教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.已知 i 是虚数单位，复数 $\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^2$ 的值是（　　）

A. $2\mathrm{i}$　　B. $-2\mathrm{i}$　　C. 2　　D. -2

2.设 $y=x\mathrm{e}^x$，其中 e 是自然对数的底数，则 $y'=$（　　）

A. e^x　　B. $x\mathrm{e}^x$　　C. $(x+1)\mathrm{e}^x$　　D. $(x-1)\mathrm{e}^x$

3. $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$（　　）

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{\pi}{4}$

4. $x^2+y^2=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x\\y'=3y\end{cases}$ 后所得图形的焦距（　　）

A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{13}$　　C. 4　　D. 6

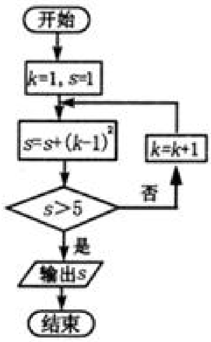
5.有 200 人参加了一次会议，为了了解这 200 人参加会议的体会，将这 200 人随机号为 001，002，003，……，200，用系统抽样的方法（等距离）抽出 20 人，若编号为 006，036，041，176，196 的 5 个人中有 1 个没有抽到，则这个编号是（　　）

A.006　　B.041　　C.176　　D.196

6.在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且 a_2-a_1，a_3-a_1，a_4+a_1 成等比数列，则 $a_5=$（　　）

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

7.执行如右图所示的程序框图，则输出的 s 的值是（　　）



A.7　　B.6　　C.5　　D.3

8.已知函数 $f(x)=\ln x-x^2$ 与 $g(x)=(x-2)^2+\dfrac{1}{2(2-x)}-m(m\in\mathbf{R})$ 的图象上存在关于 $(1,0)$ 对称的点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,1-\ln2)$　　B. $(-\infty,1-\ln2]$　　C. $(1-\ln2,+\infty)$　　D. $[1-\ln2,+\infty)$

9.因为正弦函数是周期函数，$f(x)=\sin|x|$ 是正弦函数，所以 $f(x)=\sin|x|$ 是周期函数，以上推理（　　）

A.结论正确　　B.大前提不正确　　C.小前提不正确　　D.全不正确

10.通过义务教育阶段的数学学习，学生要能够获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、（　　）、基本活动经验。

A.基本思想　　B.基本思维　　C.基本思考　　D.基本能力

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.能够说明“设 a，b，c 是任意实数，若 $a>b>c$，则 $a+b>c$”是假命题的一组整数 a，b，c 的值依次为_______。

12.若 $(1+x)(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8$ 的值为_______。

13.已知样本数据为 40，42，40，a，43，44，且这个样本的平均数为 43，则该样本的标准差为_______。

14.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{1}{3}}, & x\le 0\\ (\frac{1}{3})^x, & x>0\end{cases}$，则 $f[-f(-27)]=$_______。

15.《义务教育数学课程标准（2011 年版）》在教学建议中提出：“综合与实践”的实施是以_______为载体、以学生自主参与为主的学习活动。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 题每小题 10 分，共 60 分）

16.已知复数 $z=m(m-1)+(m^2-1)\mathrm{i}$，其中 $m\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位。

（1）当 m 为何值时，复数 z 是纯虚数？

（2）若复数 z 对应的点在复平面内第二，四象限角平分线上，求 z 的模 $|z|$。

17.为调查人们在购物时的支付习惯，某超市对随机抽取的 600 名顾客的支付方式进行了统计，数据如下表所示：

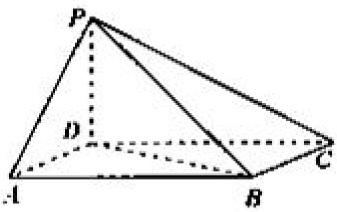
支付方式	微信	支付宝	购物卡	现金
人数	200	150	150	100

现有甲、乙、丙三人将进入该超市购物，各人支付方式相互独立，假设以频率近似代替概率。

（1）求三人中使用微信支付的人数多于现金支付人数的概率；

（2）记 X 为三人中使用支付宝支付的人数，求 X 的分布列及数学期望。

18.如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$AD\perp BD$，$AB=2AD$，且 $PD\perp$ 底面 $ABCD$。



（1）证明：平面 $PBD\perp$ 平面 PBC；

（2）若二面角 $P-BC-D$ 为 $\frac{\pi}{6}$，求 AP 与平面 PBC 所成角的正弦值。

19.已知圆 $C:x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 和抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$，圆 C 与抛物线 E 的准线交于 M、N 两点，ΔMNF 的面积为 p，其中 F 是 E 的焦点。

（1）求抛物线 E 的方程；

（2）不过原点 O 的动直线 l 交该抛物线于 A，B 两点，且满足 $OA\perp OB$，设点 Q 为圆 C 上任意一动点，求当动点 Q 到直线 l 的距离最大时直线 l 的方程。

20.已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$。

（1）求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ；

（2）若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，且 AD 与 BC 交于点 P，求 $|\overrightarrow{OP}|$。

21.案例分析

关于加减消元法有如下片段，请进行分析。

“我们的小世界杯”足球赛规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分。“勇士”队赛了 9 场，共得 17 分。已知这个队只输 2 场，那么胜了几场？又平了几场呢？有学生写出如下的解法。

解：设勇士队胜了 x 场，平了 y 场。根据得分的总场次所提供的等量关系有方程

$x+y=7$ ①

根据得分的总数所提供的等量关系有方程

$3x+y=17$ ②

由②—①得 $2x=10$，$x=5$。

代入①得 $y=2$。

答：勇士队胜了 5 场，平了 2 场。

阅读以上材料，回答以下问题：

（1）上面利用加减消元法得到正确答案，请用代入法解决上面的问题。

（2）有学生问：为什么①式的赛场数与②式的得分数能够相减？请你进行解释。

22.教学设计

阅读下面的材料：人教版初中数学八年级 12.1《全等三角形》

探究

把一块三角尺按在纸板上，画下图形，照图形裁下来的纸板和三角尺的形状、大小完全一样吗？把三角尺和裁得的纸板放在一起能够完全重合吗？从同一张底片冲洗出来的两张尺寸相同的照片上的图形，放在一起也能够完全重合吗？

可以看到，形状、大小相同的图形放在一起能够完全重合．能够完全重合的两个图形叫做全等形（congruent figures）．

能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形（congruent triangles）．

把两个全等的三角形重合到一起，重合的顶点叫做对应顶点，重合的边叫做对应边，重合的角叫做对应角．例如，图 12.1-2（1）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，其中点 A 和点 D，点 B 和点 E，点 C 和点 F 是对应顶点；AB 和 DE，BC 和 EF，AC 和 DF 是对应边；$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle B$ 和 $\angle E$，$\angle C$ 和 $\angle F$ 是对应角．

记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上．例如，图 12.1-2（2）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 全等，点 A 和点 D，点 B 和点 B，点 C 和点 C 是对应顶点，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$．

思考

图 12.1-2（1）中，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，对应边有什么关系？对应角呢？

全等三角形有这样的性质：

全等三角形的对应边相等．全等三角形的对应角相等．

根据材料，回答以下问题。

（1）针对该片段，写出教学目标。

（2）针对该片段，设计教学过程。

答案及解析

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 A。

【解析】复数$\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^2=\left(1-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}\right)^2=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$。故本题选 A。

2.【答案】选 C。

【解析】因为$y=x\mathrm{e}^x$，所以$y'=\left(x\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=(x+1)\mathrm{e}^x$。故本题选 C。

3.【答案】选 D。

【解析】定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$的几何意义是圆$x^2+y^2=1$的$\frac{1}{4}$个圆的面积，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\times1^2=\frac{\pi}{4}$。故本题选 D。

4.【答案】选 A。

【解析】由$\begin{cases}x'=2x\\y'=3y\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\frac{x'}{2}\\y=\frac{y'}{3}\end{cases}$，代入$x^2+y^2=1$得$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=1$。∴椭圆的焦距为$2\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$。故本题选 A。

5.【答案】选 B。

【解析】由题意，从 200 人中用系统抽样的方法抽取 20 人，所以抽样的间隔为$\frac{200}{20}=10$，若在第 1 组中抽取的数字为 006，则抽取的号码满足$6+(n-1)\times10=10n-4$，其中$n\in\mathbf{N}^*$，其中，当$n=4$时，抽取的号码为 36；当$n=18$时，抽取的号码为 176；当$n=20$时，抽取的号码为 196，所以 041 这个编号不在抽取的号码中。故本题选 B。

6.【答案】选 C。

【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由a_2-a_1，a_3-a_1，a_4+a_1成等比数列，则$\left(a_3-a_1\right)^2=\left(a_2-a_1\right)\left(a_4+a_1\right)$，即$(2d)^2=d\cdot(2+3d)$，解得$d=2$或$d=0$（舍去），所以$a_5=a_1+4d=1+4\times2=9$。故本题选 C。

7.【答案】选 B。

【解析】$k=1$，$s=1$，代入$s=s+(k-1)^2 \Rightarrow s=1$，判断$s>5$，答案为否，得到$k=2$，重新进入循环得到$s=2$，判断$s>5$，答案为否，得到$k=3$，重新进入循环得到$s=6$，判断$s>5$，答案为是，输出$s=6$。故本题选 B。

8.【答案】选 D。

【解析】$\because$函数$f(x)=\ln x-x^2$与$g(x)=(x-2)^2+\dfrac{1}{2(2-x)}-m(m\in\mathbf{R})$的图象上存在关于$(1,0)$对称的点，$\therefore$ $f(x)=-g(2-x)$有解，$\therefore$ $\ln x-x^2=-x^2-\dfrac{1}{2x}+m$，$\therefore$ $m=\ln x+\dfrac{1}{2x}$在$(0,+\infty)$有解，$m'=\dfrac{2x-1}{2x^2}$，$\therefore$函数在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，$\therefore$ $m\geq\ln\dfrac{1}{2}+1=1-\ln2$。故本题选 D。

9.【答案】选 C。

【解析】根据演绎推理得：小前提：$f(x)=\sin|x|$是正弦函数，错误。故本题选 C。

10.【答案】选 A。

【解析】2011 年《义务教育数学课程标准》指出：通过义务教育阶段的数学学习，学生能获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。故本题选 A。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】$-1,-2,-3$

【解析】“设a，b，c是任意实数，若$a>b>c$，则$a+b>c$”是假命题，令a，b，c分别为$-1,-2,-3$，满足$-1>-2>-3,-1+(-2)=-3$与结论矛盾，所以$-1,-2,-3$能说明该命题是假命题。

12.【答案】-3

【解析】令$x=1$，得$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8=-2$，令$x=0$，得$a_0=1$，则$a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8=-2-1=-3$。

13.【答案】$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

【解析】由平均数的公式，可得$\dfrac{1}{6}(40+42+40+a+43+44)=43$，解得$a=49$，

所以方差为 $s^2=\frac{1}{6}[(40-43)^2+(42-43)^2+(40-43)^2+(43-43)^2+(43-43)^2+(44-43)^2]=\frac{28}{3}$，所以样本的标准差为 $s=\frac{2\sqrt{21}}{3}$。

14.【答案】$\frac{1}{27}$

【解析】由函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{1}{3}},\ x\le 0\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ x>0\end{cases}$，可得 $f(-27)=(-27)^{\frac{1}{3}}=-3$，则 $f[-f(-27)]=f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，即答案为 $\frac{1}{27}$。

15.【答案】问题

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》在教学建议中提出："综合与实践"的实施是以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 题每小题 10 分，共 60 分）

16.【答案】（1）0；（2）见解析。

【解析】（1）由复数 z 是纯虚数，得 $\begin{cases}m(m-1)=0\\ m^2-1\ne 0\end{cases}$，即 $m=0$ 时，$z=-\mathrm{i}$ 是纯虚数；

（2）∵复数 z 对应的点在复平面内第二，四象限角平分线上，由 $m(m-1)=-(m^2-1)$，即 $2m^2-m-1=0$，得 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=1$。

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$z=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$；

当 $m=1$ 时，$z=0$，则 $|z|=0$。

17.【答案】（1）$\frac{55}{108}$；（2）见解析。

【解析】（1）由表格得顾客使用微信、支付宝、购物卡和现金支付的概率分别为 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$。设 Y 为三人中使用微信支付的人数，Z 为使用现金支付的人数，事件 A 为"三人中使用微信支付的人数多于现金支付人数"，则 $P(A)=P(Y=3)+P(Y=2)+P(Y=1,\ Z=0)=$

$\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+C_3^1\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{4}=\frac{55}{108}$。

（2）由题意可知 $X\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$，故所求分布列为

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$；　　$P(X=1)=C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$；

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$；$P(X=3)=C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$。

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

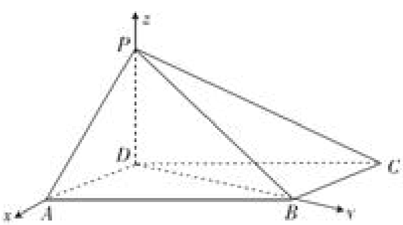
$E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

18.【答案】（1）见解析；（2）$\frac{\sqrt{10}}{5}$。

【解析】（1）证明：因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，因为平行四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AD\perp BD$，所以 $BC\perp BD$，因为 $PD\cap BD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PBD，而 $BC\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PBD。

（2）由（1）知，$BC\perp$ 平面 PBD，所以 $\angle PBD$ 即为二面角 $P-BC-D$ 的平面角，即 $\angle PBD=\frac{\pi}{6}$，分别以 DA，DB，DP 所在的直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，如图所示，设 $BD=2$，则 $AD=PD=1$，则 $A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(-1,2,0)$，$P(0,0,1)$，所以 $\overline{AP}=(-1,0,1),\overline{BC}=(-1,0,0),\overline{BP}=(0,-2,1)$，设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overline{BC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overline{BP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x=0\\ -2y+z=0\end{cases}$，令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,1,2)$，所以 AP 与平面 PBC 所成角的正弦值为

$\sin\theta=\frac{\left|\overline{AP}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overline{AP}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$。



19.【答案】（1） $y^2=4x$；（2） $y=5x-20$

【解析】（1）由题意知，圆 C 的标准方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，圆心坐标为 $(-1,1)$ 抛物线的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，将 $x=-\frac{p}{2}$ 代入圆方程，得 $y=1\pm\sqrt{p-\frac{p^2}{4}}$，

$\therefore |MN|=2\sqrt{p-\frac{p^2}{4}}$ ，ΔMNF 的面积为 $p\sqrt{p-\frac{p^2}{4}}=p$，$\therefore$ $p=2$，$\therefore$抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$。

（2）设 l 的直线方程为 $x=my+t$， $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，联立方程组得：$\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+t \end{cases}$，

消去 x，整理得 $y^2-4my-4t=0$，令 $\Delta=16m^2+4\times4t>0$，得 $m^2+t>0$。由韦达定理得 $\begin{cases} y_1+y_2=4m \\ y_1y_2=-4t \end{cases}$ ①，则 $x_1x_2=(my_1+t)(my_2+t)=m^2y_1y_2+mt(y_1+y_2)+t^2$。

由于 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$，可得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $(m^2+1)y_1y_2+mt(y_1+y_2)+t^2=0$ ②，将①代入②整理得 $t(t-4)=0$，由于 $t\neq0$ 得 $t=4$，则直线 l 过定点 $N(4,0)$，当 $CN\perp l$ 时，圆心到直线的距离取得最大值，此时 $k_{CN}=\frac{1-0}{-1-4}=-\frac{1}{5}$，则直线 l 的斜率为 $k=5$，所以直线 l 的方程为 $y=5x-20$。

20.【答案】（1） $\theta=\frac{2\pi}{3}$；（2） $|\overline{OP}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$。

【解析】（1）$\because$ $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$，$\therefore$ $4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2=61$。又 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$ $\therefore$ $64-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-27=61$，$\therefore$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$。$\therefore$ $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{4\times3}=-\frac{1}{2}$。又 $0\le\theta\le\pi$，$\therefore$ $\theta=\frac{2\pi}{3}$。

（2）$\overline{OP}=x\overline{OA}+(1-x)\overline{OD}=x\boldsymbol{a}+\frac{2(1-x)}{3}\boldsymbol{b}$，$\overline{OP}=y\overline{OB}+(1-y)\overline{OC}=y\boldsymbol{b}+\frac{1-y}{2}\boldsymbol{a}$

$\therefore$ $x=\frac{1-y}{2},\ y=\frac{1}{2}$，$\therefore$ $x=\frac{1}{4},\ y=\frac{2}{3}(1-x)$，$\therefore$ $\overline{OP}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\therefore |\overline{OP}|^2=\frac{1}{16}\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2=\frac{7}{4}$，$\therefore$ $|\overline{OP}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$。

21.【参考答案】

（1）解：设勇士队胜了 x 场，平了 y 场。根据得分的总场次所提供的等量关系有方程

$x+y=7$ ①

根据得分的总数所提供的等量关系有方程

$3x+y=17$ ②

由①得 $y=7-x$

代入②得 $2x=10$，$x=5$

代入①得 $y=2$

答：勇士队胜了 5 场，平了 2 场。

（2）这里涉及生活原型与数学模式的关系。一方面式①、②来源于比赛场次与得分总数（有单位问题）。另一方面，列成方程后又完全舍弃了原型的物理性质，成为抽象的模式。这时候 $x+y=7$ 可以去刻画任何“两者和为 7”的生活现象而不专属于某一生活现象。方程的加减，是根据方程的理论与方法进行的（消元化归），这是数学内部的事情，与单位无关。最后，得出 $x=5$，$y=2$ 后，才又回到生活中去，给出解释（有单位了）。

22.【参考答案】

（1）教学目标：

①知识与技能目标：理解全等三角形的概念和性质。

②过程与方法目标：通过对生活中对称图形的观察和分析，提高学生的归纳总结和迁移能力。

③情感、态度与价值观目标：在学习过程中让学生感受到图形的对称美，全等美，更加热爱数学，热爱生活。

（2）教学过程

（一）图片导入

1.教师用 PPT 呈现几对完全相同的图片。提出问题：各组图形的形状与大小有什么特点？

学生通过得出结论：每一对图形的形状和大小完全相同。师生共同归纳：能够完全重合的两个图形叫做全等形。

（二）动手操作，感受全等三角形。

教师布置任务：

1.在纸板上任意画一个△ABC，并剪下，然后同桌之间说出三角形的三个角、三条边和每个角的对边、每个边的对角。

2.如何另一张纸板再剪一个△DEF，使它与△ABC 全等？

学生通过动手操作，得到两个可以完全重合的三角形。

师生共同得出结论：能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形。

3.自主阅读材料，总结全等的符号和读法，并尝试用符号表示△*DEF* 和△*ABC* 的关系。

（三）探究三角形的性质

1.教师提出问题：你手中的两个三角形是全等的，但是如果任意摆放能重合吗？该怎样做它们才能重合呢？

学生讨论、交流、归纳得出：两个全等三角形任意摆放时，并不一定能完全重合，只有当把相同的角重合到一起（或相同的边重合到一起）时它们才能完全重合。

教师给出定义：把重合在一起的顶点、角、边分别称为对应顶点、对应角、对应边。

2.教师提出问题：两个全等三角形的对应顶点、对应角、对应边有什么关系？并用几何语言表示出来。

学生通过观察得出结论：全等三角形的性质：全等三角形的对应边相等，全等三角形的对应角相等。

（四）小试牛刀

大屏幕展示两个全等三角形：△*MFN*≌△*FED*，引导学生写出图中相等的线段，相等的角；

（五）小结作业

1.引导学生总结本节课的收获。

2.作业：课下寻找身边的全等三角形。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.已知 i 为虚数单位，复数 $z=2\mathrm{i}+\dfrac{9-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$（　）

A. $2+3\sqrt{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{202}}{2}$　　C. 5　　D. 25

2.若函数 $f(x)=x^2$，设 $a=\log_5 4$，$b=\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{3}$，$c=2^{\frac{1}{5}}$，则 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 的大小关系（　）

A. $f(a)>f(b)>f(c)$　　B. $f(b)>f(c)>f(a)$

C. $f(c)>f(b)>f(a)$　　D. $f(c)>f(a)>f(b)$

3.下列说法正确的是（　）

A.若命题 p，$\neg q$ 均为真命题，则命题 $p\wedge q$ 为真命题。

B.“若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$”的否命题是“若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha\neq\dfrac{1}{2}$”。

C.在△ABC，“$C=\dfrac{\pi}{2}$”是“$\sin A=\cos B$”的充要条件。

D.命题 p：“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0{}^2-x_0-5>0$”的否定为 $\neg p$：“$\forall x\in R$，$x^2-x-5\le 0$”。

4.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & x\le 0\\ \log_{\frac{1}{2}}x, & x>0\end{cases}$，且 $f\left(m-\dfrac{1}{2}\right)=0$，则不等式 $f(x)>m$ 的解集为（　）

A. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$　　C. $\left(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$　　D. $(-1,+\infty)$

5.在△ABC 中，D 为 BC 边上一点，且 $AD\perp BC$，向量 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 与向量 $\overrightarrow{AD}$ 共线，若 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$，则 $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{CG}\right|}=$（　）

A.3　　B. $\sqrt{5}$　　C.2　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

6.已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的一条渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，则该双曲线的离心率为（　　）

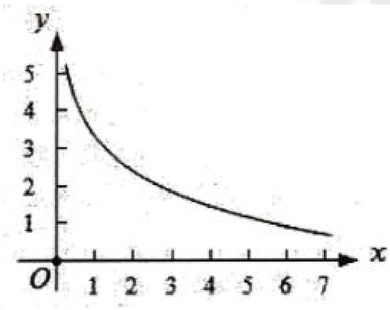
A.$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D.$\sqrt{3}$

7.甲乙两人同时从寝室到教室，甲一半路程步行，一半路程跑步，乙一半时间步行，一半时间跑步，如果两人步行速度、跑步速度均相同，则（　　）

A.甲先到教室　　B.乙先到教室

C.两人同时到教室　　D.谁先到教室不确定

8.函数$y=f(x)$的图象如图所示，$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数，下列数值排序正确的是（　　）



A. $f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)<0$　　B. $f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)<0$

C. $f(3)-f(2)<f'(3)<f'(2)<0$　　D. $f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)<0$

9.1834年有位数学家发现了一个处处连续但处处不可微的函数例子，这位数学家是（　　）

A.高斯　　B.波尔查诺　　C.魏尔斯特拉斯　　D.柯西

10.2011年《义务教育数学课程标准》指出：在各学段中，安排了四个部分的课程内容："数与代数"、"（　　）"、"统计与概率"、"综合与实践"。

A.图形与几何　　B.图像与几何　　C.立体与几何　　D.图像与立体

二、填空题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

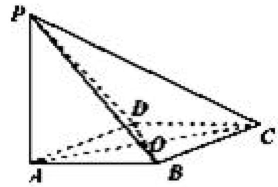
11.设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点M在C上，$|MF|=5$，若以MF为直径的圆过点$(0,2)$，则$p=$_______。

12.已知i是虚数单位，若$z(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则$|z|=$_______。

13.若函数$f(x)=kx-\ln x$在区间$(1,+\infty)$上为单调增函数，则k的取值范围是_______。

14.如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，$\angle BAD=60°$，侧棱$PA\perp$底面$ABCD$，

$AB=\sqrt{3}$，$PA=2$，则异面直线 AC 与 PB 所成角的余弦值为_______。



15.《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出空间观念主要是指

①根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；②想象出物体的方位和相互之间的位置关系；③描述图形的运动和变化；④依据语言的描述画出图形等；⑤借助几何直观可以把复杂的数学问题变得简明、形象，有助于探索解决问题的思路，预测结果；⑥几何直观可以帮助学生直观地理解数学，在整个数学学习过程中都发挥着重要作用。

以上正确的是_______。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 题每小题 10 分，共 60 分）

16.请用综合法和分析法两种不同的方法证明：

（1）如果 a，$b>0$，则 $\lg\dfrac{a+b}{2}\geq\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$；

（2）$2\sqrt{2}-\sqrt{7}>\sqrt{10}-3$。

17.在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\sin B+\sqrt{3}b\cos A=0$。

（1）求 A 的大小；

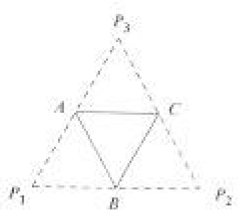
（2）若 $a=\sqrt{7}$，$b=3$，求 $\triangle ABC$ 的面积。

18.设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-(a+1)x+a\ln x$。

（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(3,f(3))$ 处切线的斜率；

（2）求函数 $f(x)$ 的极值点.

19.底面边长为 2 的正三棱锥 $P-ABC$，其表面展开图是三角形 $P_1P_2P_3$，如图，求△ $P_1P_2P_3$ 的各边长及此三棱锥的体积 V。



20.已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，过点 $P(0,1)$ 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 E 于 A，B 两点，当直线垂直于 y 轴时，$|AB|=2\sqrt{6}$。

（1）求椭圆 E 的方程。

（2）当 k 变化时，在 x 轴上是否存在点 $M(m,0)$，使得 $\triangle AMB$ 是以 AB 为底的等腰三角形？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由。

21.案例分析

为引出单项式概念，教师在复习了代数式的概念后，要求学生讨论黑板上的三个代数式 $7m$，$-a$，x^2 的共同点，希望学生能回答出“都具有数与字母的积或字母与字母的积的特点”。

生 1：都是未知数

师：这里不叫未知数，叫字母。

生 2：都是两个字母的相乘，或数与字母相乘。

师：对，还有呢？

生 3：都有很多字母。

师：（摇摇头）

生 4：都是整式。

生 5：字母取任意一个数都可以。

生 6：它们算起来比较简便。

学生的回答是非常踊跃的，思维是开放的，但对教师想得出的结论就是"启而不发”。你试着从评价的角度为什么会出现这种问题？

22.教学设计

阅读下面的材料：人教版初中数学七年级 1.3.1《有理数的加法》

有理数加法法则：

1. 同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加.

2. 绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值. 互为相反数的两个数相加得 0.

3. 一个数同 0 相加，仍得这个数.

《义务教育数学课程标准（2011 版）》指出：实行启发式教学有助于落实学生的主体地位和发挥教师的主导作用。创设情境、设计问题，引导学生自主探索、合作交流；组织学生操作实验、观察现象、提出猜想、推理论证等，都能有效地启发学生的思考，使学生成为学习的主体，逐步学会学习。

（1）针对该片段，写出教学目标。

（2）依据上述素材和要求，请你创设合理的情境，撰写一份教学过程。（可以借助数轴这个工具，使得学生理解有理数加法法则）

答案及解析

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 C。

【解析】对复数 z 进行化简 $z=2i+\frac{9-3i}{1+i}=2i+\frac{(9-3i)(1-i)}{2}=3-4i$，所以 $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$。故本题选 C。

2.【答案】选 D。

【解析】根据题意，函数 $f(x)=x^2$，是二次函数，其对称轴为 y 轴，且在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，$a=log_5 4$，$b=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}=log_5 3$，$c=2^{\frac{1}{5}}$，则有 $0<b<a<1<c$，则 $f(c)>f(a)>f(b)$；故本题选 D。

3.【答案】选 D。

【解析】A 选项中：若命题 p，$\neg q$ 均为真命题，则 q 是假命题，所以命题 $p\wedge q$ 为假命题，所以 A 不正确；B 选项：“若 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$”的否命题是“若 $\alpha\neq\frac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha\neq\frac{1}{2}$”，所以 B 不正确；C 选项：在△$ABC$ 中，“$C=\frac{\pi}{2}$”⇔“$A+B=\frac{\pi}{2}$”⇔“$A=\frac{\pi}{2}-B$”$\Rightarrow\sin A=\cos B$，反之 $\sin A=\cos B\Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$ 或 $A=\frac{\pi}{2}+B$，故“$C=\frac{\pi}{2}$”不一定成立，$\therefore C=\frac{\pi}{2}$ 是 $\sin A=\cos B$ 成立的充分不必要条件，所以 C 不正确；D 选项：命题 p：“$\exists x_0\in R,x_0{}^2-x_0-5>0$”的否定为 $\neg p$：“$\forall x\in R$，$x^2-x-5\le 0$”，所以 D 正确。故本题选 D。

4.【答案】选 C。

【解析】函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & x\le 0\\ \log_{\frac{1}{2}}x, & x>0\end{cases}$，可知 $x\le 0$ 时，$f(x)>1$，所以 $m-\frac{1}{2}>0$，可得 $\log_{\frac{1}{2}}\left(m-\frac{1}{2}\right)=0$ 解得 $m=\frac{3}{2}$。不等式 $f(x)>m$ 即不等式 $f(x)>\frac{3}{2}$，可得：$\begin{cases}x\le 0\\ 2^x+1>\frac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}x>\frac{3}{2}\end{cases}$，解得：$x\in(-1,0]$ 或 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，即 $x\in\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$。故本题选 C。

5.【答案】选 B。

【解析】取 BC 的中点 E，则 $\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{AE}$ 与向量 $\overline{AD}$ 共线，所以 A、D、E 三点共线，即△ABC 中 BC 边上的中线与高线重合，则 $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{10}$，因为 $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=0$，所以 G 为△ABC 的重心，则 $\left|\overline{GA}\right|=2\left|\overline{GE}\right|=\frac{2}{3}\sqrt{\overline{AC}^2-(\frac{\left|\overline{BC}\right|}{2})^2}=2$，所以 $\left|\overline{CE}\right|=1,\left|\overline{CG}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{CG}\right|}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$。故本题选 B。

6.【答案】选 A。

【解析】双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，即 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$\therefore c=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，$\therefore$ 双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$。故本题选 A。

7.【答案】选 B。

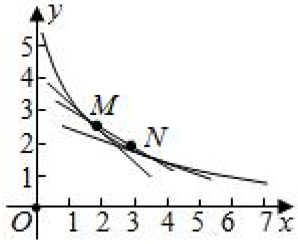
【解析】设两人步行、跑步的速度分别为 V_1，V_2，（$V_1<V_2$）。图书馆到教室的路程为 $2S$。

则甲所用的时间为：$t_1=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}$。乙所用的时间 t_2，满足 $\frac{1}{2}t_2v_1+\frac{1}{2}t_2v_2=2s$，解得 $t_2=\frac{4s}{v_1+v_2}$。

则 $\frac{t_1}{t_2}=\frac{s\left(v_1+v_2\right)}{v_1v_2}\times\frac{v_1+v_2}{4s}=\frac{\left(v_1+v_2\right)^2}{4v_1v_2}>\frac{4v_1v_2}{4v_1v_2}=1$。$\therefore t_1>t_2$． 故乙先到教室。故本题选 B。

8.【答案】选 D。

【解析】根据题意，设 $M\left(2,f\left(2\right)\right)$，$N\left(3,f\left(3\right)\right)$ 为函数 $y=f\left(x\right)$ 的上的点，则 $f'\left(2\right)$ 为函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处切线的斜率，$f'\left(3\right)$ 为函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=3$ 处切线的斜率，$f\left(3\right)-f\left(2\right)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$，为直线 MN 的斜率，结合图象分析可得 $f'(2)<f\left(3\right)-f\left(2\right)<f'(3)<0$。故本题选 D。



9.【答案】选 B。

【解析】《数学史概论》中指出波尔查诺在1834年发现了一个处处连续但处处不可微的函数例子。故本题选B。

10.【答案】选A。

【解析】《义务教育数学课程标准（2011年版）》指出：在各学段中，安排了四个部分的课程内容："数与代数"、"图形与几何"、"统计与概率"、"综合与实践"。故本题选A。

二、填空题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

11.【答案】2或8

【解析】设$M(x,\ y)$，$|MF|=5\Rightarrow x+\frac{p}{2}=5\Rightarrow x=5-\frac{p}{2}$，$y^2=2px=10p-p^2$，设$A(0,2)$，

$\therefore \overline{AM}=(x,\ y-2)$，$\overline{AF}=(\frac{p}{2},-2)$，$\overline{AM}\cdot\overline{AF}=0\Rightarrow x\cdot\frac{p}{2}+4-2y=0\Rightarrow$

$\frac{y^2}{4}+4-2y=0\Rightarrow y=4\Rightarrow 16=10p-p^2\Rightarrow p=2$ 或 8。

12.【答案】$\sqrt{2}$

【解析】由$z(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}\Rightarrow z=\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-1+\mathrm{i}$，$\therefore |z|=\sqrt{2}$ 即答案为$\sqrt{2}$。

13.【答案】$[1,+\infty)$

【解析】函数$f(x)=kx-\ln x$在区间$(1,+\infty)$上为单调增函数等价于导函数在此区间恒大于等于0，故$k\geq\frac{1}{x}\Rightarrow k\geq 1$。

14.【答案】$\frac{3\sqrt{7}}{14}$

【解析】由题意，以OA，OB分别为x，y轴，以过O点平行与PA的z直线为轴建立空间直角坐标系，则$A(\frac{3}{2},0,0)$，$B(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$P(\frac{3}{2},0,2)$，所以$\overline{OA}=(\frac{3}{2},0,0),\overline{PB}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-2)$，设$AC$与$PB$所成的角为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{|\overline{OA}\cdot\overline{PB}|}{|\overline{OA}|\cdot|\overline{PB}|}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$，所以$AC$与$PB$所成的角的余弦值为$\frac{3\sqrt{7}}{14}$。

15.【答案】①②③④

【解析】《义务教育数学课程标准（2011年版）》指出空间观念主要是指根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；想象出物体的方位和相互之间的位置关系；描述图形的运动和变化；依据语言的描述画出图形等；⑤⑥两条属于几何直观的内容。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 题每小题 10 分，共 60 分）

16.【答案】（1）见解析；（2）见解析

【解析】（1）方法一：（综合法）

证明：因为 $a, b>0$，所以 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，所以 $\lg\frac{a+b}{2}\ge\lg\sqrt{ab}$，因为 $\lg\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\lg ab=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，所以 $\lg\frac{a+b}{2}\ge\frac{\lg a+\lg b}{2}$。

方法二：（分析法）

证明：要证 $\lg\frac{a+b}{2}\quad\frac{\lg a+\lg b}{2}$，即为 $\lg\frac{a+b}{2}\ge\frac{1}{2}\lg ab=\lg\sqrt{ab}$，即证 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，由 $a, b>0$，上式显然成立。

（2）方法一：（分析法）

证明：要证 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}>\sqrt{10}-3$，即证 $2\sqrt{2}+3>\sqrt{10}+\sqrt{7}$，即证 $\left(2\sqrt{2}+3\right)^2>\left(\sqrt{10}+\sqrt{7}\right)^2$。即证 $17+12\sqrt{2}>17+2\sqrt{70}$，即证 $12\sqrt{2}>2\sqrt{70}$，即证 $6\sqrt{2}>\sqrt{70}$。因为 $\left(6\sqrt{2}\right)^2=72>\left(\sqrt{70}\right)^2=70$，所以 $6\sqrt{2}>\sqrt{70}$ 成立。由上述分析可知 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}>\sqrt{10}-3$ 成立。

方法二：（综合法）

由 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}=\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}$，且 $\sqrt{10}-3=\frac{1}{\sqrt{10}+3}$，由 $2\sqrt{2}<\sqrt{10}$，$\sqrt{7}<3$，可得 $2\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{10}+3$，可得 $\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}>\frac{1}{\sqrt{10}+3}$，即 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}>\sqrt{10}-3$ 成立。

17.【答案】（1）$A=\frac{2\pi}{3}$；（2）$\frac{15\sqrt{3}}{4}$

【解析】（1）由正弦定理得 $\sin A\sin B+\sqrt{3}\sin B\cos A=0$，$\because \sin B\ne 0$，$\therefore \sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$\therefore \tan A=-\sqrt{3}$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$

（2）$\because a^2=c^2+b^2-2bc\cos\frac{2\pi}{3}$，$a=7$，$b=3$，$\therefore c^2+3c-40=0$，解得 $c=5$ 或 $c=-8$（舍），$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$。

18.【答案】（1）$\frac{2}{3}$；（2）见解析。

【解析】（1）由题意得 $x>0$，当 $a=2$ 时，$f'(x)=x-3+\frac{2}{x}$，$f'(3)=\frac{2}{3}$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(3, f(3))$ 处切线的斜率为 $\frac{2}{3}$。

（2）$f'(x)=x-a-1+\frac{a}{x}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-a)(x-1)}{x}$ 由 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=a$。

①当 $0<a<1$ 时，

当 $x\in(0，a)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(a,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递增。

此时 $x=a$ 时 $f(x)$ 的极大值点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点。

②当 $a>1$ 时，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1，a)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递增。

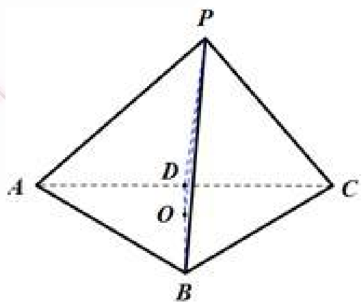
此时 $x=a$ 时 $f(x)$ 的极小值点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点。

综上，当 $0<a<1$ 时，$x=a$ 时 $f(x)$ 的极大值点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点；当 $a>1$ 时，$x=a$ 时 $f(x)$ 的极小值点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点。

19.【答案】边长为 4，体积为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$。

【解析】由题意 $\triangle P_1P_2P_3$ 中 $P_1A=P_3A$，$P_2C=P_3C$，$P_1B=P_2B$，所以 AB，AC，BC 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中位线，因此 $\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形，且边长为 4。即 $P_1P_2=P_1P_3=P_2P_3=4$，三棱锥 $P-ABC$ 是边长为 2 的正四面体，∴如下图所示作图，设顶点 P 在底面 ABC 内的投影为 O，连接 BO，并延长交 AC 于 D。∴ D 为 AC 中点，O 为 $\triangle ABC$ 的重心，$PO\perp$ 底面 ABC

∴ $BO=\dfrac{2}{3}$，$BD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$PO=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$。



20.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$；(2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le m\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，见解析

【解析】(1) 过点 $P(0,1)$ 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 于 A，B 两点，

当直线垂直于 y 轴时，$|AB|=2\sqrt{6}$。得椭圆 E 过点 $\left(\sqrt{6},1\right)$，得 $\begin{cases}\dfrac{6}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$，解得 $a^2=9$，$b^2=3$，

所以椭圆的 E 方程为：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点 $C(x_0,y_0)$。由 $\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得

$\left(1+3k^2\right)x^2+6kx-6=0$，所以 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-3k}{1+3k^2}$，$y_0=kx_0+1=\dfrac{1}{1+3k^2}$。

①当 $k\neq 0$ 时，线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{3k}{1+3k^2}\right)+\dfrac{1}{1+3k^2}$。令 $y=0$，得 $x=-\dfrac{2k}{1+3k^2}$，即 $m=-\dfrac{2k}{1+k^2}=-\dfrac{2}{\dfrac{1}{k}+3k}$。②若 $k>0$，则 $\dfrac{1}{k}+3k\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{k}\times 3k}=2\sqrt{3}$，那么 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leq -\dfrac{2}{\dfrac{1}{k}+3k}<0$；③若 $k<0$，则 $\dfrac{1}{k}+3k=-\left[-\dfrac{1}{k}+(-3k)\right]\leq -2\sqrt{-\dfrac{1}{k}\times(-3k)}=-2\sqrt{3}$，$0<-\dfrac{2}{\dfrac{1}{k}+3k}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leq m<0$ 或 $0<m\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；④当 $k=0$ 时，$m=0$。

综上所述，存在点 M 满足条件，m 取值范围是 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leq m\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

21.【参考答案】

（1）从评价方式来看，教师的用语过于简单，没有起到良好的引导作用，每一个学生回答完，如果对，应说明为什么对，如果不对，应说明为什么不对。

（2）本案例中只有教师参与了评价，没有让学生自己及其他学生参与评价，在学生回答错误后，可以提问学生们哪里不对，从而引发学生思考，得到最终的结论。

22.【参考答案】

（1）教学目标：

①知识与技能目标：理解有理数加法的意义，掌握有理数加法法则，并能正确运用法则进行有理数加法的运算。

②过程与方法目标：通过学生经历探索有理数加法法则的过程，培养学生的数学的转化思想；通过在小组合作交流的过程中，提高学生的探究能力。

③情感、态度与价值观目标：学生体会数学源于生活，生活需要数学，从而提高数学的

学习兴趣。

（2）教学过程

（一）复习导入

提问学生前面有理数的内容。引导学生回忆数轴概念及其三要素。让学生自己在练习本上画出一条数轴。同时明白有理数的分类，以及绝对值及其意义。这样设计能帮助学生建立新旧知识之间的联系，理解有理数加法的意义。

（二）探究新知

1.探究有理数的加法法则——同号两数相加。

创设情景：一只小乌龟在笔直的公路上向左右方向爬行，我们规定向右为正，向左为负。比如向右爬行 5 m 记作 +5，向左爬行 5 m 记作 –5 。

PPT 播放 3-4 次小乌龟连续两次向右爬行的动画。利用动画得到的 3-4 个算式，询问学生小乌龟最后爬行的结果，并引导学生用数轴画出，算式表示。

让学生小组讨论，尝试总结同号两数相加的法则，小组选取代表发言。

老师对学生的发言作出及时的评价与总结，进而得出结论：同号两数相加，符号不变，绝对值相加。

2.探究有理数的加法法则——异号两数相加

巧妙的设计小乌龟爬行的方向，两次运动方向相反，让学生求小乌龟两次爬行后的结果，让学生并用算式表示。

利用得到的 3-4 个算式，让学生小组讨论，尝试尝试总结异号两数相加的法则，小组选取代表发言。

老师对学生的发言作出及时的评价与总结，进而得出结论：绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值，互为相反数的两个数相加得 0。

3.探究有理数加法法则——一个数与 0 相加

设计题目，小乌龟第一秒运动，第二秒不动，询问学生小乌龟最终的位置，让学生用算式表示。

利用得到的算式，让学生小组讨论，尝试尝试总结一个数与 0 相加的法则，小组选取代表发言。

老师对学生的发言作出及时的评价与总结，进而得出结论：一个数同 0 相加，仍得这个

数。

4.总结有理数加法法则

综合本节课的内容，与学生一起得到有理数的加法法则：（1）同号两数相加，绝对值相加，符号不变；（2）异号两数相加，绝对值相减，符号取大；互为相反数的两个数相加得 0。（3） 一个数同 0 相加，仍得这个数。最后以表格形式呈现，条理更加清晰。

（三）巩固新知

PPT 展示与几组有理数加法算式，检测本节课学生所学成果。

（四）小结作业

1.小结：引导学生谈谈本节课的收获

2.作业：在生活中寻找有理数的加法。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.i 是虚数单位，若集合 $S=\{-1,0,1\}$，则（　　）

A. $\mathrm{i}\in S$　　B. $\mathrm{i}^2\in S$　　C. $\mathrm{i}^3\in S$　　D. $\frac{2}{\mathrm{i}}\in S$

2. $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为（　　）

A.10　　B.20　　C.40　　D.80

3.用数学归纳法证明 $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots2^2+1^2=\frac{n\left(2n^2+1\right)}{3}$ 时，由 $n=k$ 时的假设到证明 $n=k+1$ 时，等式左边应添加的式子是（　　）

A. $(k+1)^2+2k^2$　　B. $(k+1)^2+k^2$

C. $(k+1)^2$　　D. $\frac{1}{3}(k+1)\left[2(k+1)^2+1\right]$

4.若一组数据的茎叶图如图，则该组数据的中位数是（　　）

7	0 1 2 6
8	2 2 5 7

A.79　　B.79.5　　C.80　　D.81.5

5.设抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F，点 P 在抛物线上，则“$|PF|=3$”是“点 P 到 x 轴的距离为 2”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

6.已知离散型随机变量 X 的分布列如图，则常数 c 为（　　）

X	0	1
P	$9c^2-c$	$3-8c$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$或$\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

7.在满分为 15 分的中招信息技术考试中，初三学生的分数$x\sim N\left(11,2^2\right)$，若某班共有 54 名学生，则这个班的学生该科考试中 13 分以上的人数大约为（　　）（附：$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6827$）

A.6　　B.7　　C.9　　D.10

8.某地举办科技博览会，有 3 个场馆，现将 24 个志愿者名额分配给这 3 个场馆，要求每个场馆至少有一个名额且各场馆名额互不相同的分配方法共有（　　）种。

A. 222　　B. 253　　C. 276　　D. 284

9.我国元代数学著作《四元玉鉴》的作者是（　　）

A.秦九韶　　B.杨辉　　C.朱世杰　　D.贾宪

10.数学课程目标包括结果目标和过程目标。结果目标使用“了解、理解、掌握、（　　）”等术语表述。

A.运用　　B.经历　　C.体验　　D.探索

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.函数$y=\sin x+e^x$在点$(0,1)$处的切线方程是_______。

12.我国古代数学名著《九章算术》的论割圆术中有：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”它体现了一种无限与有限的转化过程：比如在表达式$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}$中“…”即代表无限次重复，但原式却是个定值，它可以通过方程$2+x=x^2$求得$x=2$，即$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}=2$。类似上述过程，则$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}=$_______。

13.若椭圆C：$\frac{x^2}{m^2+1}+\frac{y^2}{m}=1(m>0)$的焦距为$2\sqrt{3}$，则椭圆$C$的长轴长为_______。

14.已知样本数据为 40，42，40，a，43，44，且这个样本的平均数为 43，则该样本的标准差为_______。

15.《义务教育数学课程标准（2011 年版）》评价结果的呈现应采用定性与定量相结合的方式。第一学段的评价应当以_______为主。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 题每小题 10 分，共 60 分）

16.已知在$\triangle ABC$中，角A, B, C的对边分别为a, b, c，且$a\sin B+b\cos A=0$。

（1）求角 A 的大小；

（2）若 $a=2\sqrt{5},b=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积。

17.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{4}$，$a_{n+1}=\frac{1}{4(1-a_n)}$。

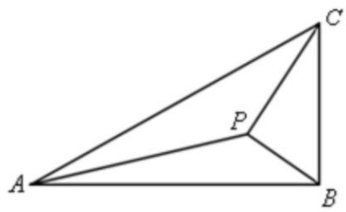
（1）设 $b_n=\frac{2}{2a_n-1}$，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

（2）求证：$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{a_n}<n+\frac{3}{4}$。

18.如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$=90°，$AB=\sqrt{3}$，BC=1，P 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle BPC$=90°。

（1）若 $PB=\frac{1}{2}$，求 PA；

（2）若 $\angle APB$＝150°，求 $\tan\angle PBA$。



19.已知 O 为坐标原点，过点 $M(1,0)$ 的直线 l 与抛物线 C： $y^2=2px(p>0)$ 交于 A， B 两点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$。

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过点 M 作直线 $l'\perp l$ 交抛物线 C 于 P，Q 两点，记 $\triangle OAB$，$\triangle OPQ$ 的面积分别为 S_1，S_2，证明：$\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}$ 为定值。

20.已知函数 $f(x)=x(\ln x+a)+b$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线为 $2x-y-1=0$。

（1）求 a， b 的值；

（2）若对任意的 $x\in(1,+\infty)$， $f(x)\geq m(x-1)$ 恒成立，求正整数 m 的最大值。

21.案例分析

王××，女，是某乡镇初中的学生，性格内向，学习成绩在班内居上游，只是数学成绩不稳定，但初一时在数学教师刘老师的帮助下，对学习数学仍然充满信心，决心让自己的各科都达到优秀。进入初二后，刘老师请了病假，由刚从学校毕业的张老师任他们的数学课。王××感到很不适应，第一次期中考试时，她只考了 52 分。在发数学试卷时，张老师读着名

字和分数，让学生按从高分到低分的顺序，一个一个到讲台上去领。当王××走到讲台上时，张老师拎着她的试卷大声说:“也长这么大了，才考这几分，知不知道丢人？我看你呀，还不如回家种地去!”

王××从此再也不愿上张老师的课，数学成绩也没再及格过，其他各科成绩也都受到影响。初中毕业后，只好以高价生的身份到县二中就读。

阅读以上材料，回答下面问题：

请你从教育教学方面分析张老师的做法。

22.教学设计

阅读下面的材料：人教版初中数学七年级 1.4.1《有理数的乘法》

负数乘负数，积为正数，乘积的绝对值等于各乘数绝对值的积.

一般地，我们有有理数乘法法则：

两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘.

任何数与 0 相乘，都得 0.

《义务教育数学课程标准（2011 版）》指出：实行启发式教学有助于落实学生的主体地位和发挥教师的主导作用。创设情境、设计问题，引导学生自主探索、合作交流；组织学生操作实验、观察现象、提出猜想、推理论证等，都能有效地启发学生的思考，使学生成为学习的主体，逐步学会学习。

（1）针对该片段，写出教学目标。

（2）根据上述截图设计教学过程。该教学过程要求：教师引导学生自己归纳总结出有理数乘法法则，充分发挥学生主体地位。

答案及解析

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 B。

【解析】由 $i^2=-1$ 可得，$i^2\in S$，$i\notin S$，$i^3=-i\notin S$，$\frac{2}{i}=-2i\notin S$。故本题选 B。

2.【答案】选 C。

【解析】由题可得 $T_{r+1}=C_5^r\left(x^2\right)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r=C_5^r\times 2^r\times x^{10-3r}$，令 $10-3r=4$，则 $r=2$，所以 $C_5^r\times 2^r=C_5^2\times 2^2=40$。故本题选 C。

3.【答案】选 B。

【解析】因为当 $n=k$ 时，等式的左边是 $1^2+2^2\cdots+(k-1)^2+k^2+(k-1)^2+\cdots+2^2+1^2$，所以当 $n=k+1$ 时，等式的左边是 $1^2+2^2\cdots+(k-1)^2+k^2+(k+1)^2+k^2+(k-1)^2+\cdots+2^2+1^2$，多增加了 $(k+1)^2+k^2$。故本题选 B。

4.【答案】选 A。

【解析】由题意，根据给定的茎叶图可知，原式数据为：70,71,72,76,82,82,85,87 再根据中位数的定义，可得熟记的中位数为 $\frac{76+82}{2}=79$。故本题选 A。

5.【答案】选 C。

【解析】由题意，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 可化为 $x^2=4y$，则 $2p=4$，即 $p=2$，设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，因为 $|PF|=3$，根据抛物线的定义可得，点 P 到其准线的距离为 $y+\frac{p}{2}=3$，解得 $y=2$，即点 P 到 x 轴的距离为 2，所以充分性是成立的；又由若点 P 到 x 轴的距离为 2，即 $y=2$，则点 P 到其准线的距离为 $2+1=3$，根据抛物线的定义，可得点 P 到抛物线的焦点的距离为 3，即 $|PF|=3$，所以必要性是成立的，即“$|PF|=3$”是“点 P 到 x 轴的距离为 2”的充要条件。故本题选 C。

6.【答案】选 A。

【解析】由随机变量的分布列知，$9c^2-c\geq 0$，$3-8c\geq 0$，$9c^2-c+3-8c=1$，$\therefore c=\frac{1}{3}$。

故本题选 A。

7.【答案】选 C。

【解析】因为其中数学考试成绩 X 服从 $X \sim N(11,2^2)$ 正态分布，因为 $P(\mu-\sigma < X \le \mu+\sigma)=0.6827$，即 $P(11-2 < X \le 11+2)=0.6827$，根据正态分布图象的对称性，可得 $P(X \ge 11+2)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.1355$，所以这个班级中数学考试成绩在 13 分以上的人数大约为 $54 \times 0.1355 \approx 9$ 人。故本题选 C。

8.【答案】选 A。

【解析】每个场馆至少有一个名额的分法为 $C_{23}^2=253$ 种，至少有两个场馆的名额相同的分配方法有（1，1，22），（2，2，20），（3，3，18），（4，4，16），（5，5，14），（6，6，12），（7，7，10），（8，8，8），（9，9，6），（10，10，4），（11，11，2），再对场馆分配，共有 $3C_{10}^1+1=31$ 种，所以每个场馆至少有一个名额且各校名额互不相同的分配方法共有 $253-31=222$ 种，故本题选 A。

9.【答案】选 C。

【解析】《数学史概论》中指出我国元代数学著作《四元玉鉴》的作者是朱世杰。故本题选 C。

10.【答案】选 A。

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出数学课程目标包括结果目标和过程目标。结果目标使用“了解、理解、掌握、运用”等术语表述。故本题选 A。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】 $2x-y+1=0$

【解析】$y=\sin x+e^x$ 的导数为 $y'=\cos x+e^x$，在点（0，1）处的切线斜率为 $k=\cos 0+e^0=2$，即有在点（0，1）处的切线方程为 $2x-y+1=0$。

12.【答案】 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】由已知，令 $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}=x(x>0)$，则 $1+\dfrac{1}{x}=x$，所以 $x^2-x-1=0$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $x=\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$（舍）。

13.【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】由题意，椭圆 $C:\frac{x^2}{m^2+1}+\frac{y^2}{m}=1(m>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，则 $m^2+1-m=(\sqrt{3})^2$，解得 $m=2$，所以 $m^2+1=5$，所以椭圆 C 的长轴长为 $2\sqrt{m^2+1}=2\sqrt{5}$。

14.【答案】$\frac{2\sqrt{21}}{3}$

【解析】由平均数的公式，得 $\frac{1}{6}(40+42+40+a+43+44)=43$，得 $a=49$，所以方差为 $s^2=\frac{1}{6}[(40-43)^2+(42-43)^2+(40-43)^2+(43-43)^2+(43-43)^2+(44-43)^2]=\frac{28}{3}$，所以样本的标准差为 $s=\frac{2\sqrt{21}}{3}$。

15.【答案】描述性评价

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》评价结果的呈现应采用定性与定量相结合的方式。第一学段的评价应当以描述性评价为主。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 题每小题 10 分，共 60 分）

16.【答案】（1）$A=\frac{3\pi}{4}$；（2）$S=2$。

【解析】（1）在△ ABC 中，由正弦定理得 $\sin A\sin B+\sin B\cos A=0$，即 $\sin B(\sin A+\cos A)=0$，又角 B 为三角形内角，$\sin B\neq 0$，所以 $\sin A+\cos A=0$，即 $\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})=0$，又因为 $A\in(0,\ \pi)$，所以 $A=\frac{3\pi}{4}$。

（2）在△ ABC 中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，则 $20=4+c^2-4c\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})$，即 $c^2+2\sqrt{2}c-16=0$，解得 $c=-4\sqrt{2}$（舍）或 $c=2\sqrt{2}$，又 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以 $S=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$。

17.【答案】（1）见解析；（2）见解析。

【解析】

（1）证明∵$a_{n+1}=\frac{1}{4(1-a_n)}$，$b_n=\frac{2}{2a_n-1}$，∴$b_{n+1}=\frac{2}{2a_{n+1}-1}=\frac{2}{\frac{2}{4(1-a_n)}-1}=$

$\frac{2}{2a_n-1}-2=b_n-2$，∴$b_{n+1}-b_n=-2$ 又 $a_1=\frac{1}{4}$，∴$b_1=\frac{2}{2a_1-1}=-4$，∴数列 $\{b_n\}$ 是首项为 -4，公差为 -2 的等差数列。

（2）$\dfrac{2}{2a_1-1}=-2n-2$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n+2}=\dfrac{n}{2(n+1)}$，由于$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{2(n+2)}\cdot\dfrac{2(n+1)}{n}$

$=\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}=1+\dfrac{1}{n(n+2)}=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，

$\therefore\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_3}{a_2}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=n+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=n+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)<n+\dfrac{3}{4}$。

18.【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。

【解析】（1）由已知得$\angle PBC=60°$，所以$\angle PBA=30°$，在$\triangle PBA$中，由余弦定理得$PA^2=3+\dfrac{1}{4}-2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\cos30°=\dfrac{7}{4}$。故$PA=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$。

（2）设$\angle PBA=\alpha$，由已知得$PB=\sin\alpha$，在$\triangle PBA$中，由正弦定理得$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin150°}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(30°-\alpha)}$，化简得$\sqrt{3}\cos\alpha=4\sin\alpha$。所以$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，即$\tan\angle PBA=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。

19.【答案】（1）$y^2=4x$；（2）见解析。

【解析】（1）设直线l：$x=my+1$，与$y^2=2px$联立消x得，$y^2-2pmy-2p=0$。

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-2p$。因为$g(x)$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(my_1+1)(my_2+1)+y_1y_2=(1+m^2)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1$

$=(1+m^2)(-2p)+2pm^2+1=-2p+1=-3$，解得$p=2$。所以抛物线$C$的方程为$y^2=4x$。

（2）由（1）知$M(1,0)$是抛物线C的焦点，所以$|AB|=x_1+x_2+p=my_1+my_2+2+p=4m^2+4$。原点到直线$l$的距离$d=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，所以$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}\times4(m^2+1)=2\sqrt{1+m^2}$。因为直线$l'$过点$(1,0)$且$l'\perp l$，所以$S_{\Delta OPQ}=2\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{m}\right)^2}=2\sqrt{\dfrac{1+m^2}{m^2}}$。所以$\dfrac{1}{S_1^2}+\dfrac{1}{S_2^2}=\dfrac{1}{4(1+m^2)}+\dfrac{m^2}{4(1+m^2)}=\dfrac{1}{4}$。即$\dfrac{1}{S_1^2}+\dfrac{1}{S_2^2}$为定值$\dfrac{1}{4}$。

20.【答案】（1）$a=1$，$b=0$；（2）3。

【解析】（1）由 $f(x)=x(\ln x+a)+b$ 得：$f'(x)=\ln x+a+1$

由切线方程可知：$f(1)=2-1=1$，∴$f'(1)=a+1=2$，$f(1)=a+b=1$，解得：$a=1$，$b=0$

（2）由（1）知 $f(x)=x(\ln x+1)$，则 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)\geq m(x-1)$ 恒成立等价于 $x\in(1,+\infty)$ 时，$m\leq\dfrac{x(\ln x+1)}{x-1}$ 恒成立。令 $g(x)=\dfrac{x(\ln x+1)}{x-1}$，$x>1$，则 $g'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

令 $h(x)=x-\ln x-2$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$。

∴当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增。∵$h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-2\ln 2>0$，

∴$\exists x_0\in(3,4)$，使得 $h(x_0)=0$；

当 $x\in(1,\ x_0)$ 时，$g'(x)<0$；$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，∴$g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0(\ln x_0+1)}{x_0-1}$，

∵$h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，∴$\ln x_0=x_0-2$，

∴$g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0(x_0-2+1)}{x_0-1}=x_0\in(3,4)$。∴$m\leq x_0\in(3,4)$，即正整数 m 的最大值为 3。

21.【参考答案】

杜威说过:“希望得到尊重是人类天性中最深刻的冲动。”苏霍姆林斯基说:“儿童的尊严，是人类最敏感的角落，保护儿童的自尊心，就是保护儿童前进的潜力。”作为一个老师必须尊重学生。

本案例中张老师在王同学考试成绩不好的情况下，当着所有学生对其直接进行言语侮辱，这严重打击了学生的自信心，没有尊重学生。

课程标准指出评价应以鼓励性评价为主，所以应向刘老师一样，对成绩差的学生不断鼓励，表扬，提升学生自信心，增加学生对数学的热爱。

22.【参考答案】

（1）教学目标：

①知识与技能目标：理解有理数加法的意义，掌握有理数加法法则，并能正确运用法则进行有理数加法的运算。

②过程与方法目标：通过学生经历探索有理数加法法则的过程，培养学生的数学的转化思想；通过在小组合作交流的过程中，提高学生的探究能力。

③情感、态度与价值观目标：学生体会数学源于生活，生活需要数学，从而提高数学的学习兴趣。

（2）教学过程

（一）游戏导入——引出有理数乘除法。

设置抢答游戏：PPT 呈现 3×4 =，4×4 =，……这样比较简单的题目，学生很快回答。接下来请学生大胆猜一猜 $(-3)\times 4$ 等于多少，从而引出本节课的内容。

（二）体验内化、探求新知——认识有理数乘法

环节一：激发兴趣 合作探索

首先，用多媒体展示下列情景：一只蜗牛沿直线 L 爬行，它现在的位置恰在 L 上的 O 点。

（1）如果蜗牛一直以每分钟 2 cm 的速度向右爬行，那么 3 分钟后蜗牛在什么位置?

（2）如果蜗牛一直以每分钟 2 cm 的速度向左爬行，那么 3 分钟后蜗牛在什么位置？

（3）如果蜗牛一直以每分钟 2 cm 的速度向右爬行，那么 3 分钟前蜗牛在什么位置？

（4）如果蜗牛一直以每分钟 2 cm 的速度向左爬行，那么 3 分钟前蜗牛在什么位置？

规定：向右为正，向左为负。为区分时间，我们规定：现在前为负，现在后为正。

引导学生进行交流讨论，并列出乘法算式及结果。

学生可能得到如下的结果：

$(+2)\times(+3)=+6$

$(-2)\times(+3)=-6$

$(+2)\times(-3)=-6$

$(-2)\times(-3)=+6$

环节二：小组交流 深入思考

多媒体展示第二组图片，如果用正号表示水位上升，用负号表示水位下降。由于深圳近 4 天来都没有下雨，导致深圳某水库的水位平均每天下降 3 厘米，那么这 4 天该水库的水位变化总体情况如何？用式子如何表示？引导学生小组合作探究，同时对学生们的发言给予实时的评价。最后师生得出结论：$(-2)\times(+4)=-12$。

环节五：总结规律：

引导学生观察上面的式子及 PPT 上呈现的其他乘法算式(这些算式中有其中一个乘数是 0

的式子），试着总结有理数乘法的规律：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘。任何数与 0 相乘，都得 0。

（三）回归生活、巩固应用——巩固有理数乘法

PPT 呈现题目有理数的乘法算式，学生巩固所学。

（四）小结作业

1.引导学生总结本节课所学。

2.作业：学生自编一道有理数乘除法的应用题，下节课进行课堂交流。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.已知变量 x 与 y 正相关，且由观测数据算得样本平均数 $\overline{x}=3$，$\overline{y}=3.5$，则由该观测的数据算得的线性回归方程可能是（　　）

A. $\hat{y}=0.4x+2.3$　　B. $\hat{y}=2x-2.4$

C. $\hat{y}=-2x+9.5$　　D. $\hat{y}=-0.3x+4.4$

2.若关于 x 的不等式 $x^2-3ax+2>0$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup(m,+\infty)$，则 $a+m$ 等于（　　）

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3.若函数 $y=x^3+\log_2 x+\mathrm{e}^{-x}$，则 $y'=$（　　）

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{x\ln 2}+\mathrm{e}^{-x}$　　B. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{x\ln 2}+\mathrm{e}^{-x}$

C. $3x^2+\frac{1}{x\ln 2}-\mathrm{e}^{-x}$　　D. $3x^2+\frac{1}{x\ln 2}+\mathrm{e}^{-x}$

4.当你任意摆放手中笔的时候，那么桌面所在的平面一定存在直线与笔所在的直线（　　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 垂直

5.下表提供了某厂节能降耗技术改造后在生产 A 产品过程中记录的产量 x（吨）与相应的生产能耗 y（吨）的几组对应数据：

x	3	4	5	6
y	2.5	t	4	4.5

根据上表提供的数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.7x+0.35$，那么表中 t 的值为（　　）

A. 3　　B. 3.15　　C. 3.5　　D. 4.5

6.有编号依次为 1，2，3，4，5，6 的 6 名学生参加数学竞赛选拔赛，今有甲、乙、丙、丁四位老师在猜谁将得第一名，甲猜不是 3 号就是 5 号；乙猜 6 号不可能；丙猜 2 号，3 号，4 号都不可能；丁猜是 1 号，2 号，4 号中的某一个。若以上四位老师中只有一位老师猜对，

则猜对者是（　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

7.在明朝程大位《算法统宗》中，有这样一首歌谣，叫浮屠增级歌：远看巍巍塔七层，红光点点倍加增；共灯三百八十一，请问层三几盏灯。这首古诗描述的浮屠，现称宝塔。本浮屠增级歌意思是：有一座 7 层宝塔，每层悬挂的红灯数是上一层的 2 倍，宝塔中共有灯 381 盏，问这个宝塔第 3 层灯的盏数有（　　）

A. 12　　B. 24　　C. 48　　D. 96

8.函数 $f(x)$ 在 $t=1$ 处存在导数为 2，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$（　　）

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. 6　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

9.要证明 $\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$，可选择的方法有以下几种，其中最合理的是（　　）.

A. 综合法　　B. 分析法　　C. 类比法　　D. 归纳法

10.首先获得四次方程一般解法的数学家是（　　）

A.塔塔利亚　　B.卡当　　C.费罗　　D.费拉利

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=$_______。

12.定义运算 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$ 则函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x^2+3x & 1 \\ x & \frac{1}{3}x \end{vmatrix}$ 的图象在点 $\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$ 处的切线方程是_______。

13.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{3x-1}$，$g(x)=\dfrac{1}{3}+\ln x$，若 $f(m)=g(n)$，则 $n-m$ 的最小值为_______。

14.高中数学课程是义务教育阶段后普通高级中学的主要课程，具有基础性、_______和发展性。

15.《普通高中数学新课程标准（2017 版）》指出：数学学科核心素养包括：_______、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。这些数学学科核心素养既相对独立、又相互交融，是一个有机的整体。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 小题各 10 分，共 60 分）

16.下表提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x（吨）与相应的

生产能耗 y（吨）标准煤的几组对照数据。

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

（1）请画出上表数据的散点图；

（2）请根据上表提供的数据，用最小二乘法求出回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（3）已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤。试根据（2）求出的线性回归方程，预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤？（注：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$）

17.已知 $f(x)=\dfrac{1+\cos x-\sin x}{1-\sin x-\cos x}+\dfrac{1-\cos x-\sin x}{1-\sin x+\cos x}$，且 $x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，且 $x\neq k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$。

（1）化简 $f(x)$；

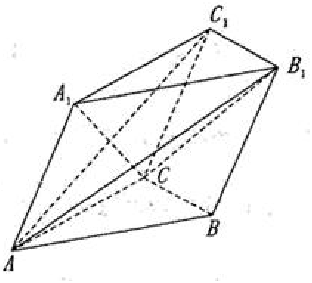
（2）是否存在 x，使得 $\tan\dfrac{x}{2}\cdot f(x)$ 与 $\dfrac{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}{\sin x}$ 相等？若存在，求 x 的值；若不存在，请说明理由。

18.已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=3$，a_2+2，a_4，a_6-2 顺次成等比数列。

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $b_n=\dfrac{(-1)^n a_{2n+1}}{a_na_{n+1}}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n，求 S_{2n}。

19.如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，$AA_1=AC$，$\angle ACB=90°$。



（1）求证：平面 $AB_1C_1\perp$ 平面 A_1B_1C；

（2）若 $\angle A_1AC=60^\circ$， $AC=2CB=2$，求四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积。

20.以直角坐标系的原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）将直线 l： $\begin{cases} x=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数）化为极坐标方程；

（2）设 P 是（1）中的直线 l 上的动点，定点 $A\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$， B 是曲线 $\rho=-2\sin\theta$ 上的动点，求 $|PA|+|PB|$ 的最小值。

21.案例分析

一个学生考试得了 57 分，他不敢让家长看到这样的分数，就和老师商量再给他加两分。老师说，我不能给你加分，但是可以借你 5 分，你下次考了高分再还我。两人达成了协议，学生拿着 62 分的试卷高高兴兴的回家去了。学生突然像变了一个人，认真学习，很快成绩提高了。一次学生考了 88 分，学生高兴的说："老师，我还你 10 分。"

（1）分析良好师生关系的特点。

（2）谈一谈怎么建立良好的师生关系。

22.阅读下面的材料：人教版高中数学必修一 1.1.1《集合的含义》

一般地，我们把研究对象统称为元素（element），把一些元素组成的总体叫做集合（set）（简称为集）.

给定的集合，它的元素必须是确定的．也就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了．例如，"亚洲国家的首都"构成一个集合，北京、东京、新德里……在这个集合中，纽约、巴黎、伦敦……不在这个集合中．"身材较高的人"不能构成集合，因为组成它的元素是不确定的.

一个给定集合中的元素是互不相同的．也就是说，集合中的元素是不重复出现的.

只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

根据材料，回答以下问题。

（1）针对该片段，写出教学目标。

（2）针对该片段，设计教学过程。

答案及解析

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 A。

【解析】因为 x 与 y 正相关，排除选项 C、D，又因为线性回归方程恒过样本点的中心 $(3,3.5)$。故本题选 A。

2.【答案】选 D。

【解析】由题意知，1 和 m 是方程 $x^2-3ax+2>0$ 的两个根，则由根与系数的关系，得 $\begin{cases}1+m=3a\\1\times m=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\m=2\end{cases}$，所以 $a+m=3$。故本题选 D。

3.【答案】选 C。

【解析】因为 $y=x^3+\log_2 x+\mathrm{e}^{-x}$，所以 $3x^2+\dfrac{1}{x\ln 2}-\mathrm{e}^{-x}$。故本题选 C。

4.【答案】选 D。

【解析】由题意，若笔所在直线若与地面垂直，则在地面总有这样的直线，使得它与笔所在直线垂直；若笔所在直线若与地面不垂直，则其必在地面上有一条投影线，在平面中一定存在与此投影线垂直的直线，由三垂线定理知，与投影垂直的直线一定与此斜线垂直，综上，当你任意摆放手中笔的时候，那么桌面所在的平面一定存在直线与笔所在的直线垂直。故本题选 D。

5.【答案】选 A。

【解析】$\because a=\overline{y}-b\overline{x}$，由回归方程知 $0.35=\overline{y}-0.7\overline{x}=\dfrac{2.5+t+4+4.5}{4}-0.7\times\dfrac{3+4+5+6}{4}$，解得 $t=3$，故本题选 A。

6.【答案】选 C。

【解析】若甲猜对，则乙也猜对，故不满足题意；若乙猜对则丁也可能猜对，故不正确；若丁猜对，则乙也猜对，故也不满足条件。而如果丙猜对，其他老师都不会对。故本题选 C。

7.【答案】选 C。

【解析】从第 1 层到塔顶第 7 层，每层的灯数构成一个等比数列，公比为 $\dfrac{1}{2}$，前 7 项的

和为 381，则 $S_7=\dfrac{a_1\cdot\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=381$，得第一层 $a_1=192$，则第三层 $a_3=192\times(\dfrac{1}{2})^2=48$，故本题选 C。

8.【答案】选 A。

【解析】根据导数定义，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{3}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}\times 2=\dfrac{2}{3}$，故本题选 A。

9.【答案】选 B。

【解析】该题目属于由果索因，故选用的方法为分析法。要证明结论 $\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$，需要将两边平方法，转换为有理式。这样就可以借助于有理数的大小关系来判定了，故本题选 B。

10.【答案】选 D。

【解析】《数学史概论》中指出首先获得四次方程一般解法的数学家是费拉利。故本题选 D。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】$\dfrac{\pi}{2}-1$

【解析】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\dfrac{x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)dx=(x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}-1$ 。故答案为：$\dfrac{\pi}{2}-1$。

12.【答案】$6x-3y-5=0$

【解析】由题意可得 $f(x)=\begin{vmatrix}x^2+3x & 1\\ x & \frac{1}{3}x\end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}x\left(x^2+3x\right)-x$，所以 $f'(x)=x^2+2x-1$，所以 $f(x)$ 在点 $\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$ 处的切线斜率为 $k=f'(1)=2$ 。所以切线方程为 $y-\dfrac{1}{3}=2(x-1)$，整理得 $6x-3y-5=0$ 。

13.【答案】$\dfrac{2+\ln 3}{3}$

【解析】设 $t=f(m)=g(n)(t>0)$，则 $m=\dfrac{1+\ln t}{3}$，$n=e^{t-\frac{1}{3}}$。令 $h(t)=n-m=e^{t-\frac{1}{3}}-\dfrac{1+\ln t}{3}(t>0)$，则 $h'(t)=e^{t-\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{3t}(t>0)$，∴ $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $h'(\dfrac{1}{3})=0$，∴当 $0<t<\dfrac{1}{3}$ 时，$h'(x)<0$，$h'(x)$ 单调递减；当 $t>\dfrac{1}{3}$ 时，$h'(x)>0$，$h'(x)$ 单调

递增。$\therefore h(t)_{\min}=h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2+\ln 3}{3}$，故 $n-m$ 的最小值为 $\frac{2+\ln 3}{3}$。

14.【答案】选择性

【解析】《普通高中数学新课程标准（2017 版）》指出：高中数学课程是义务教育阶段后普通高级中学的主要课程，具有基础性、选择性和发展性。

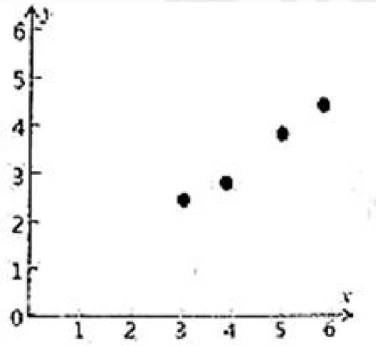
15.【答案】数学抽象

【解析】《普通高中数学新课程标准（2017 版）》指出：数学学科核心素养包括：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。这些数学学科核心素养既相对独立、又相互交融，是一个有机的整体。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 小题各 10 分，共 60 分）

16.【答案】（1）见解析；（2）$y=0.7x+0.35$；（3）19.65 吨。

【解析】（1）把所给的四对数据写成对应的点的坐标，在坐标系中描出来，得到散点图；



（2）计算 $\bar{x}=\frac{1}{4}\times(3+4+5+6)=4.5$，$\bar{y}=\frac{1}{4}\times(2.5+3+4+4.5)=3.5$，$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=3^2+4^2+5^2+6^2=86$，$\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=3\times2.5+4\times3+5\times4+6\times4.5=66.5$，$\therefore$回归方程的系数为：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{66.5-4\times4.5\times3.5}{86-4\times4.5^2}=0.7$。$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=3.5-0.7\times4.5=0.35$，$\therefore$所求线性回归方程为 $\hat{y}=0.7x+0.35$；

（3）利用线性回归方程计算 $x=100$ 时，$\hat{y}=0.7\times100+0.35=70.35$，则 $90-70.35=19.65$，即比技改前降低了 19.65 吨。

17.【答案】（1）$f(x)=-\frac{2}{\sin x}$（$x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，且 $x\neq k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$）；（2）存在 x，$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

【解析】（1）$\because \dfrac{1+\cos x-\sin x}{1-\sin x-\cos x}=\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{-2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=-\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

同理得：$\dfrac{1-\cos x-\sin x}{1-\sin x+\cos x}=-\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ $\therefore f(x)=-\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=-\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=-\dfrac{2}{\sin x}$

（$x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，且 $x\neq k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$）

（2）若 $\tan\dfrac{x}{2}\cdot f(x)=\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\sin x}$，则 $-\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{\sin x}=\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\sin x}$，$\therefore \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=-1$，即：

$\dfrac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\sin x=-1$，$\therefore \sin x=-1$，$x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即为存在的值。

18.【答案】（1）$a_n=n$；（2）$\dfrac{-2n}{2n+1}$。

【解析】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\because a_2+2$，a_4，a_6-2 顺次成等比数列

$\therefore a_4^2=(a_2+2)(a_6-2)$。$\therefore (a_3+d)^2=(a_3-d+2)(a_3+3d-2)$，又 $a_3=3$

$\therefore (3+d)^2=(5-d)(1+3d)$，化简得：$d^2-2d+1=0$，解得：$d=1$

$\therefore a_n=a_3+(n-3)d=3+(n-3)\times 1=n$

（2）由（1）得：$b_n=\dfrac{(-1)^n a_{2n+1}}{a_n a_{n+1}}=(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$

$\therefore S_{2n}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2n}=-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=-1+\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{-2n}{2n+1}$

19.【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

【解析】（1）$\because$ 平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，$BC\subset$ 平面 ABC，

$\angle ACB=90^\circ$，$\therefore BC\perp$ 平面 ACC_1A_1。$\because A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，$\therefore BC\perp A_1C$，$\because B_1C_1//BC$，

$\therefore A_1C \perp B_1C_1$，$\because$ 四边形 ACC_1A_1 是平行四边形，且 $AA_1 = AC$，$\therefore$ 四边形 ACC_1A_1 是菱形。

$\therefore A_1C \perp AC_1$，$\because AC_1 \cap B_1C_1 = C_1$，$\therefore A_1C \perp$ 平面 AB_1C_1，又 $A_1C \subset$ 平面 A_1B_1C，$\therefore$ 平面 $AB_1C_1 \perp$ 平面 A_1B_1C。

（2）$\because$ 四边形 ACC_1A_1 是菱形，$\angle A_1AC = 60^\circ$，$AC = 2$ $\therefore S_{\Delta ACC_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$，

$\because B_1C_1 // BC$，$B_1C_1 = BC$，$BC \perp$ 平面 ACC_1A_1，$BC = 1$。

$\therefore V_{B_1-ACC_1} = \frac{1}{3} \times S_{\Delta ACC_1} \times B_1C_1 = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore V_{A-BCC_1B_1} = 2V_{A-CC_1B_1} = 2V_{B_1-ACC_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，即四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

20.【答案】（1）$\rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$；（2）$\sqrt{5} - 1$。

【解析】（1）消去参数 t 得 $x + y = \sqrt{2}$，即 $\rho(\cos\theta + \sin\theta) = \sqrt{2}$，$\therefore$ 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$（答案也可以化为 $\rho\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$）

（2）$\because A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 的直角坐标为 $A(1,1)$，曲线 $\rho = -2\sin\theta$ 是圆 C：$x^2 + (y+1)^2 = 1$（C 为圆心）。$\therefore |PA| + |PB| \geq |PA| + |PC| - 1 \geq |AC| - 1 = \sqrt{5} - 1$。

$\therefore |PA| + |PB|$ 的最小值为 $\sqrt{5} - 1$（这时 P 是直线 l 与直线 AC 的交点）。

21.【参考答案】

（1）良好师生关系的特点有尊师爱生、民主平等和教学相长。尊师爱生就是尊重教师，尊重教师的劳动和教师的人格与尊严，对教师要有礼貌，了解和认识教师工作的意义。爱生就是爱护学生，它是教师热爱教育事业的重要体现；师生关系的民主平等体现了师生在教育过程中的相互尊重人格和权利、相互开放、平等对话、相互理解、相互接纳等关系。教学相长就是教师和学生共同体验和分享教育中的欢乐、成功、失望与不安，它是师生情感交流深化的表现。

（2）建立良好的师生关系的可以从以下几个方面入手：

①了解和研究学生

包括三个方面：了解和研究学生个人，了解学生的群体关系，了解和研究学生的学习和生活环境。

②树立正确的师生观

教育者持有不同的教育观、不同的师生观，会培养出不同的学生。传统的“师道尊严”的师生关系，在管理上表现为“以教师为中心”的专制型师生关系，具有等级主义，必然导致学生的被动性和消极态度，造成师生关系紧张。进入现代社会，信息来源多元化，信息技术被广泛应用到教育领域，教师要由原来的知识拥有者和传授者，转变为学生学习能力的培养者，引导学生全面健康的发展。树立新型师生观是建立新型师生关系的前提和基础。在材料中，该老师并没有因为学生成绩不理想而批评他，反而是处处鼓励引导学生，帮助学生提高了成绩。

③树立教师威信

教师的威信包括威望和信誉两部分。教师通过自身高尚的品德、渊博的知识、高超的教学水平等方面所表现出来的能使人心悦诚服的力量或敬畏的影响力才算是教师的威信。

④发扬教育民主，倾听学生的意见

民主与平等的师生关系是提高教育教学质量的需要，也是缩小师生间的心理差距，构建和谐师生关系的需要。要民主并不是抛弃权威，而是要在民主和权威之间选择一个比较好的平衡点，这样可以收到很好的教育效果。每位教师在自己的教育教学实践中，都要有充分的民主意识，虚心听取他们的意见，积极采纳他们的合理化建议。

⑤提高教师自身的素质

教师的道德素养、知识素养和能力素养是学生尊重教师的重要条件，也是教师提高教育影响力的保证。

22.【参考答案】

（1）教学目标：①通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的属于关系；②了解集合中元素的确定性、互异性、无序性；③学生经历从集合实例中抽象概括出集合共同特征的过程，感知集合的含义，培养抽象概括的能力。④ 学生感受集合的必要性，增强学习的积极性。

（2）教学过程：

（一）创设情景，揭示课题

教师首先提出问题：“在初中，我们已经接触过一些集合，你能举出一些集合的例子吗?”引导学生回忆，举例和互相交流。与此同时，教师对学生的活动给予评价。

接着教师提出问题：集合的含义是什么呢?从而引出本节课所学。

（二）研探新知

1.教师利用多媒体设备向学生投影出下面 9 个实例：（1）1—20 以内的所有质数；（2）我国古代的四大发明；（3）所有的安理会常任理事国；（4）所有的正方形；（5）海南省在 2004 年 9 月之前建成的所有立交桥；（6）到一个角的两边距离相等的所有的点；（7）方程 $x^2-5x+6=0$ 的所有实数根； （8）不等式 $x-3>0$ 的所有解；（9）国兴中学 2004 年 9 月入学的高一学生的全体。

2.教师组织学生分组讨论：这 9 个实例的共同特征是什么?

3.每个小组选一位同学发表本组的讨论结果，在此基础上，师生共同概括出 9 个实例的特征，并给出集合的含义：一般地，指定的某些对象的全体称为集合（简称为集）。集合中的每个对象叫作这个集合的元素。

（三）质疑答辩，排难解惑，发展思维

1.教师引导学生阅读教材中的相关内容，思考：集合中元素有什么特点?学生根据教材总结出——集合元素的三大特性：确定性、互异性、无序性；只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合相等。

2.教师组织引导学生思考以下问题，再次感受集合的特性。

判断以下元素的全体是否组成集合，并说明理由：

（1）大于 3 小于 11 的偶数；

（2）我国的小河流。

让学生充分发表自己的见解。

3.让学生自己举出一些能够构成集合的例子以及不能构成集合的例子，并说明理由。教师对学生的学习活动给予及时的评价。

（四）小结作业

1.教师引导学生回顾本节课所学，并给予评价。

2.作业：在生活中搜集更多的集合，下节课交流。

教师招聘考试中学数学学科模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.设 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）

A. 0　　B.1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

2.曲线 $y=4x-x^3$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程是（　）

A. $y=7x+4$　　B. $y=x-2$　　C. $y=x-4$　　D. $y=7x+2$

3.由曲线 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$ 以及 $x=1$ 所围成的图形的面积等于（　）

A.2　　B. $2\mathrm{e}-2$　　C. $2-\frac{1}{\mathrm{e}}$　　D. $\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2$

4.已知非零向量 $\boldsymbol{a}=(t,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角（　）

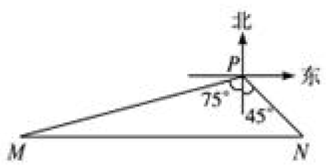
A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

5.在 $\triangle ABC$ 中，$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}$，则 $\triangle ABC$ 的形状为（　）

A.正三角形　　B.等腰三角形或直角三角形

C.等腰直角三角形　　D.直角三角形

6.如图，一艘船自西向东匀速航行，上午 10 时到达一座灯塔 P 的南偏西 $75°$ 距塔 68 海里的 M 处，下午 2 时到达这座灯塔的东南方向的 N 处，则这艘船航行的速度为（　）



A. $\frac{17}{2}\sqrt{6}$ 海里/时　　B. $34\sqrt{6}$ 海里/时

C. $\frac{17\sqrt{2}}{2}$ 海里/时　　D. $34\sqrt{2}$ 海里/时

7.已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7=11$，$a_2+a_8=10$，则 $S_{11}=$（　）

A. 176　　B. 88　　C. 44　　D. 22

8.设二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$，若对任意的实数 a，都存在实数 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 使得不等式 $|f(x)|\geq x$ 成立，则实数 b 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[2,+\infty)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{9},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$

9.发现著名公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 的是（　　）

A.笛卡尔　　B.牛顿　　C.莱布尼茨　　D.欧拉

10.高中数学课程以学生发展为本，落实的根本任务是（　　）

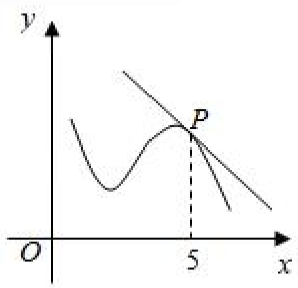
A. 素质教育　　B.立德树人　　C.全面发展　　D.应用能力

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.已知 $0<x<1$，$0<y<1$，则二元函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}$ $+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$ 的最小值为_______。

12.已知 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，满足 $(2b-c)\cos A=a\cos C$。若 $a=3$，则 $\triangle ABC$ 周长的最大值为_______。

13. 如图，函数 $y=f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y=-x+8$，则 $f(5)+f'(5)=$_______。



14.通过高中数学课程的学习，学生能提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯，发展自主学习的能力；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；不断提高实践能力，提升创新意识；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和_______。

15.《普通高中数学新课程标准（2017 年版）》中_______素养是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现，是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 小题各 10 分，共 60 分）

16.某公司经营一批进价为每件 4 百元的商品，在市场调查时发现，此商品的销售单价 x（百元）与日销售量 y（件）之间有如下关系（计算结果精确到 0.1）：

x（百元）	5	6.5	7	8.5	9
y（件）	12	8	7	2	1

（1）求 y 关于 x 的回归直线方程；

（2）借助回归直线方程请你预测，销售单价为多少百元时，日利润最大？（附相关公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\overline{y}=\hat{b}\overline{x}+\hat{a}$）

17.已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$，$g(x)=x+3$，

（1）当 $a=-2$ 时，解不等式：$f(x)<g(x)$；

（2）若 $a>-1$，且当 $x\in\left[-\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$f(x)\le g(x)$，求 a 的取值范围。

18.已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足，$a_1=2,\ b_1=1,\ a_{n+1}=2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$b_1+\dfrac{1}{2}b_2+\dfrac{1}{3}b_3+\cdots+\dfrac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1,\ n\in\mathbf{N}^*$

（1）求 a_n 与 b_n；

（2）记数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n。

19.已知抛物线 Ω：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 作互相垂直的直线 AB，CD 分别与 Ω 交于点 A、B 和 C、D。

（1）当 AB 的倾斜角为 $45°$ 时，求以 AB 为直径的圆的标准方程；

（2）问是否存在常数 λ，使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立？若存在，求 λ 的值；若不存在，请说明理由.

20.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-1$，$a\in\mathbf{R}$。

（1）若 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调，求的 a 取值范围；

（2）设 $a\le 0$，求证：$x\ge 0$ 时，$f(x)\ge x^2$。

21.试述如何培养学生的合情推理能力和演绎推理能力。

22.教学设计

阅读下面的材料：人教版高中数学必修二 4.3.2《空间两点间的距离公式》

距离是几何中的基本度量，几何问题和一些实际问题经常涉及距离，如建筑设计中常常需要计算空间两点间的距离．你能用两点的坐标表示这两点间的距离吗？

思考

类比平面两点间距离公式的推导，你能猜想一下空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离公式吗？

现在，我们研究空间两点间的距离．

先看简单的情形．

设在空间直角坐标系中点 P 的坐标是 (x, y, z)，求点 P 到坐标原点 O 的距离．

如图 4.3-6，设点 P 在 xOy 平面上的射影是 B，则点 B 的坐标是 $(x, y, 0)$．

在 xOy 平面上，有 $|OB|=\sqrt{x^2+y^2}$．

在直角 $\triangle OBP$ 中，根据勾股定理，

$$|OP|=\sqrt{|OB|^2+|BP|^2},$$

因为 $|BP|=|z|$，所以 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．

这说明，在空间直角坐标系 O-xyz 中，任意一点 $P(x, y, z)$ 与原点间的距离

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

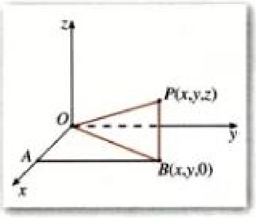


图 4.3-6

探究

如果 $|OP|$ 是定长 r，那么 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 表示什么图形？

根据材料，回答以下问题。

（1）针对该片段，写出教学目标。

（2）针对该片段，设计教学过程。

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 B。

【解析】$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+2\mathrm{i}=\mathrm{i}$，所以$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$。故本题选 B。

2.【答案】选 B。

【解析】$\because y=4x-x^3$，$\therefore y'=4-3x^2$，$\therefore y'|_{x=-1}=4-3\times(-1)^2=1$，因此，曲线$y=4x-x^3$在点$(-1,-3)$处的切线方程为$y+3=x+1$，即$y=x-2$。故本题选 B。

3.【答案】选 D。

【解析】曲线$y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$的交点坐标为$(0,1)$，由曲线$y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$以及$x=1$所围成的图形的面积，就是$\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)dx=\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2$，故本题选 D。

4.【答案】选 A。

【解析】因$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4=-t$，$\therefore t=4$，$\therefore \boldsymbol{a}=(4,0)$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\left(2,2\sqrt{3}\right)$。设$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$的的夹角为$\theta$，则：$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-2+6}{4\times 2}=\frac{1}{2}$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$。故本题选 A。

5.【答案】选 D。

【解析】$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\cos A+1}{2}=\frac{b+c}{2c}\Rightarrow \cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin C}\Rightarrow \sin A\cos C=0$

$\Rightarrow \cos C=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$。故本题选 D。

6.【答案】选 A。

【解析】$PM=68$，$\angle PNM=45^\circ$，$\angle PMN=15^\circ$，在$\triangle PMN$中有$\frac{MN}{\sin 120^\circ}=\frac{PM}{\sin 45^\circ}\Rightarrow MN=34\sqrt{6}$，$V=\frac{MN}{4}=\frac{17}{2}\sqrt{6}$海里/时，故本题选 A。

7.【答案】选 B。

【解析】因为数列$\{a_n\}$是等差数列，由$a_2+a_8=10$，得$a_5=5$，又$a_7=11$，则$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11(a_5+a_7)}{2}=88$，故本题选 B。

8.【答案】选 D。

【解析】问题条件的反面为“若存在实数a，对任意实数$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$使得不等式$|f(x)|<x$成

立”即 $\forall x\in[\frac{1}{2},2],-1<x+\frac{b}{x}+a<1$。只要 $g(x)=x+\frac{b}{x}$ 在 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值与最小值之差小于 2 即可。

当 $b\geq 4$时，$g(\frac{1}{2})-g(2)<2$，得 $b\in\varnothing$。

当 $\frac{1}{4}<b<4$ 时，$\begin{cases} g(2)-2\sqrt{b}<2 \\ g(\frac{1}{2})-2\sqrt{b}<2 \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{4}<b<\frac{9}{4}$

当 $b\leq\frac{1}{4}$ 时 $g(2)-g(\frac{1}{2})<2\Rightarrow -\frac{1}{3}<b\leq\frac{1}{4}$

所以 $-\frac{1}{3}<b<\frac{9}{4}$

综上可得，所求实数 b 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$。故本题选 D。

9.【答案】选 D。

【解析】《数学史概论》中指出欧拉发现著名公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$。故本题选 D。

10.【答案】选 B。

【解析】《普通高中数学新课程标准（2017 年版）》指出：高中数学课程以学生发展为本，落实立德树人的根本任务。故本题选 B。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】根据均值不等式：$a^2+b^2\geq 2ab\Rightarrow 2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\Rightarrow\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$

所以有 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$

$\geq\frac{x+y}{\sqrt{2}}+\frac{x+1-y}{\sqrt{2}}+\frac{1-x+y}{\sqrt{2}}+\frac{1-x+1-y}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号。

12.【答案】9

【解析】利用正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 有：$(2b-c)\cos A=a\cos C\Rightarrow$

$(2\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C\Rightarrow\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}$，

$b=2\sqrt{3}\sin B$，$c=2\sqrt{3}\sin C$，又 $L=a+b+c=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin C$

$=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{3})=3+6\sin(B+\frac{\pi}{6})$，又 $B\in(0,\frac{2\pi}{3})\therefore B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})\Rightarrow$

$\sin(B+\frac{\pi}{6})\in(\frac{1}{2},1]$，$\therefore L_{\max}=9$。

13.【答案】2

【解析】由图象的信息可知 $f(5)+f'(5)=(-5+8)+(-1)=2$。

14.【答案】审美价值

【解析】《普通高中数学新课程标准（2017 年版）》指出通过高中数学课程的学习，学生能提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯，发展自主学习的能力；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；不断提高实践能力，提升创新意识；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

15.【答案】数学学科素养

【解析】《普通高中数学新课程标准（2017 年版）》指出：数学学科素养是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现，是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。

三、解答题（本大题共 7 小题，第 16-20 题每小题 8 分，第 21、22 小题各 10 分，共 60 分）

16.【答案】（1）$\hat{y}=-2x+20.8$；（2）销售单价为 7 百元（精确到个位数）时，日利润最大.

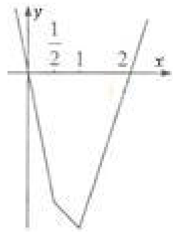
【解析】（1）因为 $\overline{x}=7$，$\overline{y}=\frac{10+8+9+6+1}{5}=6.8$，所以，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{218-5\times7\times6.8}{255-5\times49}=-2$，$\hat{a}=\overline{y}-b\overline{x}=6.8-(-2)\times7=20.8$，于是得到 y 关于 x 的回归直线方程 $\hat{y}=-2x+20.8$。

（2）销售价为 x 时的利润为 $\omega=(x-4)(-2x+20.8)=-2x^2+28.8x-83.2$，当 $x=\frac{28.8}{2\times2}\approx7$ 时，日利润最大。

17.【答案】（1）$\{x\,|\,0<x<2\}$（2）$a\in(-1,\frac{4}{3}]$

【解析】（1）当 $a=-2$ 时，不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$，设函数

$y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$， $y=\begin{cases}-5x，x<\dfrac{1}{2}\\-x-2,\dfrac{1}{2}\le x\le 1\\3x-6，x>1\end{cases}$，



其图象如图所示，从图象可知，当且仅当 $x\in(0,2)$ 时， $y<0$，∴原不等式解集是 $\{x\,|\,0<x<2\}$。

（2）当 $x\in\left[-\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 时， $f(x)=1+a$，不等式 $f(x)\le g(x)$ 化为 $1+a\le x+3$，∴ $x\ge a-2$ 对 $x\in\left[-\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 都成立，故 $-\dfrac{a}{2}\ge a-2$，即 $a\le\dfrac{4}{3}$，∴ a 的取值范围为 $\left(-1,\dfrac{4}{3}\right]$。

18.【答案】（1） $a_n=2^n$； $b_n=n$；（2） $T_n=(n-1)2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$

【解析】（1）由 $a_1=2$， $a_{n+1}=2a_n$，得 $a_n=2^n$。当 $n=1$ 时， $b_1=b_2-1$，故 $b_2=2$。当 $n\ge 2$ 时， $\dfrac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$，整理得 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{n+1}{n}$，所以 $b_n=n$。

（2）由（1）知， $a_nb_n=n\cdot 2^n$，所以 $T_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，

$2T_n=2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$，

所以 $T_n-2T_n=-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$，所以 $T_n=(n-1)2^{n+1}+2$。

19.【答案】（1） $(x-3)^2+(y-2)^2=16$；（2）存在 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立，详见解析。

【解析】（1）由题意可设 AB 的方程为 $y=x-1$，代入 Ω 可得 $x^2-6x+1=0$。所以，由韦达定理得 $x_1+x_2=6$，所以 $y_1+y_2=x_1+x_2-2=4$。所以 AB 的中点坐标为 $(3,2)$，即圆心坐标为 $(3,2)$。又 $|AB|=x_1+x_2+p=6+2=8$，所以半径 $r=4$，所以以 AB 为直径的圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$。

（2）假设存在常数 λ，使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立。设直线 AB 的方程为

$y=k(x-1)$，则直线 CD 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-1)$。将 AB 的方程代入 Ω 得：$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$。由韦达定理得：$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$，所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\frac{4(k^2+1)}{k^2}$。同理可得 $|CD|=4(k^2+1)$。所以 $\lambda=\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{k^2}{4(k^2+1)}+\frac{1}{4(k^2+1)}=\frac{1}{4}$。因此，存在 $\lambda=\frac{1}{4}$，使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立。

20.【答案】（1）$a\le e$ 或 $a\ge e^2$；（2）见解析

【解析】（1）∵ $f'(x)=e^x-a$ 是增函数，又∵ $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调，∴ $f'(1)=e-a\ge 0$ 或 $f'(2)=e^x-a\le 0$。∴ $a\le e$ 或 $a\ge e^2$。

（2）令 $g(x)=f(x)-x^2=e^x-ax-1-x^2$，∵ $\varphi(x)=g'(x)=e^x-a-2x$，$\varphi'(x)=e^x-2$。∴ $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时，$\varphi(x)$ 是减函数，$x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$\varphi(x)$ 是增函数。∴ $x=\ln 2$ 时，$\varphi(x)_{\min}=2-a-2\ln 2=2\ln\frac{e}{2}-a$，∵ $a\le 0$，∴ $\varphi(x)_{\min}=2\ln\frac{e}{2}-a>0$，∴ $g(x)=f(x)-x^2$ 在 $x\ge 0$ 时是增函数。∴ $g(x)\ge g(0)=f(0)=0$，即 $f(x)\ge x^2$。

21.【参考答案】新课标在数学思考的目标表述中明确指出要发展合情推理能力和演绎推理能力。合情推理是根据已有的知识和经验，在某种情境和过程中推出可能性结论的推理，演绎推理是从一般性的原理出发，推出某个特殊情况下的结论的推理。

（1）在数学教学中，要让学生说理，养成学生推理有据的好习惯。

（2）在数学概念、数学公式、数学解题过程中始终贯穿合情推理和演绎推理，发挥学生的主动性，多让学生思考和探究，培养学生的合情推理能力和演绎推理能力。

（3）数学来源于生活，不应局限在课堂中，课外需恰当的组织指导学生学习。

22.【参考答案】

（1）教学目标：①掌握空间两点的距离公式由来及应用；②经历自主推导空间两点的距离公式的过程，提高推理能力，知识迁移能力；③感受数学的逻辑魅力，更加热爱数学。

（2）教学过程

（一）问题导入

教师提出问题（1）平面两点间的距离公式？（2）给你一块砖，你如何量出它的对角线长，说明你的理由。（3）建筑设计中常常要计算空间两点间的距离公式，你能用两点的坐标

表示这两点间的距离吗？

（二）讲授新课

1.空间两点的距离公式

教师引导学生结合平面两点间的距离公式，猜想空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式，并试着证明猜想。

教师安排学生上讲台板演证明过程，检测学生的逻辑是否严谨。并给与评价。

2.提出问题：如果 $|OP|$ 是定长 r, 那么 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 表示什么图形？学生先自主思考，然后小组交流讨论想法。

（三）及时演练，加深印象

PPT 呈现题目：已知 $A(x,2,3)$、$B(5,4,7)$，且 $|AB|=6$，求 x 的值。学生利用所学公式解得 $x=1$ 或 $x=9$。

（四）小结作业

1.引导学生总结本节课所学。

2.作业：课下根据本节课所学，自编一道题目。