教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则 $\bar{z}+|z|=$（　　）

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $-1+\mathrm{i}$

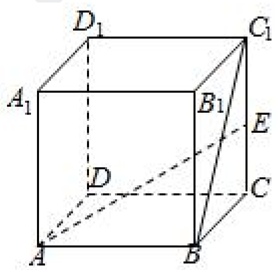
2.双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　　C. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

3.维空间中圆的一维测度（周长）$l=2\pi r$，二维测度（面积）$S=\pi r^2$，观察发现 $S'(r)=l$；三维空间中球的二维测度（表面积）$S=4\pi r^2$，三维测度（体积）$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，观察发现 $V'(r)=S$。则由四维空间中“超球”的三维测度 $V=8\pi r^3$，猜想其四维测度 $W=$（　　）

A. $2\pi r^4$　　B. $\dfrac{8}{3}\pi r^2$　　C. $\dfrac{1}{4}\pi r^5$　　D. $2\pi r^4$

4.长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB=AA_1=2,\ AD=1$，E 为 CC_1 的中点，则异面直线 BC_1 与 AE 所成角的余弦值为（　　）



A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{15}}{10}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

5.当 $x>4$ 时，不等式 $x+\dfrac{4}{x-4}\geq m$ 恒成立，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m\leq 8$　　B. $m<8$　　C. $m\geq 8$　　D. $m>8$

6.设 $M=\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)$，且 $a+b+c=1$（其中 $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}_+$），则 M 的范围是（　　）

A. $\left[0,\dfrac{1}{8}\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{8},1\right)$　　C. $[1,8)$　　D. $[8,+\infty)$

7.如果数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{3}{2}a_n-3$，则这个数列的通项公式是（　　）

A. $a_n=2(n^2+n+1)$　　B. $a_n=2\cdot 3^n$

C. $a_n=3\cdot 2^n$　　D. $a_n=3n+1$

8.若直线$y=kx-2$与抛物线$y^2=8x$交于A，B两个不同的点，抛物线的焦点为F，且$|AF|,4,|BF|$成等差数列，则$k=$（　　）

A. 2或-1　　B. -1　　C. 2　　D. $1\pm\sqrt{5}$

9.就微分学与积分学的起源而言（　　）

A.积分学早于微分学　　B.微分学早于积分学

C.积分学与微分学同期　　D.不确定

10.创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。学生创新的基础是（　　）

A.发现和提出问题　　B.独立思考、学会思考

C.归纳概括得到猜想　　D.验证结论

二、填空题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

11.已知$\triangle ABC$的一个内角为$120°$，并且三边长构成公差为4的等差数列，则$\triangle ABC$的面积为_______。

12.设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则$S_n=$_______。

13.设$n\geq 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^n-\left(3x+\frac{1}{3}\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，将$|a_k|(0\leq k\leq n)$的最小值记为$T_n$。则当$n$是偶数时，$T_n=$_______；当$n$是奇数时，$T_n=$_______。

14._______的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径。

15.《普通高中数学新课程标准（2017年版）》提出：地方实施课程标准应注意的几个问题，下面正确的是：_______。

①重视顶层设计，建立有效的数学教研体系

②示范引领，整体推进数学课程的实施

③集中力量研究解决课程标准实施中的关键问题

④重视过程性评价

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 小题各 10 分，共 60 分）

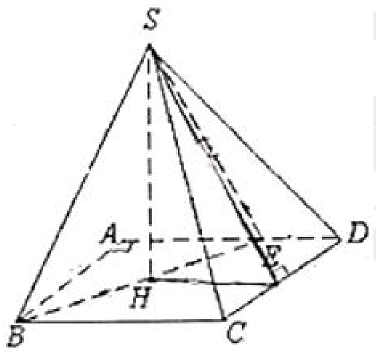
16.已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足，$a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$，$n\in\mathbf{N}^*$

（1）求a_n与b_n；

（2）记数列$\{a_nb_n\}$的前n项和为T_n，求T_n。

17.如图，在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=3$，点E是边AD上一点，且$AE=2ED$，点H是BE的中点，将$\triangle ABE$沿着BE折起，使点A运动到点S处，且满足$SC=SD$。



（1）证明：$SH\perp$平面$BCDE$；

（2）求二面角$C-SB-E$的余弦值。

18.设相互垂直的直线AB，CD分别过椭圆$E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点$F_1$，$F_2$，且与椭圆$E$的交点分别为$A$、$B$和$C$、$D$。

（1）当AB的倾斜角为$45°$时，求以AB为直径的圆的标准方程；

（2）问是否存在常数λ，使得$|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$恒成立？若存在，求$\lambda$的值；若不存在，请说明理由。

19.设函数$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}-k(\frac{2}{x}+\ln x)$（$k$为常数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$是自然对数的底数）。

（1）当$k\le 0$时，求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若函数$f(x)$在（0，2）内存在两个极值点，求k的取值范围。

20.在直角坐标系xOy中，曲线C_1：$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\alpha\\y=2+\sqrt{5}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）。以原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$：$\rho^2=4\rho\cos\theta-3$。

（1）求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2）若曲线 C_1 与 C_2 交于 A，B 两点，A，B 的中点为 M，点 $P(0,-1)$，求 $|PM|\cdot|AB|$ 的值。

21.论述题

《教学课程标准》中指出要发展四基：数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验，简述如何基于学生立场进行“基本活动经验”的培养。

22.教学设计

阅读下面的材料：人教版高中数学必修五 3.4《基本不等式》

图 3.4-1

探究

图 3.4-1 是在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标，会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车，代表中国人民热情好客．你能在这个图中找出一些相等关系或不等关系吗？

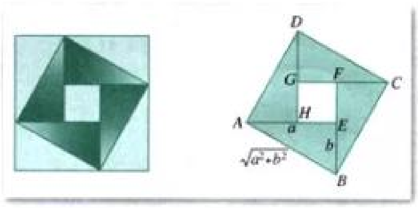


图 3.4-2

将图 3.4-1 中的“风车”抽象成图 3.4-2．在正方形 $ABCD$ 中有 4 个全等的直角三角形．设直角三角形的两条直角边的长为 a、b，那么正方形的边长为 $\sqrt{a^2+b^2}$．这样，4 个直角三角形的面积和为 $2ab$，正方形的面积为 a^2+b^2．由于 4 个直角三角形的面积和小于正方形 $ABCD$ 的面积，我们就得到了一个不等式

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

当直角三角形变为等腰直角三角形，即 $a=b$ 时，正方形 $EFGH$ 缩为一个点，这时有

$$a^2+b^2=2ab.$$

一般地，对于任意实数 a，b，我们有

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．

你能给出它的证明吗？

根据材料，回答以下问题。

（1）针对该片段，写出教学目标。

（2）针对该片段，设计教学过程。

答案及解析

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 C。

【解析】$\because z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+2\mathrm{i}=\frac{-2\mathrm{i}}{2}+2\mathrm{i}=\mathrm{i}$，$\therefore \bar{z}+|z|=-\mathrm{i}+1=1-\mathrm{i}$，故本题选 C。

2.【答案】选 A。

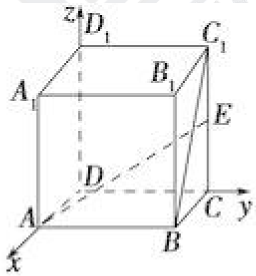
【解析】$\because e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，$\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1=3-1=2$，$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{2}$，因为渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，故本题选 A。

3.【答案】选 D。

【解析】$W=\int 8\pi r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}8\pi r^4=2\pi r^4$，故本题选 D。

4.【答案】选 B。

【解析】建立坐标系如图所示：



则 A（1，0，0），E（0，2，1），B（1，2，0），C_1（0，2，2），$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(-1,2,1)$

$\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\frac{\sqrt{30}}{10}$。所以异面直线 $\overline{BC_1}$ 与 $\overline{AE}$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$。故本题选 B。

5.【答案】选 A。

【解析】$\because x>4$，$\therefore x-4>0$，$\therefore x+\frac{4}{x-4}=x-4+\frac{4}{x-4}+4\geq 2\sqrt{(x-4)\cdot\frac{4}{x-4}}+4=8$。

当且仅当 $x-4=\frac{4}{x-4}$，即 $x=6$ 时取等号，$\because$ 当 $x>4$ 时，不等式 $x+\frac{4}{x-4}\geq m$ 恒成立，$\therefore$ 只需 $m\leq\left(x+\frac{4}{x-4}\right)_{\min}=8$。$\therefore m$ 的取值范围为：$(-\infty,8]$。故本题选 A。

6.【答案】选 D。

【解析】$\because a+b+c=1 \therefore M=\left(\frac{a+b+c}{a}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{b}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{c}-1\right)=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a+c}{b}\cdot\frac{a+b}{c}$

由均值不等式得 $b+c\ge 2\sqrt{bc}$，$a+c\ge 2\sqrt{ac}$，$b+a\ge 2\sqrt{ba}$，$M\ge\frac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{ab}}{abc}=8$。故本题选 D。

7.【答案】选 B。

【解析】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\frac{3}{2}a_n-3$，取 $n=1$ 解得 $a_1=6$，$S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-3\Rightarrow a_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}\Rightarrow a_n=3a_{n-1}$。$\{a_n\}$ 是首项为 6 公比为 3 的等比数列，$a_n=2\cdot 3^n$ 验证 $n=1$，成立。故本题选 B。

8.【答案】选 C。

【解析】设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$．由 $\begin{cases}y=kx-2\\ y^2=8x\end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2-4(k+2)x+4=0$，

故 $\varDelta=16(k+2)^2-16k^2=64(1+k)>0$，解得 $k>-1$，且 $x_1+x_2=\frac{4(k+2)}{k^2}$。由 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+2$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=x_2+2$，且 $|AF|,4,|BF|$ 成等差数列，得 $x_1+2+x_2+2=8$，得 $x_1+x_2=4$，所以 $\frac{4(k+2)}{k^2}=4$，解得 $k=-1$ 或 $k=2$，又 $k>-1$，故 $k=2$，故本题选 C。

9.【答案】选 A。

【解析】《数学史概论》中指出积分学的起源早于微分学。故本题选 A。

10.【答案】选 A。

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 版）》指出：创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。学生自己发现和提出问题是创新的基础；独立思考、学会思考是创新的核心；归纳概括得到猜想和规规律，并加以验证，是创新的重要方法。创新意识的培养应该从义务教育阶段做起，贯穿数学教育的始终。故本题选 A。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】$15\sqrt{3}$

【解析】设三角形的三边长为 $a-4$，$b=a$，$c=a+4$，$(a<b<c)$，根据题意可知三边长构成公差为 4 的等差数列，可知 $a+c=2b$，$C=120°$，则由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$\therefore a=10$，$\therefore$ 三边长为 6，10，14，由正弦定理得：$\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，可知 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 6\times 14\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=15\sqrt{3}$。

12.【答案】$-\frac{1}{n}$

【解析】$a_{n+1}=S_nS_{n+1}\Leftrightarrow S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$，整理为：$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=1$，即$\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=-1$，即数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是以$-1$为首项，$-1$为公差的等差的数列，所以$\frac{1}{S_n}=-1+(n-1)(-1)=-n$，即$S_n=-\frac{1}{n}$。

13.【答案】（1）0；（2）$\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}$

【解析】根据T_n的定义，列出$\{T_n\}$的前几项：$T_0=0$，$T_1=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$T_2=0$，$T_3=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}$，$T_4=0$，$T_5=\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3^5}$，$T_6=0$，…，由此规律，我们可以推断：当$n$为偶数时，$T_n=0$；当$n$为奇数时，$T_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}$。故答案为：0；$\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}$。

14.【答案】模型思想

【解析】《义务教育数学课程标准（2011年版）》中提出：模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径。

15.【答案】①②③④

【解析】《普通高中数学新课程标准（2017年版）》提出：地方实施课程标准应注意的几个问题，①重视顶层设计，建立有效的数学教研体系；②示范引领，整体推进数学课程的实施；③集中力量研究解决课程标准实施中的关键问题；④重视过程性评价

三、解答题（本大题共7小题，第16-20题每小题8分，第21、22小题各10分，共60分）

16.【答案】（1）$a_n=2^n$；$b_n=n$；（2）$T_n=(n-1)2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$

【解析】（1）由$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，得$a_n=2^n$。当$n=1$时，$b_1=b_2-1$，故$b_2=2$。当$n\geq 2$时，$\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$，整理得$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}$，所以$b_n=n$。

（2）由（1）知，$a_nb_n=n\cdot 2^n$所以$T_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$

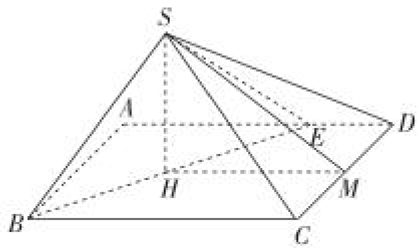
$2T_n=2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$，

所以$T_n-2T_n=-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$，所以$T_n=(n-1)2^{n+1}+2$。

17.【答案】（1）见解析；（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

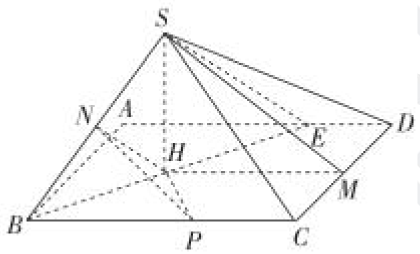
【解析】（1）证明：取CD的中点M，连接HM，SM，由已知得$AE=AB=2$，所以

$SE=SB=2$，又点 H 是 BE 的中点，所以 $SH\perp BE$。



因为 $SC=SD$，点 M 是线段 CD 的中点，所以 $SM\perp CD$。又因为 $HM\perp BC$，所以 $HM\perp CD$，从而 $CD\perp$ 平面 SHM，所以 $CD\perp SH$，又 CD，BE 不平行，所以 $SH\perp$ 平面 $BCDE$。

（2）取 BS 的中点 N，BC 上的点 P，使 $BP=2PC$，连接 HN，PN，PH，易知 $HN\perp BS$，$HP\perp BE$。



由（1）得 $SH\perp HP$，所以 $HP\perp$ 平面 BSE，所以 $HP\perp SB$，又 $HN\perp BS$，所以 $BS\perp$ 平面 PHN，所以二面角 $C-SB-E$ 的平面角为 $\angle PNH$。又计算得 $NH=1$，$PH=\sqrt{2}$，$PN=\sqrt{3}$，所以 $\cos\angle PNH=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

18.【答案】（1）$\left(x+\frac{4}{7}\right)^2+\left(y-\frac{3}{7}\right)^2=\frac{144}{49}$；（2）$\lambda=\frac{7}{12}$，理由见解析

【解析】（1）由题意可设 AB 的方程为 $y=x+1$，代入 E 可得 $7x^2+8x-8=0$。所以 AB 的中点坐标为 $\left(-\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)$。又 $|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{8}{7}\right)^2-4\times\left(-\frac{8}{7}\right)}=\frac{24}{7}$，所以，以 AB 为直径的圆的方程为 $\left(x+\frac{4}{7}\right)^2+\left(y-\frac{3}{7}\right)^2=\frac{144}{49}$。

（2）假设存在常数 λ，使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立。

①当 AB 与 x 轴垂直或 CD 与 x 轴垂直时，$\lambda=\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{\frac{2\times 3}{2}}+\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$；

②设直线 AB 的方程为 $y=k(x+1)$，则直线 CD 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+1)$。将 AB 的方程代入 E 得：$\left(3+4k^2\right)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$。由韦达定理得：$x_1+x_2=-\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$，所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1\cdot x_2}=\frac{12\left(k^2+1\right)}{3+4k^2}$。同理可得 $|CD|=\frac{12\left(k^2+1\right)}{4+3k^2}$。所以 $\lambda=\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{3+4k^2}{12\left(k^2+1\right)}+\frac{4+3k^2}{12\left(k^2+1\right)}=\frac{7}{12}$。因此，存在 $\lambda=\frac{7}{12}$，使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立。

19.【答案】（1）单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$；（2）$\left(e,\frac{e^2}{2}\right)$。

【解析】（1）函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}-k(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})$ $=\frac{xe^x-2e^x}{x^3}-\frac{k(x-2)}{x^2}=\frac{(x-2)(e^x-kx)}{x^3}$。由 $k\le0$ 可得 $e^x-kx>0$，所以当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 单调递减，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$ 单调递增。所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$。

（2）由（1）知，$k\le0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递减，故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内不存在极值点；当 $k>0$ 时，设函数 $g(x)=e^x-kx，x\in[0,+\infty)$，因为 $g'(x)=e^x-k=e^x-e^{\ln k}$，当 $0<k\le1$ 时，当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)=e^x-k>0$，$y=g(x)$ 单调递增，故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内不存在两个极值点；当 $k>1$ 时，得 $x\in(0,\ln k)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $y=g(x)$ 单调递减，

$x\in(\ln k,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $y=g(x)$ 单调递增，所以函数 $y=g(x)$ 的最小值为 $g(\ln k)=k(1-\ln k)$，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在两个极值点；当且仅当 $\begin{cases}g(0)>0\\g(\ln k)<0\\g(2)>0\\0<\ln k<2\end{cases}$，解得 $e<k<\frac{e^2}{2}$，综上所述，函数在 $(0,2)$ 内存在两个极值点时，k 的取值范围为 $(e,\frac{e^2}{2})$。

20.【答案】（1）C_1 的普通方程为 $x^2+\left(y-2\right)^2=5$，C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x+3=0$；（2）3。

【解析】（1）曲线 C_1 的普通方程为 $x^2+\left(y-2\right)^2=5$。由 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，得曲

线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x+3=0$。

（2）将两圆的方程 $x^2+(y-2)^2=5$ 与 $x^2+y^2-4x+3=0$ 作差得直线 AB 的方程为 $x-y-1=0$。点 $P(0,-1)$ 在直线 AB 上，设直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），代入 $x^2+y^2-4x+3=0$ 化简得 $t^2-3\sqrt{2}t+4=0$，所以 $t_1+t_2=3\sqrt{2}$，$t_1t_2=4$。因为点 M 对应的参数为 $\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $|PM|\cdot|AB|=\left|\frac{t_1+t_2}{2}\right|\cdot|t_1-t_2|=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=3$。

21.【参考答案】

在教学中，应从以下几个方面来主动探索学习过程，不断积累数学活动经验。①从已有生活经验入手，积累数学活动经验。因知识来源于生活，来源于数学活动经验的积累，把数学知识与学生已有经验有机结合，让学生在主动参与学习的过程中不断积累数学活动经验是学生主动探索数学活动的过程。②从问题入手，生成数学活动经验。教学中，教师引导学生从问题入手，通过独立思考，合作交流，不断探讨新知识的学习，从而积累数学活动经验。③从兴趣入手，提升数学活动经验。教学中，要激发小学生探求数学知识的兴趣。让学生在兴趣中分析信息来源、交流数学信息。④从方法入手，获取数学活动经验。这样学生自主探究的活动经验就记得牢、印象深，且不容易忘记。

22.【参考答案】

（1）教学目标：①创设用代数与几何两方面背景，用数形结合的思想理解基本不等式；②尝试让学生从不同角度探索基本不等式的证明过程；③将探索过程设计为较典型的具有挑战性的问题，激发学生去积极思考，从而培养他们的数学学习兴趣；④学习过程中，通过对问题的探究思考，广泛参与，培养学生严谨的思维习惯，主动、积极的学习品质，从而提高学习质量。

（2）教学过程

（一）导入新课

PPT 呈现第 24 届国际数学家大会的会标，提出问题：会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车，代表中国人民热情好客，你能在这个图中找出一些相等关系或不等关系吗？

（二）循序渐进，探索不等式$a^2+b^2\geq 2ab$

1.引导学生将图案抽象出几何图形，提出问题：此图案中隐含什么样的几何图形，并邀请学生上黑板画出这些几何图形。教师评价修改，用投影片给出隐含的规范的几何图形。

2.教师提出问题：设直角三角形的两直角边的长分别为a、b，那么，四个直角三角形的面积之和与正方形的面积有什么关系呢？

学生交流讨论得到不等式：$a^2+b^2\geq 2ab$

3.教师引导学生思考，该如何证明此不等式$a^2+b^2\geq 2ab$

学生先自主思考，然后交流证明方法，可能会用到作商法，最差法。对学生的做法给予评价。

4.引导学生观察不等式及图形，思考，何时等号可以取得。

最后师生共同总结出：一般地，对于任意实数 a、b，我们有$a^2+b^2\geq 2ab$，当且仅当$a=b$时，等号成立。

（三）小结作业

1.教师引导学生自己总结所学

2.作业：自编一道需要数形结合法解决的题目，并解答。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x\,|\,x^2-4x+m=0\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则 $B=$（　　）

A.$\{1,-3\}$　　B.$\{1,0\}$　　C.$\{1,3\}$　　D.$\{1,5\}$

2.已知复数 $z_1=3-b\mathrm{i}$，$z_2=1-2\mathrm{i}$，若 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 是实数，则实数 b 的值为（　　）

A.0　　B.$-\dfrac{3}{2}$　　C.-6　　D.6

3.设 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，是下列命题正确的是（　　）

A.若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$　　B.若 $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m//n$

C.若 $\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$，$n\perp m$，则 $n\perp\beta$　　D.若 $m\perp\alpha$，$m//n$，$n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

4.若直线 $y=-2x$ 的倾斜角为 α，则 $\sin 2\alpha$ 的值为（　　）

A.$-\dfrac{4}{5}$　　B.$\dfrac{4}{5}$　　C.$\pm\dfrac{4}{5}$　　D.$-\dfrac{3}{5}$

5.已知 m，n 是空间中两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列说法正确的是（　　）

A.若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha//\beta$，则 $m//n$

B.若 $m\subset\alpha,\alpha//\beta$，则 $m//\beta$

C.若 $n\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $n//\alpha$

D.若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，且 $m\perp l$，$n\perp l$，则 $\alpha\perp\beta$

6.若 α，$\beta\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，且 $\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$。则下列结论正确的是（　　）

A.$\alpha>\beta$　　B.$\alpha+\beta>0$　　C.$\alpha<\beta$　　D.$\alpha^2>\beta^2$

7.若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+a\ln x$ 有两个不同的极值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.$a>1$　　B.$-1<a<0$　　C.$a<1$　　D.$0<a<1$

8.定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x-3)=-f(x)$，对 $\forall x_1$，$x_2\in[0,3]$ 且 $x_1\neq x_2$，都有

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则有（　　）

A. $f(49)<f(64)<f(81)$　　B. $f(49)<f(81)<f(64)$

C. $f(64)<f(49)<f(81)$　　D. $f(64)<f(81)<f(49)$

9.《义务教育数学课程标准（2011 年版）》强调，课程内容要反映社会的需要，数学的特点要符合学生的认知规律。课程内容的组织要重视直观，处理好（　　）的关系。

A.直观与抽象　　B.过程与结果　　C.直接与间接　　D.理论与实践

10.《普通高中数学课程标准》中提出了培养和提高学生基本能力的课程标准，这些基本能力包括空间想想，抽象概括，推理论证，运算求解和（　　）

A.逆向思维　　B.顺向思维　　C.逆转心理　　D.数据处理

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$,$\cos B=\dfrac{5}{13}$，$a=1$，

则 $b=$______。

12.已知向量 $\boldsymbol{a}=(3x,2)$，$\boldsymbol{b}=(6,x)$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，则 $x=$______。

13.在平面内，三角形的面积为 S，周长为 C，则它的内切圆的半径 $r=\dfrac{2S}{C}$．在空间中，三棱锥的体积为 V，表面积为 S，利用类比推理的方法，可得三棱锥的内切球（球面与三棱锥的各个面均相切）的半径 $R=$______。

14.已知四边形 $ABCD$ 为矩形，AB=2AD=4，M 为 AB 的中点，将△ADM 沿 DM 折起，得到四棱锥 A_1-DMBC，设 A_1C 的中点为 N，在翻折过程中，得到如下三个命题：

① $BN//$ 面 A_1DM，且 BN 的长度为定值 $\sqrt{5}$；

②三棱锥 $N-DMC$ 的体积最大值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$；

③在翻折过程中，存在某个位置，使得 $DM\perp A_1C$，

其中正确命题的序号为______。

15.已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 是双曲线右支上的一点，若直线 AF_2 与直线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 平行且 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 $9a$，则双曲线的离心率为______。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16. 设函数 $f(x)=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}$，$x\in\boldsymbol{R}$。

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期和对称中心；

（2）若函数 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最值。

17.设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $S_4=4S_2$，$a_9=17$。

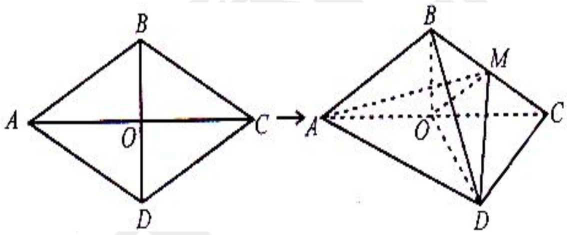
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=1-\frac{1}{2^n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

18. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 12，$\angle BAD=60^\circ$，AC 与 BD 交于 O 点。将菱形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，得到三棱锥 $B-ACD$，点 M 是棱 BC 的中点，$DM=6\sqrt{2}$。

（1）求证：平面 $ODM\perp$ 平面 ABC；

（2）求二面角 $M-AD-C$ 的余弦值。



19.已知函数 $f(x)=xe^x+a(x+1)^2\ (a\in\boldsymbol{R})$。

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围。

四、案例分析（共 10 分）

下面是两位教师关于《等边三角形》的教学过程。

教师甲	教师乙
（1）复习等腰三角形的性质及判定方法 教师提问，学生思考：边怎样？角怎样？对称性呢？ （2）等边三角形性质的教学 教师提问，学生思考：	（1）复习引入 ①理解三角形的定义、性质 ②观察生活中的等边三角形，引出课题 （2）新课教学 ①等边三角形有什么性质？

①什么样的三角形叫等边三角形？ ②等边三角形的三个内角都相等吗？ ③等边三角形是轴对称图形吗？ （3）等边三角形判定的教学 师：哪位同学说说我们应从什么角度来考虑等边三角形的判定方法？ 生：从角和边来考虑（教师希望的答案是从边和角来考虑） 师:那你能说一下等边三角形有怎样的判定方法吗？ 生：从角度来说，我认为三个内角都是60°的，三角形是等边三角形。 （学生的回答出乎老师的预设，打乱了PPT 的放映程序） 师：关于边的研究比较简单，我们还是从边开始探讨吧。 生：好。（学生没有异议，只能跟着老师的要求回答问题，继续学习）	（PPT 显示）可以从边，角，对称性来考虑 活动 1： 学生拿出课前准备的等边三角形纸片，认真折叠并观察，小组合作，互相探讨，一个小组代表发表自己组的观点，其他小组补充，最后一起归纳总结。 ②等边三角形的判定方法有哪些？设计开放性提问（PPT 显示）你认为怎样才能说明三角形是等边三角形？等腰三角形怎样变化才能说明是等边三角形？ 设计活动 2： 小组合作，相互探讨，教师操作几何画板，学生也上台操作几何画板，观察等腰三角形满足什么条件后成为等边三角形。学生积极主动的参与课堂学习，能够在折纸操作后很快说出等边三角形的性质和判定方法，通过操作几何画板形象地展现变化过程。新知识的获得和掌握很快且水到渠成，最后教师和学生一起归纳总结。

请从下列三个方面对甲乙两位教师的教学过程进行评价：

（1）引入的特点；

（2）教师教的方式；

（3）学生学的方式。

五、教案设计（共 20 分）

初中数学“分式”包括三方面教学任务：分式、分式的运算、分式方程。针对上述内容，请完成下列任务：

（1）分析“分数”在分式教学中的作用。

（2）设计三道分式方程题。（要求：①分式方程能转化成一元一次方程；②三道分式方

程题逻辑联系紧密；③三道分式方程题，由易到难，体现教学要求；④说明你的设计意图）

（3）指出解分式方程中所蕴含的数学思想方法。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 C。

【解析】由于 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x\,|\,x^2-4x+m=0\}$，且 $A\cap B=\{1\}$，因此 $x=1$ 为 $x^2-4x+m=0$ 的解，即代入解得 $m=3$，即此时方程为 $x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1$ 或 $x=3$，则 $B=\{1,3\}$。故本题选 C。

2.【答案】选 D。

【解析】$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-bi}{1-2i}=\frac{(3-bi)(1+2i)}{5}=\frac{(3+2b)(6-b)i}{5}$，由于是实数，所以 $b=6$。故本题选 D。

3.【答案】选 D。

【解析】A 选项，同时和一个平面平行的两直线不一定平行，可能相交，可能异面，因此错误；B 选项，两平面平行，两平面内的直线不一定平行，可能异面，因此错误；C 选项，一个平面内垂直于两平面交线的直线，不一定和另一个平面垂直，可能斜交，因此错误；D 选项，$m\perp\alpha$，$m/\!/n\Rightarrow n\perp\alpha$，$\because n\subset\beta\therefore\beta\perp\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$，因此正确。故本题选 D。

4.【答案】选 A。

【解析】由题意知 $\tan\alpha=-2,\sin2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2\times(-2)}{(-2)^2+1}=-\frac{4}{5}$。故本题选 A。

5.【答案】选 B。

【解析】A 选项，若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则 m，n 相交、平行或异面，故 A 错误；B 选项，若 $m\subset\alpha,\alpha/\!/\beta$，则由面面平行的性质定理得 $m/\!/\beta$，故 B 正确；C 选项，若 $n\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，故 C 错误；D 选项，若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，且 $m\perp l$，$n\perp l$，则 α，β 不一定垂直。故本题选 B。

6.【答案】选 D。

【解析】设 $f(x)=x\sin x$，则 $f'(x)=\sin x+x\cos x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 单调递增；$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$f(x)=x\sin x$ 是偶函数，$\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$

$\Rightarrow\alpha\sin\alpha>\beta\sin\beta\Rightarrow|\alpha|>|\beta|\therefore\alpha^2>\beta^2$。故本题选 D。

7.【答案】选 D。

【解析】$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-2+\frac{a}{x}=\frac{x^2-2x+a}{x}$，若函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点，则 $g(x)=x^2-2x+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上由 2 个不同的实数根，故

$\begin{cases}\Delta=4-4a>0\\ x_1=\dfrac{2-\sqrt{4-4a}}{2}>0\end{cases}\Rightarrow 0<a<1$。故本题选 D。

8.【答案】选 A。

【解析】$f(x)$ 满足 $f(x-3)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 6，$f(49)=f(1+6\times 8)=f(1)$

$f(81)=f(-3+6\times 14)=f(-3)$，$f(64)=f(-2+6\times 11)=f(-2)$，由于是偶函数，则 $f(49)=f(1)$，$f(81)=f(3)$，$f(64)=f(2)$，由于 $\forall x_1$，$x_2\in[0,3]$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则函数在 $[0,3]$ 上为增函数，进而 $f(1)<f(2)<f(3)\Rightarrow f(49)<f(64)<f(81)$。故本题选 A。

9.【答案】选 A。

【解析】课程内容的组织要重视过程，处理好过程与结果的关系；要重视直观，处理好直观与抽象的关系；要重视直接经验，处理好直接经验与间接经验的关系。故本题选 A。

10.【答案】选 D。

【解析】《普通高中数学课程标准》在课程目标中指出提高空间想想，抽象概括，推理论证，运算求解，数据处理等基本能力。故本题选 D。

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】$\frac{20}{13}$。

【解析】由题意知 $\sin A=\frac{3}{5},\sin B=\frac{12}{13}$，则由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{b}{\frac{12}{13}}\Rightarrow b=\frac{20}{13}$。

12.【答案】-2。

【解析】由题意知两向量之间的夹角为 $180°$ ，即为相反向量，因此有 $\begin{cases}3x=-6\\x=-2\end{cases}\Rightarrow x=-2$ 。

13.【答案】 $\dfrac{3V}{S}$ 。

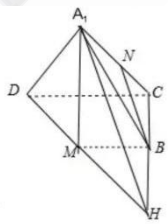
【解析】设三棱锥的四个面积分别为：S_1，S_2，S_3，S_4，由于内切球到各面的距离等于内切球的半径，所以有 $V=\dfrac{1}{3}S_1r+\dfrac{1}{3}S_2r+\dfrac{1}{3}S_3r+\dfrac{1}{3}S_4r=\dfrac{1}{3}Sr\Rightarrow r=\dfrac{3V}{S}$ 。

14.【答案】①②。

【解析】对于①分别延长 DM,CB 交于 H，连接 A_1H，如图所示；由 M 为中点，$BM=\dfrac{1}{2}CD$，可得 B 为 CH 的中点，可得 BN 为 $\triangle A_1CH$ 的中位线，可得 $BN/\!/A_1H$，$BN\not\subset$ 面 A_1DM ，且 $BN=\dfrac{1}{2}A_1H$，在 $\triangle A_1DH$ ， $A_1M=2$，$MH=2\sqrt{2}$，$\angle A_1MH=135°$，$A_1H=$

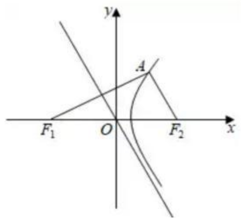
$\sqrt{4+8-2\times2\times2\sqrt{2}\times\cos135°}=2\sqrt{5}=BN$，因此①正确；对于②，当平面 $A_1DM\perp$ 面 $DMBC$ 时。 A_1 到平面 $DMBC$ 的距离最大，且为 $\sqrt{2}$ ，此时 N 到平面 $DMBC$ 的距离最大，且为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\triangle DMC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$ ，可得三棱锥 $N-DMC$ 的最大体积为 $\dfrac{1}{3}\times4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，因此②正确；对于③，若 $DM\perp A_1C$，$DM=CM=2\sqrt{2}$，$CD=4\Rightarrow DM\perp A_1M$ ，这与 DM 为斜边矛盾，因此③错误；综上，以上正确命题的序号为①②。



15.【答案】2。

【解析】设 $|AF_1|=r_1,|AF_2|=r_2$，则 $\begin{cases}r_1-r_2=2a\\r_1+r_2=9a-2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r_1=\dfrac{11}{2}a-c\\r_2=\dfrac{7}{2}a-c\end{cases}$ ，由于直线 AF_2 与直线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 平行，则 $\tan\angle F_1F_2A=\dfrac{b}{a},\cos\angle F_1F_2A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{4c^2+r_2^2-r_1^2}{2\cdot2c\cdot r_2}\Rightarrow$ $4c^2+r_2^2-r_1^2=4ar_2$ ，把 r_1，r_2 代入上式得 $8a^2-2ac-c^2=0\Leftrightarrow(2a-c)(4a+c)=0\Rightarrow e=2$ 。



三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16.【答案】（1）$T=\pi$；$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},0\right)$，$k\in\boldsymbol{Z}$；（2）$g(x)_{\max}=\frac{1}{2}$；$g(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$。

【解析】（1）$f(x)=\cos x\cdot\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin x\cos x-$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$。因此最小正周期为$T=\pi$，对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},0\right)$，$k\in\boldsymbol{Z}$。

（2）$g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递减，$g(x)_{\max}=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}<g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$，$g(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$。

17.【答案】（1）$a_n=2n-1$；（2）$b_n=\frac{2n-1}{2^n}$。

【解析】（1）设等差数列$\{a_n\}$首项为a_1，公差为d，由已知得$\begin{cases}4a_1+6d=8a_1+4d\\ a_9=a_1+8d=17\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$，于是$a_n=1+2(n-1)=2n-1$。

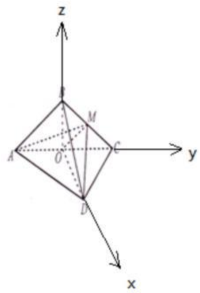
（2）当$n=1$时，$\frac{b_1}{a_1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，当$n\geq 2$时，$\frac{b_n}{a_n}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^n}$，当$n=1$时上式也成立。于是$\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{2^n}$，故$b_n=\frac{1}{2^n}a_n=\frac{2n-1}{2^n}$。

18.【答案】（1）见解析；（2）$\frac{3\sqrt{93}}{31}$。

【解析】（1）证明：$\because ABCD$是菱形，$\therefore AD=DC,\ OD\perp AC$，$\triangle ADC$中，$AD=DC=12,\ \angle ADC=120^\circ$，$\therefore OD=6$，又$M$是$BC$的中点，$\therefore OM=\frac{1}{2}AB=6, MD=6\sqrt{2}$，$\because OD^2+OM^2=MD^2$，$\therefore DO\perp OM$，$OM,\ AC\subset$面$ABC$，$OM\cap AC=O$，$\therefore OD\perp$面$ABC$，$\because OD\subset$面$ODM$，$\therefore$平面$ODM\perp$平面$ABC$。

（2）由题意，$OD\perp OC,\ OB\perp OC$，又由（1）知$OB\perp OD$，建立如图所示空间直角坐

标系，由条件易知$D(6,0,0)$，$A\left(0,-6\sqrt{3},0\right)$，$M\left(0,3\sqrt{3},3\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,9\sqrt{3},3\right),\overrightarrow{AD}=\left(6,6\sqrt{3},0\right)$，设平面$MAD$的法向量$\boldsymbol{m}=(x,\ y,\ z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$即$\begin{cases}9\sqrt{3}y+3z=0\\ 6x+6\sqrt{3}y=0\end{cases}$，令$y=-\sqrt{3}$，则$x=3,\ z=9$，所以，$\boldsymbol{m}=\left(3,-\sqrt{3},9\right)$由条件易证$OB\perp$平面$ACD$，故取其法向量为$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，所以$\cos<\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{93}}{31}$，由图知二面角$M-AD-C$为锐二面角，故其余弦值为$\dfrac{3\sqrt{93}}{31}$。



19.【答案】（1）见解析；（2）$(0,+\infty)$。

【解析】（1）$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+2a(x+1)=(x+1)\left(\mathrm{e}^x+2a\right)$

（i）$a\geq 0$时，当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$单调递减，在$(-1,+\infty)$单调递增。

（ii）$a<0$时，若$a=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，则$f'(x)=(x+1)\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$，所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增；若$a>-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，则$\ln(-2a)<-1$，故当$x\in(-\infty,\ln(-2a))\cup(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$x\in(\ln(-2a),-1)$，$f'(x)<0$；所以$f(x)$在$(-\infty,\ln(-2a)),(-1,+\infty)$单调递增，在$(\ln(-2a),-1)$单调递减；若$a<-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，则$\ln(-2a)>-1$，故当$x\in(-\infty,-1)\cup(\ln(-2a),+\infty)$，$f'(x)>0$，$x\in(-1,\ln(-2a))$，$f'(x)<0$；所以$f(x)$在$(-\infty,-1),(\ln(-2a),+\infty)$单调递增，在$(-1,\ln(-2a))$单调递减。

（2）（i）当$a>0$，则由（1）知$f(x)$在$(-\infty,-1)$单调递减，在$(-1,+\infty)$单调递增，

又$f(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0$，$f(0)=a>0$，取$b$满足$b<-1$，且$b-2<\ln\dfrac{a}{2}$，则$f(b-2)>\dfrac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a\left(b^2-\dfrac{3}{2}b\right)>0$，所以$f(x)$有两个零点；

（ii）当$a=0$，则$f(x)=x\mathrm{e}^x$，所以$f(x)$只有一个零点；

（iii）当$a<0$，若$a\geq -\frac{1}{2e}$，则由（1）知，$f(x)$在$(-1,+\infty)$单调递增。又当$x\leq -1$时，$f(x)<0$，故$f(x)$不存在两个零点；$a<-\frac{1}{2e}$ ，则由（1）知，$f(x)$在$(-1,\ln(-2a))$单调递减，在$(\ln(-2a),+\infty)$单调递增，又当$x\leq -1$，$f(x)<0$,故$f(x)$不存在两个零点。综上，a的取值范围为$(0,+\infty)$。

四、案例分析（共10分）

20.【参考答案】

（1）甲教师的引入存在优点也存在缺陷。优点是一开始复习了上节内容，巩固旧知，但是并没有进行新旧知识间的衔接过渡，并没有达到降低学生对新知识的认知难度的目的。

乙教师的引入存在优点也存在缺陷。优点是一开始复习了上节内容，巩固旧知，并联系生活实际让学生观察等边三角形的特点降低学生对新知识的认知难度。但是在巩固旧知时并没有合理的进行新旧知识之间的衔接过渡，使学生对等边三角形与等腰三角形之间的关系没有得到一个初步的感官认识。

（2）甲教师的教学方法存在优点也存在缺陷，在教学开始开门见山的介绍本课题，抛出问题：①什么样的三角形叫等边三角形？②等边三角形的三个内角都相等吗？③等边三角形是轴对称图形吗？引起学生的有意注意，使学生迅速进入学习状态，对本节内容的基本轮廓有了大致了解，但是没有进行合理的情景创设，将知识全盘塞给学生，剥夺了学生发现问题、提出问题进行解决问题的权利。无法激发学生学习新知识的兴趣，学生只能机械地配合教师教学。在进行等边三角形判定的教学过程中，教师没有做好充分的课前准备，预设学生在课堂中提出各种问题的突发情况，采取回避方式来应对学生提出“从角来说，我认为三个内角都是60°的三角形是等边三角形”这不符合新课程标准中对教师的要求。会限制学生思维，扼杀学生探求真理的欲望，不利于学生的成长。

乙教师的教学方法存在优点也存在缺陷。优点是充分发挥了学生地位，动手操作，小组合作探究，开放性问题等环节的设置，激发了学生开动脑筋自主探究的兴趣并能够调动学生参与到课堂教学活动的积极性。缺点在于教师对“等边三角形有什么性质？”这一开放性问题的提出并不能充分突出“等边三角形”这节的核心---通过对等腰三角形性质的探究过程迁移到对等边三角形性质的探究，为第二个开放性问题的解决造成了一定的阻碍。

（3）甲教师的学生在学习过程中，只是在机械的配合教师的提问，完成本节课的教学。甲教师在日常教学过程中没有注意给学生培养善于思考、提出问题，发现问题、解决问题的

良好习惯的机会。导致学生学习积极性不高，对学习内容存在疑问也不会及时提出。乙教师的学生在学习过程中，动手操作能力，合作探究意识均很强，学习积极性高，对学习过程中存在的疑问，能够提出并善于通过自主探究合作交流解决问题。

五、教案设计（共 20 分）

21.【参考答案】

（1）“分数”在分式教学中的作用：①增强教学导入环节的连贯性：分数与分式联系紧密，二者是具体与抽象、特殊与一般的关系。分数的有关结论与分式的相关结论具有一致性，即数式通性，在导入“分式”的教学环节时，可以通过类比分数的概念、性质和运算法则，引出分式的概念、性质和运算法则；②加强了教学效果：由学生认知结构中已有的分数的概念引入分式，既体现了数学学科内在的逻辑关系，帮助学生拓展了自身的数学认知结构，也是对类比这一数学思想方法和科学研究方法的渗透，更好的加强了教学效果。

（2）分式方程题目：

① $\frac{100}{20+x}=\frac{60}{20-x}$

② $\frac{x}{2x-5}+\frac{5}{5-2x}-1=0$

③ $\frac{x}{x-1}=\frac{3}{(x-1)(x+2)}$

设计意图：题目①较容易，帮助学生学会利用等式两边同时乘以最简公分母，化成整式方程的方法解分式方程，初步体会解分式方程的基本思想；题目②在①的基础上形式更为复杂，需要学生通过思考找到变换分式方程的形式，从而找到最适合的最简公分母，再利用解分式方程的基本思想解题；题目③与前两题相比，形式更为复杂，学生已经能够利用解分式方程的基本思想解答此题，但需要验证结果是否为原方程的根，学生往往容易忽视验证根的步骤，因此题目③不仅能够训练学生的解题思路，更培养了学生的认真严谨的学习态度，对提高学生的综合能力有很大的帮助。

（3）数学思想方法：转化思想：利用最简公分母将分式方程化成整式方程的方法解分式方程，是运用了“转化”思想，将没有学习过的分式方程转化成已经学过的整式方式。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 10 分）

1.已知集合 $M=\{x\,|\,0\le x\le 4\}$，$N=\{x\,|\,y=3-x，y\in M\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A.$[0,3]$　　B.$[0,4]$　　C.$[-1,4]$　　D.$[-1,3]$

2.若复数 z 满足 $\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{z}=1-\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A.$1-\mathrm{i}$　　B.$1+\mathrm{i}$　　C.$-1-\mathrm{i}$　　D.$-1+\mathrm{i}$

3.人体的体质指数（BMI）的计算公式：BMI＝体重÷身高 ^{2}（体重单位为 kg，身高单位为 m）．其判定标准如下表：

BMI	18. 5 以下	18. 5～23. 9	24～29. 9	30 以上
等级	偏瘦	正常	超标	重度超标

某小学生的身高为 1.5 m，在一次体检时，医生告诉他属于超标类，则此学生的体重可能是（　　）

A.47 kg　　B.51 kg　　C.66 kg　　D.70 kg

4.若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\ge 1,\\ x-y\ge -1,\\ 3x+y\le 3,\end{cases}$ 则 $z=4x+3y$ 的最小值为（　　）

A.9　　B.6.5　　C.4　　D.3

5.已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_9=3$，则 $a_4+a_8+2a_{12}=$（　　）

A.12　　B.9　　C.6　　D.3

6.当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，下列结论正确的是（　　）

A.$2x-x^2$ 是比 x^2-x^3 高阶的无穷小

B.x^2-x^3 是 $2x-x^2$ 比高阶的无穷小

C.$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 是同阶无穷小

D.$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 是等阶无穷小

7.设n阶方阵$\boldsymbol{A}$，且$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=$（　　）

A. $\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}^*|}$　　B. $\dfrac{|\boldsymbol{A}^*|}{\boldsymbol{A}}$　　C. $\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}}{\boldsymbol{A}}$　　D. $\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$

8．已知函数$f(x)=\begin{cases}2+\log_{\frac{1}{2}}x,\dfrac{1}{8}\leq x<1\\ 2^x,1\leq x\leq 2\end{cases}$，若$f(a)=f(b)(a<b)$，则$ab$的最小值为（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D.1

9.数学教学中备课评价是数学教学过程评价的重要内容，它以教学方案为核心，以（　　）为重要依据，综合作用于数学学习水平的提高。

A.课堂教学质量　　B.学生课堂积极性　　C.课堂作业完成情况　　D.课堂测验成绩

10.《普通高中数学课程标准》中提出了培养和提高学生基本能力的课程标准，这些基本能力包括空间想象，抽象概括、推理论证，运算求解和（　　）

A.逆向思维　　B.顺向思维　　C.逆转心理　　D.数据处理

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.$\left(\dfrac{1}{2}x+2y\right)^6$的展开式中$x^2y^4$项的系数为______。

12.曲线$y=\left(x^2+2\right)e^x$在点$(0,2)$处的切线方程为______。

13.已知圆$C:(x-a)^2+(y-2)^2=4$，直线$l:x+ay-1=0$与圆C交于A，B两点，且△ABC为等腰直角三角形，则实数$a=$______。

14.已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，其前n项和为S_n，且$a_1=1$，$S_3=7$．若关于n的不等式$S_n<k\log_2 a_{n+2}$的解集中有 6 个正整数，则实数k的取值范围是______。

15.求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$______。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16.已知等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且a_2，a_3+2，a_4成等差数列.

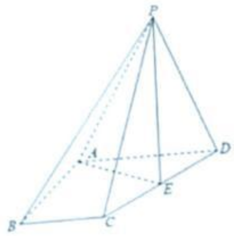
（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\log_2 a_{2n-1}$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

17.如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=AD=2BC=2$，$BC//AD$，$AB\perp AD$，$\triangle PBD$ 为正三角形，且 $PA=2\sqrt{3}$。

（1）证明：直线 $AB\perp$ 平面 PBC；

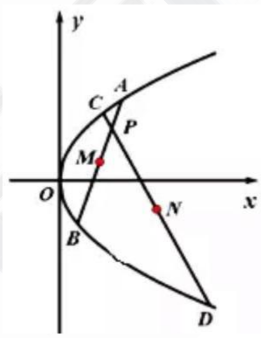
（2）若四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 2，E 是线段 CD 的中点，求直线 PE 与平面 PBC 所成角的正弦值。



18.已知抛物线 $y^2=2x$，过点 $P(1,1)$ 分别作斜率为 k_1, k_2 的抛物线的动弦 AB, CD，设 M, N 分别为线段 AB, CD 的中点。

（1）若 P 为线段 AB 的中点，求直线 AB 的方程；

（2）若 $k_1+k_2=1$，求证直线 MN 恒过定点，并求出定点坐标。



19.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$。

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1\neq x_2$，求证：$\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}>2$。

四、案例分析（共 10 分）

20.案例如下：

方式 1：实数有加法运算，那么下列集合的关系呢？
方式 2：班里有会弹钢琴的，会打拳击的，会……（给出集合的并集的定义）
方式 3：前面学习了集合，集合的表示、基本关系，接下来呢……

（1）分析三种引入方式的特点；

（2）对于方式 3，教师可以引导学生进一步提出哪些问题；

（3）数学概念引入的关键点是什么？如何使数学概念的引入更加自然？

五、教案设计（共 20 分）

21.某位教师在讲完《相交线与平行线》这部分内容后，设计了一节《相交线与平行线》的复习课，在这节课中，他设计了如下一组题：

题 1，如图 3，BE 平分 $\angle ABD$，DE 平分 $\angle BDC$ 且 $\angle 1+\angle 2=90°$。.

① BE 与 DE 有什么的位置关系？请说明理由。

② AB 与 CD 有什么样的位置关系？请说明理由

题 2，如图 4，$AB // CD$ 且 $\angle 1+\angle 2=80°$，求 $\angle BED$ 的度数。

题 3，如图 5，$AB // CD$，直线 l 交 AB 于点 F、交 CD 于点 G，点 E 是 GF 上的一点（点 E 与点 F、G 不重合），设 $\angle ABE=\alpha$，$\angle CDE=\beta$，$\angle BED=\gamma$，试探索三者之间的关系，并说明理由。

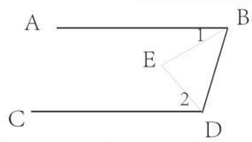


图3

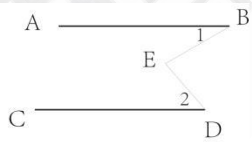


图4

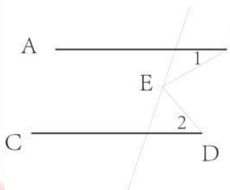


图5

阅读上述教学设计片段，完成下列任务：

（1）从这组习题分析这节复习课的教学目标；

（2）分析这三道题的设计意图，并说明这组习题设计的特点。

（3）请你在图 5 的基础上，编一道类似习题，并给出答案。

答案及解析

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 10 分）

1.【答案】选 A。

【解析】由题意知 $0\le 3-x\le 4\Rightarrow -1\le x\le 3$，即 $N=\{x|-1\le x\le 3\}$，所以 $M\cap N=\{x|0\le x\le 3\}$。故本题选 A。

2.【答案】选 D。

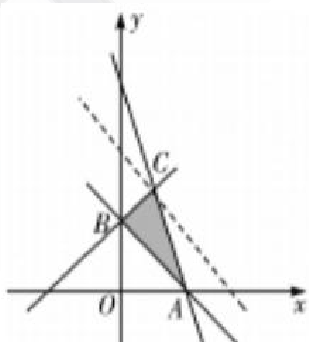
【解析】由题意知 $z=\dfrac{(1+i)^2}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{2}=-1+i$。故本题选 D。

3.【答案】选 C。

【解析】由题意知，体重=BMI×身高 ²，因为此人属于超标，所以 $BMI\in[24,29.9]$，所以此学生的体重范围是$\left[24\times 1.5^2,29.9\times 1.5^2\right]$，即$[54,67.275]$。故本题选 C。

4.【答案】选 D。

【解析】不等式组所表示的可行域为下图中的△ABC，当目标函数对应的直线经过点 $B(0,1)$时，z 取得最小值为 3。故本题选 D。



5.【答案】选 A。

【解析】由于数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_4+a_8+2a_{12}=2a_6+2a_{12}=4a_9=12$。故本题选 A。

6.【答案】选 B。

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2}{x^2-x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2x}{2x-3x^2}=\infty$，当 $x\to 0$ 时，函数 $2x-x^2$ 与 x^2-x^3 的低阶无穷小，也就是函数 x^2-x^3 是 $2x-x^2$ 比高阶的无穷小。故本题选 B。

7.【答案】选 D。

【解析】n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|},\left(\boldsymbol{A}^*\right)=\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}|,\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$。故本题选 D。

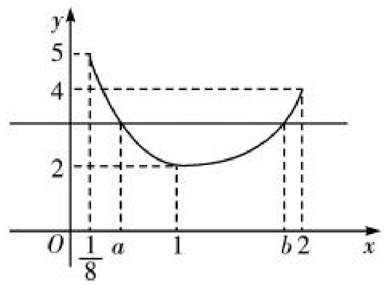
8.【答案】选 B。

【解析】函数 $f(x)$ 的图像如图①，设 $f(a)=f(b)=k$，则 $k\in(2,4]$。$2+\log_{\frac{1}{2}}a=k$

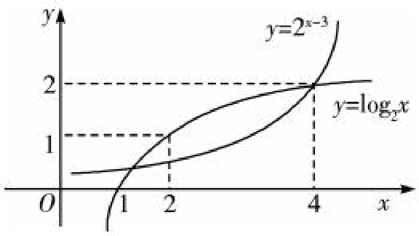
$2^b=k\Rightarrow a=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$，$b=\log_2 k$。当 $k=4$ 时，$a=\frac{1}{4}$，$b=2$，$ab=\frac{1}{2}$。考虑 $ab-\frac{1}{2}=$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\times\log_2 k-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\left(\log_2 k-2^{k-3}\right)$。由图②可知，当 $k\in(2,4]$ 时，$\log_2 k-2^{k-3}\geq 0$，

$\therefore ab-\frac{1}{2}\geq 0\Rightarrow ab\geq\frac{1}{2}$。故本题选 B。



图①



图②

9.【答案】选 A。

【解析】新课标中强调备课是教师为完成教学任务对教学过程的总体设计。数学教学中备课评价是数学教学过程中评价的重要内容，它以教学方案为核心，以课堂教学质量为重要依据，综合作用于数学学习水平的提高。故本题选 A。

10.【答案】选 D。

【解析】《普通高中数学课程标准》在课程目标中指出提高空间想象，抽象概括、推理论证，运算求解、数据处理等基本能力。故本题选 D。

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】60。

【解析】展开式通项为 $T_{r+1}=C_6^r\left(\frac{1}{2}x\right)^{6-r}(2y)^r=2^{2r-6}C_6^r x^{6-r}y^r$，令 $r=4\Rightarrow T_5=60x^2y^4$。

12.【答案】$2x-y+2=0$。

【解析】由于 $y=\left(x^2+2\right)e^x$，$y'=2xe^x+\left(x^2+2\right)e^x=\left(x^2+2x+2\right)e^x$，当 $x=0$ 时，$y'=2$，由点斜式方程知在点 $(0,2)$ 处的切线方程为 $y-2=2(x-0)$，即 $2x-y+2=0$。

13.【答案】1 或 $-\frac{1}{7}$。

【解析】由题意知 $C(a,2)$，圆的半径为 2，因为△ABC 为等腰直角三角形，所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|a+2a-1|}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{2}\Rightarrow a=1$ 或 $a=-\frac{1}{7}$。

14.【答案】$\left(9,\frac{127}{8}\right]$。

【解析】由题意知 $q>0, 1+q+q^2=7\Rightarrow q=2$，$\therefore a_n=2^{n-1}$，$S_n=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$，由 $S_n<k\log_2 a_{n+2}\Rightarrow 2^n-1<k(n+1)$，结合函数 $y=2^x-1$，$y=k(x+1)$ 的图像可知，若原不等式的解集中有 6 个正整数，则 $\begin{cases}2^6-1<k(6+1)\\2^7-1<k(7+1)\end{cases}\Rightarrow 9<k\le\frac{127}{8}$。

15.【答案】$\frac{1}{2}$。

【解析】$\lim\limits_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-1}{1}=\frac{1}{2}$。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16.【答案】（1）$a_n=2^n$；（2）$\frac{n}{2n+1}$。

【解析】（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，依题意有 $a_2+a_4=2(a_3+2)$，

即 $2q+2q^3=2\left(2q^2+2\right)$，解得 $q=2$，所以 $a_n=2^n$；

（2）由（I）可得 $b_n=2n-1$，设 $c_n=\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}$，则 $c_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$。

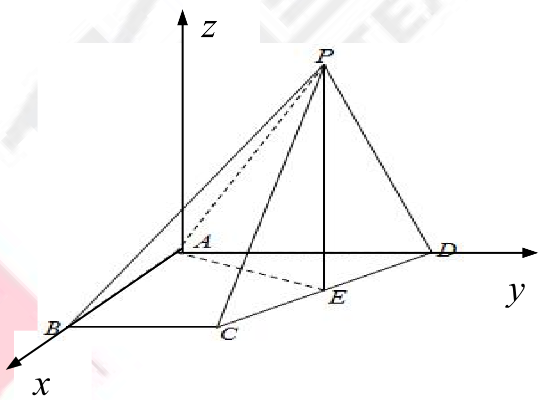
17.【答案】（1）见解析；（2）$\frac{2\sqrt{21}}{21}$。

【解析】（1）$\because AB\perp AD$，且 $\because AB=AD=2$，$\therefore BD=2\sqrt{2}$，又△PBD 为正三角形，所以

$PB=PD=BD=2\sqrt{2}$，又∵$AB=2$，$PA=2\sqrt{3}$，所以$AB\perp PB$，又∵$AB\perp AD$，$BC//AD$，∴$AB\perp BC$，$PB\cap BC=B$，所以$AB\perp$平面PBC。

（2）设点P到平面$ABCD$的距离为h，则$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\right]\times h=2$，依题可得$h=2$。以$A$为原点，直线$AB$、$AD$分别为$x$轴，$y$轴，建立空间直角坐标系，则$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，$C(2,1,0)$，则$E\left(1,\frac{3}{2},0\right)$，设$P(x,y,2)$，由$PA=2\sqrt{3}$，$PB=PD=2\sqrt{2}$，可得$\begin{cases}x^2+y^2+4=12\\x^2+(y-2)^2+4=8\\(x-2)^2+y^2+4=8\end{cases}$，解得$x=2$，$y=2$，即$P(2,2,2)$。所以$\overrightarrow{PE}=\left(-1,-\frac{1}{2},-2\right)$，又由（1）可知，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$是平面$PBC$的一个法向量，

$$\therefore \cos<\overrightarrow{PE},\overrightarrow{AB}>=\frac{-1\times2}{2\times\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-2)^2}}=-\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{-2\sqrt{21}}{21}$$，所以直线PE与平面PBC所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{21}}{21}$。



18.【答案】（1）$y=x$；（2）$(0,1)$。

【解析】（1）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1^2=2x_1$①，$y_2^2=2x_2$②，①－②，得$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2(x_1-x_2)$。又因为$P(1,1)$是线段$AB$的中点，所以$y_1+y_2=2$。所以，$k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2}{y_2+y_1}=1$。又直线$AB$过$P(1,1)$，所以直线$AB$的方程为$y=x$；

（2）依题设$M(x_M,y_M)$，直线AB的方程为$y-1=k_1(x-1)$，即$y=k_1x+1-k_1$，亦即$y=k_1x+k_2$，代入抛物线方程并化简得$k_1^2x^2+(2k_1k_2-2)x+k_2^2=0$。所以，

$x_1+x_2=-\dfrac{2k_1k_2-2}{k_1{}^2}=\dfrac{2-2k_1k_2}{k_1{}^2}$。于是，$x_M=\dfrac{1-k_1k_2}{k_1^2}$，$y_M=k_1\cdot x_M+k_2=k_1\cdot\dfrac{1-k_1k_2}{k_1^2}+k_2=\dfrac{1}{k_1}$。

同理，$x_N=\dfrac{1-k_1k_2}{k_2^2}$，$y_N=\dfrac{1}{k_2}$。易知$k_1k_2\neq 0$，所以直线$MN$的斜率$k=\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{k_2k_1}{1-k_2k_1}$。

故直线MN的方程为$y-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{k_2k_1}{1-k_2k_1}\left(x-\dfrac{1-k_1k_2}{k_1^2}\right)$，即$y=\dfrac{k_2k_1}{1-k_2k_1}x+1$．此时直线过定点$(0,1)$．

故直线MN恒过定点$(0,1)$。

19.【答案】（1）$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，在$(-\infty,0)$单调递减；（2）见解析。

【解析】(1)函数$f(x)$定义域为R，$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，令$f'(x)>0$得$x\in(0,+\infty)$，令$f'(x)<0$得$x\in(-\infty,0)$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，在$(-\infty,0)$单调递减。

（2）$f(x_1)=f(x_2)$，不妨设$x_2>x_1$，则$\mathrm{e}^{x_1}-x_1=\mathrm{e}^{x_2}-x_2\Rightarrow\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{x_2-x_1}=1$，要证：$\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}>2$，

即证：$\dfrac{x_2-x_1}{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}\cdot\left(\mathrm{e}^{x_2}+\mathrm{e}^{x_1}\right)>2$ （*），而$\dfrac{x_2-x_1}{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}\cdot\left(\mathrm{e}^{x_2}+\mathrm{e}^{x_1}\right)=(x_2-x_1)\dfrac{\mathrm{e}^{x_2-x_1}+1}{\mathrm{e}^{x_2-x_1}-1}$，令$t=x_2-x_1$，$t\in(0,+\infty)$，（*）等价于$t\cdot\dfrac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t-1}>2\Leftrightarrow t(\mathrm{e}^t+1)-2\mathrm{e}^t+2>0$，$t\in(0,+\infty)$，设

$g(t)=t(\mathrm{e}^t+1)-2\mathrm{e}^t+2$，$t\in(0,+\infty)$，$g'(t)=(t+1)\mathrm{e}^t+1-2\mathrm{e}^t=(t-1)\mathrm{e}^t+1$，

令$h(t)=(t-1)\mathrm{e}^t+1$，$\because h'(t)=t\mathrm{e}^t>0$在$t\in(0,+\infty)$恒成立，则$g'(t)$在$t\in(0,+\infty)$单调递增，

故$g'(t)>g'(0)=0$，故$g(t)$在$t\in(0,+\infty)$单调递增，故$g(t)>g(0)=0$，故原命题得证。

四、案例分析（共 10 分）

20.【参考答案】

（1）方式 1 的引入，从学生熟悉的实数加法运算入手，降低了认知难度，但是集合间的运算的交、并、补、差，与实数的运算虽然有一定的联系，但是有些差别，在教学过程中注意引导学生思考探究避免出现运算误区。方式 2 的引入，利用学生身边的人创设问题情景，降低对新知识的陌生感，引发学生思维的共鸣。方式 3 的引入，复习以前学过的知识内容，进行新旧知识的衔接过渡，降低学生对新知识的认知难度，但是缺乏具体内容的回顾，只是简单的提及，不能够全面的顾及到班上的所有学生对已有知识的复现，从而达到降低对新知识认知难度的目的。

（2）问题 1，集合之间是否也具有一些运算规律呢？

问题 2，集合的并集运算与实数的加法运算有什么异同点？

问题 3，集合的补集运算与实数的减法运算有什么异同点？

问题 4，集合的交集运算需要注意的问题有什么？

（3）数学概念的引入的关键点为：①注意运用新、旧知识之间的内在联系；②调动学生认知结构中已有感性的知识，去感知理解材料，创设具体情境，从具体事例抽象出数学概念。利用新旧知识之间的联系引入概念时，注意创设类比发现的问题情境，关注新旧知识的联系，尝试引入新的概念，这样引入容易使学生在原有的认知结构中得到同化和建构。

通过创设情境，从具体事例抽象出数学概念时要求充分调动学生认知结构中已有感性经验和知识，去感知理解材料，经过思维加工产生认识飞跃，继而组织成完整的概念图式。在具体引入概念的过程中可以通过实例、绘图或多媒体辅助引导学生分析数学概念的特点，使学生思维由感性认识自然过渡到理性认识。

五、教案设计（共 20 分）

21.【参考答案】

（1）知识与技能目标：能够利用平行线的性质与判定定理，判断两条直线是否平行；

能够利用两直线相交的性质求相交直线的夹角度数。

过程与方法目标：学生通过对两直线的位置关系进行观察、猜想、探索等过程，初步形成几何直观，发展形象思维与抽象思维，锻炼合情推理与演绎推理能力，并能清晰地表达自己的想法。

情感态度与价值观目标：在学习过程中，体验获得成功的乐趣，锻炼克服困难的意志，建立自信心，养成认真勤奋、独立思考、合作交流、反思等学习习惯，形成实事求是的科学态度。

（2）第一道题目，给出已知条件 BE 平分 $\angle ABD$， DE 平分 $\angle BDC$ 且 $\angle 1+\angle 2=90°$，通过两个问题引导学生思考，利用角平分线的性质，先判断出 BE 与 DE 的位置关系进而利用两直线平行的判定定理判断 AB 与 CD 的位置。这道题目结合学生的已有知识经验，加深巩固对两直线平行判定定理的应用，为第三道题目的猜想作铺垫。

第二道题目，在第一道题目的基础之上对题目进行变形，已知 $AB // CD$ 且 $\angle 1+\angle 2=80°$，结合对第一道题目解题的经验，利用两直线平行的性质求出 $\angle BED$ 的度数。这道题目的主要设计意图为加深巩固学生对两直线平行的性质的应用，并为第三道题目的猜想作铺垫。

第三道题目，在前两道题目的铺垫下，将具体角变为抽象角，学生结合前两道题目的解题经验，进行猜想、探索证明。这道题目的主要设计意图为加深巩固学生对两直线平行的性质的应用，提高学生合情推理和演绎推理能力，将所学知识融会贯通的能力。

三道题目逻辑联系紧密，考虑到学生的认知顺序，遵循由浅入深，由易到难，由表及里等一系列规律，让学生能够拾级而上，步步深入，以达到能够将所学知识灵活运用并初步形成几何直观，发展形象思维与抽象思维，锻炼合情推理和演绎推理能力的目的。

（3）如图 5，直线 l 交 AB 于点 F 、交 CD 于点 G ，点 E 是 GF 上的一点（点 E 与点 F 、G 不重合），设 $\angle ABE=\alpha$，$\angle CDE=\beta$，$\angle BED=\gamma$ ，试探索 α、β、γ 相加为多少度的时候，AB 与 CD 平行，并说明理由。

当 $\alpha+\beta=\gamma$ 时 AB 与 CD 平行。连接 BD ，因为 $\triangle BDE$ 的内角和为 $180°$，所以 $\angle EBD+\angle EDB=180°-\angle BED$，当 $\alpha+\beta=\gamma$ 时， $\angle EBD+\angle EDB+\alpha+\beta=180°-\angle BED$

$+\alpha+\beta=180°$，则 AB 与 CD 平行。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

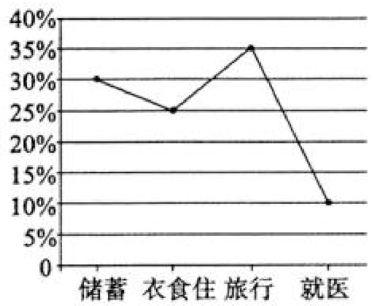
1.设全集 $U=\{x\in Z\,|\,-2<x<4\}$，$A=\{-1,0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　　）

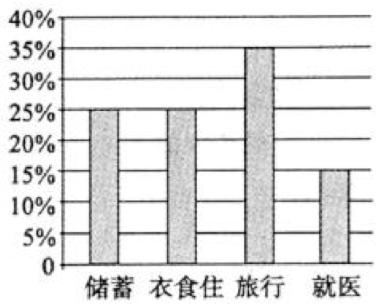
A. $\{0\}$　　B. $\{-2,-1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2.复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=\dfrac{2+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则复数 z 的共轭复数的虚部为（　　）

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. $-\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$

3.某位教师 2017 年的家庭总收入为 80000 元，各种用途占比统计如下面的折线图。2018 年家庭总收入的各种用途占比统计如下面的条形图，已知 2018 年的就医费用比 2017 年的就医费用增加了 4750 元，则该教师 2018 年的旅行费用为（　　）





A.21250 元　　B.28000 元　　C.29750 元　　D.85000 元

4.已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，其前 n 项和为 $S_n=3\cdot 2^n+a$，则实数为 a 的值为（　　）

A. -3　　B. -6　　C.2　　D.1

5.已知点 $A(0,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，若椭圆 $W:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 上存在点 C，使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则椭圆 W 的离心率是（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6.要得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，只需将函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象（　　）

A.向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位　　B.向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位

C.向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位　　D.向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位

7.一段 1 米长的绳子，将其截为 3 段，问这三段可以组成三角形的概率是（　　）

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{8}$　　D.$\frac{1}{3}$

8.当$x\to 0$时，$x\to \sin x$是x的（　　）

A.低阶无穷小　　B.高阶无穷小

C.等价无穷小　　D.同阶但非等价无穷小

9.《义务教育课程标准（2011 年版）》中的第三学段目标关于数学抽象的表述，正确的是（　　）

A.经历从日常生活中抽象出数的过程

B.探索具体问题中数量关系和变化规律

C.体验从具体情境中抽象出数的过程

D.体验从具体情境中抽象出数学符号的过程

10.新课标要求评价结果的呈现应采用定性和定量相结合的方式，第三学段的评价应当以下列评价为主的是（　　）

A.描述性评价　　B.描述性和等级（百分制）相结合评价

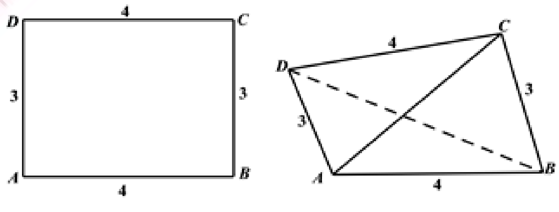
C.百分制评价　　D.等级评价

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.已知$\boldsymbol{a}=(2,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$的投影是______。

12.已知函数$f(x)=\ln x$与直线$y=ax$相切，则a的取值是______。

13.已知矩形$ABCD$的$AB=4$，$AD=3$，将其沿对角线BD折起，得到四面体$A-BCD$，如图所示 则四面体$A-BCD$体积的最大值为______。



14.不定积分$\int \frac{1}{x^4\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=$ ______。

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+x\cos x\right)dx=$______。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16．已知$\{a_n\}$是一个公差大于 0 的等差数列，且满足$a_4a_6=96$，$a_3+a_7=20$，数列$\{b_n\}$满足等式：$a_n=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\cdots+\frac{b_n}{2^n}\left(n\in \boldsymbol{N}^*\right)$。

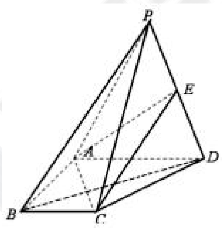
（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{b_n+\frac{n+1}{2}\right\}$的前$n$项和$S_n$。

17.如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AB=AD=2BC=2$，$BC//AD$，$AB\perp AD$，$\triangle PBD$为正三角形.且$PA=2\sqrt{3}$。

（1）证明：平面$PAB\perp$平面PBC；

（2）若点P到底面$ABCD$的距离为 2，E是线段PD上一点，且$PB//$平面ACE，求四面体$A-CDE$的体积。



18.已知函数$f\left(x\right)=ax^2-\ln\left(x-1\right)+1\left(a\in \boldsymbol{R}\right)$存在极值点。

（1）求a的取值范围；

（2）设$f\left(x\right)$的极值点为x_0，若$f\left(x_0\right)<x_0$，求a的取值范围。

19.已知点$P\left(2,2\right)$，圆$C:x^2+y^2-8y=0$，过点P的动直线l与圆C交于A，B两点，线段AB的中点为M，O为坐标原点。

（1）求M的轨迹方程；

（2）当$|OP|=|OM|$时，求l的方程及$\triangle POM$的面积。

四、案例分析（共 10 分）

20.某教师关于“反比例函数图象”教学过程中的三个步骤为：

第一步：复习回顾

提出问题：我们已经学过一次函数的哪些内容？是如何研究的？

第二步：引入新课

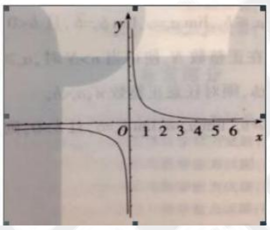
提出问题：反比例函数的图象是什么形状呢？

引导学生利用描点法画出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象。

列表：

x		6	5	4	3	2	1								
y							1								

描点连线：引导学生用光滑的曲线连接描点，并用计算机演示图象的生成过程。在此过程中启发学生思考，由于 x，y 都不能为 0，所以函数图象与 x 轴 y 轴不能有交点（如下图）



......（第三步过程省略）

（1）该教学过程的主要特点是什么？

（2）在第二步的连线过程中，如果你是该老师，如何引导学生思考所连的线不是直线，而是光滑曲线？

（3）对于第三步的③，如果你是该老师，如何引导学生思考函数图象在第一象限（或第三象限）的变化？

五、教案设计（共 20 分）

21.“基本不等式”是高中数学教学中的重要内容，请完成下列任务：

在“基本不等式”起始课的“教学重点”设计中，有两种方案：

①强调基本不等式在求数值中的应用，将基本不等式的应用作为重点。

②强调基本不等式的背景，过程与意义，将学生感受和体验“基本不等式”中“基本”的意义作为教学重点。

（1）你赞同哪种方案？简述理由。

（2）给出 $a^2+b^2\geq 2ab$ 及 $\frac{a+b}{2}\geq 2\sqrt{ab}\left(a>0，b>0\right)$ 的几何解释。

（3）为了让高中生充分认识“基本不等式”中“基本”的意义，作为教师应该对此有多个维度的理解，请至少从两个维度谈谈你对“基本”意义的认识。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 C。

【解析】由题意知 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，$A=\{-1,0\}$，$\complement_U A=\{1,2,3\}$，$\because B=\{0,1,2\}$，$\therefore(\complement_U A)\cap B=\{1,2\}$。故本题选 C。

2.【答案】选 A。

【解析】$z(1+\mathrm{i})=\dfrac{2+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\Rightarrow z=\dfrac{2+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$ $\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$，因此复数 z 的共轭复数的虚部为 $\dfrac{7}{2}$。故本题选 A。

3.【答案】选 C。

【解析】设教师 2018 年家庭总收入为 n，$n\times15\%-80000\times10\%=4750\Rightarrow n=85000$，则该教师 2018 年是旅行费用为 $85000\times35\%=29750$。故本题选 C。

4.【答案】选 A。

【解析】由题意知 $a_1=3\times2+a$，$a_2=S_2-S_1=6$，$a_3=S_3-S_2=12$，由等比中项的性质可得 $36=(6+a)12\Rightarrow a=-3$。故本题选 A。

5.【答案】选 C。

【解析】由于 $A(0,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$\triangle ABC$ 为等边三角形，因此根据正三角形的性质可得点 C 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$ 或 $(1,\ -\sqrt{3})$，又因为点 C 在椭圆 W 上，所以 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{m}=1\Rightarrow m=6$，所以椭圆 W 的焦点在 y 轴上，则长半轴 $a=\sqrt{6}$，半焦距 $c=\sqrt{6-2}=2$，所以椭圆的离心率为 $\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。故本题选 C。

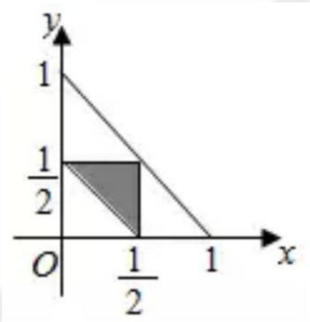
6.【答案】选 B。

【解析】 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\cos\left[\dfrac{\pi}{4}-2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\right]=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=\sin2x$，因此要得到函数 $y=\sin2x$ 的图象，只需将函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位。故本题

选 B。

7.【答案】选 A。

【解析】设三段分别为 x，y,$1-x-y$,则总样本空间为$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\\0<x+y<1\end{cases}$，其面积为$\frac{1}{2}$，能构成三角形的事件的空间为$\begin{cases}x+y>1-x-y\\x+1-x-y>y\\y+1-x-y>x\end{cases}$，其面积为$\frac{1}{8}$，则这三段可以组成三角形的概率是$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$。故本题选 A。



8.【答案】选 B。

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1}=0$ 则 $x\to\sin x$ 是 x 的高阶无穷小。故本题选 B。

9.【答案】选 D。

【解析】数学新课程标准中，第三学段知识技能的第一方面，学生能够体验从具体情境中抽象出数学符号的过程。故本题选 D。

10.【答案】选 B。

【解析】数学新课程标准中，指出第一学段的评价应当以描述性评价为主，第二学段采用描述性评价和等级评价相结合的方式，第三学段可以采用描述性评价和等级（或百分制）评价相结合的方式。故本题选 B。

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】$-\frac{6\sqrt{5}}{5}$。

【解析】$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 的投影$=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2-8}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{-6}{\sqrt{5}}=-\frac{6\sqrt{5}}{5}$。

12.【答案】$\frac{1}{\mathrm{e}}$。

【解析】由题意知 $f'(x)=\frac{1}{x}$，设切点为 $(t,\ln t)$，则有 $\frac{1}{t}=a,\ln t=at=1$，$\therefore t=\mathrm{e}$，$\therefore a=\frac{1}{\mathrm{e}}$。

13.【答案】$\frac{24}{5}$。

【解析】由题意知，要使四面体 $A-BCD$ 体积的最大，则只需四面体的高最大即可，即面 ABD 与面 CBD 互相垂直时，此时由于 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$，则四面体的高即为 $\triangle CBD$ 中 BD 边上的高，由等面积公式知高为 $\frac{3\times4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}$，则四面体体积公式为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{12}{5}=\frac{24}{5}$。

14.【答案】$-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C$。

【解析】$\int\frac{1}{x^4\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-x^2}{x^4\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+$

$\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C$。

15.【答案】0。

【解析】令 $f(x)=x^3+x\cos x$，$f(x)=-f(-x)$，即 $f(x)$ 为奇函数，又由于积分区间关于原点对称，故该不定积分值为 0。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16.【答案】（1）$a_n=2n$；（2）$2^{n+2}-4+\frac{n(n+3)}{4}$。

【解析】(1)在等差数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_3+a_7=20$，得 $a_4+a_6=20$，又 $a_4a_6=96$，可得 $\begin{cases}a_4=8\\a_6=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=12\\a_6=8\end{cases}$. $\because d>0$，$\therefore\begin{cases}a_4=8\\a_6=12\end{cases}$，则 $d=\frac{a_6-a_4}{6-4}=2$，$\therefore a_n=a_4+2(n-4)=2n$.

（2）由 $a_n=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\cdots+\frac{b_n}{2^n}\left(n\in\boldsymbol{N}^*\right)$，得 $a_{n-1}=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}(n\geq2)$，

$\therefore a_n-a_{n-1}=2=\frac{b_n}{2^n}$，即 $b_n=2^{n+1}(n\geq2)$，$\because b_1=2a_1=4=2^2$ 满足上式，$\therefore b_n=2^{n+1}$. 则 $b_n+\frac{n+1}{2}=2^{n+1}+\frac{n+1}{2}$，$\therefore$ 数列 $\left\{b_n+\frac{n+1}{2}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=(b_1+b_2+\cdots+b_n)+$

$\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)+\frac{n}{2}=\frac{4\left(1-2^n\right)}{1-2}+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}=2^{n+2}-4+\frac{n(n+3)}{4}$。

17.【答案】（1）见解析；（2）$\frac{8}{9}$。

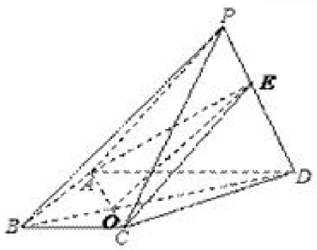
【解析】（1）$\because AB\perp AD$，且 $AB=AD=2$，$\therefore BD=2\sqrt{2}$，又$\triangle PBD$为正三角形，

$\therefore PB=PD=BD=2\sqrt{2}$，又$\because AB=2$，$PA=2\sqrt{3}$，$\therefore \angle PBA=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore AB\perp PB$，又$\because AB\perp AD$，$BC/\!/AD$，$\therefore AB\perp BC$，$PB\cap BC=B$，$\therefore AB\perp$平面$PBC$，又$\because AB\subset$平面$PAB$，

$\therefore$平面$PAB\perp$平面PBC。

（2）如图，设BD，AC交于点O，$\because BC/\!/AD$，且$AD=2BC$，$\therefore OD=2OB$，连接OE，

$\because PB/\!/$平面ACE，$\therefore PB/\!/OE$，则$DE=2PE$，又点P到平面$ABCD$的距离为2，$\therefore$点E到平面$ABCD$的距离为$h=\dfrac{2}{3}\times 2=\dfrac{4}{3}$ $\therefore V_{A-CDE}=V_{E-CDA}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{9}$，即四面体$A-CDE$的体积为$\dfrac{8}{9}$。



18.【答案】（1）$a>0$；（2）$0<a<\dfrac{1}{4}$。

【解析】（1）函数$f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$，$f'(x)=2ax-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2ax^2-2ax-1}{x-1}$，

当$a=0$时，$f'(x)<0$，即函数$f(x)$单调递减，无极值点；当$a\neq 0$时，由$\Delta>0\Rightarrow a>0$或$a<-2$，设$h(x)=2ax^2-2ax-1$，则$h(1)=-1<0$；

当$a>0$时，$h(x)=0$的两根一个小于1、一个大于1，故$f(x)$有一个极值点；

当$a<-2$时，由对称轴为$x=\dfrac{1}{2}$，知$h(x)=0$的两根均小于1，故$f(x)$无极值点；

综上所述，$a>0$。

（2）由（1）知$a>0$且$2ax_0^2-2ax_0-1=0$，$\therefore a=\dfrac{1}{2x_0(x_0-1)}$，$f(x_0)<x_0\Leftrightarrow$

$ax_0^2-\ln(x_0-1)+1<x_0\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2}{2x_0(x_0-1)}-\ln(x_0-1)+1<x_0\Leftrightarrow x_0-1-\dfrac{1}{2(x_0-1)}+\ln(x_0-1)>\dfrac{1}{2}$。

令$g(x)=x-\dfrac{1}{2x}+\ln x$，显然$g(x)$在$(0,+\infty)$上单增，又$g(1)=\dfrac{1}{2}$，$\therefore x_0-1>1$即$x_0>2$，

$\therefore a=\dfrac{1}{2x_0(x_0-1)}<\dfrac{1}{4}$，$\therefore 0<a<\dfrac{1}{4}$。

19.【答案】（1）$(x-1)^2+(y-3)^2=2$；（2）$y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$；$\frac{16}{5}$。

【解析】（1）圆 C 的方程可化为 $x^2+(y-4)^2=16$，所以圆心为 $C(0,4)$，半径为 4，设 $M(x,\ y)$，则 $\overrightarrow{CM}=(x,\ y-4)$，$\overrightarrow{MP}=(2-x,2-y)$，由题设知 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，故 $x(2-x)+(y-4)(2-y)=0$，即 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$，由于点 P 在圆 C 的内部，所以 M 的轨迹方程是 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$。

（2）由（1）可知 M 的轨迹是以点 $N(1,3)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆。由于 $|OP|=|OM|$，故 O 在线段 PM 的垂直平分线上，又 P 在圆 N 上，从而 $ON\perp PM$。因为 ON 的斜率为 3，所以 l 的斜率为 $-\frac{1}{3}$，代入 P 点得到 l 的方程为 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$。又 $|OP|=|OM|=2\sqrt{2}$，O 到 l 的距离为 $d=\frac{8}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，$|PM|=2\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，所以△$POM$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times PM\times\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{16}{5}$。

四、案例分析（共 10 分）

20.【参考答案】

（1）该教学过程中运用了温故导入的方式，优点：一是可以帮助学生复习旧知，从已学习过的知识中找到新知与旧知的联系，从而帮助学生快速地进入新知识的学习；二是在教学过程渗透了数形结合的数学思想，学生通过列表、描点、连线导学生发现问题、思考问题、解决问题。

（2）在第二步的连线过程中，我将让学生多取一些点，在描点过程中学生自然就会发现是所连成的线是光滑曲线而不是折线；或者让学生自行取点描线，然后教师收集学生取点少的描出的图象和取点较多的描出的图象，用投影展示，学生对比观察，自然而然知道反比例函数图象是光滑曲线。

（3）我将引导学生通过多选取特殊点进行比较，观察第一象限和第三象限 y 随 x 的变化规律，并鼓励学生多交流、多沟通，总结规律，进一步提高学生的观察能力和抽象概括能力。

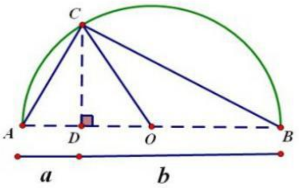
五、教案设计（共 20 分）

21.【参考答案】

（1）赞同第一种方案，“基本不等式”这一部分的知识点能够帮助理解其他章节的知识，同时也能解决其他章节的问题，所以“基本不等式”这一部分知识更加注重应用，所以这个

是重点。

（2）如图 1，$CD=\sqrt{ab}$，$CO=\dfrac{a+b}{2}$，在直角三角形中，斜边大于直角边，即 $CO>CD$，即 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$；如图 2，$\dfrac{1}{2}ab$ 为一个三角形的面积，a^2+b^2 为深蓝色部分正方形的面积，$a^2+b^2-2ab=(a+b)^2\ge 0$。



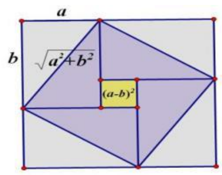


图 1　　　　　　图 2

（3）①基本不等式是证明其他不等式的基础，基本不等式 $a+b\ge 2\sqrt{ab}\,(a>0,\ b>0)$，例如已知 $a>0,\ b>0,\ a+b=1,$ 求证：$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\ge 9$。

求证：因为 $a>0,\ b>0,\ a+b=1,$ 所以 $1+\dfrac{1}{a}=1+\dfrac{a+b}{a}=2-\dfrac{b}{a}$。同理 $1+\dfrac{1}{a}=2+\dfrac{a}{b}$。所以 $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)=\left(2+\dfrac{b}{a}\right)\left(2+\dfrac{a}{b}\right)=5+2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\ge 9$ 所以 $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\ge 9$（当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立）。

②基本不等式可以用于求函数最值问题，例如已知 $x>0,\ y>0$，则（1）如果积 xy 是定值 P，那么当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 有最小值是 $2\sqrt{p}$。（2）如果和 $x+y$ 是定值 s，那么当且仅当 $x=y$ 时，xy 有最大值是 $\dfrac{s^2}{4}$。

总之，基本不等式是许多其他知识点理解和求证等的基础，以上介绍的就是在求证不等式以及在函数求最值等问题中对于基本不等式的运用。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.集合 $A=\{x\,|\,|x-1|\le 3\}$，$B=\{x\,|\,2^{x+1}\ge 4\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $[0,2]$　　B. $(1,3)$　　C. $[1,4]$　　D. $[-2,+\infty)$

2.设 i 是虚数单位，若复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 z 的共轭复数为（　　）

A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $1-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

3.下列命题正确的是（　　）

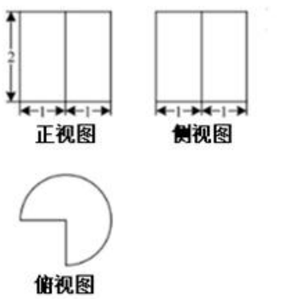
A.若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B.若 $a>b$，则 $a^2>b^2$

C.若 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$　　D.若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$

4.已知在△ABC 中，P 为线段 AB 上一点，且 $\overline{BP}=3\overline{PA}$，若 $\overline{CP}=x\overline{CA}+y\overline{CB}$，则 $x+2y=$（　　）

A. $\frac{9}{4}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

5.某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



A. $3\pi+4$　　B. $\frac{9}{2}\pi+4$　　C. $4\pi+2$　　D. $\frac{11}{2}\pi+4$

6.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ m)$，则“$m<\frac{1}{2}$”是“$<\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}>$为钝角”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

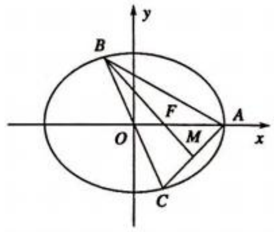
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

7.设 m，n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列结论正确的是（　　）

A.若 $m\perp\beta$，$n\perp\beta$，$n\perp\alpha$，则 $m\perp\alpha$　　B.若 $m// \beta$，$\beta\perp\alpha$，则 $m\perp\alpha$

C.若 $m\perp n$，$n// \alpha$，则 $m\perp\alpha$　　D.若 $m\perp n$，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$，则 $m\perp\alpha$

8.如图，设椭圆的右顶点为 A，右焦点为 F，B 为椭圆在第二象限上的点，直线 BO 交椭圆于 C 点，若直线 BF 平分线段 AC 于 M，则椭圆的离心率是（　　）



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

9.《普通高中数学课程标准》指出：应注意数学知识和实践的联系，发展学生的应用意识和能力。下列几种做法中，与发展学生的应用意识和能力没有直接关系的是（　　）

A.通过丰富的实例引入数学知识

B.通过类比等方式使学生体会数学知识之间的联系

C.引导学生应用数学知识解决实际问题

D.向学生介绍数学在社会中的广泛应用

10.关于数学，以下说法不正确的是（　　）

A.数学是人类文化的重要组成部分

B.数学是自然科学和技术科学的基础

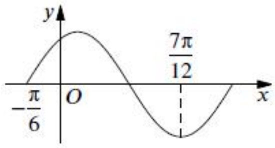
C.数学在形成人类理性思维过程中发挥着重要的作用

D.数学是研究空间形式和数量关系的科学，因而数学是由几何和代数组成的

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.已知 $f(x)$ 是定义域 R 上的奇函数，周期为 4，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $f(31)=$______。

12.设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$（$A$，$\omega$，$\phi$ 为常数，且 $A>0$，$\omega>0$，$0<\phi<\pi$）的部分图象如图所示，则 ϕ 的值是______。



13.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2019}$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)},(n\in N^*)$，则$a_{2019}$的值为______。

14.在空间，方程$x^2+y^2-z^2=1$表示的图形为______。

15.设$z=e^x\cos y$，则$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16.在锐角△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$(b^2+c^2-a^2)\tan A=\sqrt{3}bc$。

（1）求角A；

（2）若$a=3$，则△ABC周长的取值范围。

17.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$。

（1）证明数列$\{a_n+1\}$是等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=3n\cdot(a_n+1)$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n。

18.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过顶点$A(0,1)$的直线$l$与椭圆$C$相交于两点$A$，$B$。

（1）求椭圆C的方程；

（2）若点M在椭圆上且满足$\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{OA}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{OB}$，求直线$l$的斜率$k$的值。

19.已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-(a+1)x+a\ln x+1$。

（1）若$x=3$是$f(x)$的极值点，求$f(x)$的极大值；

（2）求a的范围，使得$f(x)\geq 1$恒成立。

四、案例分析（共 10 分）

20.在“有理数的加法”一节中，对于有理数加法的运算法则的形成过程，两位教师的一些教学环节分别如下：

【教师 1】第一步：教师直接给出几个有理数加法算式，引导学生根据有理数的分类标准，将加法算式分成六类，即正数与正数相加，正数与负数相加，正数与 0 相加，0 与 0 相加，负数与 0 相加，负数与负数相加。

第二步：教师给出具体情境，分析两个正数相加，两个负数相加，正数与负数相加的情况。

第三步：让学生进行模仿练习。

第四步：教师将学生模仿练习的题目分成四类：同号相加，一个加数是 0，互为相反数的两个数相加，异号相加。分析每一类题目的特点，得到有理数加法法则。

【教师 2】

第一步：请学生列举一些有理数加法的算式。

第二步：要求学生先独立运算，然后小组讨论，再全班交流。对于讨论交流的过程，教师提出具体要求：运算的结果是什么？你是怎么得到结果的？

....

讨论过程中，学生提出利用具体情境来解释运算的合理性.....

第三步：教师提出问题："不考虑具体情境，基于不同情况分析这些算式的运算，有哪些规律？"

....

分组讨论后再全班交流，归纳得到有理数加法法则。

问题：

（1）两个教师均重视分类讨论思想，简要说明并评价这两位教师关于分类讨论思想的教学方法的差异；

（2）请你再列举两个分类讨论的例子，并结合你的例子说说对数学中的分类讨论思想及其教学的理解。

五、教案设计（共 20 分）

21.《义务教育数学课程（2011 年版）》关于平行四边形的性质的教学要求是：探索并证明平行四边形性质的定理——平行四边形的对边与对角相等，请基于该要求，完成下列教学设计任务：

（1）设计平行四边形性质的教学目标；

（2）设计两种让学生发现平行四边形性质的教学流程；

（3）设计平行四边形性质证明的教学过程，使学生领悟证明过程中的数学思想方法。

答案及解析

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 D。

【解析】由题意知 $A=\{x\mid -2\le x\le 4\}$，$B=\{x\mid x\ge 1\}$，故 $A\cup B=[-2,+\infty)$。故本题选 D。

2.【答案】选 D。

【解析】由题意知 $z=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i}{2}$，$\therefore \bar{z}=\frac{1-i}{2}$。故本题选 D。

3.【答案】选 C。

【解析】A 选项：$a=2，b=-1$ 时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A 错误；B 选项：$a>b$，可取 $a=-1，b=-2\Rightarrow a^2<b^2$，故 B 错误；C 选项：$a>b，c<d$，即 $-c>-d$ 可得 $a-c>b-d$，故 C 正确；D 选项：若 $0>a>b，0>c>d\Leftrightarrow -b>-a>0,-d>-c>0$，则 $ac<bd$，故 D 错误。故本题选 C。

4.【答案】选 C。

【解析】由于 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PA}$，所以 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=3\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA}\right)=3\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{CA}\Rightarrow\overrightarrow{CP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$。由于 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$ 所以 $x=\frac{3}{4}，y=\frac{1}{4}$，$\therefore x+2y=\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$。故本题选 C。

5.【答案】选 B。

【解析】由题意知该几何体时一个以四分之三圆为底面的圆柱，且底面半径为 1，高为 2，故其表面积为 $S=2\times\frac{3}{4}\times\pi\times1^2+\frac{3}{4}\times2\pi\times1\times2+2\times2\times1=\frac{9\pi}{2}+4$。故本题选 B。

6.【答案】选 B。

【解析】由题意知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1+2m$，若 $m<\frac{1}{2}$ 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 当 $m=-2$ 时 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b},<\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}>=\pi$ 不是钝角，故充分性不成立；若 $<\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}>$ 为钝角，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 且 $\boldsymbol{a}\ne\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\boldsymbol{R})\Rightarrow m<\frac{1}{2}$ 且 $m\ne-2$，故必要性成立。故本题选 B。

7.【答案】选 A。

【解析】A 选项，$m\perp\beta$，$n\perp\beta$，则由垂直于同一平面的两条直线平行知 $m/\!/n$，又 $n\perp\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$，故 A 正确；B 选项，$m/\!/\beta，\beta\perp\alpha$ 则 $m，\alpha$ 可能相交，可能平行，也有可能

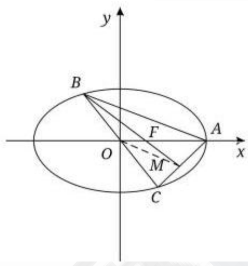
直线m在平面α上，故 B 错误；C 选项，$m\perp n$，$n/\!/\alpha$则m，α可能相交，可能平行，故 C 错误；D 选项，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$知$n/\!/\alpha$或在平面α上，又$m\perp n$则m，α可能相交，可能平行，也有可能直线m在平面α上，故 D 错误。故本题选 A。

8.【答案】选 C。

【解析】如图所示，连接 AB，设 AC 的中点为 M，连接 OM，由于椭圆关于原点对称，所以 O 是 BC 的中点，又 M 是 AC 的中点，所以 OM 是△ABC 的中位线，所以 $OM/\!/AB$，

$OM=\dfrac{1}{2}AB$，因此△$OFM\backsim$△AFB，则$\dfrac{|OF|}{|AF|}=\dfrac{|OM|}{|AB|}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{c}{a-c}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=3c$。所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$。

故本题选 C。



9.【答案】选 B。

【解析】应用意识有两个方面的含义，一方面有意识利用数学的概念、原理和方法解释现实世界中的现象，解决现实世界中的问题；另一方面，认识到现实生活中蕴含着大量与数量和图形有关的问题，这些问题可以抽象成数学问题，用数学的方法予以解决。A、C、D 的做法都将数学知识与实际生活相联系，有利于发展学生的应用意识，而 B 的做法只是让学生意识到数学知识之间的练习，与实际生活无关。故本题选 B。

10.【答案】选 D。

【解析】《普通高中数学课程标准》指出：数学科学是自然科学、技术科学等科学的基础，并在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越大的作用。数学的应用越来越广泛，正在不断地渗透到社会生活的方方面面，它与计算机技术的结合在许多方面直接为社会创造价值，拖动着社会生产力的发展。数学在形成人类理性思维和促进个人治理发展的过程中发挥着独特的，不可替代的作用。数学是人类文化的重要组成部分，数学素质是公民所必须具备的一种基本素质。所以 A、B、C 选项的说法正确。对于 D 选项的说法，数学是研究空间形式和数量关系的科学，但是却不仅仅由几何和代数部分组成，错误。故本题选 D。

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】-1。

【解析】由于周期为 4，所以 $f(31)=f(31-4\times 8)=f(-1)$，$\because f(1)=\log_2(1+1)=1$ 且 $f(x)$ 是定义域 R 上的奇函数，$\therefore f(31)=f(-1)=-f(1)=-1$。

12.【答案】$\frac{\pi}{3}$。

【解析】由图像知 $\frac{3}{4}T=\frac{7}{12}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\pi\Rightarrow T=\pi$，$\therefore \omega=2$，$f(x)=A\sin(2x+\phi)$，$f\left(\frac{7}{12}\pi\right)=A\sin\left(2\times\frac{7}{12}\pi+\phi\right)=-A$，结合 $0<\phi<\pi\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{3}$。

13.【答案】1。

【解析】由于 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)},(n\in N^*)\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},(n\in N^*)$，

$a_2-a_1=1-\frac{1}{2}$

$a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

…

$a_{2019}-a_{2018}=\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}$

以上各式相加得 $a_{2019}-a_1=1-\frac{1}{2019}\Rightarrow a_{2019}=1$。

14.【答案】单叶双曲面。

【解析】根据单叶双曲面的定义可知，其方程可表示为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，令 $a=b=c=1$，所以 $x^2+y^2-z^2=1$ 表示单叶双曲面。

15.【答案】$-e^x\sin y$。

【解析】$\frac{\partial z}{\partial y}$ 对 y 求偏导即可，将 x 看作常数，y 看作变量，进行求导得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin y$。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16.【答案】（1）$\frac{\pi}{3}$；（2）$x\in\left(3+3\sqrt{3},9\right]$。

【解析】（1）由 $\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2bc}\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}$，得到 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$。

（2）$A=\frac{\pi}{3}$，$BC=3$，设周长为 x，由正弦定理知 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R$，由合分比定理知 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB+BC+AC}{\sin A+\sin B+\sin C}$，即 $\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\sin C}$，

$\therefore 2\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\sin(A+B)\right]=x$，即 $x=3+2\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\right]=$

$3+2\sqrt{3}\left(\sin B+\sin B\cos\frac{\pi}{3}+\cos B\sin\frac{\pi}{3}\right)=3+2\sqrt{3}\left(\sin B+\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=3+2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)=3+6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B\right)=3+6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$。又因为$\triangle ABC$

为锐角三角形，所以 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，周长 $x\in\left(3+3\sqrt{3},9\right]$。

17.【答案】(1) $a_n=2^n-1$；(2) $T_n=(3n-3)2^{n+1}+6$。

【解析】(1) 证明：由题意可得：$a_{n+1}+1=2(a_n+1)\Rightarrow\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，$\because a_1+1=2$，

故$\{a_n+1\}$是以首项为 2，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，$\therefore a_n=2^n-1$

(2) 由 (1) 知 $b_n=3n\times2^n$，因此 $T_n=3\times2^1+6\times2^2+9\times2^3+\cdots+3(n-1)2^{n-1}+3n\cdot2^n$

$2T_n=3\times2^2+6\times2^3+\cdots+3(n-1)2^n+3n\cdot2^{n+1}$，$-T_n=3(2^1+2^2+2^3+\cdots2^n)-3n\cdot2^{n+1}$，

$\therefore T_n=3\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-3n\cdot2^{n+1}=(3n-3)2^{n+1}+6$。

18.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2) $k=\pm\frac{1}{2}$。

【解析】(1) 由题意知 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=1$，$\therefore a=2$，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$。

(2) 设 l 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$M(m, n)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+1\end{cases}\Rightarrow$

$(1+4k^2)x^2+8kx=0$，因为直线 l 与椭圆 C 相交于两点，所以

$\Delta=(8k)^2>0$，$x_1+x_2=-\frac{8k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=0$，由于 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OB}$，所以 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OB}$，

$\begin{cases}m=\frac{1}{2}(x_1+\sqrt{3}x_2)\\ n=\frac{1}{2}(y_1+\sqrt{3}y_2)\end{cases}$，点 M 在椭圆上，则 $m^2+4n^2=4$，$\therefore\frac{1}{4}(x_1+\sqrt{3}x_2)^2+(y_1+\sqrt{3}y_2)^2=4$，化简

得 $x_1x_2+4y_1y_2=x_1x_2+$

$x_1x_2+4y_1y_2=x_1x_2+4(kx_1+1)(kx_2+1)=(1+4k^2)x_1x_2+4k(x_1+x_2)+4=0$，

$4k\left(-\dfrac{8k}{1+4k^2}\right)+4=0$

$\Rightarrow k=\pm\dfrac{1}{2}$。故直线 l 的斜率 $k=\pm\dfrac{1}{2}$。

19.【答案】（1）$-\dfrac{5}{2}$；（2）$a\le -\dfrac{1}{2}$。

【解析】（1）$f'(x)=x-(a+1)+\dfrac{a}{x}$，∵ $x=3$ 是 $f(x)$ 的极值点，∴ $f'(3)=3-(a+1)+\dfrac{a}{3}=0$，解得 $a=3$。当 $a=3$ 时，$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x}$，当 x 变化时，

x	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=-\dfrac{5}{2}$；

（2）要使得 $f(x)\ge 1$ 恒成立，即 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{2}x^2-(a+1)x+alnx\ge 0$ 恒成立，设 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-(a+1)x+alnx$，则 $g'(x)=x-(a+1)+\dfrac{a}{x}=\dfrac{(x-1)(x-a)}{x}$，

（i）当 $a\le 0$ 时，由 $g'(x)<0$ 得单减区间为 $(0,1)$，由 $g'(x)>0$ 得单增区间为 $(1,+\infty)$，故 $g(x)_{\min}=g(1)=-a-\dfrac{1}{2}\ge 0\Rightarrow a\le -\dfrac{1}{2}$；

（ii）当 $0<a<1$ 时，由 $g'(x)<0$ 得单减区间为 $(a,1)$，由 $g'(x)>0$ 得单增区间为 $(0,a)$，$(1,+\infty)$，此时 $g(1)=-a-\dfrac{1}{2}<0$，∴不合题意；

（iii）当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，此时 $g(1)=-a-\dfrac{1}{2}<0$，∴不合题意；

（iv）当 $a>1$ 时，由 $g'(x)<0$ 得单减区间为 $(1,a)$，由 $g'(x)>0$ 得单增区间为 $(0,1)$，$(a,+\infty)$，此时 $g(1)=-a-\dfrac{1}{2}<0$，∴不合题意。综上所述，$a\le -\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)\ge 1$ 恒成立。

四、案例分析（共 10 分）

20.【参考答案】

（1）第一位教师采用的教学方法是讲授法。将分类讨论思想融入课堂教学之中，教师直接给出几个有理数加法算式并引导学生利用已经学习过的有理数的分类标准对有理数加法算式进行分类，能够使学生快速地完成知识迁移，接受新知识，并用于解决实际问题。

第二位教师采用的教学方法是发现式教学。这位教师在教学过程中并没有直接强调分类，而是发挥学生的主体地位，让学生自行列举一些有理数加法的算式，充分调动学生的主观能动性。然后通过小组讨论，调动学生的学习积极性，在学生交流的过程中，给予了充分的时间与空间，对有理数加法进行分类讨论、计算，这样的教学方法有助于培养学生的发散性思维。

（2）举例一：二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 的图象的开口方向和与 x 轴交点的个数的判断。当 $a>0$ 时，开口向上，当 $a<0$ 时，开口向下；当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，函数图象与 x 轴有两个交点，当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，函数图象与 x 轴有一个交点，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，函数图象与轴无交点。

举例二：直线 AB 上有一点 C，若 $CA=3AB$，则线段 $CA:CB=$_____。分为点 C 在线段 AB 的延长线上和线段 BA 的延长线上两种情况进行讨论。若点 C 在线段 AB 的延长线上，则 $CA:CB=3:2$；若点 C 在线段 BA 延长线上，则 $CA:CB=3:4$。

分类讨论是对事物共性的抽象过程，在教学活动中，要使学生逐步体会为什么要进行分类，如何分类，如何确定分类的标准等。在分类过程中如何按照对象的不同性质与相同性质对对象进行分类。分类讨论是一种思想方法，它考查学生的逻辑性、周密性和全面性，教学中需要将这种思想渗透到学生的意识中，渗透的过程不是一蹴而就的，而是需要在教学过程中，反复地思考和长时间的积累才能将这种思维方式不断融入知识学习的各个阶段。

五、教案设计（共 20 分）

21.【参考答案】

（1）教学目标：①知识与技能目标：掌握平行四边形边、角、对角线的有关性质，并会运用平行四边形的性质解决简单问题。

②过程与方法目标：在体会通过数学活动，探索归纳获得数学结论的过程，感受平行四边形性质在解决问题中的作用。通过对问题解决的过程的反思，获得解决问题的经验，积累解决问题的方法。

③情感态度价值观目标：通过积极参与数学活动，让学生学会在独立思考的基础上，积极参与对数学问题的探讨，享受运用知识解决问题的成功体验，增强学好数学的信心。

（2）第一种：观察—猜想—验证—归纳

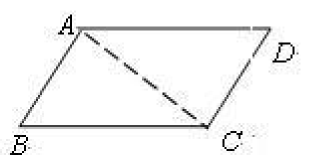
课件展示各种图形，让学生找出平行四边形，并说说自己的理由，当学生说出“两组对边分别平行”之后，教师提问“平行四边形除了两组对边分别平行之外，还有没有其他性质呢？”让学生猜一猜，然后再让学生通过画一画（在格点纸上画一个平行四边形）、量一量、剪一剪（将所画的平行四边形沿其中一条对角线剪开）等活动验证自己的猜想，最后总结出平行四边形对边与对角的性质。

第二种：动手操作—小组讨论—归纳总结

在学生了解平行四边形定义之后，让学生用一张半透明的纸复制学生之前画的平行四边形，并将复制后的四边形绕一个顶点旋转 180°，并提问：你能平移该纸片，使它与你画的平行四边形重合吗？”让学生思考，并讨论“通过以上的活动，你能得到哪些结论？平行四边形的对边、对角分别有什么关系？”用这些问题引导学生发现平行四边形对边相等，对角相等。

（3）你能证明“平行四边形的对边相等，平行四边形的对角相等”吗？

师生共议，写出已知、求证及证明过程



已知：如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形

求证：$AB=CD$，$AD=BC$；$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$

分析：连接对角线将平行四边形的问题通过转化为全等三角形的问题进行解决

设计意图：注重直观操作与逻辑推理的有机结合，把几何论证作为探究活动的自然延续和必然发展。同时，通过证明，验证了猜想的正确性，让学生感受到数学结论的确定性和证明的必要性

总结：性质 1：平行四边形的对边相等.

符号语言:∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形

∴ $AB=CD$，$AD=BC$ 。

性质 2：平行四边形的对角相等.

符号语言：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形

∴ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$ 。

师生共议：以上性质为证明（解决）线段相等，角相等，提供了新的理论依据。

设计意图：对平行四边形性质的归纳，使学生对平行四边形特征更深入认识，也是知识的一次升华，突出了教学重点。