

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AB} - \overline{AC}|$, $AB = 1$, $AC = 3$, M, N 分别为 BC 的三等分

点, 则 $\overline{AM} \cdot \overline{AN} =$ ()

- A. $\frac{10}{9}$ B. $\frac{20}{9}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{8}{3}$

8. 定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) =$

$\begin{cases} x^2 - x, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{10}(x-2), & x \in [1, 2] \end{cases}$, 若 $x \in [4, 6]$ 时, $f(x) \geq t^2 - 2t - 4$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围 ()

- A. $-1 \leq t \leq 3$ B. $2 \leq t \leq 3$ C. $1 \leq t \leq 4$ D. $2 \leq t \leq 4$

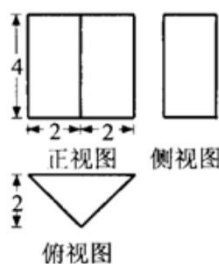
二、填空题 (共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分)

9. 某班共有 56 人, 学号依次为 1, 2, ..., 56, 现用系统抽样的方法抽取一个容量为 4 的样本, 已知学号为 2, 30, 44 的同学在样本中, 则还有一位同学的学号为_____。

10. 若复数满足 $(3 - 4i)z = |4 + 3i|$, 则 z 的虚部为_____。

11. 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$, 且 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____。

12. 某几何体的三视图如右图所示, 则该几何体的外接球表面积是_____。



13. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$, 若 $f(a) + f(b) = 0 (a < b)$, 则 $a^2 + b^2$ 的取值范围是_____。

14. 已知 $f(x) = xe^x$, $g(x) = -(x+1)^2 + a$, 若 $\exists x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_2) \leq g(x_1)$ 成立。则实数 a 的取值范围是_____。

三、解答题 (共 5 小题, 共 52 分)

15. (本小题满分 10 分) 2016 年底, 某城市地铁交通建设项目已经基本完成, 为了解市民对该项目的满意度, 分别从不同地铁站点随机抽取若干市民对该项目进行评分(满分 100

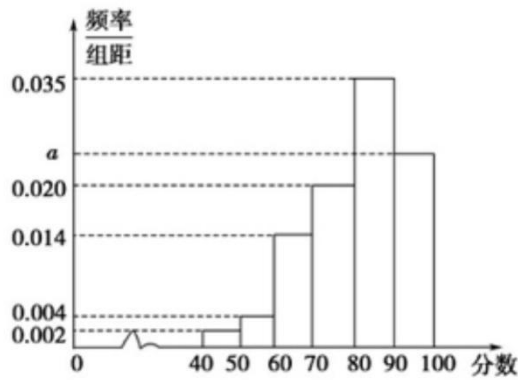
分), 绘制如下频率分布直方图, 并将分数从低到高分为四个等级:

| | | | | |
|-------|---------|------------|------------|----------|
| 满意度评分 | 低于 60 分 | 60 分到 79 分 | 80 分到 89 分 | 不低于 90 分 |
| 满意度等级 | 不满意 | 基本满意 | 满意 | 非常满意 |

已知满意度等级为基本满意的有 680 人。

(1) 若市民的满意度评分相互独立, 以满意度样本估计全市市民满意度。现从全市市民中随机抽取 4 人, 求至少有 2 人非常满意的概率。

(2) 在等级为不满意市民中, 老年人占 $\frac{1}{3}$, 现从该等级市民中按年龄分层抽取 15 人了解不满意的原因, 并从中选取 3 人担任整改督导员, 记 X 为老年督导员的人数, 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$ 。

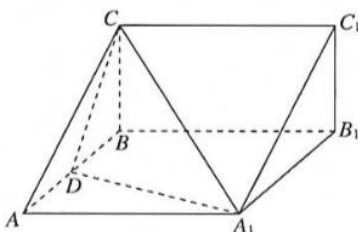


16. (本小题满分 10 分) 如图, 在三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AB = 2\sqrt{3}$,

$AC = AA_1 = 2BC = 4$ ，且 D 为线段 AB 的中点。

(1) 证明： $BC \perp A_1D$ ；

(2) 求平面 A_1CD 与平面 BCC_1B_1 所成锐二面角的余弦值。



17. (本小题满分 10 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4 = 4S_2$ ， $a_{2n} = 2a_n + 1$ 。

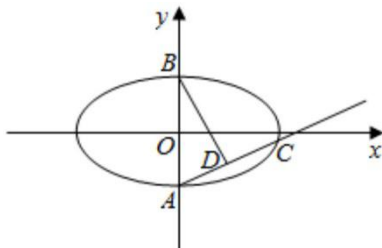
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (本小题满分 10 分) 如图， A, B 是椭圆 $W: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的两个顶点，过点 A 的直线

与椭圆 W 交于另一点 C 。

- (1) 当 AC 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时, 求线段 AC 的长;
- (2) 设 D 为 AC 的中点, 且以 AB 为直径的圆恰好过 D , 求直线 AC 的斜率。



19. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = ax + \ln x$, $a \in \mathbf{R}$ 。

- (1) 当 $a = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(x)$ 在区域 $(0, e]$ 内最大值为 -3 , 求 a 的值。