，$BD=12$，所以$\frac{2}{2+6}=\frac{AC}{12}$，解得$AC=3$。

25.【答案】(1，0，-1)（答案不唯一）

【解析】$\because ABCD$是正方形，且$AB=\sqrt{2}$，$\therefore AO=OC=1$，$\therefore \overrightarrow{OC}=(0,1,0)$，$\because A(0,-1,0)$，$B(1,0,0)$，$\therefore \overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，$\therefore \overrightarrow{A_1B_1}=(1,1,0)$，$\because OA=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，$\therefore OA_1=\sqrt{2-1}=1$，故$\overrightarrow{OA_1}=(0,0,1)$，故$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=(1,1,1)$，$\because$向量$\vec{n}=(x,y,z)$是平面OCB1的法向量，$\therefore \overrightarrow{OC}\cdot\vec{n}=y=0$，$\overrightarrow{OB_1}\cdot\vec{n}=x+y+z=0$，故$y=0$，$x=-z$，取$x=1$，故$z=-1$，平面$OCB_1$的法向量$\vec{n}=(1,0,-1)$，故本题选（1，0，-1）（答案不唯一）

26.【答案】5

【解析】由长方体的性质可得$B_1C_1\perp A_1B_1, B_1C_1\perp BB_1, B_1B\cap A_1B_1=B_1$，所以$B_1C_1\perp$面$AA_1B_1$，$AB_1\subset$面$AA_1B_1$，所以$B_1C_1\perp AB_1$，所以$AB_1$是点$A$到棱$B_1C_1$的垂线段，又$AA_1=3$，$AB=4$，所以$AB_1=\sqrt{3^2+4^2}=5$。故本题选5.



27.【答案】πR

【解析】MN是半径为R的球的直径，则M,N两点所对的球心角为π，球面距离为πR．故本题选πR.

28.【答案】5

【解析】解：正四棱柱的底面为正方形，设底面边长为a，侧棱长为b，则有$a^2=8$，所以$a=2\sqrt{2}$，则四棱柱的体对角线为$\sqrt{a^2+a^2+b^2}=\sqrt{8+8+9}=5$。故本题选5。

29.【答案】$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

【解析】解：由题意可知，在△ABC中，因为AB＝BC＝1，AC＝$\sqrt{3}$，由余弦定理可得

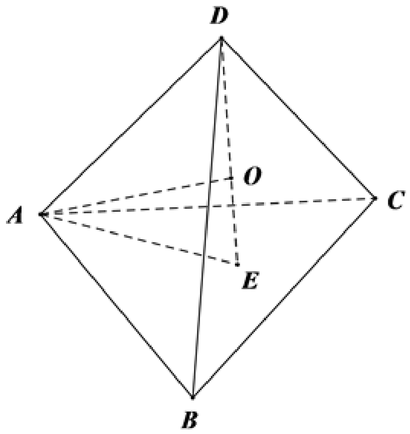
$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{1+1-3}{2}=-\frac{1}{2}$，则$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由正弦定理可得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2=2r$，所以

△ABC 的外接圆半径为 r=1，可设直三棱柱外接球的半径为 R，则$R^2=r^2+(\frac{AA_1}{2})^2$，化简得

$R^2=1^2+(\frac{2}{2})^2=2$，解得$R=\sqrt{2}$，所以直三棱柱外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$，

30.【答案】$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

【解析】如图所示，O为球心，设球的半径为R，

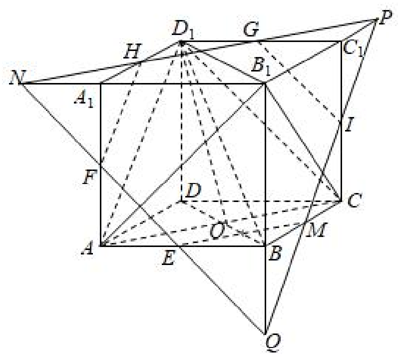


由正弦定理得$\frac{\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2AE,\therefore AE=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$DE=\sqrt{1-\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，在直角三角形$AOE$中，

$R^2=(\frac{\sqrt{6}}{3})^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}-R)^2$，解之得$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以正三棱锥的外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，故本题选$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$。

31.【答案】①④

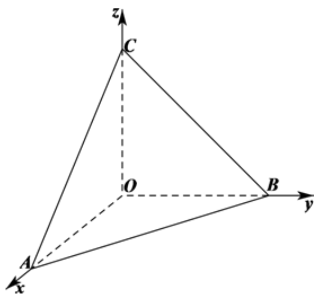
【解析】如图所示，延长EF分别与B_1A_1,B_1B的延长线交于点N,Q，连接GN交A_1D_1于H，



设HG与B_1C_1的延长线交于点P，连接PQ交CC_1于I，交BC于M，连接FH,HG,GI,IN,ME，则截面六边形$EFHGIM$为正六边形，故①正确；由B_1D_1与HG相交，所以B_1D_1和平面EFG相交，所以②不正确；四面体ACB_1D_1的体积等于正方体的体积减去四个三棱锥的体积，即$a^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{3}a^3$，所以③不正确；因为$BD_1\perp AC,BD_1\perp B_1C$，且$AC$与$B_1C$相交，所以$BD_1\perp$平面$ACB_1$，故④正确；又由$AC\perp$平面$BDD_1B_1$，所以二面角$D_1-AC-D$的平面角为$\angle DOD_1$，所以$\tan\angle DOD_1=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以⑤不正确.故本题选①④.

32.【答案】①②③

【解析】设$OA=OB=OC=a$，由于OA、OB、OC两两垂直，以点O为坐标原点，OA、OB、OC所在直线分别为x、y、z轴建立空间直角坐标系，如下图所示：



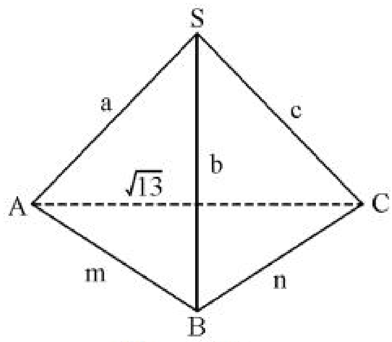
则$O(0,0,0)$、$A(a,0,0)$、$B(0,a,0)$、$C(0,0,a)$.对于①，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(a,a,a)$，所以，$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=3a^2=3(\overrightarrow{OA})^2$，①正确；对于②，$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OA}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-a,a)$，则$\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO})=0$，②正确；对于③，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a,a,0)$，$\overrightarrow{CA}=(a,0,-a)$，$\cos<\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\overrightarrow{CA}>=\frac{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|}=\frac{a^2}{(\sqrt{2}a)^2}=\frac{1}{2}$，$\because 0^\circ\le<\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\overrightarrow{CA}>\le180^\circ$，所以，$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$和$\overrightarrow{CA}$的夹角为$60^\circ$，③正确；对于④，$\overrightarrow{AB}=(-a,a,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,0,a)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-a,a)$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$，所以，$\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC}|=\frac{a^2}{6}|\overrightarrow{BC}|=\frac{a^2}{6}\times\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，而三棱锥$O-ABC$的体积为$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{6}a^3$，④错误。故本题选①②③.

33.【答案】$\sqrt{30}$

【解析】因为三棱锥$S-ABC$的三条侧棱SA，SB，SC两两互相垂直且$AC=\sqrt{13}$，设$SA=a$，$SB=b$，$SC=c$，则在$Rt\triangle SAB$中，由勾股定理得$AB^2=SA^2+SB^2$，即$m^2=a^2+b^2$；①。在$Rt\triangle SAC$中，由勾

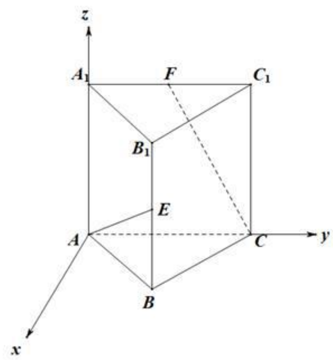
股定理得$AC^2=SA^2+SC^2$，即$(\sqrt{13})^2=a^2+c^2$，即$13=a^2+c^2$；②。在$Rt\triangle SBC$中，由勾股定理得$BC^2=SB^2+SC^2$，即$n^2=b^2+c^2$；③。由①+②+③，可得得$m^2+13+n^2=a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2$，即$m^2+n^2+13=2\cdot(a^2+b^2+c^2)$. ④。因为易知三棱锥$S-ABC$的外接球即为以$SA$，$SB$，$SC$过同一顶点三条棱的长方体的外接球，又因为此三棱锥的外接球的表面积为14π，设外接球的半径为R，则$\begin{cases}4\pi R^2=14\pi\\a^2+b^2+c^2=(2R)^2\end{cases}$，所以$a^2+b^2+c^2=14$且$b^2=1$，代入④中，得$m^2+n^2+13=28$，即$m^2+n^2=15$，

由$(\frac{m+n}{2})^2\le\frac{m^2+n^2}{2}$，得$(\frac{m+n}{2})^2\le\frac{15}{2}$，即$(m+n)^2\le30$，所以$m+n\le\sqrt{30}$，当且仅当$m=n=\frac{\sqrt{30}}{2}$时等号成立，所以$m+n$的最大值为$\sqrt{30}$。



34.【答案】$\frac{1}{5}$

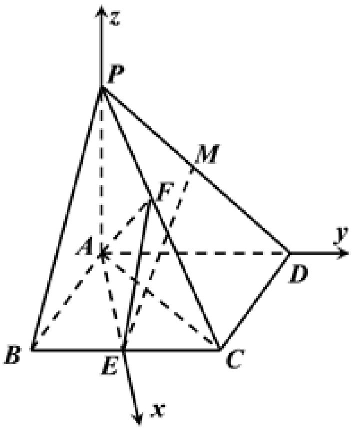
【解析】建立如图所示空间直角坐标系：



则 $A(0,0,0),E(\sqrt{3},1,1),C(0,2,0),F(0,1,2)$，所以$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},1,1),\overrightarrow{CF}=(0,-1,2)$，所以$|\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}|}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CF}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$。

三、解答题（共 6 题，共 60 分）

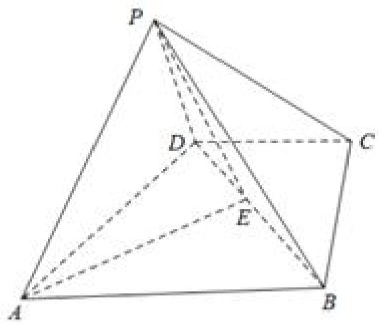
35.【答案】(1)证明：连接AC，因为底面$ABCD$为菱形，$\angle ABC=60°$，所以$\triangle ABC$是正三角形，



$\because E$是BC的中点，$\therefore AE\perp BC$，又$AD//BC$，$\therefore AE\perp AD$，$\because PA\perp$平面$ABCD$，$AE\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp AE$，又$PA\cap AD=A$，$\therefore AE\perp$平面PAD，又$AE\subset$平面AEF，所以平面$AEF\perp$平面PAD。

(2)解：以A为坐标原点建立如图所示空间直角坐标系，不妨设$AB=AP=2$，则$AE=\sqrt{3}$，则$A(0,0,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，$M(0,1,1)$，设$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}=\lambda(\sqrt{3},1,-2)$，则$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=(0,0,2)+\lambda(\sqrt{3},1,-2)=(\sqrt{3}\lambda,\ \lambda,\ 2-2\lambda)$，又$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,0)$，设$\vec{n}=(x,y,z)$是平面$AEF$的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{3}x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{3}\lambda x+\lambda y+(2-2\lambda)z=0\end{cases}$，取$z=\lambda$，得$\vec{n}=(0,\ 2\lambda-2,\ \lambda)$，设直线$EM$与平面$AEF$所成角为$\theta$，由$\overrightarrow{EM}=(-\sqrt{3},1,1)$，得：$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EM},\vec{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EM}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{EM}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|3\lambda-2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{(2\lambda-2)^2+\lambda^2}}=\frac{1}{5}$. 化简得：$10\lambda^2-13\lambda+4=0$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$或$\lambda=\frac{4}{5}$，故存在点$F$满足题意，此时$\frac{PF}{PC}$为$\frac{1}{2}$或$\frac{4}{5}$.

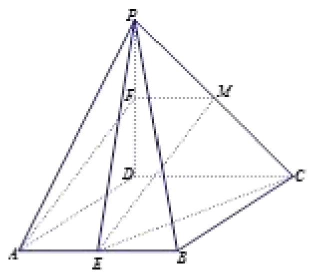
36.【答案】(1)证明：取BD的中点E，连接AE，PE，如图，



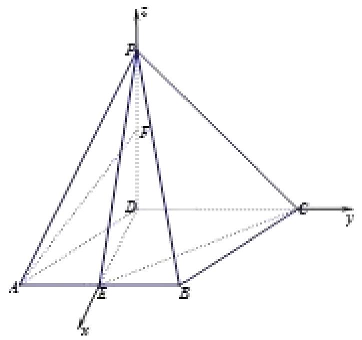
因为$\angle APB=\angle APD=60°$，$PD=PB$，所以$\triangle APB\cong\triangle APD$，所以$AD=AB$．所以$AE\perp BD$，$PE\perp BD$，$AE\cap PE=E$，所以$BD\perp$面$PAE$．又$AP\subset$面$PAE$，所以$AP\perp BD$．

（2）解：在$\triangle APD$中，根据余弦定理，得：$AD^2=AP^2+PD^2-2\times AP\times PD\times\cos60°=7$，所以$AD=\sqrt{7}$．又因为$DE=1$，所以$AE=\sqrt{6}$，$PE=\sqrt{3}$，所以$AP^2=AE^2+PE^2$，即$AE\perp PE$．在正$\triangle CDB$中，$CE=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，在$Rt\triangle PEC$中，$PC^2=PE^2+CE^2=3+3=6$，即$PC=\sqrt{6}$。设点$C$到平面$PAB$的距离为$h$，$PC$与平面$PAB$所成角为$\theta$，因为$V_{C-PAB}=V_{P-ABC}$，即$\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle PAE}=\frac{1}{3}\times PE\times S_{\triangle ABC}$，所以$h=\frac{PE\cdot S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{3})\times1}{\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin60°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$，所以$\sin\theta=\frac{h}{PC}=\frac{2+\sqrt{2}}{6}$，所以$PC$与平面$PAB$所成角的正弦值为$\frac{2+\sqrt{2}}{6}$.

37.【答案】(1) 证明：作$FM//CD$交PC于M，$\because$点F为PD中点，$\therefore\therefore FM=\frac{1}{2}CD$，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=FM$，$AEMF$为平行四边形，$\therefore AF//EM$，$\because AF\not\subset$平面$PEC$，$EM\subset$平面$PEC$，$\therefore AF//$平面$PEC$



（2）解：如图所示，建立坐标系，



由已知得$P(0,0,1)$，$C(0,1,0)$，$E(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0)$，$A(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$，$a^2=\sqrt{3}c$，$\therefore\overrightarrow{AP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，

设平面PAB的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，$\because\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\therefore\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0\\ y=0\end{cases}$，取$x=1$，则

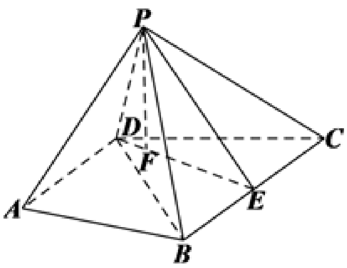
$z=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴平面 PAB 的一个法向量为$\vec{n}=(1,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，∵$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，设向量$\vec{n}$与$\overrightarrow{PC}$所成角为$\theta$，

∴$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{PC}|}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{42}}{14}$，∴$PC$平面$PAB$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{14}$。

38.【答案】(1)证明：因为$\triangle BCD$为正三角形，E是BC的中点，所以$DE\perp BC$，因为$BC\perp PD$，$PD\cap DE=D$，所以$BC\perp$平面PDE，因为$BC\subset$平面PBC，所以平面$PDE\perp$平面PBC；

（2）解：由（1）中$BC\perp$平面PDE，$PE\subset$平面PDE，则$BC\perp PE$，又$DE\perp BC$，所以$\angle PED$是二面角$P-BC-D$的平面角，因为$AB=3$，$AD=\sqrt{3}$，$\angle DAB=90^\circ$，所以$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{3}$，$DE=BD\sin60^\circ=3$，因为$DE=PE$，$PD=2$，所以$\cos\angle PED=\frac{DE^2+PE^2-PD^2}{2\times DE\times PE}=\frac{7}{9}$，即二面角$P-BC-D$的余弦值为$\frac{7}{9}$；

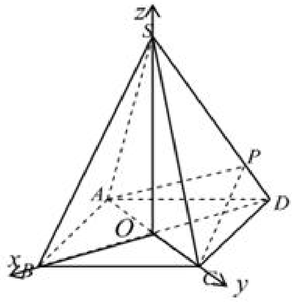
（3）解：在$\triangle PDE$中，过P作$PF\perp DE$于F，



由（1）中得$BC\perp$平面PDE，又因为$BC\subset$平面$ABCD$，所以平面$PDE\perp$平面$ABCD$，又$PF\subset$平面PDE，平面$PDE\cap$平面$ABCD=DE$，$PF\perp DE$，故$PF\perp$平面$ABCD$，由$\triangle BCD$为正三角形，得$\triangle BCD$的面积$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times BD^2\sin60^\circ=3\sqrt{3}$，$\triangle ABD$的面积$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot AB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，四边形$ABCD$的面积为$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$，在$\triangle PDE$中，$PF=PE\sin\angle PED=3\times\sqrt{1-\frac{49}{81}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$，所以四棱锥$P-ABCD$的体积$V=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{6}$.

39.【答案】（1）证明：连BD交AC于O，由题意$SO\perp AC$。在正方形$ABCD$中，$AC\perp BD$，所以$AC\perp$平面SBD，得$AC\perp SD$

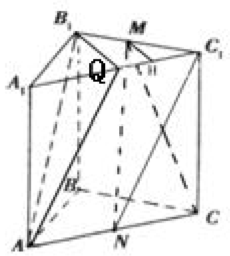
（2）解：由题设知，连BD，设AC交于BD于O，由题意知$SO\perp$平面$ABCD$.以O为坐标原点，$\vec{OB}$，$\vec{OC}$，$\vec{OS}$分别为x轴、y轴、z轴正方向，建立坐标系$O-xyz$如图.



设底面边长为a，则高$SO=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，则$S(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2}a)$，$D(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0)$，$C(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0)$，又$SD\perp$平面$PAC$，则平面$PAC$的一个法向量$\vec{DS}=(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,\frac{\sqrt{6}}{2}a)$，平面$SAC$的一个法向量$\vec{OD}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0)$，则$\cos\vec{DS},\vec{OD}=\frac{\vec{DS}\cdot\vec{OD}}{|\vec{DS}|\cdot|\vec{OD}|}=-\frac{1}{2}$，又二面角$P-AC-D$为锐角，则二面角$P-AC-D$为$60°$；

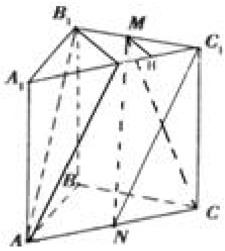
（3）解：在棱SC上存在一点E使$BE\parallel$平面PAC.由（2）知$\vec{DS}$是平面PAC的一个法向量，且$\vec{DS}=(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,\frac{\sqrt{6}}{2}a)$，$\vec{CS}=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{6}}{2}a)$，设$\vec{CE}=t\vec{CS}$，$t\in[0,1]$，则$\vec{BE}=\vec{BC}+\vec{CE}=\vec{BC}+t\vec{CS}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-t),\frac{\sqrt{6}}{2}at)$，又$BE\parallel$平面$PAC$，所以$\vec{BE}\cdot\vec{DS}=0$，则$t=\frac{1}{3}$。即当$SC:SE=3:2$时，$\vec{BE}\perp\vec{DS}$。而$BE$不在平面$PAC$内，故$BE\parallel$平面$PAC$。

40.【答案】（1）解：平面 AA1C1C 中，过 A 作 AQ∥C1N，交 A1C1 于 Q，连接 B1Q



∴∠B1AQ（或其补角）就是异面直线 AB1 与 C1N 所成的角，矩形 AA1C1C 中，N 是 AC 中点，可得 Q 是 A1C1 中点，Rt△AA1B1 中，AB1=$\sqrt{AA_1{}^2+A_1B_1{}^2}$=5，同理可得 AQ=$\sqrt{17}$。∵等腰 Rt△A1B1C1 中，B1Q 是斜边的中线，∴B1Q=$\frac{\sqrt{2}}{2}$A1B1＝$2\sqrt{2}$，△B1AQ 中，cos∠B1AQ=$\frac{25+17-8}{2\times5\times\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{5}$>0。∴∠$B_1$AQ

$=\arccos\frac{\sqrt{17}}{5}$,即异面直线 AB1 与 C1N 所成的角等于 $\arccos\frac{\sqrt{17}}{5}$;(2)解:平面 A1B1C1 中,过 M 作 MH⊥A1C1 于 H



∵直三棱柱 ABC﹣A1B1C1 中，CC1⊥平面 A1B1C1，CC1⊆平面 AA1C1C。∴平面 AA1C1C⊥平面 A1B1C1，∵平面 AA1C1C⊥平面 A1B1C1＝A1C1，MH⊥A1C1，∴MH⊥平面 AA1C1C，MH 是三棱锥 M﹣C1CN 的高线。∵△B1C1Q 中，M 是 B1C1 中点，MH∥B1Q。∴MH 是△B1C1Q 的中位线，得 MH＝$\frac{1}{2}B_1Q=\sqrt{2}$，∵△C1CN 的面积 S＝$\frac{1}{2}$CN×C1C＝$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3=3\sqrt{2}$，∴三棱锥 M﹣C1CN 的体积 $V_{M-NCC_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta C_1CM}\cdot MH=\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$。

模块九　解析几何模块答案解析部分

一、单选题

1.【答案】B

【解析】$\because l_1 \perp l_2 l$，$\therefore 2a+3(5+a)=0$，解得 $a=-3$，故本题选 B。

2.【答案】D

【解析】圆 O 的圆心为（0,0），半径为 1，圆 C 的圆心 为（6,0），半径为 2。所以两圆的圆心距为 6，大于两圆的半径之和 3，故两圆的位置关系是相离。故本题选 D

3.【答案】C

【解析】设直线$\sqrt{3}x+y+1=0$ 的倾斜角为θ，则 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，$\therefore \theta=120°$.故本题选 C.

4.【答案】D

【解析】由于直线 l_1：与直线 l_2：平行，则 $\frac{2}{1}=\frac{a}{-2}\neq\frac{1}{2}$，解得 $a=-4$，故本题选 D.

5.【答案】D

【解析】由于 $A(-2,3)$、$B(3,-2)$、$C(1,m)$ 三点共线，则$k_{AB}=k_{AC}$，即 $\frac{3+2}{-2-3}=\frac{m-3}{1+2}$，解得 $m=0$，故本题选 D。

6.【答案】C

【解析】当 $k=0$ 时，直线 y=1，不合题意；当 $k\neq0$ 时，若 $x=0$，则 $y=2k+1$，若 $y=0$，则 $x=2+\frac{1}{k}$,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\left|(2k+1)\left(2+\frac{1}{k}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|4k+4+\frac{1}{k}\right|=4$，所以 $4k+4+\frac{1}{k}=8$ 或 $4k+4+\frac{1}{k}=-8$，解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$ 或 $k=\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$；所以满足要求的直线 l 的条数是 3。故本题选 C.

7.【答案】B

【解析】由于两条直线平行，所以，$a(a-1)-2=0$，解得 $a=2$ 或 $a=-1$，当 $a=-1$ 时，两条直线方程都为 $x-2y+1=0$，即两条直线重合，不符合题意，故 $a=2$，故本题选 B。

8.【答案】B

【解析】由圆的对称性可知，该圆的圆心$\left(-1,2\right)$，在直线 $3x+y+a=0$ 上，则 $a=-3\times(-1)-1\times 2=1$。故本题选 B。

9.【答案】B

【解析】点$\left(0,\ -1\right)$，到直线$(m+2)x+(m-1)y+(m+2)=0$ 的距离

$d=\frac{\left|1-m+m+2\right|}{\sqrt{\left(m+2\right)^2+\left(m-1\right)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2m^2+2m+5}}$，设 $g(m)=2m^2+2m+5$，$g(m)_{min}=g(-\frac{1}{2})=2\times\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}+5=\frac{9}{2}$，所以 $d=\frac{3}{\sqrt{2m^2+2m+5}}\le\frac{3}{\sqrt{\frac{9}{2}}}$，所以距离的最大值为$\sqrt{2}$。故本题选 B。

10.【答案】A

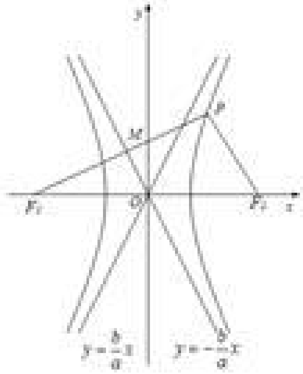
【解析】因为 $ab\neq 0$，由 $y=ax-b$ 得 $\frac{x}{\frac{b}{a}}+\frac{y}{-b}=1$，由 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ 知 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-b}=1$，所以$l_1$与$l_2$在 y 轴上的截距相等，所以 B,D 不可能，对于 A，l_1在 y 轴上的截距大于 0，即$-b>0$，所以 $b<0$，l_1在 x 轴上的截距小于 0，即$\frac{b}{a}<0$，所以 $a>0$，此时l_2的图象有可能；对于 C，由l_1的图象可知，$a>0,-b<0$，此时l_2在两个坐标轴上的截距应该异号，故 C 不可能。故本题选 A。

11.【答案】D

【解析】由题意，双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，可得 $a^2=4$，$b^2=3$，所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$，又由双曲线的焦点在 x 轴上，所以双曲线的右焦点的坐标为$\left(\sqrt{7},0\right)$。故本题选 D。

12.【答案】D

【解析】如图所示，双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，



对于$|OF_1|=c$，$F_1\left(-c,0\right)$，直线 PF_1与直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 垂直，所以直线 PF_1的斜率为$\frac{a}{b}$，所

以直线 PF_1 的方程为 $y=\frac{a}{b}(x+c)$，即 $ax-by+ac=0$。设直线 PF_1 与直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 相交于 M，原点 $O(0,0)$ 到直线 PF_1：$ax-by+ac=0$ 的距离得 $d=\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$，因此 $|OM|=a,|F_1M|=\sqrt{c^2-a^2}=b$，由于 O 是线段 F_1F_2 的中点，$y=-\frac{b}{a}x$ 是线段 PF_1 的中垂线，则根据几何图形的性质可得 $|PF_1|=2b,|PF_2|=2a$，根据双曲线的定义得 $|PF_1|-|PF_2|=2a=2b-2a$，因此可得 $b=2a$，$\frac{b}{a}=2$，则双曲线的线近线为 $y=\pm 2x$。故本题选 D

13.【答案】A

【解析】由题意可知点 M 为短轴端点时，$\triangle MF_1A_2$ 的面积取最大值，因为椭圆方程为：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，所以 $a=5$，$b=4$，$c=3$，有 $S=\frac{1}{2}(a+c)\times b=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$。故本题选 A。

14.【答案】B

【解析】由题意，椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，即 $a=2b$，则椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故本题选 B。

15.【答案】C

【解析】设所求椭圆方程为 $\frac{y^2}{25-k}+\frac{x^2}{9-k}=1(k<9)$，将点 $(\sqrt{3},\ -\sqrt{5})$ 代入，可得 $\frac{(\sqrt{5})^2}{25-k}+\frac{(\sqrt{3})^2}{9-k}=1$，解得 $k=5$（$k=21$ 舍去），故所求椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1$。故本题选 C

二、填空题

16.【答案】$-\frac{2}{3}$或 0

【解析】直线 $(m+2)x+(2-m)y-2m=0$，当 $m=0$ 时，直线化为 $x+y=0$，在 x 轴上的截距与在 y 轴上的截距都为 0，满足题意；当 $m\neq 0$ 时，直线化为 $\frac{m+2}{2m}x+\frac{2-m}{2m}y=1$，在 x 轴上的截距是 $\frac{2m}{m+2}$，在 y 轴上的截距是 $\frac{2m}{2-m}$，$\frac{2m}{m+2}=2\cdot\frac{2m}{2-m}$，解得 $m=-\frac{2}{3}$；综上，m 的值为$-\frac{2}{3}$或 0．故本题选$-\frac{2}{3}$或 0．

17.【答案】-6

【解析】两直线 $l_1:ax+3y-5=0$ 与 $l_2:x+2y-1=0$ 互相垂直.所以 $a\times 1+3\times 2=0$，解得 $a=-6$，故本题选-6。

18.【答案】（1，1）、$\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$

【解析】由$x^2+y^2-2mx-4my+6m-2=0$ 由得$-2m(x+2y-3)+x^2+y^2-2=0$，故$\begin{cases}x+2y-3=0\\x^2+y^2-2=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{1}{5}\\y=\frac{7}{5}\end{cases}$。故填：$(1,1)$、$\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$。

19.【答案】-6

【解析】由 $y=\sqrt{4-x^2}$，得 $x^2+y^2=4(y\geq0)$，则函数 $y=\sqrt{4-x^2}$的图象表示圆 $x^2+y^2=4$ 在 $y\geq0$ 的部分，当直线 $y=3x+m$ 经过点$(2，0)$时，m 取得最小值，最小值为-6，故本题选-6。

20.【答案】$(-4,0)\cup(4,8)$

【解析】圆标准方程为$x^2+(y-2)^2=8$，圆心为 $C(0,2)$,，半径为 $r=2\sqrt{2}$，圆心 C 到已知直线的距离为$d=\frac{|0-2+a|}{\sqrt{2}}=\frac{|a-2|}{\sqrt{2}}$，由题意$\begin{cases}\frac{|a-2|}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}>2\sqrt{2}\\\frac{|a-2|}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}<2\sqrt{2}\end{cases}$，解得$-4<a<0$ 或 $4<a<8$。

21.【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解析】由 $3x-\sqrt{3}y-5=0$ 得 $y=\sqrt{3}x-\frac{5\sqrt{3}}{3}$，所以直线的斜率 $k=\sqrt{3}$，设直线的倾斜角为α且 $0\leq\alpha<\pi$，由 $k=\tan\alpha$得直线的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$.

22.【答案】$2\sqrt{7}$

【解析】圆的标准方程为$(x-2)^2+(y+2)^2=9$，圆心坐标为$(2,-2)$，半径为 $r=3$，圆心到直线 $x-y-6=0$ 的距离为$d=\frac{|2+2-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，因此，所求弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3^2-2}=2\sqrt{7}$。

23.【答案】$y^2=x$

【解析】因为 $A(-2,0)$，$B(3,0)$，$P(x,y)$，所以$\overrightarrow{PA}=(-2-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(3-x,-y)$，又$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-6$，所以$(-2-x)(3-x)+y^2=x^2-6$，整理得$y^2=x$.故本题选$y^2=x$。

24.【答案】$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

【解析】由题意，圆$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为$(2,1)$，半径为 2，因为点$(2,1)$关于直线 $y=x$ 对称的点为$(1,2)$，所以圆$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 关于直线 $y=x$ 对称的圆的圆

心为(1,2)，半径为 2，所以该圆的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=4$.故本题选$(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

25.【答案】A=0 且$D^2+E^2-4F>0$

【解析】原方程可整理为：$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2+Axy=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$，由圆的定义可知，若方程表示圆，则需 $A=0$ 且$\frac{D^2+E^2-4F}{4}>0$，即 $A=0$ 且$D^2+E^2-4F>0$；当 $A=0$ 且$D^2+E^2-4F>0$ 时，方程表示以$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$为圆心，$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$为半径的圆；综上所述：所求的充要条件为：$A=0$ 且$D^2+E^2-4F>0$。故本题选 A=0 且$D^2+E^2-4F>0$。

26.【答案】$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

【解析】由题意设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，因为 $F(-2\sqrt{5},0)$为椭圆 C 的左焦点，所以 $c=2\sqrt{5}$，因为$|OP|=|OF|$，所以$|OP|=|OF|=2\sqrt{5}$，设点 P 的坐标为 P(m,n)，则$\frac{1}{2}|OF||n|=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}$，解得$|n|=\frac{8}{\sqrt{5}}$，则$|m|=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-\left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{6}{\sqrt{5}}$，所以点 P 的坐标为$\left(-\frac{6}{\sqrt{5}},\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$，因为 P 为椭圆 C 上一点，所以$\frac{36}{5a^2}+\frac{64}{5b^2}=1$。因为$a^2-b^2=c^2=20$，所以解得$a^2=36,b^2=16$，所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$，故本题选$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$。

27.【答案】$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

【解析】因为$|AF|=a+c$，$|FB|=a-c$，所以 $a+c=3(a-c)$，而 $c=1$，解得 $a=2$，又$b^2=a^2-c^2=3$，故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。

28.【答案】6

【解析】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，得$a^2=1,b^2=3,c^2=a^2+b^2=4$，$k=1$，其中一个焦点为(2,0)，代入直线 l 点斜式方程为 $y=x-2$，由$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1\\ y=x-2\end{cases}$得

$3x^2-(x-2)^2-3=0$，即 $2x^2+4x-7=0$，所以 $x_1+x_2=-2,x_1x_2=-\frac{7}{2}$,△=16+56=72，

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4+14}=3\sqrt{2}$，

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)}|x_1-x_2|=6$

29.【答案】$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}=1$

【解析】由题意设所求双曲线方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}=k$，因为双曲线过点$(2\sqrt{3},-1)$，所以$\frac{12}{12}-\frac{1}{6}=k$，$k=\frac{5}{6}$，所以双曲线方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}=\frac{5}{6}$，即$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}=1$。

30.【答案】4

【解析】解：双曲线的左焦点坐标为：$\left(-\sqrt{3+\frac{p^2}{16}},0\right)$，抛物线 $y^2=2px$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，所以$-\sqrt{3+\frac{p^2}{16}}=-\frac{p}{2}$，解得：p=4。

三、解答题

31.【答案】(1)解：令 $x=0$，则$t^2+t-2=0$，解得 $t=-2$ 或 $t=1$（舍），则 $y=2+6+4=12$，即 $A(0,12)$.令 $y=0$，则$t^2-3t+2=0$，解得 $t=2$ 或 $t=1$（舍），则 $x=2-2-4=-4$，即 $B(-4,0)$。$\therefore|AB|=\sqrt{(0+4)^2+(12-0)^2}=4\sqrt{10}$。

(2)解：由(1)可知$k_{AB}=\frac{12-0}{0-(-4)}=3$，则直线 AB 的方程为 $y=3(x+4)$，即 $3x-y+12=0$。由 $x=\rho\sin\theta,y=\rho\sin\theta$ 可得，直线 AB 的极坐标方程为 $3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0$。

32.【答案】解：方法一：证明：（Ⅰ）当直线 l 的斜率不存在时，则 A（2，2），B（2，-2），则$\overrightarrow{OA}$=（2，2），$\overrightarrow{OB}$=（2，-2），则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，∴$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则坐标原点 O 在圆 M 上；

当直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程 y=k（x-2），设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\begin{cases}y=k(x-2)\\y^2=2x\end{cases}$，

整理得：$k^2x^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$，则 $x_1x_2=4$，$4x_1x_2=y_1^2y_2^2=(y_1y_2)^2$，由 $y_1y_2<0$，则

$y_1y_2=-4$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，则$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则坐标原点 O 在圆 M 上，综上可知：坐标原点 O 在圆 M 上；

方法二：设直线 l 的方程 x=my+2，$\begin{cases}x=my+2\\ y^2=2x\end{cases}$，整理得：$y^2-2my-4=0$，设 $A(x_1,x_2),B(y_1,y_2)$，则 $y_1y_2=-4$，则 $(y_1y_2)^2=4x_1x_2$，则 $x_1x_2=4$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，则$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则坐标原点 O 在圆 M 上，∴坐标原点 O 在圆 M 上；

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知：$x_1x_2=4$，$x_1+x_2=\frac{4k^2+2}{k^2},y_1+y_2=\frac{2}{k},y_1y_2=-4$，圆 M 过点 P（4，﹣2），则 $\overrightarrow{AP}=(4-x_1,-2-y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(4-x_2,-2-y_2)$，由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，则 $(4-x_1)(4-x_2)+(-2-y_1)(-2-y_2)=0$，整理得：$k^2+k-2=0$，解得：$k=-2,k=1$，当 k=﹣2 时，直线 l 的方程为 y=-2x+4，则 $x_1+x_2=\frac{9}{2},y_1+y_2=-1$，则 $M\left(\frac{9}{4},-\frac{1}{2}\right)$，半径为 $r=|MP|=\sqrt{\left(4-\frac{9}{4}\right)^2+\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{85}}{4}$，∴圆 M 的方程 $\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{16}$。当直线斜率 k=1 时，直线 l 的方程为 y=x-2，同理求得 M（3，1），则半径为 $r=|MP|=\sqrt{10}$，∴圆 M 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$，综上可知：直线 l 的方程为 y=﹣2x+4，圆 M 的方程 $\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{16}$，或直线 l 的方程为 y=x﹣2，圆 M 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$。

33.【答案】(1）解：设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right),B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$ 为曲线 $C:y=\frac{x^2}{4}$ 上两点，则直线 AB 的斜率为 $k=\frac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{x_1-x_2}=\frac{1}{4}(x_1+x_2)=1$；

（2）设直线 AB 的方程为 $y=x+t$，代入曲线 $C:y=\frac{x^2}{4}$，可得 $x^2-4x-4t=0$，即有

$x_1+x_2=4, x_1x_2=-4t$，再由 $y=\frac{x^2}{4}$ 的导数为 $y'=\frac{1}{2}x$，设 $M\left(m,\frac{m^2}{4}\right)$，可得 M 处切线的斜率为 $\frac{1}{2}m$，由 C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，可得 $\frac{1}{2}m=1$，解得 m=2，即 M（2，1），由 AM⊥BM 可得，$k_{AM}\cdot k_{BM}=-1$，即为 $\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1-2}\cdot\frac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2-2}=-1$，化为 $x_1x_2+2(x_1+x_2)+20=0$，即为 $-4t+8+20=0$，解得 t=7．则直线 AB 的方程为 $y=x+7$．

34.【答案】(1) 解：AB 的中点为$(-1,\frac{5}{2})$，斜率为$\frac{4-1}{2+4}=\frac{1}{2}$，故 AB 中垂线的斜率为$-2$，所以中垂线的方程为 $y-\frac{5}{2}=-2(x+1)$ 即 $4x+2y-1=0$。

(2)解：因为 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{4}$，所以 $|AD|=\frac{3}{4}|AB|$。若 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，则 $(x_D-2,y_D-4)=\frac{3}{4}(6,3)$，

故 $\begin{cases}x_D=\frac{13}{2}\\ y_D=\frac{25}{4}\end{cases}$，故 $k_{CD}=\frac{\frac{25}{4}-5}{\frac{13}{2}+1}=\frac{1}{6}$，故直线 $CD:y-5=\frac{1}{6}(x+1)$ 即 $x-6y+31=0$。若 $\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，则 $(x_D-2,y_D-4)=$

$-\frac{3}{4}(6,3)$，故 $\begin{cases}x_D=-\frac{5}{2}\\ y_D=\frac{7}{4}\end{cases}$，故 $k_{CD}=\frac{13}{6}$，故直线 $CD:y-5=\frac{13}{6}(x+1)$ 即 $13x-6y+43=0$.故直线 CD 的方程为：$13x-6y+43=0$ 或 $x-6y+31=0$.

35.【答案】解：(Ⅰ) 设点 $M\left(x_0,\frac{x_0^2}{2p}\right)$，由 $x^2=2py(p>0)$ 得，$y=\frac{x^2}{2p}$，求导 $y'=\frac{x}{p}$，而直线 MQ 的斜率为 1，所以 $\frac{x_0}{p}=1$ 且 $x_0-\frac{x_0^2}{2p}-\sqrt{2}=0$，解得 $p=2\sqrt{2}$，所以抛物线标准方程为 $x^2=4\sqrt{2}y$。

(Ⅱ)解：因为点 M 处的切线方程为：$y-\frac{x_0^2}{2p}=\frac{x_0}{p}(x-x_0)$，即 $2x_0x-2py-x_0^2=0$，

根据切线又与圆相切，得 $d=r$，即 $\dfrac{\left|-x_0^{\ 2}\right|}{\sqrt{4x_0^{\ 2}+4p^2}}=1$，化简得 $x_0^{\ 4}=4x_0^{\ 2}+4p^2$，由方程组 $\begin{cases}2x_0x-2py-x_0^{\ 2}=0\\ x^2+y^2=1\\ x_0^{\ 4}-4x_0^{\ 2}-4p^2=0\end{cases}$，解得 $Q\left(\dfrac{2}{x_0},\dfrac{4-x_0^{\ 2}}{2p}\right)$，所以

$|PQ|=\sqrt{1-k^2}\left|x_P-x_Q\right|=\sqrt{1+\dfrac{x_0^{\ 2}}{p}}\left|x_0-\dfrac{2}{x_0}\right|=\dfrac{\sqrt{p^2+x_0^{\ 2}}}{p}$

$\times\left|\dfrac{x_0^{\ 2}-2}{x_0}\right|$，点 F（0，$\frac{p}{2}$）到切线 PQ 的距离是 $d=\dfrac{1-2p^2-x_0^{\ 2}}{\sqrt{4p^2+4x_0^{\ 2}}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2+x_0^2}$，所以

$S_1=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{p^2+x_0^{\ 2}}}{p}\left|\dfrac{x_0^{\ 2}-2}{x_0}\right|\times\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2+x_0^2}=\dfrac{p^2+x_0^{\ 2}}{4p}\left|\dfrac{x_0^{\ 2}-2}{x_0}\right|$，

$S_2=\dfrac{1}{2}|OF||x_Q|=\dfrac{P}{2|x_0|}$，而由 $x_0^{\ 4}=4x_0^{\ 2}+4p^2$ 知，$4p^2=x_0^{\ 4}-4x_0^{\ 4}>0$，得 $|x_0|>2$，所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{p^2+x_0^{\ 2}}{4p}\left|\dfrac{x_0^{\ 2}-2}{x_0}\right|\times\dfrac{2|x_0|}{p}=\dfrac{x_0^{\ 2}-4}{2}+\dfrac{4}{x_0^{\ 2}-4}$

$+3\geq 2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $\dfrac{x_0^{\ 2}-4}{2}=\dfrac{4}{x_0^{\ 2}-4}$ 时取“=”号，即 $x_0^{\ 2}=4+2\sqrt{2}$，此时，$p=\sqrt{2+2\sqrt{2}}$，

所以 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$。

36.【答案】（1）解：直线 l 斜率不为 0，F(1,0)，设直线 $l{:}x=ty+1$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，因为 A 点，x 轴上方，所以 $y_1>0,y_2<0$，由 $\begin{cases}x=ty+1\\ y^2=4x\end{cases}$，得 $y^2-4ty-4=0$ $\therefore y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$，$\because \overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}\Rightarrow(1-x_1,y_1)=2(x_2-1,y_2)$ $\therefore -y_1=2y_2$。

由 $\begin{cases}y_1+y_2=4t\\ -y_1=2y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=8t\\ y_2=-4t\end{cases}$ 代入 $y_1y_2=-4$，因为 $y_1>0$，所以 $t>0$，解得 $t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，所以 AB 所在直线方程为 $3\sqrt{2}x-y-2\sqrt{2}=0$。

（2）证明：设 AB 中点为 $N\left(x_N,y_N\right)$，$\therefore y_N=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2t,x_N=2t^2+1$ $\therefore N\left(2t^2+1,2t\right)$，所以 AB 中垂线 $l:y-2t=-t\left(x^2-2t^2-1\right)$ $\therefore D\left(2t^2+3,0\right)$，$\therefore |DF|=|2t^2+3-1|=2t^2+$

2， $\because |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(ty_2-ty_1)+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+t^2}\sqrt{16t^2+16}=4t^2+4$，

$\therefore \dfrac{|AB|}{|DF|}=\dfrac{4t^2+4}{2t^2+2}=2$ (定值)

37.【答案】(1) 解：圆的圆心为 $C(-2,6)$，半径 $r=4$，∵直线 l 被圆 C 解得弦长为 $4\sqrt{3}$，∴圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=2$，若直线 l 无斜率，则直线方程为 $x=0$，此时圆心到直线 l 的距离为 2，符合题意；若直线 l 有斜率，设斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y=kx+5$，即 $kx-y+5=0$，$\therefore \dfrac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=\dfrac{3}{4}$，∴直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}x+5$。综上，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=\dfrac{3}{4}x+5$.

(2) 解：设所求轨迹上任意一点为 $M(x,y)$，则 $k_{CM}=\dfrac{y-6}{x+2}(x\neq -2)$，$k_{PM}=\dfrac{y-5}{x}(x\neq 0)$，$\therefore \dfrac{y-6}{x+2}\cdot\dfrac{y-5}{x}=-1$，整理得 $x^2+y^2+2x-11y+30=0$，经验证当 $x=-2$ 时，弦的中点为 $(-2,5)$ 或 $(-2,6)$，符合上式，当 $x=0$ 时，弦的中点为 $(0,6)$，符合上式，∴过 P 点的圆 C 弦的中点的轨迹方程为 $x^2+y^2+2x-11y+30=0$.

38.【答案】(1) 解：设圆心的坐标为 $C(a，0)$，则 $\sqrt{(a-0)^2+\left(0-\sqrt{3}\right)^2}=|a+1|$，解得 $a=1$，∴$C(1,0)$，半径 $r=2$，∴圆 C 的方程为 $(x-1)^2+y^2=4$.

(2) 解：①当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=0$，此时直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，满足条件；②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx-2$，由题意得 $\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\dfrac{3}{4}$，∴直线 l 的方程为 $3x-4y-8=0$，综上所述，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x-4y-8=0$.

39.【答案】(1) 解：设双曲线的半焦距为 c，由题 $c^2=4+3=7$，设椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ $\therefore \begin{cases}\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|=9\\ |PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2=28\\ |PF_1|+|PF_2|=2a\end{cases}$，

$\therefore 4a^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2+4\left(\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\right)=64$， $a^2=16,\therefore b^2=a^2-c^2=16-7=9$，

$\therefore C_2:\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{9}=1$；

（2）解：由题点 A(0,4).设双曲线右支上任意一点 B 的坐标为(x_0,y_0)，AB 中点 M 的坐标为 (x,y)，则 $\begin{cases} x=\dfrac{x_0}{2} \\ y=\dfrac{y_0+4}{2} \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} x_0=2x \\ y_0=2y-4 \end{cases}$，又点 B 在双曲线上，

$\therefore \dfrac{x_0^{\ 2}}{4}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{3}=1 \therefore x^2-\dfrac{(2y-4)^2}{3}=1(x\geq1)$。

40.【答案】（1）解：由题意得，$c=1,a=2,$ 则 $b=\sqrt{3}$，故所求的椭圆标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）解：设 $M(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，则 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{3}=1$ ①；又由 $P(t,0),H(2,0)$．则 $\overrightarrow{MP}=(t-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{MH}=(2-x_0,-y_0)$。由 MP⊥MH 可得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MH}=0$，即 $(t-x_0,-y_0)\cdot(2-x_0,-y_0)=(t-x_0)\cdot(2-x_0)+y_0^{\ 2}=0$。由①②消去 y_0，整理得 $t(2-x_0)=-\dfrac{1}{4}x_0^{\ 2}+2x_0-3$ ②，$\because x_0\neq2,\therefore t=\dfrac{1}{4}x_0-\dfrac{3}{2}$，$\because -2<x_0<2,\therefore -2<t<-1$。故实数 t 的取值范围为$(-2,-1)$．

模块十　排列组合模块答案解析部分

一、单选题

1.【答案】C

【解析】首先从 6 名同学中选 1 名去甲场馆，方法数有C_6^1；然后从其余 5 名同学中选 2 名去乙场馆，方法数有C_5^2；最后剩下的 3 名同学去丙场馆.故不同的安排方法共有$C_6^1\cdot C_5^2=6\times10=60$种.故本题选 C

2.【答案】C

【解析】解：从分别标有 1，2，…，9 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次，共有C_9^2=36 种不同情况，且这些情况是等可能发生的，抽到在 2 张卡片上的数奇偶性不同的情况有$C_5^1C_4^1$=20 种，故抽到在 2 张卡片上的数奇偶性不同的概率 P=$\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$，故本题选：C.

3.【答案】C

【解析】解：$(2x-y)^5$的展开式的通项公式：$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{(5-r)}(-y)^r=C_5^r2^{(5-r)}(-1)^rx^{(5-r)}y^r$．令 5－r=2，r=3，解得 r=3．令 5－r=3，r=2，解得 r=2。∴（x+y）$(2x-y)^5$的展开式中的x^3y^3系数=$2^2\times(-1)^3\times C_5^3+2^3\times1\times C_5^2$=40．故本题选：C.

4.【答案】C

【解析】解：设$\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^5$展开式中的通项为$T_{r+1}$，则$T_{r+1}=c_5^r\bullet x^{2(5-r)}(-2)^2\bullet(-2)^r\bullet x^{-3r}=(-2)^r\bullet c_5^r\bullet x^{10-5r}$，令 10－5r=0 得 r=2，∴$\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^5$展开式中的常数项为$(-2)^2\times c_5^2$=4×10=40．故本题选 C。

5.【答案】D

【解析】解：使用“插空法“．第一步，三个人先坐成一排，有A_3^3种，即全排，6 种；第二步，由于三个人必须隔开，因此必须先在 1 号位置与 2 号位置之间摆放一张凳子，2 号位置与 3 号位置之间摆放一张凳子，剩余一张凳子可以选择三个人的左右共 4 个空挡，随便摆放即可，即有C_4^1种办法．根据分步计数原理，6×4=24．故本题选：D.

6.【答案】D

【解析】解：由题意知本题是一个分类计数问题，要得到四个数字的和是偶数，需要分

成三种不同的情况，当取得 4 个偶数时，有C_4^4=1 种结果，当取得 4 个奇数时，有C_5^4=5 种结果，当取得 2 奇 2 偶时有$C_4^2C_5^2$=6×10=60。∴共有 1+5+60=66 种结果，故本题选 D。

7.【答案】C

【解析】解：第一类：三局为止，共有 2 种情形；第二类：四局为止，共有 2×C_3^2=6 种情形；第三类：五局为止，共有 2×C_4^2=12 种情形；故所有可能出现的情形共有 2+6+12=20 种情形。故本题选 C。

8.【答案】C

【解析】解：由题意，不考虑特殊情况，共有C_{16}^3种取法，其中每一种卡片各取三张，有 4C_4^3种取法，两种红色卡片，共有$C_4^2C_{12}^1$种取法，故所求的取法共有$C_{16}^3-4C_4^3-C_4^2C_{12}^1$=560－16－72=472。故本题选 C。

9.【答案】A

【解析】解：由题意，可按分步原理计数，首先，对第一列进行排列，第一列为 a，b，c 的全排列，共有A_3^3种，再分析第二列的情况，当第一列确定时，第二列第一行只能有 2 种情况，当第二列一行确定时，第二列第 2，3 行只能有 1 种情况；所以排列方法共有：A_3^3×2×1×1=12 种，故本题选 A。

10.【答案】B

【解析】解：（1）当 a=0 时，方程为 2x+b=0，此时一定有解；此时 b=－1，0，1，2；即（0，－1），（0，0），（0，1），（0，2）四种．

（2）当 a≠0 时，方程为一元二次方程，∴△=4－4ab≥0，∴ab≤1．所以 a=－1，1，2，此时 a，b 的对数为（－1，0），（－1，2），（－1，－1），（－1，1），（1，－1），（1，0），（1，1），（2，－1），（2，0），共 9 种，关于 x 的方程 ax^2+2x+b=0 有实数解的有序数对的个数为 13 种，故本题选 B。

二、填空题

11.【答案】480

【解析】解：按 C 的位置分类，在左 1，左 2，左 3，或者在右 1，右 2，右 3，因为左右是对称的，所以只看左的情况最后乘以 2 即可。当 C 在左边第 1 个位置时，有 A_5^5，当 C 在左边第 2 个位置时，A 和 B 有 C 右边的 4 个位置可以选，有 A_4^2 A_3^3，当 C 在左边第 3 个位置时，有 A_3^2 A_3^3+A_2^2 A_3^3，共为 240 种，乘以 2，得 480．则不同的排法共有 480 种。故本题答案为 480。

12.【答案】120

【解析】因为四个互不相邻的空位可产生五个位置，则这四个同学可以在这五个位置就坐，因此共有$A_5^4=120$种不同的安排方法。故本题答案为120。

13.【答案】54

【解析】解：令x＝1，有4n＝256，解得n＝4，所以展开式通项为：$T_{k+1}=3^kC_4^kx^{4-2k}$，令4 - 2k＝0得，k＝2．故常数项为：$C_4^2 3^2=54$。故本题答案为54。

14.【答案】$\frac{3}{5}$

【解析】从“三药三方”中随机选出2种共$C_6^2=15$个基本事件，其中1药1方的事件数有$C_3^1C_3^1=9$个。故概率P＝$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$。

15.【答案】$\frac{5}{6}$

【解析】从4名（含甲、乙两人）随机选2名有$C_4^2=6$种不同结果，甲、乙均未被选中共有$C_2^2=1$，种不同结果，则甲、乙两人中，均未被选中的概率为$\frac{1}{6}$，所以两人至少有一人被选中的概率。为$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

16.【答案】4；16

【解析】$(x^3+\frac{1}{x})^4$的展开式的通项$T_{r+1}=C_4^r(x^3)^{4-r}(\frac{1}{x})^r=C_4^rx^{12-4r}$，令$12-4r=0$，解得$r=3$，则常数项为$C_4^3=4$；二项式$(x^3+\frac{1}{x})^4$中，令$x=1$，得到$(1+1)^4=16$，则所有项的系数之和为16。故本题答案为4；16。

17.【答案】18

【解析】先从CDEF中安排两位志愿者照顾乙，有C_4^2种选择，再从剩余的除去A的三位志愿者中选择两位照顾丙，有C_3^2种选择，剩余一位和A照顾甲，故共有$C_4^2\cdot C_3^2=18$种安排方法。

18.【答案】120

【解析】在3名男教师和6名女教师中，选取5人参加义务献血，总的方法为C_9^5，选择全都是女教师的情况为C_6^5，所以男、女教师各至少一名的选取种数为：$C_9^5-C_6^5=\frac{9!}{5!(9-5)!}-\frac{6!}{5!(6-5)!}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}-6=120$种。

19.【答案】40

【解析】设$(2x-y)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(-y)^r=(-1)^r2^{5-r}C_5^rx^{5-r}y^r$，

令 r=3，则$T_4=-4C_5^3x^2y^3$=-40x^2y^3，令 r=2，则$T_3=8C_5^2x^3y^2$=80x^3y^2，所以展开式中含 x^3y^3 的项为 $x\cdot(-40x^2y^3)+y\cdot(80x^3y^2)=40x^3y^3$。所以 x^3y^3 的系数为 40。

20.【答案】$\frac{1}{9}$

【解析】∵三人均等可能的前往三个城市之一，∴共有$3^3=27$ 种选择情况，他们选择同一城市有 3 种情况，∴概率为$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

三、解答题

21.【答案】（1）解：在 $n=6$ 时，恰好在第三次时检测出呈阳性血液，说明其中三份血液中的其中一份呈阳性，并且对含阳性血液的一组进行检测时，前两次检测出血液为阴性，或第一次为阴性第二次为阳性 $P=\frac{C_5^3}{C_6^3}\cdot(\frac{C_2^2C_1^1}{C_3^2C_1^1}+\frac{C_2^1C_1^1}{C_3^1C_2^1})\cdot 2=\frac{2}{3}$

（2）解：①在 $n\geq 8$ 时，$P(\xi=2)=\frac{C_{n-1}^{n-3}}{C_n^{n-3}}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}+\frac{C_{n-1}^3}{C_n^3}\cdot\frac{C_1^1}{C_{n-3}^1}=\frac{2}{n}$；$P(\xi=3)=\frac{C_{n-1}^2C_1^1}{C_n^3}\cdot(\frac{C_2^1C_1^1}{C_3^1C_2^1}+\frac{C_2^1C_1^1}{C_3^1C_2^1})+\frac{C_{n-1}^3}{C_n^3}\cdot\frac{C_{n-4}^1C_1^1}{C_{n-3}^1C_{n-4}^1}=\frac{3}{n}$；$P(\xi=4)=\frac{C_{n-1}^3}{C_n^3}\cdot\frac{C_{n-4}^2C_1^1}{C_{n-3}^2\cdot C_{n-5}^1}=\frac{1}{n}$

同理，当 $4\leq k\leq n-4$ 时，$P(\xi=k)=\frac{C_{n-1}^3}{C_n^3}\cdot\frac{C_{n-4}^{k-2}\cdot C_1^1}{C_{n-3}^{k-2}C_{(n-3)-(k-2)}^1}=\frac{1}{n}$；$P(\xi=k-3)=\frac{C_{n-1}^3}{C_n^3}\cdot\frac{C_{n-4}^{n-4}C_1^1}{C_{n-3}^{n-4}C_1^1}\cdot 2=\frac{2}{n}$

∴ ξ的分布列为：

ξ	2	3	4	…	$n-4$	$n-3$
P	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$

②$E\xi=2\cdot\frac{2}{n}+3\cdot\frac{3}{n}+4\cdot\frac{1}{n}+5\cdot\frac{1}{n}+\ldots+(n-4)\cdot\frac{1}{n}+(n-3)\cdot\frac{2}{n}=\frac{n^2-3n+14}{2n}$

22.【答案】解：（Ⅰ）该校男生支持方案一的概率为$\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$，该校女生支持方案一的概率为$\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$;

（Ⅱ）3 人中恰有 2 人支持方案一分两种情况，（1）仅有两个男生支持方案一，（2）仅有一个男生支持方案一，一个女生支持方案一，所以 3 人中恰有 2 人支持方案一概率为：$(\frac{1}{3})^2(1-\frac{3}{4})+C_2^1(\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$;

（Ⅲ）$p_1<p_0$

23.【答案】解：(I)设顾客所获取的奖励额为 X，依题意，得 $P(X=60)=\frac{C_1^1\cdot C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$，即

顾客所获得奖励额为 60 元的概率为$\frac{1}{2}$;

(II)依题意得 X 得所有可能取值为 20，60，

即 X 的分布列为

X	20	60
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

所以这位顾客所获的奖励额的数学期望为 E（X）＝$20\times\frac{1}{2}+60\times\frac{1}{2}$＝40.

24.【答案】（1）解：首先从 5 个白球中取出 4 个进行排列，然后 3 个黑球插在中间三个空内，则 4 个白球两两不相邻的排法有$A_5^4A_3^3=5\times4\times3\times2\times3\times2\times1=720$种；

（2）解：从中任取 6 个球，白球的个数不比黑球个数少的取法有 3 类：1 个黑球和 5 个白球、2 个黑球和 4 个白球、3 个黑球和 3 个白球，则共有$C_3^1C_5^5+C_3^2C_5^4+C_3^3C_5^3=28$种取法.

25.【答案】（1）解：由第 4 项和第 9 项的二项式系数相等可得$C_n^3=C_n^8$，解得 $n=11$

（2）解:由(1)知,展开式的第 $r+1$ 项为:$T_{n+1}=C_{11}^r(\sqrt{x})^{11-r}(-\frac{2}{x})^{1r}=(-2)^rC_{11}^rx^{\frac{11-3r}{2}}$,

令$\frac{11-3r}{2}=1$得 $r=3$，此时 $T_{3+1}=(-2)^3C_{11}^3x=-1320x$，所以，展开式中 x 的一次项的系数为$-1320$。

26.【答案】（1）解：因为总的基本事件个数$n_1=A_5^3=60$，摸到三位数是奇数的事件数$n_2=A_3^1A_4^2=36$，所以$P_1=\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$；所以摸到三位数是奇数的概率$\frac{3}{5}$.

（2）解：获奖金额 X 的可能取值为 50、100、200、300、400、500，

$P(X=50)=\frac{3}{5}$，$P(X=100)=\frac{1\times3\times2}{60}=\frac{1}{10}$，$P(X=200)=\frac{1\times3\times1}{60}=\frac{1}{20}$，

$P(X=300)=\frac{1\times3\times2}{60}=\frac{1}{10}$，$P(X=400)=\frac{1\times3\times1}{60}=\frac{1}{20}$，$P(X=500)=\frac{1\times3\times2}{60}=\frac{1}{10}$，

获奖金额 X 的概率分布为

X	50	100	200	300	400	500
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$

均值 $E(X)=50\times\frac{3}{5}+100\times\frac{1}{10}+200\times\frac{1}{20}+300\times\frac{1}{10}+400\times\frac{1}{20}+500\times\frac{1}{10}=150$ 元.

所以期望是 150 元.

27.【答案】（1）解：展开式中第 $k+1$ 项为$T_{k+1}=C_n^k(2x)^k=2^kC_n^kx^k$。则第 5 项、第 6

项与第 7 项的二项式系数为C_n^4,C_n^5,C_n^6成等差数列，则 $2C_n^5=C_n^4+C_n^6$，即 $2\frac{n!}{5!(n-5)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{n!}{6!(n-6)!}$，即$n^2-21n+98=0$，解得 n = 14 或 7。当 n = 7 时，二项式系数最大项为T_4,T_5，此时系数为$2^3C_7^3$和$2^4C_7^4$，当 n = 14 时，二项式系数最大项为T_8，此时系数为$2^7C_{14}^7$.

（2）解：前三项的二项式系数为C_n^0,C_n^1,C_n^2，其和为 79，即$C_n^0+C_n^1+C_n^2=79$，即 $1+n+\frac{n(n-1)}{2}=79$，整理得，$n^2+n-156=0$，解得 n = 12 或− 13(舍去)。设展开式中第 k + 1 项系数最大，即$\begin{cases}2^kC_{12}^k\geq 2^{k+1}C_{12}^{k+1}\\2^kC_{12}^k\geq 2^{k-1}C_{12}^{k-1}\end{cases}$，解得，$\frac{23}{3}\leq k\leq\frac{26}{3}$，因为 $k\in N$，所以 k = 8，即展开式中第 9 项系数最大，系数为$2^8C_{12}^8$.

28.【答案】(1)解：由展开式中奇数项的二项式系数和为$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=2^{n-1}=128$，可得 n = 8，所以展开式中二项式系数最大的项第五项，其系数为$C_8^4\times 2^4=1120$

（2）解：由展开式前三项的二项式系数和$C_n^0+C_n^1+C_n^2=1+n+\frac{n(n-1)}{2}=37$，化为$n^2+n-72=0$，解得 n = 8，或 n =− 9（舍去），设展开式中系数最大的项为第 k + 1 项，则$\begin{cases}C_8^k\times 2^k\geq C_8^{k-1}\times 2^{k-1}\\C_8^k\times 2^k\geq C_8^{k+1}\times 2^{k+1}\end{cases}\Rightarrow 5\leq k\leq 6$，所以展开式中系数最大的项为第 6 或第 7 项，

即$T_6=C_8^5\cdot(2x)^5=1792x^5$ ， $T_7=C_8^6\cdot(2x)^6=1792x^6$

29.【答案】（1）解：选取 2 个球作为一个球与其它两个球分别放到三个盒子中，共有$C_4^2A_4^3=144$ 种方法.

（2）解：1 个球的编号与盒子的编号相同的选法有C_4^1种，当 1 个球与 1 个盒子编号相同时，其余 3 个球的投放方法有 2 种，故共有$C_4^1\times 2=8$ 种方法.

（3）解：先从四个盒子中选出三个盒子，有C_4^3种选法，再从三个盒子中选出一个盒子放两个球，余下两个盒子各放一个，由于球是相同的，即没有顺序，由分步乘法计数原理知，共有$C_4^3C_3^1=12$ 种方法.

30.【答案】（1）解：$T_{r+1}=C_n^r\cdot(x^{\frac{1}{3}})^{n-r}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{3}})^r=(-\frac{1}{2})^r\cdot C_n^r\cdot x^{\frac{n-2r}{3}}$.。∵第 6 项为常数项，∴r = 5 时有$\frac{n-2r}{3}=0$，∴n = 10.

（2）解：令$\frac{n-2r}{3}=2$，得 $r=\frac{1}{2}(n-6)=2$，∴所求的系数为$C_{10}^2(-\frac{1}{2})^2=\frac{45}{4}$.

（3）解：根据通项公式，由题意得：$\begin{cases}0\leq r\leq 10\\r\in Z\end{cases}$，令$\frac{10-2r}{3}=k(k\in Z)$，则 $10-2r=3k$，

即 $r=\frac{10-3k}{2}=5-\frac{3}{2}k$. ∵ $r\in Z$，∴ k 应为偶数，∴ k 可取 2，0，-2，∴ $r=2,5,8$，

∴第 3 项、第 6 项与第 9 项为有理项. 它们分别为 $C_{10}^{2}\cdot(-\frac{1}{2})^{2}\cdot x^{2}=\frac{45}{4}x^{2}$, $C_{10}^{5}\cdot(-\frac{1}{2})^{5}=-\frac{63}{8}$,

$C_{10}^{8}\cdot(-\frac{1}{2})^{8}\cdot x^{-2}=\frac{45}{256x^{2}}$。所以有理项为 $\frac{45}{4}x^{2}$，$-\frac{63}{8}$，$\frac{45}{256x^{2}}$.

模块十一　概率模块答案解析部分

一、单选题

1.【答案】B

【解析】$\overline{x_1}=\frac{1+2+2+3+1+2+4}{10}=1.5$，$\overline{x_2}=\frac{2+2+1+1+1+2+1+1+1}{10}=1.2$，$\therefore \overline{x_1}>\overline{x_2}$，由表可知，甲的数据相对分散，乙的数据相对集中，故 S1>S2，故本题选 B

2.【答案】A

【解析】前 3 局有 2 局甲获胜，最后一局甲胜，故 3：1 获胜的概率是 $P=C_3^2\times(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$，故本题选 A.

3.【答案】D

【解析】每个个体被抽到的概率等于$\frac{90}{360+270+180}=\frac{1}{9}$，甲社区有低收入家庭 360 户，故甲社区中接受援助的低收入家庭的户数 $360\times\frac{1}{9}=40$，故本题选 D.

4.【答案】B

【解析】由图知：

得分	88	90	92	94	96	98	100
人数	4	5	3	4	2	1	1

所以 $a=92$，$c=90$，$b=\frac{88\times4+90\times5+92\times3+94\times4+96\times2+98+100}{20}=92.2$。故本题选 B

5.【答案】D

【解析】（1）是系统抽样，因为各班人数相等，每班抽取 2 人；（2）是分层抽样，因为 60 人中分数有明显差异；（3）是简单随机抽样，因为 6 名同学中每个同学都是等可能地被安排在相应的赛道上，故本题选 D.

6.【答案】B

【解析】A.由回归方程$\hat{y}=-0.7x+10.3$ 知 $b=-0.7<0$，所以变量 x，y 之间呈负相关关系，故正确；B.因为$\bar{x}=\frac{1}{4}(6+8+10+12)=9$。则$\bar{y}=-0.7\times9+10.3=4$，所以$\bar{y}=\frac{1}{4}(6+m+3+2)=\frac{1}{4}(11+m)=4$，解得 $m=5$，故错误；C.当 $x=20$ 时，$\hat{y}=-0.7\times20+10.3=-3.7$，故正确；D.由 B 知：$\bar{x}=9$，$\bar{y}=4$，所以回归直线必过点$(9,4)$，故正确；故

本题选 B。

7.【答案】B

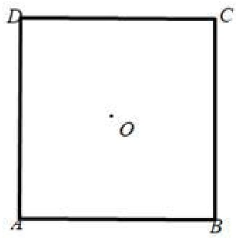
【解析】由茎叶图以及系统抽样从中抽取 7 人，得到抽取比例为$\frac{1}{8}$，成绩在区间[70，86]的人数为 24，抽取人数为 $24\times\frac{1}{8}=3$.故本题选 B

8.【答案】C

【解析】因为数据 ax_i+b，$(i=1,2,\cdots,n)$的方差是数据x_i，$(i=1,2,\cdots,n)$的方差的a^2倍，所以所求数据方差为$10^2\times0.01=1$，故本题选 C。

9.【答案】A

【解析】如图，



从 O,A,B,C,D，5 个点中任取 3 个有{O,A,B},{O,A,C},{O,A,D},{O,B,C},{O,B,D},{O,C,D},{A,B,C},{A,B,D}{A,C,D},{B,C,D}共 10 种不同取法，3 点共线只有{A,O,C}与{B,O,D}共 2 种情况，由古典概型的概率计算公式知，取到 3 点共线的概率为$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

10.【答案】B

【解析】由题意，第二天新增订单数为 $500+1600-1200=900$，故需要志愿者$\frac{900}{50}=18$ 名。故本题选 B。

二、填空题

1.【答案】$\frac{1}{6}$；$\frac{2}{3}$

【解析】甲、乙两球落入盒子的概率分别为$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，且两球是否落入盒子互不影响，所以甲、乙都落入盒子的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，甲、乙两球都不落入盒子的概率为$(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$，所以甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为$\frac{2}{3}$。

2.【答案】$\frac{5}{3}$

【解析】设一组数据为 6，7，8，8，9，10 的平均数为$\overline{x}$，方差为s^2，∴这组数据的平均数

是：$\overline{x}=\frac{6+7+8+8+9+10}{6}=\frac{48}{6}=8,\therefore$ 这组数据的方差为：$s^2=\frac{(6-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$。

3.【答案】分层抽样

【解析】查表知若要在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为喜欢玩电脑游戏与认为作业多有关，则临界值 k0＝6.635.本题中，k≈5.059＜6.635，所以不能在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为喜欢玩电脑游戏与认为作业多有关.

5.【答案】1.96

【解析】解：由题意可知，该事件满足独立重复试验，是一个二项分布模型，其中，p=0.02，n=100，则 DX=npq=np（1﹣p）=100×0.02×0.98=1.96．

6.【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】解：∵A（﹣1，﹣1），B（1，﹣1），C（1，1），D（﹣1，1），∴正方体的 ABCD 的面积 S=2×2=4，根据积分的几何意义以及抛物线的对称性可知阴影部分的面积 $S=2\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=2(x-\frac{1}{3}x^3)|_{-1}^{1}=2[（1-\frac{1}{3}）-（-1+\frac{1}{3}）]=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$，则由几何概型的概率公式可得质点落在图中阴影区域的概率是 $\frac{\frac{8}{3}}{4}=\frac{2}{3}$。

7.【答案】$\frac{13}{18}$

【解析】解：从 1，2，3，4，5，6，7，8，9 九个球中，任意取出两个球的取法种数为 $C_9^2=36$ 种．取出的两个球的编号之积为奇数的方法种数为 $C_5^2=10$ 种．则取出的两个球的编号之积为奇数的概率为 $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$．所以取出两个球的编号之积为偶数的概率是 $1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$.

8.【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】解：3a﹣1＞0 即 a＞$\frac{1}{3}$，则事件“3a﹣1＞0”发生的概率为 $P=\frac{1-\frac{1}{3}}{1}=\frac{2}{3}$

9.【答案】$\frac{3}{8}$

【解析】解：三个电子元件的使用寿命均服从正态分布 N（1000，502）得：三个电子元件的使用寿命超过 1000 小时的概率为 $p=\frac{1}{2}$，设 A={超过 1000 小时时，元件 1、元件 2 至少有一个正常}，B={超过 1000 小时时，元件 3 正常}，C={该部件的使用寿命超过 1000

小时}，则 P（A）=$1-(1-p)^2=\frac{3}{4}$，P（B）=$\frac{1}{2}$；P（C）=P（AB）=P（A）P（B）=$\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

10.【答案】(1，2]

【解析】当 x≤2，故-x+6≥4，要使得函数 f(x)的值域为[4，+∞)，只需$f_1(x)=3+\log_a x(x>2)$的值域包含于[4，+∞)，故$f_1(x)>3+\log_a 2$，所以 $3+\log_a 2\geq 4$，解得 1＜a≤2，所以实数 a 的取值范围是（1，2]。

三、解答题

1.【答案】(1) 解：由频数分布表可知，该市一天的空气质量等级为 1 的概率为$\frac{2+16+25}{100}=0.43$，等级为 2 的概率为$\frac{5+10+12}{100}=0.27$，等级为 3 的概率为$\frac{6+7+8}{100}=0.21$，等级为 4 的概率为$\frac{7+2+0}{100}=0.09$

（2）解：由频数分布表可知，一天中到该公园锻炼的人次的平均数为$\frac{100\times20+300\times35+500\times45}{100}=350$

（3）解：2×2 列联表如下：

	人次≤ 400	人次>400
空气质量不好	33	37
空气质量好	22	8

$K^2=\frac{100\times(33\times8-37\times22)^2}{55\times45\times70\times30}\approx5.820>3.841$，

因此，有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

2.【答案】(1) 解：由表可知，甲厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率为$\frac{40}{100}=0.4$，乙厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率为$\frac{28}{100}=0.28$；

（2）解：甲分厂加工 100 件产品的总利润为 $40\times(90-25)+20\times(50-25)+20\times(20-25)-20\times(50+25)=1500$ 元，所以甲分厂加工 100 件产品的平均利润为 15 元每件；乙分厂加工 100 件产品的总利润为 $28\times(90-20)+17\times(50-20)+34\times(20-20)-21\times(50+20)=1000$ 元，所以乙分厂加工 100 件产品的平均利润为 10 元每件．故厂家选择甲分厂承接加工任务.

3.【答案】(1) 解：记事件 M：甲连胜四场，则 $P(M)=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$；

（2）解：记事件 A 为甲输，事件 B 为乙输，事件 C 为丙输，则四局内结束比赛的概

率为，$P^{'}=P(ABAB)+P(ACAC)+P(BCBC)+P(BABA)=4\times(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{4}$，所以，需要进行第五场比赛的概率为 $P=1-P^{'}=\frac{3}{4}$；

（3）解：记事件 A 为甲输，事件 B 为乙输，事件 C 为丙输，记事件 M：甲赢，记事件 N：丙赢，则甲赢的基本事件包括：BCBC、ABCBC、ACBCB、BABCC、BACBC、BCACB、BCABC、BCBAC，所以，甲赢的概率为 $P(M)=(\frac{1}{2})^4+7\times(\frac{1}{2})^5=\frac{9}{32}$。由对称性可知，乙赢的概率和甲赢的概率相等，所以丙赢的概率为 $P(N)=1-2\times\frac{9}{32}=\frac{7}{16}$.

4.【答案】（1）解：因为 A,B,C 镇分别有基层干部 60 人，60 人，80 人，共 200 人，利用分层抽样的方法选 40 人，则 C 镇应选取 $80\times\frac{40}{200}=16$（人），所以这 40 人中有 16 人来自 C 镇。因为$\bar{x}=10\times0.15+20\times0.25+30\times0.3+40\times0.2+50\times0.1=28.5$，所以三镇基层干部平均每人走访贫困户 28.5 户。

（2）解：由直方图得，从三镇的所有基层干部中随机选出 1 人，其工作出色的概率为$\frac{3}{5}$；显然 X 可取 0，1，2，3，且 $X\sim B(3,\frac{3}{5})$，则 $P(X=0)=(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$，$P(X=1)=C_3^1(\frac{3}{5})^1(\frac{2}{5})^2=\frac{36}{125}$，$P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^1=\frac{54}{125}$，$P(X=3)=(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

所以数学期望 $E(X)=0\times\frac{8}{125}+1\times\frac{36}{125}+2\times\frac{54}{125}+3\times\frac{27}{125}=\frac{9}{5}$

5.【答案】（1）解：根据题意列出 2×2 列联表如下：

位置 类型	糟糕	良好	合计
电信	3	2	5
网通	2	3	5
合计	5	5	10

$K^2=\frac{10(4-9)^2}{5\times5\times5\times5}=\frac{10\times25}{25\times25}=0.4<2.07$，故在犯错误的概率不超过 0.15 的前提下，不能说明游戏的网络状况与网络的类型有关。

（2）解：依题意，所求概率 $P=\frac{C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$

（3）解：随机变量 X 的所有可能取值为 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$；$P(X=2)=\frac{C_2^1\cdot C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$；$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$.

故 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$\therefore E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=1.8$.

6.【答案】（1）解：由 $10\times(0.010+0.015+a+0.030+0.010)=1$，得 $a=0.035$；

（2）解：由于前两组的频率和为 $0.1+0.15=0.25$，第三组的频率为 0.35，故中位数为 $35+\frac{0.25}{0.035}=\frac{295}{7}$

（3）解：第 1，2 组抽取的人数分别为 20 人，30 人，从第 1，2 组中用分层抽样的方法抽取 5 人，则第 1，2 组抽取的人数分别为 2 人，3 人，分别记为a_1,a_2,b_1,b_2,b_3.设从 5 人中随机抽取 3 人，为 $(a_1,a_2,b_1),(a_1,a_2,b_2),(a_1,a_2,b_3),(a_1,b_1,b_2),(a_1,b_1,b_3)$，$(a_1,b_2,b_3),(a_2,b_1,b_2),(a_2,b_1,b_3)(a_2,b_2,b_3),(b_1,b_2,b_3)$共 10 个基本事件,其中第 2 组恰好抽到 2 人包含$(a_1,b_1,b_2),(a_1,b_1,b_3),(a_1,b_2,b_3),(a_2,b_1,b_2),(a_2,b_1,b_3)$，$(a_2,b_2,b_3)$共 6 个基本事件,从而第 2 组抽到 2 人的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

7.【答案】（1）解：不超标数据有：9.27,9.26,9.33,9.34,9.36,9.39,9.42,9.43,9.55,9.65，共 10 个数中位数为$\frac{9.36+9.39}{2}=9.375$

（2）解：由题目条件可知，零件为一级的数据共有 4 个，分别为 9.26,9.27,9.33,9.34 则由一切可能的结果组成的基本事件空间为 $\Omega=\{(9.26,9.27),(9.26,9.33),(9.26,9.34),(9.27,9.33),(9.27,9.34),(9.33,9.34)\}$，共由 6 个基本事件组成.设“其中恰有一个零件尺寸小于 9.3 "为事件 A，则 $A=\{(9.26,9.33),(9.26,9.34),(9.27,9.33),(9.27,9.34)\}$，共有 4 个基本事件，所以 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

（3）解：由题意，零件超标的概率 $P=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$，因为$\frac{4}{9}\times3600=1600$，所以一天约有 1600 个的零件超标.

8.【答案】（1）解：从 6 名同学中随机选出 2 人参加知识竞赛的所有可能结果为：{A，

B}，{A，C}，{A，X}，{A，Y}，{A，Z}，{B，C}，{B，X}，{B，Y}，{B，Z}，{C，X}，{C，Y}，{C，Z}，{X，Y}，{X，Z}，{Y，Z}，共 15 种.

（2）解：选出的 2 人来自不同年级且恰有 1 名男同学和 1 名女同学的所有可能的结果为{A，Y}，{A，Z}，{B，X}，{B，Z}，{C，X}，{C，Y}，共 6 种。因此，事件 M 发生的概率 $P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

9.【答案】（1）解：∵第 6 小组的频率为 1－(0.04＋0.10＋0.14＋0.28＋0.30)＝0.14，∴参加这次铅球投掷的总人数为$\frac{7}{0.14}$＝50。根据规定，第 4、5、6 组的成绩均为合格，人数为(0.28＋0.30＋0.14)×50＝36.

（2）解：∵成绩在第 1、2、3 组的人数为(0.04＋0.10＋0.14)×50＝14，成绩在第 5、6 组的人数为(0.30＋0.14)×50＝22，参加这次铅球投掷的总人数为 50，∴这次铅球投掷的同学的成绩的中位数在[7.95，8.85)内，即第 4 组.

（3）解：设这次铅球投掷成绩优秀的 5 人分别为 a、b、c、d、e，则选出 2 人的所有可能的情况为：ab，ac，ad，ae，bc，bd，be，cd，ce，de，共 10 种，其中 a、b 至少有 1 人的情况为：ab，ac，ad，ae，bc，bd，be，共有 7 种，∴a、b 两位同学中至少有 1 人被选到的概率为 P＝$\frac{7}{10}$.

10.【答案】（1）解：由 $10\times(0.010+0.015+0.015+m+0.025+0.05)=1$，得 $m=0.030$.

（2）解：平均数为$\bar{x}=45\times0.1+55\times0.15+65\times0.15+75\times0.3+85\times0.25+95\times0.05=71$，设中位数为 n，则 $0.1+0.15+0.15+(n-70)\times0.03=0.5$，得 $n=\frac{220}{3}\approx73.33$. 故可以估计该企业所生产口罩的质量指标值的平均数为 71，中位数为 73.33.

（3）解：由频率分布直方图可知：100 个口罩中一等品、二等品各有 60 个、40 个，由分层抽样可知，所抽取的 5 个口罩中一等品、二等品各有 3 个、2 个。记这 3 个一等品为 a，b，c，2 个二等品为 d，e，则从 5 个口罩中抽取 2 个的可能结果有：(a,b)，(a,c)，(a,d)，(a,e)，(b,c)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共 10 种，其中恰有 1 个口罩为一等品的可能结果有：(a,d)，(a,e)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)共 6 种。故这 2 个口罩中恰好有 1 个口罩为一等品的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

模块十二　高等数学模块答案解析部分

一、选择题

1.【答案】B

【解析】$\because f(x)=x^4-2x^3$，$\therefore f'(x)=4x^3-6x^2$，$\therefore f(1)=-1$，$\therefore f'(1)=-2$，因此，所求切线的方程为 $y+1=-2(x-1)$，即 $y=-2x+1$。故本题选 B.

2.【答案】C

【解析】首先求出原函数的导函数 $y'=2\cos x-\sin x$，再把π代入到导函数的解析式，求出结果即为切线的斜率则 k=-2，再由点斜式 $y+1=-2(x-\pi)$ 求出直线的方程化为一般式 $2x+y-2\pi+1=0$，故本题选 C

3.【答案】D

【解析】$\because f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$，且 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore a-1=0\Rightarrow a=1.f(x)=x^3+x\Rightarrow f'(x)=3x^2+1$，$\therefore f'(0)=1$.而 $y-0=x-0\Rightarrow y=x$，故本题选 D.

4.【答案】D

【解析】由当 f'（x）＜0 时，函数 f（x）单调递减，当 f'（x）＞0 时，函数 f（x）单调递增，则由导函数 y=f'（x）的图象可知：f（x）先单调递减，再单调递增，然后单调递减，最后单调递增，排除 A，C，且第二个拐点（即函数的极大值点）在 x 轴上的右侧，排除 B，故选 D

5.【答案】C

【解析】∵函数 f（x）$=\ln x+\ln(2-x)$，∴f（2－x）$=\ln(2-x)+\ln x$，即 f（x）=f（2－x），即 y=f（x）的图象关于直线 x=1 对称，故选：C.

6.【答案】D

【解析】解：$y'=a-\frac{1}{x+1}$，∴y′（0）=a－1=2，∴a=3．故答案选 D.

7.【答案】C

【解析】A、因为 f（2π－x）+f（x）=cos（2π－x）sin2（2π－x）+cosxsin2x=－cosxsin2x+cosxsin2x=0，故 y=f（x）的图象关于（π，0）中心对称，A 正确；B、因为 f（π－x）=cos（π－x）sin2（π－x）=cosxsin2x=f（x），故 y=f（x）的图象关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故 B 正确；C、f（x）=cosxsin2x=2sinxcos2x=2sinx（1－sin2x）=2sinx－2sin3x，令 t=sinx∈[－1，1]，则 $y=2t-2t^3$，t∈[－1，1]，则 $y'=2-6t^2$，令 y′＞0 解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $y=2t-2t^3$，

在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上增，在$\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$与$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$上减，又 y（－1）=0，y（$\frac{\sqrt{3}}{3}$）=$\frac{4\sqrt{3}}{9}$，故函数的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$，故 C 错误；D、因为 f（－x）+f（x）=－cosxsin2x+cosxsin2x=0，故是奇函数，又 f（x+2π）=cos（2π+x）sin2（2π+x）=cosxsin2x，故 2π是函数的周期，所以函数即是奇函数，又是周期函数，故 D 正确。由于该题选择错误的，故选：C.

8.【答案】C

【解析】解：函数 $f'(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 的导数为 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x$，由题意可得 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，即为 $1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x\ge 0$，即有 $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\cos 2x+a\cos x\ge 0$，设 $t=\cos x$（$-1\le t\le 1$），即有 $5-4t^2+3at\ge 0$，当 t=0 时，不等式显然成立；当 0＜t≤1 时，$3a\ge 4t-\frac{5}{t}$，由 $4t-\frac{5}{t}$在（0，1]递增，可得 t=1 时，取得最大值－1，可得 3a≥－1，即 $a\ge -\frac{1}{3}$；当 $-1\le t<0$ 时，$3a\le 4t-\frac{5}{t}$，由 $4t-\frac{5}{t}$ 在[－1，0）递增，可得 t=－1 时，取得最小值 1，可得 3a≤1，即 $a\le\frac{1}{3}$．综上可得 a 的范围是$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$．故选：C.

9.【答案】D

【解析】$f'(x)=3x^2-12$；∴x＜－2 时，$f'(x)>0$，－2＜x＜2 时，$f'(x)<0$，x＞2 时，$f'(x)>0$；∴x=2 是 f（x）的极小值点；又 a 为 f（x）的极小值点；∴a=2．故选 D.

10.【答案】A

【解析】函数的极小值点要满足 $f'(x)=0$ ，在左侧附近 $f'(x)<0$，右侧附近 $f'(x)>0$，根据图像观察得有 1 个。故选 A.

二、填空题

1.【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)'}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$。

2.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$。

3.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}$。

4.【答案】8

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}(7+\frac{7}{8}+\frac{7}{8^2}\cdots\frac{7}{8^n})=7\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{8^0}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}\cdots\frac{1}{8^n})=7\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1\cdot(1-\frac{1}{8^{n+1}})}{1-\frac{1}{8}}=8$。

5.【答案】$-\frac{1}{2}+\ln 2$

【解析】$\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^2-1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$；

$=\int_0^1(x-1)dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}d(1+x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1+\ln|1+x|\Big|_0^1=-\frac{1}{2}+\ln 2$。

6.【答案】$\ln\sqrt{2}$

【解析】$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}d\cos x=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}dt=\ln t\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=\ln\sqrt{2}$。

7.【答案】$\frac{5}{6}$

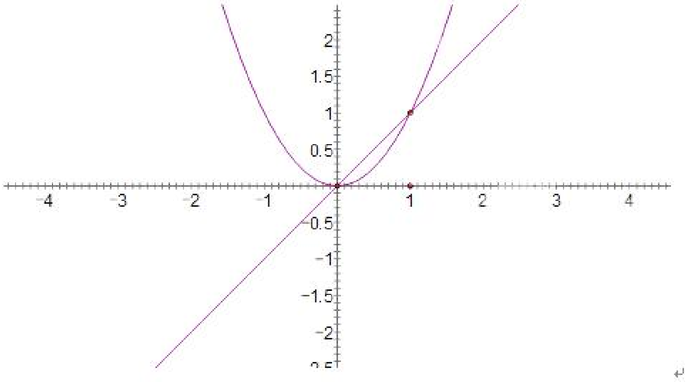
【解析】$\int_0^1\left(x^2-x+1\right)\mathrm{d}x==[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x]\Big|_0^1=\frac{5}{6}$。

8.【答案】$\frac{1}{6}$

【考点】用定积分求简单几何体的体积

【解析】在同一坐标系内做出两个函数的图像，解译程组$\begin{cases}y=x^2\\y=x\end{cases}$得两曲线的交点坐标为$(0,0),(1,1)$，如图可知，曲线所围成的封闭图形的面积为：

$S=\int_0^1(x-x^2)dx=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$



9.【答案】（1，+∞）

【解析】因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-kx-1$，则$f'(x)=e^x-x-k$，若函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-kx-1$ 有两个极值点，则$f'(x)=0$ 有两根，则只需满足 $k=e^x-x$ 有两解，令 $g(x)=e^x-x$，则$g'(x)=e^x-1$，当，时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$在，上递减；当，时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$在，上递增；所以$g_{min}(x)=g(0)=1$，故只需 $k>1$。故本题选（1，+∞）。

10.【答案】$\frac{5}{6}$

【解析】由题意得，$f'(x)=3a-3e^{3x}$，则$f'(0)=3a-3$，则 $3a-3=-\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{5}{6}$。故本题选$\frac{5}{6}$.

11.【答案】2

【解析】矩阵

$$\begin{pmatrix}1&2&6\\0&3&5\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&2&3\\0&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&23&31\\3&21&29\\0&12&16\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&23&31\\0&-48&-64\\0&12&16\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&23&31\\0&3&4\\0&3&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&23&31\\0&3&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$，∴矩阵的秩为 2。

12.【答案】6

【解析】$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&6\\9&25&36\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1&1\\5&6\end{vmatrix}-25\begin{vmatrix}1&1\\3&6\end{vmatrix}+36\begin{vmatrix}1&1\\3&5\end{vmatrix}=9-75+72=6$ 。

13.【答案】-10

【解析】线性相关当且仅当存在一组不全为 0 的数 k_1、k_2，使得 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$；即

$\begin{cases}2k_1-4k_2=0\\-3k_1+6k_2=0\\5k_1+ak_2=0\end{cases}$，解得 $k_1=2k_2$， $a=-10$ 。

三、解答题

1.【答案】(1)解：函数 $g(x)=x\ln x$ 的定义域为,，$g'(x)=\ln x+1$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{e}$。

当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)>0$.所以，函数 $y=g(x)$ 的单调递减区间为：$\left(0,\frac{1}{e}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$。

（2）解：若 $2af(x)+x-2a-1>0$ 恒成立，即 $\frac{2ax\ln x}{x-1}>2a+1-x$ 恒成立；$x>1$ 时，$2ax\ln x>(2a+1-x)\cdot(x-1)$，即 $2a\ln x>-x+2a+2-\frac{2a+1}{x}$，即 $2a\ln x+x-2a-2+\frac{2a+1}{x}>0$，设 $h(x)=2a\ln x+x-2a-2+\frac{2a+1}{x}$，则 $h'(x)=1+\frac{2a}{x}-\frac{2a+1}{x^2}=\frac{x^2+2ax-(2a+1)}{x^2}=\frac{(x-1)(x+2a+1)}{x^2}$，

①当 $a\geq-1$ 时，$-(2a+1)\leq1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $y=h(x)$ 在，上单调递增，此时 $h(x)>h(1)=0$，即 $2a\ln x>-x+2a+2-\frac{2a+1}{x}$ 成立，所以，$a\geq-1$ 符合题意；

②当 $a<-1$ 时，$-(2a+1)>1$，则当 $1<x<-(2a+1)$ 时，$h'(x)<0$，函数 $y=h(x)$ 在区间 $(1,-(2a+1))$ 上单调递减，则 $h(-2a-1)<h(1)=0$，不合乎题意。综上所述，实数 a 的取值范围是，$a\geq-1$。

2.【答案】(1)解：$\because 4x\in[\frac{1}{4}，5]$，$\therefore x\in[\frac{1}{16}，\frac{5}{4}]$；$\therefore h(4x)$ 的定义域为 $[\frac{1}{16}，\frac{5}{4}]$

（2）解：$h'(x)=1-\frac{m}{x^2}$；$m<0$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，$h(x)$ 在 $[\frac{1}{4}，5]$ 递增；$m>0$ 时，令 $h'(x)>0$，解得 $x>\sqrt{m}$ 或 $x<-\sqrt{m}$，即函数的单调增区间为 $\left(-\infty,-\sqrt{m}\right)$，$\left(\sqrt{m},+\infty\right)$；当 $\sqrt{m}\leq\frac{1}{4}$ 即 $0<m\leq\frac{1}{16}$ 时，$h(x)$ 在 $[\frac{1}{4}，5]$ 递增；当 $\frac{1}{4}<\sqrt{m}<5$ 即 $\frac{1}{16}<m<25$ 时，$h(x)$ 在 $[\sqrt{m}，5]$ 递增；当 $\sqrt{m}\geq5$ 即 $m\geq25$ 时，$h(x)$ 在 $[\frac{1}{4}，5]$ 无递增区间；综上可得：$m<0$ 时，$h(x)$ 在 $[\frac{1}{4}，5]$ 递增；$0<m\leq\frac{1}{16}$ 时，$h(x)$ 在 $[\frac{1}{4}，5]$ 递增；$\frac{1}{16}<m<25$ 时，$h(x)$ 在 $[\sqrt{m}，5]$ 递增。

3.【答案】(1)解：$g(x)=x-a\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$.

（i）若 $a\leq0$，则 $g'(x)\geq0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

（ii）若 $a>0$，当 $x\in(0,a)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增.

（2）解：因为 $f(x)$ 存在两个极值点且 $a>2.f'(x)=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$，所以 $f(x)$ 的两个极值点，满足 $x^2-ax+1=0$，所以 $x_1x_2=1$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2>1$，则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$，要证 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$，只需证 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$. 设 $h(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x(x>1)$，则 $h'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，知 $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递减，又 $h(1)=0$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，故 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>(a-2)(x_1-x_2)$.

4.【答案】（1）解：由解析式知：$f'(x)=1-2ax-\frac{1}{x}$ 且 $x>0$，由 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(x))$ 处的切线斜率为 -2 知：$f'(1)=-2a=-2$，∴$a=1$，有 $f(1)=0$，故切线方程为 $y=2-2x$；

（2）解：$a=-1$ 时，$f'(x)=1+2x-\frac{1}{x}=0$，即有 $x=-1$（舍去）或 $x=\frac{1}{2}$，∴ $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上有 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上有 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；∴$f(x)$ 有极小值 $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}+\ln2$。

5.【答案】（1）解：因为 $f'(x)=3x^2-6x+3b$，由题意可得 $f'(0)=3x^2-6x+3b=3b=0$，$f(0)=x^3-3x^2+3bx+c=1$，解得 $b=0$，$c=1$，所以 $f(x)=x^3-3x^2+1$；经检验，适合题意，又 $f(1)=-1$，$f'(1)=-3$，所以函数 $y=f(x)$ 图象在 $x=1$ 处切线的方程为 $y-(-1)=-3(x-1)$，即 $3x+y-2=0$。

（2）解：因为 $f'(x)=3x^2-6x$，令 $3x^2-6x=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$.当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数.因为函数 $f(x)$ 在 $[t,t+2]$ 上不单调，所以 $t<0<t+2$ 或 $t<2<t+2$，所以 $-2<t<0$ 或 $0<t<2$。

6.【答案】（1）解：∵$f(x)$ 的定义域为 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-m$；若 $m\le0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在定义域内单调递增，无最大值；若 $m>0$，在 $x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)$ 上 $f(x)$ 单调递增；在 $x\in\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$ 上 $f(x)$ 单调递减. ∴$x=\frac{1}{m}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(\frac{1}{m})=\ln\frac{1}{m}=0$，∴$m=1$.

（2）解：原式恒成立，即 $\ln x - mx + 1 \le x(e^x - 2)$在 $x\in(0,+\infty)$上恒成立，即 $m - 2 \ge \frac{1+\ln x}{x} - e^x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立． 设 $\phi(x)=\frac{1+\ln x}{x}-e^x$， 则 $\phi'(x)=-\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$， 设 $h(x)=x^2e^x+\ln x$，则$h'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x} > 0$，所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且 $h(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2}\cdot e^{\frac{1}{e}} - 1 = e^{\frac{1}{e}-2} - 1 < 0$，$h(1) = e > 0$．所以 $h(x)$有唯一零点x_0，且 $x_0{}^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，即 $x_0e^{x_0} = \frac{-\ln x_0}{x_0}$．两边同时取对数得$x_0 + \ln x_0 = \ln(- \ln x_0) + (- \ln x_0)$，易知 $y = x + \ln x$ 是增函数。$\therefore x_0 =- \ln x_0$，即$e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$．由$\varphi'(x) =- \frac{h(x)}{x^2}$知$\varphi'(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减．$\therefore \varphi(x) \le \varphi(x_0) = \frac{1+\ln x_0}{x_0} - e^{x_0} = \frac{1-x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} =- 1$，$\therefore m - 2 \ge - 1$，$\therefore m \ge 1$，故 m 的取值范围是$[1,+\infty)$．

7.【答案】（1）解：因为$e^x > 0$，由 $f(x) = e^x(2x^2 - 3x) > 0$，得 $2x^2 - 3x > 0$.所以 $x < 0$ 或 $x > \frac{3}{2}$。所以不等式 $f(x) > 0$ 的解集为$\{x|x < 0$ 或 $x > \frac{3}{2}\}$；

（2）解：由 $f(x) = e^x(2x^2 - 3x)$得：$f'(x) = e^x(2x^2 + x - 3) = e^x(2x + 3)(x - 1)$.令$f'(x) = 0$，得 $x = 1$，或 $x =- \frac{3}{2}$（舍）。

$f(x)$与$f'(x)$在区间[0，2]上的情况如下：

x	0	（0，1）	1	（1，2）	2
$f'(x)$		—	0	+	
$f(x)$	0	减	$-e$	增	$2e^2$

所以当 $x = 1$ 时，$f(x)$取得最小值 $f(1) =- e$；当 $x = 2$ 时，$f(x)$取得最大值 $f(2) = 2e^2$.

8.【答案】（1）解：$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x$，$f'(\pi)=0$；

（2）证明：令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$，则$g'(x) = x\sin x - x^2 = x(\sin x - x)$，当 $x \in (0，\frac{\pi}{2})$时，设 $t(x) = \sin x - x$，则$t'(x) = \cos x - 1 < 0$，所以 $t(x)$在 $x \in (0，\frac{\pi}{2})$单调递减，$t(x) = \sin x - x < t(0) = 0$，即 $\sin x < x$，所以$g'(x) < 0$，所以 $g(x)$在$(0，\frac{\pi}{2})$上单调递减，所以 $g(x) < g(0) = 0$，所以 $f(x) < \frac{1}{3}x^3$.

（3）解：原题等价于 $\sin x > kx$ 对 $x \in (0，\frac{\pi}{2})$恒成立，即 $k < \frac{\sin x}{x}$对 $x \in (0，\frac{\pi}{2})$恒成立，令 $h(x) = \frac{\sin x}{x}$，则$h'(x) = \frac{x\cos x-\sin x}{x^2} =- \frac{f(x)}{x^2}$.，易知$f'(x) = x\sin x > 0$，即 $f(x)$在$(0，\frac{\pi}{2})$单调递

增，所以 $f(x)>f(0)=0$，所以$h'(x)<0$，故 $h(x)$在$(0，\frac{\pi}{2})$单调递减，所以 $k\le h(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$.

综上所述，k 的最大值为$\frac{2}{\pi}$.

9.【答案】（1）解：由 $f(x)=x^3-x$，得$f'(x)=3x^2-1$，所以$f'(1)=2$，又 $f(1)=0$，所以曲线 $y=f(x)$在点，处的切线方程为：$y-0=2(x-1)$，即：$2x-y-2=0$

（2）解：令$f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$f(x)$与$f'(x)$在区间$[0,2]$的情况如下：

x	$\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}，2\right]$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

因为，所以函数，在区间$[0,2]$上的最大值为 6

（3）证明：设 $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x+3$，则$h'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，令$h'(x)=0$，得 $x=\pm1$，$h(x)$与$h'(x)$随 x 的变化情况如下：

x	(-∞，-1)	-1	(-1，1)	1	(1，+∞)
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

则 $h(x)$的增区间为(-∞，-1)，(1，+∞)，减区间为(-1，1)，又 $h(1)=1>0$，$h(-1)>h(1)>0$，所以函数 $h(x)$在 R 上没有零点，又 $h(-3)=-15<0$，所以函数 $h(x)$在$[-3,-1]$上有唯一零点x_0.。综上，在$[-3,-1]$上存在唯一的x_0，使得 $f(x_0)=g(x_0)$

10.【答案】（1）解：$f'(x)=1-2\cos x$，令$f'(x)=0$，得 $\cos x=\frac{1}{2}$，故在区间上，$f'(x)$的唯一零点是 $x=\frac{\pi}{3}$，当$x>\frac{\pi}{3}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$0<x<\frac{\pi}{3}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，故在区间$(0,+\infty)$上，$f(x)$的极小值为 $f(\frac{\pi}{3})=1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，当 $x>\pi$时，$f(x)>1+\pi-2=\pi-1>f(\frac{\pi}{3})$，所以，$f(x)$的最小值为 $f(\frac{\pi}{3})=1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$.

（2）证明：$x>0$ 时，$f(x)>e^{-2x}$，即证 $x>0$ 时，$g(x)=(1+x-2\sin x)e^{2x}>1$.$g'(x)=$

$2(1+x-2\sin x)e^{2x}+(1-2\cos x)e^{2x}=(3+2x-4\sin x-2\cos x)e^{2x}$，令 $h(x)=x-\sin x$，则 $h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，即 $h(x)$是$(0,+\infty)$上的增函数，$\therefore h(x)>h(0)=0$，即 $x>\sin x$，$\therefore 3+2x-4\sin x-2\cos x>3+2\sin x-4\sin x-2\cos x=3-2(\sin x+\cos x)=3-2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>0$，$\therefore g'(x)=(3+2x-4\sin x-2\cos x)e^{2x}>0$.即 $g(x)$是$(0,+\infty)$上的增函数，$g(x)>g(0)=1$，故当 $x>0$ 时，$f(x)>e^{-2x}$.

模块十三　教材教法模块答案解析部分

一、单选题（共 15 题，共 30 分）

1.【答案】D

【解析】《义务教育新课程标准》课程内容部分指出，数感主要是指关于数与数量/数量关系/运算结果估计等方面的感悟。

2.【答案】C

【解析】《义务教育新课程标准》课程内容部分指出，在数学课堂中，应当注重发展学生的数感、符号意识、空间观、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想。

3.【答案】A

【解析】《义务教育新课程标准》在教学意见的第一部分中指出，要帮助学生形成认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑等良好的学习习惯。

4.【答案】B

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》关于空间观念的描述为：“空间观念主要 是指根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；想象出物体的方位和相互之间的位置关系；描述图形的运动和变化；依据语言的描述画出图形等。”所以选项 A、C、D 均符合上述空间观念的含义，故不属于空间观念的主要含义的为选项 B。

5.【答案】D

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出，义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程，具有基础性、普及性和发展性，故本题选 D。

6.【答案】C

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出现代信息技术不能完全代替原有的教学手段，其真正的价值在于实现原有的教学手段难以达到甚至达不到的效果，现代信息

技术的应用有利于培养学生的几何直观。在应用现代信息技术的同时，教师还应当注意课堂教学的板书设计，必要的板书设计有利于实现学生的思维与教学过程同步，有利于学生更好把握教学内容的脉络。故本题选 C。

7.【答案】C

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出："总目标的四个方面，不是相互独立和割裂的，而是一个密切联系、相互交融的有机整体。在课程设计和教学活动组织中，应同时兼顾这四个方面的目标。这些目标的整体实现，是学生受到良好数学教育的标志，它对学生的全面、持续、和谐发展有着重要的意义。数学思考、问题解决、情感态度的发展离不开知识技能的学习，知识技能的学习必须有利于其他三个目标的实现。"所以①③④正确，故正确答案为 C。

8.【答案】B

【解析】空间观念主要是指根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；想象出物体的方位和相互之间的位置关系；描述图形的运动和变化；依据语言的描述画出图形等。

9.【答案】A

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中明确规定：义务教育数学课程目标分为总目标与学段目标，其中总目标是从知识技能、数学思考、问题解决和情感态度等四个方面具体阐述，故本题选 A。

10.【答案】A

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中描述结果目标的行为动词主要包括了解、理解、掌握和运用。而体验、经历、探索都属于过程目标。故本题选 A。

11.【答案】D

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》数学思考方面的总目标中指出："建立数感、符号意识和空间观念，初步形成几何直观和运算能力，发展形象思维与抽象思维。"故本题选 D。

12.【答案】C

【解析】在进行整数四则混合运算之前，学生学习过同级整数运算的竖式计算，同时结合小学四则混合运算的教材编写内容及意图可知，在整数四则混合运算中，同级运算的教学重点是脱式计算的书写过程。故本题选 C。

13.【答案】C

【解析】题目已知《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中提倡要恰当呈现并合理利用评价结果，发挥评价的激励作用，保护学生的自尊心和自信心，而 C 选项公布学生排名并且批评后进，这都与已知评价理念中的保护学生自尊心和发挥评价的激励作用相矛盾，因此 C 错误，故本题选 C。

14.【答案】D

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》的评价建议中指出，在设计试题时，应淡化特殊的解题技巧，不出偏题怪题；几何命题的证明应以“图形的性质”中所列出的基本事实和定理作为依据；内容标准中的选学内容不得列入考试范围，因此 D 错误。故本题选 D。

15.【答案】A

【解析】教学中应当注意的几个关系有：（1）“预设”与“生成”的关系；（2）面向全体学生与关注学生个体差异的关系；（3）合情推理与演绎推理的关系；（4）使用现代信息技术与教学手段多样化的关系。

二、填空题（共 15 小题，每题 2 分，共 30 分）

1.【答案】基础性；普及性；发展性

【解析】义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程，具有基础性、普及性和发展性。

2.【答案】基础知识和基本技能

【解析】课标中指出数学课程能使学生掌握必备的基础知识和基本技能；培养学生的抽象思维和推理能力；培养学生的创新意识和实践能力；促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展。

3.【答案】抽象思维和推理能力

【解析】课标中指出数学课程能使学生掌握必备的基础知识和基本技能；培养学生的抽象思维和推理能力；培养学生的创新意识和实践能力；促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展。

4.【答案】创新意识和实践能力

【解析】课标中指出数学课程能使学生掌握必备的基础知识和基本技能；培养学生的抽象思维和推理能力；培养学生的创新意识和实践能力；促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展。

5.【答案】基本技能；抽象思维

【解析】课标中指出数学课程能使学生掌握必备的基础知识和基本技能；培养学生的抽象思维和推理能力；培养学生的创新意识和实践能力；促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展。

6.【答案】推理能力；实践能力

【解析】课标中指出数学课程能使学生掌握必备的基础知识和基本技能；培养学生的抽象思维和推理能力；培养学生的创新意识和实践能力；促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展。

7.【答案】人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。

【解析】数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。

8.【答案】社会的需要；数学的特点；要符合学生的认知规律

【解析】数学课程内容要反映社会的需要、数学的特点、要符合学生的认知规律

9.【答案】数学的结果

【解析】课程内容要反映社会的需要、数学的特点，要符合学生的认知规律。它不仅包括数学的结果，也包括数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法。

10.【答案】数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法

【解析】课程内容要反映社会的需要、数学的特点，要符合学生的认知规律。它不仅包括数学的结果，也包括数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法。

11.【答案】直观与抽象

【解析】课程内容的组织要重视过程，处理好过程与结果的关系；要重视直观，处理好直观与抽象的关系；要重视直接经验，处理好直接经验与间接经验的关系。

12.【答案】直接经验与间接经验

【解析】课程内容的组织要重视过程，处理好过程与结果的关系；要重视直观，处理好直观与抽象的关系；要重视直接经验，处理好直接经验与间接经验的关系。

13.【答案】组织者、引导者

【解析】教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。

14.【答案】道理

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》提出的基本技能的教学中指出，不仅要使学生掌握技能操作的程序和步骤，还要使学生理解程序和步骤的道理。

15.【答案】②④⑤

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》数学学习的总目标为了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和实事求是的科学态度。情感态度目标为养成认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑等学习习惯，形成实事求是的科学态度。

三、论述题

1.【参考答案】

组织者的含义应是组织学生发现、寻找、搜集和利用学习资源。建立人道的、和谐的、民主的、平等的师生关系，让学生在平等、尊重、信任、理解和宽容的氛围中受到激励和鼓舞；组织学生营造和保持教室中和学习过程中的积极的心理氛围等。

引导者的含义是引导学生设计恰当的学习活动，引导学生进一步探究所需要的先前经验，引导学生实现课程资源价值的超水平发挥。教师应激发学生的学习积极性，向学生提供充分从事教学活动的机会，帮助他们在自主探索和合作交流的过程中，真正理解和掌握基础知识、基本技能。

合作者是在参与中与学生分享自己的感情与认识，一道寻找真理，勇敢地承认自己的过失与错误。新课程要求，教师要由“老师为中心”、居高临下、注重表演的传授者变为共同建构学习的合作者，因此教师要打破“教师中心”的旧思想，在民主、平等的学习氛围中引导学生自由表达和自主探索，教师从“师道尊严”的架子中走出来，从居高临下的权威中走向平等中的首席。

2.【参考答案】

【解析】模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径。建立和求解模型的过程包括：从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果并讨论结果的意义。这些内容的学习有助于学生初步形成模型思想，提高学习数学的兴趣和应用意识。

比如，学习指数函数函数过程中，不仅单纯的学习指数函数解析式 $y=a^x\left(a\neq0\right)$ 中的数字与符号，更要结合新课标所强调的符号意识等理念建立起数学模型，在定义内，画出图像的走向趋势，在模型的参考下，观察、学习、研究数学问题中所包含的数量关系及其它们的变换规律，得出结论，有助于研究细菌分裂、种群数量变化等生产、生活、科研领域的问题提供模型、方向。

3.【参考答案】

评价主体的多元化是指教师、家长、同学及学生本人都可以作为评价者，可以综合运用教师评价、学生自我评价、学生相互评价、家长评价等方式，对学生的学习情况和教师的教学情况进行全面的考察。例如，每个学习单元结束时，教师可以要求学生自我设计一个“学习小结”，用合适的形式（表、图、卡片、电子文本等）归纳学到的知识和方法，学习中的收获，遇到的问题，等等。教师可以通过学习小结对学生的学习情况进行评价，也可以组织学生将自己的学习小结在班级展示交流，通过这种形式总结自己的进步，反思自己的不足以及需要改进的地方，汲取他人值得借鉴的经验。

初中阶段从数学思考、问题解决这两个方面阐述，课程目标分别为：

（一）数学思考

1.通过用代数式、方程、不等式、函数等表述数量关系的过程，体会模型的思想，建立符号意识；在研究图形性质和运动、确定物体位置等过程中，进一步发展空间观念；经历借助图形思考问题的过程，初步建立几何直观。

2.了解利用数据可以进行统计推断，发展建立数据分析观念；感受随机现象的特点。

3.体会通过合情推理探索数学结论，运用演绎推理加以证明的过程，在多种形式的数学活动中，发展合情推理与演绎推理的能力。

4.能独立思考，体会数学的基本思想和思维方式。

（二）问题解决

1.初步学会在具体的情境中从数学的角度发现问题和提出问题，并综合运用数学知识和方法等解决简单的实际问题，增强应用意识，提高实践能力。

2.经历从不同角度寻求分析问题和解决问题的方法的过程，体验解决问题方法的多样性，掌握分析问题和解决问题的一些基本方法。

3.在与他人合作和交流过程中，能较好地理解他人的思考方法和结论。

4.能针对他人所提的问题进行反思，初步形成评价与反思的意识。

四、案例分析题

1.【参考答案】

【解析】（1）从数学教学中师生角色的角度看，以上探究教学过程主要存在的问题是忽视了学生的主体性地位。

数学教学中师生关系在《义务教育数学课程标注（2011年版）》中有明确指出：学生是数学学习的主体，在积极参与学习活动的过程中不断得到发展，学生获得知识必须建立在自

己思考的基础上，在亲身参与教学活动中实现知识技能、数学思考、问题解决和情感态度方面的发展。教师是学生学习活动的组织者、引导者、合作者，为学生的发展提供良好的环境和条件。好的教学活动应是学生主体地位和教师主导作用的和谐统一。

在上述探究教学过程中，“提出问题”环节是教师直接给出四个算式。在学生计算和观察后，教师又直接将学生的猜想统一罗列。对于猜想的结果仅仅通过“有无不同意见”草草结束，缺乏学生实际的验证。所以在整个过程中，教师剥夺了学生思考和开口说话的权利，没有让学生真正意义的参与到教学活动中。

在教学中，利用创设情境、设计问题，引导学生自主探索、合作交流；组织学生操作实验、观察现象、提出猜想、推理论证等，真正有效地启发学生思考，才能使学生成为学习的主体，逐步学会学习。

（2）为了体现学生的主体性地位，教师在上课之初可以通过具体的生活情境鼓励学生自主进行列式计算，得到四个算式 $40+56$，$56+40$，$78+35$，$35+78$。

在学生自主计算和观察后，教师可以引导学生在全班范围内交流自己的发现：在得出“$40+56$ 和 $56+40$ 的计算结果都是 96，$78+35$ 和 $35+78$ 的计算结果都是 113”后，引导学生发现“$40+56$ 和 $56+40$ 以及 $78+35$ 和 $35+78$ 这两对算式中加数的位置交换。”并且请学生尝试着再写几组加法算式，验证所得规律。

在给出加法交换律的定义后，教师可以鼓励学生尝试用自己的方法描述加法交换律，并且请几位同学上台板演后，师生共同总结归纳出 $a+b=b+a$。

2.【参考答案】（1）①《义务教育数学课程标准（2011年版）》中强调，教师是引导者、组织者、合作者，学生才是学习的主体，数学教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。案例中这位老师不断地去发问，积极地引导学生，把学生带入到探究圆锥的体积的教学过程中，符合新课标的要求，是值得提倡的。

②数学教学应根据具体的教学内容，注意使学生在获得间接经验的同时也能够有机会获得直接经验，即从学生实际出发，创设有助于学生自主学习的问题情境，引导学生通过实践、思考、探索等，获得数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验，促使学生主动地、富有个性地学习，不断提高发现问题和提出问题的能力、分析问题和解决问题的能力。案例中的教师有引导学生积极地去思考和探究圆锥的体积，学生获得了直接经验，有利于学生的体验与感受，思考与探索，值得肯定，符合新课标的要求。

③《义务教育数学课程标准（2011年版）》中强调，教师是引导者、组织者、合作者，教师的“引导”作用主要体现在：通过恰当的问题，或者准确、清晰、富有启发性的讲授，引

导学生积极思考、求知求真，激发学生的好奇心；老师通过一个个问题逐步引导学生去思考，去表达，去类比，去验证，由类比三角形，类比圆柱，进而探究，充分发挥了教师的引导和启发作用，符合新课标的要求。

（2）《义务教育数学课程标准（2011年版）》中强调，教学更关注人而不只是科学，学生的成长需要人文的关怀，教师与学生的“合作”主要体现在：教师以平等、尊重的态度鼓励学生积极参与教学活动，启发学生共同探索，与学生一起感受成功和挫折、分享发现和成果。案例中的教师通过“你就那么自信，要是错了呢？如果不是它的一半呢？”，“小明同学，你不仅学习粗心，又固执，不谦虚......”等评价语言，严重刺激了学生，伤害了学生的自尊心和自信心，打击了学生的学习积极性，跟新课标中强调的激励性评价相违背，相冲突，不利于学生的发展。

改进建议：当学生解释底面积乘高除以2的理由是“三角形的面积是同它等底等高的长方形面积一半，三角形也是下宽上尖，道理是一样的”时，老师应该给予学生肯定和表扬，然后引导学生通过试验，探究一下圆锥和圆柱的体积之间的关系，引导学生自己发现圆锥的体积等于同它等底等高的圆柱的体积的三分之一而不是二分之一，然后进一步给予学生肯定和表扬，从而更加激发学生的学习探究热情，达到良好的学习效果。

3.【参考答案】

设计意图：为了提高学生发现和提出问题的能力，教者直接让学生提出相关算式，并请学生自己计算并汇报计算方法及结果，这不仅体现了学生的主体，也培养了学生的运算能力和总结概括能力。

评价：①在小学数学的教学过程中，如果教师能从学生已有的知识基础、生活经验和学生的生活环境及学生所熟悉的事物出发，创设出丰富的教学情境，充分培养学生的学习兴趣，激发学生的求知欲，可以改变学生在教学中的地位，从被动的知识接受者转变成为知识的共同建构者，从而激发学生的学习积极性和主动性。案例中，该老师直接提问学生上节课内容，并请学生猜猜今天将要学习什么知识？这样导入缺乏趣味性。

②通过评价得到的信息，可以了解学生数学学习达到的水平和存在的问题，帮助教师进行总结与反思，调整和改进教学内容和教学过程，案例中在教师提出问题，学生回答后，对学生的回答没有给予明确的评价。

③在基本技能的教学中，不仅要使学生掌握技能操作的程序和步骤，还要使学生理解程序和步骤的道理，教学中教师引导学生独立思考、主动探索、合作交流，理解数的运算的算理。案例中，该老师缺少对小数乘小数算理的引导与讲解，这样不利于学生的理解与掌握。

④在课程结束后，基本技能的形成，需要适度的训练，注重训练的实效性，教师让学生做一些计算题并设计易错题，帮助学生全面掌握数的运算的法则。案例中，该老师只是简单的说了一下课后要多练习书上的题目，并没有针对不同层次的学生设计题目，也没有强调易错点。这样不便于学生的巩固运用。

4.【参考答案】

（1）这位教师在教学过程中符合教学规律的做法有：①引导学生自主思考并解答，数学教学活动是师生积极参与、交往互动，共同发展的过程。学生是数学学习的主体，在积极参与学习活动的过程中不断得到发展。学生获得知识，必须建立在自己思考的基础上，可以通过接受学习的方式，也可以通过自主探索等方式；学生应用知识并逐步形成技能，离不开自己的实践；学生在获得知识技能的过程中，只有亲身参与教师精心设计的教学活动，才能在数学思考、问题解决和情感态度方面得到发展。

②对同一道题目采用两种不同的方法。能够鼓励学生思维方式灵活多样化，并肯定了学生的结果，激发学生学习数学的兴趣。可以使教师了解学生对知识的理解和掌握，从而及时的调控教学程序，采用正确的教学策略。同时，学生也可以通过回答问题，从老师那里获取评价自己学习状况的反馈信息，可以在学习中不断审视自己，进而改进自己的学习态度、方法、习惯等；

③请学生回答解题过程，并及时进行纠正。全面评价学生在知识技能、数学思考、问题解决和情感态度等方面的表现。评价不仅要关注学生的学习结果，更要关注学生在学习过程中的发展和变化。应采用多样化的评价方式，恰当呈现并合理利用评价结果，发挥评价的激励作用，保护学生的自尊心和自信心。通过评价得到的信息，可以了解学生数学学习达到的水平和存在的问题，帮助教师进行总结与反思，调整和改进教学内容和教学过程。

（2）可以改进的地方有：

①教师可以适当延长做题时间，请学生自主思考用两种不同的方法进行解答，处理好教师讲授与学生自主学习的关系，注重启发学生积极思考，发扬教学民主，当好学生数学活动的组织者、引导者、合作者；

②环节 4，建议师生共同总结出求椭圆方程两种方法：待定系数法、定义法，教师进行补充，请学生小组讨论，对两种方法进行交流，不只是简单的进行板书。帮助学生理解定义法、待定系数法。教师要鼓励学生创造性思维，鼓励学生积极思考，养成良好的学习习惯。

③学生回答完问题后，及时进行评价。鼓励学生大声的表达自己的想法，并请其他学生对该同学的想法进行评价，引导其他学生将待定系数法和定义法联系起来，同时表扬该生善

于思考，敢于表达的良好的学习习惯。最后师生共同总结出求椭圆标准方程的不同方法。

五、教案设计

1.【参考答案】

教学目标：

知识与技能目标：学生通过实际操作和讨论分析，探索并掌握平行四边形的面积公式，能应用公式正确计算平行四边形的面积，解决一些简单的实际问题。

过程与方法目标：学生经历观察、操作、测量、填表、讨论、推理等数学活动过程，初步体会图形转化的意义和价值，培养几何直观，发展初步的逻辑思维。

情感态度与价值观目标：学生在探索平行四边形面积公式的活动中，进一步增强与同伴合作交流的意识，初步感受“变”与“不变”的辩证思想，提高学习数学的兴趣。

教学重点：理解并掌握平行四边形的面积公式。

教学难点：理解平行四边形的推导过程。

教学过程：

一、导入

提问学生：我们学习过哪些平面图形？你已经会求哪些平面图形的面积？小结：通过前面的学习，我们已经掌握了正方形、长方形面积的计算方法，今天我们就运用一些学过的知识来研究平行四边形面积的计算方法。(板书课题)这样的导入可以激起学生回忆，帮助学生打开原有知识结构，为新知的有效建构作铺垫。

二、新授

1、教学例 1：

出示例 1 图，提问：下面每组的两个图形面积相等吗？交流后指出：可以数格子，可以移一移，转化成右边的图形再比较，演示移一移的过程，并说明：把①号图形中小长方形剪开、平移、拼合，和②号图形面积相等；把③号图形中小长方形剪开、平移、拼合，和④号图形面积相等。讨论：数格子和移一移的方法，哪个更方便？指出：我们把每组里左边的不规则图形，经过剪、移、拼，变成了和右边完全一样的长方形或正方形，比较出每组两个图形面积相等，这个过程叫作转化，是计算图形面积的一直常用方法。(板书：转化法)

2、教学例 2：

出示题目，提问：你能把这个平行四边形转化成长方形吗？

预设 1：从平行四边形的一个顶点出发，沿着一条高剪成一个三角形和一个梯形，将三角形向右平移或将梯形向左平移，转化成长方形。预设 2：沿平行四边形一条高，剪成两个

梯形，将其中一个梯形向左或向右平移，转化成长方形。投影演示后，追问：还有不同的剪法吗？比较得出都是沿着平行四边形的一条高剪开，得出沿着高剪开，能使转化后的图形中出现直角，从而也就能使平行四边形转化为长方形。这样的设计，帮助学生进一步体会转化的意义，积累图形转化的具体经验和方法，为推导平行四边形的面积公式做准备。

3、教学例 3：

（1）设疑：平行四边形转化成长方形后，面积发生变化了吗？

（2）填写表格：通过量一量几个转化前后长方形和平行四边形的尺寸，总结出他们之间的联系。

（3）全班交流：为什么转化前后面积不变？长方形的长、宽和平行四边形的底、高有什么联系？

（4）推导公式：长方形的长=平行四边形的底，长方形的宽=平行四边形的高，长方形的面积=长×宽，所以平行四边的面积=底×高。板书：$S=a\times h$，齐读。

三、巩固练习

计算给定的一个平行四边形的面积，巩固本节课所学知识。

四、课堂小结

教师提问：通过本节课的学习，大家都有什么收获？

学生自由发言，师生共同归纳。

五、课后作业，深化提高

全体学生完成必做题，学有余力的学生完成选做题。

1.必做题：课本 11 页的第一、第二题。

2.选做题：让学生回家找一找生活中有哪些地方有应用到平行四边形面积计算公式，明天上课在全班与同学进行交流分享。

2.【参考答案】

【解析】（1）在教学过程中需要渗透转化思想、极限思想。将圆转化为长方形、转化为圆内接正多边形都体现了转化思想。随着圆被分的份数越多，每一份越小，则拼成的图形就会越接近于一个长方形；随着圆内接正多边形的边数越多，圆内正多边形就越接近圆，都可以体现极限思想。

（2）教学过程

一、创设情境，导入新课

（多媒体呈现圆形草坪图片）

教师创设问题情境：学校想给圆形草坪重新植草皮，大家知道草皮需要多少吗？

学生自由发言，确定草皮面积即为圆的面积，引出问题："圆的面积如何确定呢？"，教师板书课题。

二、动手操作，探究新知

1.确定"转化"策略。

教师引导学生自主回忆已经学习的几何图形面积公式的推导过程及方法，学生举手发言。

明确：平行四边形、三角形等图形"转化"为其他图形的方法来推导出它们的面积计算公式。

2.动手转化

（1）教师提问：怎样才能把圆形转化为我们已经学过的其它图形呢？

师：（教师配合课件演示适当说明）如果我们把一个圆形平均分成16分，其中的每一份像我们已经学过的什么图形呢？

学生观察后可以确定：每一份都是一个近似三角形。

师：那么这个近似三角形的一条边跟圆形有什么关系呢？（教师指示）

引导学生观察，明确这个近似三角形的两条边都是圆的半径。

（2）学生四人为一小组，教师给每组分发已经等分好成16份的圆形，鼓励学生小组内动手操作，尝试把圆形"转化"为已经学过的其它图形。

在学生动手操作的过程中，教师要加强巡视和针对性指导，鼓励学生拼出最简单、最容易计算面积的图形。并将"转化"后的图形分组展示。

3.探究联系

学生分组展示后，将其中"转化"为长方形的一组作品贴在黑板上。

教师提问：在这种转化过程中，它们的面积有没有改变？

学生小组内讨论，确定近似的长方形面积与圆的面积相等。

教师：如果将圆等分成32份、64份、128份、……一直这样下去分成很多份，拼成的图形就变成真正的长方形。（课件演示）

教师追问：在圆形与长方形之间，它们除了面积相等以外，还有哪些相等关系呢？

学生小组讨论，代表发言，明确：圆的半径为长方形的宽，圆的周长的一半为长方形的长，并用字母表示为r、$\frac{C}{2}$（$=\pi r$）。

教师鼓励学生尝试写一写圆的面积、长方形的面积，并根据学生的回答进行板书，得出

圆的面积公式。

4.回忆历史

教师引导学生自主阅读素材二，了解刘徽及圆的面积的推导，并全班同学交流体会。

三、运用公式，解决问题

给出圆形草坪的半径，学生自主完成上课之初的问题。

四、课堂小结，反省归纳

教师提问：通过本节课的学习，大家都有什么收获？

学生自由发言，师生共同归纳。

五、课后作业，深化提高

全体学生完成必做题，学有余力的学生完成选做题。

1.必做题：自编习题 2 道，并尝试用今天所学的知识解决。

2.选做题：收集圆的面积计算公式的相关资料，与同学进行交流。

3.【参考答案】

一、创设情境，导入新课

教师通过给学生讲小熊和狐狸的故事，创设问题情境：狐狸眼珠子一转，说“熊老弟，反正我俩的篱笆一样长，不管怎么围菜地的大小都是一样的”，大家认为狐狸说的对吗？

通过学生有趣的故事情境引入课题，让学生自由去讨论。

二、动手操作，探究新知

1.教师给每位学生发放一根固定长度的绳子，让学生自己动手去围一围，让学生举手回答。

明确：对于固定长度的篱笆，不同的围法，菜地的大小是不一样的。

2.教师提问：那怎么样围才能使菜地的面积最大呢？此时将学生分组进行讨论。

在学生讨论的过程中，适时地引导学生用数字 2 来表示篱笆的周长。

教师提问：那么菜地的面积应该怎么表示呢？

让学生带着问题，主动探索，在学生探索过程中，教师巡视课堂，观察学生解决问题的情况，适时引导学生。

3.学生反馈探索结果

提问学生回答思维的过程和结果，教师一边听学生回答，一边在黑板演示思维过程。

用字母 a 来表示围成的菜地的长，则菜地的宽是 $1-a$，则菜地的面积为 $S=a\left(1-a\right)$，

根据二次函数的性质得到当$a=\dfrac{1}{2}$时，菜地的面积最大。

三、巩固练习

以生活中的小数学家练习题“现有长度为10cm的彩带，用彩带包装长方形礼品盒，那么可以包装的最大礼品盒的面积是多少平方厘米呢？”提高学生对本节课知识的梳理和巩固。

四、课堂小结

教师引导学生，让学生谈谈自己本节课的收获和心得体会，总结出周长固定，正方形的面积最大。使学生进一步巩固本节课所学知识，从而提高学生的语言表达能力和信息交流能力。

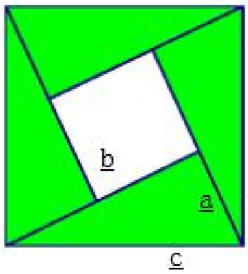
五、课后作业

让学生回家用固定个数的小长方体盖房子，怎么样设计才能使房屋面积最大。

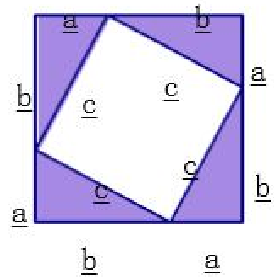
4.【参考答案】

（1）首先从现实生活中提出“赵爽弦图”，为学生能够积极主动地投入到探索活动创设情境，激发学生学习热情，同时为探索勾股定理提供背景材料。接下来，从观察实际生活中常见的折叠入手，让学生感受到数学就在我们身边，通过对特殊情形的探究得到结论1.让学生独立观察，自主探究，培养独立思考的习惯和能力；2.通过探索发现，让学生得到成功体验，激发进一步探究的热情和愿望。

证法一：如图所示，根据大正方形的面积相等可以用两种不同的形式来表示可得$\left(a-b\right)^2+\dfrac{1}{2}ab\cdot 4=c^2$，化简可得$a^2+b^2=c^2$。

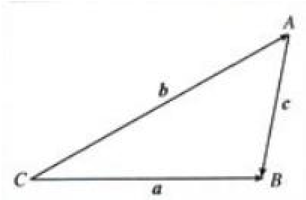


证法二：如图所示，通过四个小的直角三角形的拼法，根据大正方形面积不变可得$\left(a+b\right)^2=\dfrac{1}{2}ab\cdot 4+c^2$，化简可得$a^2+b^2=c^2$。



（2）余弦定理是描述三角形中三边长度与一个角的余弦值关系的数学定理，它是勾股定理在一般三角形下的推广，勾股定理是余弦定理的一种特殊形式。下面给出余弦定理的证明：

如图，



设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{c}$ ，那么 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ，

$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=a^2+b^2-2ab\cos C$ ，所以 $\boldsymbol{c}^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 。同理可证 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 。