天津市教师招聘考试

数学学科精选题

目录

模块练习答案解析 1
- 复数 1
- 集合与简易逻辑 5
- 不等式 11
- 函数 18
- 三角函数 23
- 数列 32
- 算法初步 41
- 立体几何 46
- 解析几何 53
- 统计与概率 62
- 导数 64
- 定积分 73

综合练习答案解析 80
- 一、单项选择题。........ 80
- 二、填空题。 83
- 三、简答题。 85

数学精选试题答案及解析

复数

1、选 A

【解答】解：由$\frac{1-2i}{z}$=1 - i，得 z=$\frac{1-2i}{1-i}=\frac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$，

$\therefore \bar{z}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$，

则$\bar{z}$在复平面内对应的点的坐标为（$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$），位于第一象限.

故选：A.

2、选 C

【解答】解：$\frac{2-bi}{1+2i}=\frac{(2-bi)(1-2i)}{5}$

$=\frac{2-2b}{5}+\frac{-4-b}{5}$i

由$\frac{2-2b}{5}$= - $\frac{-4-b}{5}$得 b= - $\frac{2}{3}$.

故选：C.

3、选 A

【解答】解：$\frac{(2+i)(1-i)^2}{1-2i}=\frac{(2+i)(-2i)}{1-2i}=\frac{2-4i}{1-2i}$=2，

故选：A.

4、选 A

【解答】解：$\frac{a-3i}{1+2i}=\frac{(a-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{a-6}{5}$ - $\frac{2a+3}{5}$i

根据纯虚数的概念得出$\begin{cases}\frac{a-6}{5}=0\\-\frac{2a+3}{5}\neq 0\end{cases}$

解得 a=6.

故选：A.

5、选 C

【解答】解：由（1 - i）z= - 3+i，得 z=$\frac{-3+i}{1-i}=\frac{(-3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-2-i$，

∴z 在复平面内对应的点的坐标为（ - 2， - 1），位于第三象限.

故选：C.

6、选 A

【解答】解：复数 z_1=a+i（a∈R），z_2=1 - i，且$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+i}{1-i}=\frac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{a-1}{2}+\frac{(a+1)}{2}$i 为纯虚数，∴$\frac{a-1}{2}$=0，

$\frac{(a+1)}{2}$≠0，

∴a=1.

则 z_1在复平面内所对应的点（1，1）位于第一象限.

故选：A.

7、选 A

【解答】解：由复数$\frac{a+3i}{1+2i}=\frac{(a+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{(a+6)+(3-2a)i}{5}=\frac{a+6}{5}+\frac{3-2a}{5}i$是纯虚数，

则$\begin{cases}\frac{a+6}{5}=0\\ \frac{3-2a}{5}\neq 0\end{cases}$，解得 a= - 6.

故选：A.

8、选 C

【解答】解：z=$\frac{1-i}{i}$= - 1 - i，所以对应的点在第三象限；

故选：C.

9、选 D

【解答】解：由（z - 1）i=1+i，得 z - 1=$\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)(-i)}{-i^2}=1-i$，

∴z=2 - i，

∴复数 z 在复平面内对应的点的坐标为（2， - 1），位于第四象限.

故选：D.

10、选 B

【解答】解：（3+2i）i=2i^2+3i= - 2+3i.

故选：B.

11、选 C

【解答】解：复数 z=$\frac{1}{1-i}$+i=$\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}$+i=$\frac{1+i}{2}$+i=$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，

则$|z|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选：C.

12、选 C

【解答】解：因为复数 $m^2+2m-3+(m-1)i$（$m\in R$）为纯虚数，所以复数 $m^2+2m-3=0$ 且 $m-1\neq0$，解得 $m=-3$；

故选：C.

13、选 C

【解答】解：由题意，设复数 z=bi，所以 $(bi+2)^2+8i=4-b^2+(4b+8)i$ 为纯虚数，所以 $4-b^2=0$ 并且 $4b+8\neq0$，解得 b=2，

所以 z=2i，则复数 $1+\bar{z}=1-2i$；

故选：C.

14、选 B

【解答】解：因为 $(2+ai)(a-2i)=-4i$，所以 $4a+(a^2-4)i=-4i$，

$4a=0$，并且 $a^2-4=-4$，

所以 a=0；

故选：B.

15、选 C

【解答】解：$\frac{5}{i-2}=\frac{5(i+2)}{(i-2)(i+2)}=\frac{5(i+2)}{-1-4}=-2-i$；

故选：C.

16、选 C

【解答】解：$\because 1+i\notin R$，

$\therefore f(1+i)=(1-i)(1+i)=1-i^2=2$，

故选：C.

17、选 A

【解答】解：把复数 z=1+i 代入$\frac{z+1}{z^2}$可得$\frac{1+i+1}{(1+i)^2}=\frac{2+i}{2i}=\frac{2i-1}{-2}=\frac{1}{2}-i$

故选：A.

18、选 A

【解答】解：复数$\frac{1+ai}{2-i}=\frac{(1+ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2-a+2ai+i}{5}$，它是纯虚数，所以 a=2，

故选：A.

19、选 A

【解答】解：复数$\frac{1-3i}{1-i}=\frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4-2i}{2}=2-i$

故选：A.

20、选 A

【解答】解：因为（a - 2i）i=b - i，

所以 a= - 1，b=2

所以 $ai^{3b}=-1i^{6}=1$

故选：A.

21、选 D

【解答】解：考查复数的乘法运算．可采用展开计算的方法，得（$x-i^2$）+（1 - x）i=y，没有虚部，

即$\begin{cases}x+1=y\\1-x=0\end{cases}$，

解得：x=1，y=2.

故选：D.

22、选 B

【解答】解：复数$\frac{\sqrt{2}-i^3}{1-\sqrt{2}\cdot i}=\frac{\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}i}=\frac{(\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{2}i)}{(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}=\frac{3i}{3}$=i，

故选：B.

23、选 B

【解答】解：∵由题意知复数$3-\sqrt{3}i$对应的向量按顺时钟方向旋转$\frac{\pi}{3}$，

∴旋转后的向量为$(3-\sqrt{3}i)[cox(-\frac{\pi}{3})+isin(-\frac{\pi}{3})]=(3-\sqrt{3}i)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2})=-2\sqrt{3}i.$

故选：B.

24、选 B

【解答】解：法 1：设 z=a+bi（a，b∈R）由已知 a+bi+$\sqrt{a^2+b^2}$=2+i

由复数相等可得$\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=2\\b=1\end{cases}$∴$\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=1\end{cases}$故 z=$\frac{3}{4}$+i

故选 B.

集合与简易逻辑

一、单选题

1．C

【解析】根据补集的定义，$\complement_U A$是由所有属于集合U但不属于A的元素构成的集合，由已知，有且仅有元素 2，4，5 符合条件．所以$\complement_U A$={2，4，5}，故选 C.

2．B

【解析】

【分析】

根据定义域，由函数单调性，求出集合 A，解方程求出集合 B，根据交集的意义求出交集.

【详解】

因为函数$y=\log_2 x$单调递增，所以$x=3$时，函数取最小值$\log_2 3\geq 1$，

所以集合$A=\{y|y\geq \log_2 3\}$，解集合 B 中方程可得集合$B=\{1,3\}$，

所以$A\cap B=\{3\}$.

故选 B.

【点睛】

本题主要考查集合的计算，求函数型集合时要注意观察集合表示的时值域还是定义域，通过单调性等性质求解，还要注意定义域的限制.

3．B

【解析】由a,b在平面α内．“$m\perp a,m\perp b$”不能得到“$m\perp\alpha$”，反过来由“$m\perp\alpha$”可以得到“$m\perp a,m\perp b$”，故“$m\perp a,m\perp b$”是“$m\perp\alpha$”的必要而不充分条件.

故选 B.

4．A

【解析】由题意知$f(x)=x^2+bx=(x+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}$，最小值为$-\frac{b^2}{4}$.

令$t=x^2+bx$，则$f(f(x))=f(t)=t^2+bt=(t+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4},t\geq-\frac{b^2}{4}$,

当$b<0$时，$f(f(x))$的最小值为$-\frac{b^2}{4}$，所以“$b<0$”能推出“$f(f(x))$的最小值与$f(x)$的最小

值相等”；当$b=0$时，$f(f(x))=x^4$的最小值为 0，$f(x)$的最小值也为 0，所以“$f(f(x))$的最小值与$f(x)$的最小值相等”不能推出“$b<0$”. 故选 A.

5. C

【解析】因为命题 $\exists x\in \mathrm{R}, ax^2+ax-1\ge 0$ 为假命题，所以 $a=0$或$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ $\therefore a=0$或$\begin{cases} a<0 \\ a^2+4a<0 \end{cases}$ $\therefore -4<a\le 0$ ，选 C.

6. D

【解析】试题分析：先通过解分式不等式化简集合，再利用集合的补集和交集运算进行求解.

试题解析：因为$B=\{x|\frac{x-2}{x+2}\le 0\}=\{x|\begin{cases}(x-2)(x+2)\le 0 \\ x+2\ne 0\end{cases}\}=(-2，2]$,

所以$C_R B=(-\infty，-2]\cup(2，+\infty)$，则$A\cap(C_R B)=\{-3，-2，3\}$.

【名师点睛】解分式不等式的主要方法是将其等价转化为整式不等式，主要题型有：

①$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$;

②$\frac{f(x)}{g(x)}\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\le 0 \\ g(x)\ne 0 \end{cases}$;

③$\frac{f(x)}{g(x)}>a\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}-a>0\Leftrightarrow \frac{f(x)-ag(x)}{g(x)}>0$.

7. B

【解析】集合 $M=\{x|x^2-x-2<0\}=\{x|-1<x<2\}$, $N=\{x|y=\sqrt{x-1}\}=\{x|x\ge 1\}$.

$M\cap N=\{x|1\le x<2\}$.

故选 B。

8. B

【解析】$\because M=\{x|x^2-2x<0\}=\{x|0<x<2\}$

$N=\{y|y=2^x+1\}=\{y|y>1\}$

$\therefore M\cap N=(1,2)$

故选 B。

9．A

【解析】$C_U A=\{x\mid x\geq 2\}$，所以$(C_U A)\cap B=\{x\mid 2\leq x<3\}$，故选 A。

10．D

【解析】分析：集合P的子集有2^{10}个，含3个元素的子集有C_{10}^3个，由古典概型概率公式可得结果.

详解：P的子集有2^{10}个，

含3个元素的子集有C_{10}^3个，

故概率$P=\frac{C_{10}^3}{2^{10}}=\frac{15}{128}$，故选 D.

点睛：本题主要考查子集的个数以及组合数的应用，意在考查综合运用所学知识解决问题的能力，属于简单题.

11．C

【解析】分析：由题意，求得$A=\{x|x\leq 1\}, B=\{y|0<y\leq 2\}$，利用集合的交集运算，即可得到结果.

详解：由题意$A=\{x|y=\sqrt{1-x}\}=\{x|x\leq 1\}, B=\{y|y=2^x, x\in A\}=\{y|0<y\leq 2\}$，

所以$A\cap B=\{x|0<x\leq 1\}=(0,1]$，故选 C.

点睛：本题主要考查了集合的运算，正确求解集合A,B是解答的关键，着重考查了推理与运算能力.

12．D

【解析】$M=(1,3), N=(-\infty,3]$，所以$M\cap N=(1,3)$，故选 D。

13．B

【解析】分析：解方程求得集合 B，然后求出$C_U B$，最后再求$A\cap(C_U B)$.

详解：由题意得$B=\{x|x^2=3x\}=\{0,3\}$，

$\therefore A\cap(C_U B)=\{1,2\}$.

故选 B.

点睛：本题考查二次方程的解法和集合的运算，属容易题，主要考查学生的运算能力.

14．B

【解析】由题意得$a<(\ln x)_{\min}$，因为$x>e$，所以$\ln x>1$，所以$a\le 1$，因为$(-\infty,1)$是$(-\infty,1]$的真子集，因此命题 p 的一个充分不必要条件是$a<1$，故选：B.

15．A

【解析】$\because A=\{x|x\rangle 0\}$， $B=\{x|-1\le x\le 2\}$

则 $A\cup B=$ $\{x|x\ge -1\}$

故选 A

二、填空题

1．②

【解析】$2>1,-1>-2,\frac{2}{-2}=\frac{1}{-1}\therefore$ ①错；

$\frac{1}{a}\left\langle\frac{1}{b}\therefore\frac{a-b}{ab}\right\rangle 0\because a>b\therefore ab>0$，②对；

$\because xy>xz\Rightarrow x(y-z)>0\therefore\{\begin{matrix}x>0\\y>z\end{matrix}$ 或$\{\begin{matrix}x<0\\y<z\end{matrix}$ ，所以“$x>0$，$y>z$”是“$xy>xz$”的充分不必要条件；③错；

$|x|+|y|=|x+y|$ $\Leftrightarrow xy\ge 0$ ，所以“$xy>0$”是“$|x|+|y|=|x+y|$”的充分不必要条件；④错.

2．$\forall x\in R$，$x^2+2ax+a>0$.

【解析】

【分析】

把存在量词改为全称量词，然后再对后面的命题进行否定.

【详解】

由题意得$\neg p$为“$\forall x\in R$，$x^2+2ax+a>0$”.

【点睛】

本题考查含有量词的命题的否定，解题时注意否定的方法，即改变量词并同时对命题进行否定.

3．1

【解析】原命题等价于 $\tan x \le m$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上恒成立，即 $y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值小于或等于 m，由于 $y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上递增，所以 $y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以 $m\ge 1$，即 m 的最小值为 1, 故答案为 1.

4．$(3,+\infty)$

【解析】试题分析：由 $x^2-2x-3<0$，解得 $-1<x<3$，所以 $A=\{x|-1<x<3\}$．因为 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，所以 $m>3$，即实数 m 的取值范围为 $(3,+\infty)$．

考点：充分条件与必要条件.

【方法点睛】(1) 充分条件、必要条件或充要条件的应用，一般表现在参数问题的求解上，求解一般步骤为：①首先要将 p,q 等价化简；②将充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的包含关系；③列出关于参数的等式或不等式组，求出参数的值或取值范围.

5．$(3,+\infty)$

【解析】$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$，　B 是 A 的子集，故 $a>3$.

【点睛】本题主要考查集合的研究对象和交集的概念，考查指数不等式的求解方法，考查二次函数的值域等知识. 对于一个集合，首先要确定其研究对象是什么元素，是定义域还是值域，是点还是其它的元素. 二次函数的值域主要由开口方向和对称轴来确定. 在解指数或对数不等式时，要注意底数对单调性的影响.

6．$0\le a<4$.

【解析】

【分析】

将问题转化为不等式$ax^2-ax+1>0$对$x\in R$恒成立的问题求解，分$a=0$和$a\ne 0$两种情况分别求出实数a的取值范围，取其交集即可.

【详解】

由题意得不等式$ax^2-ax+1>0$对$x\in R$恒成立.

①当$a=0$时，不等式$1>0$在R上恒成立，符合题意.

②当$a\neq 0$时，若不等式$ax^2-ax+1>0$对$x\in R$恒成立，

则$\begin{cases} a>0 \\ \Delta=a^2-4a<0 \end{cases}$，解得$0<a<4$.

综上可得$0\le a<4$，

所以实数a的取值范围是$[0,4)$.

【点睛】

不等式$ax^2+bx+c>0$的解是全体实数(或恒成立)的条件是当$a=0$时，$b=0,c>0$；当$a\neq 0$时，$\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$不等式$ax^2+bx+c<0$的解是全体实数(或恒成立)的条件是当$a=0$时，$b=0,c<0$；当$a\neq 0$时，$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$.

7．$(-1,2)$

【解析】命题p：$4+4-4m>0\therefore m<2$

命题q：$(m-3)(m+1)<0\therefore -1<m<3$

因为$p\wedge q$为真命题，所以$-1<m<2$

8．②③

【解析】若$\vec{a}$为零向量, 则①不成立. 由于$\vec{a}//\vec{e}$故②正确. 根据向量数量积的运算可知③正确. 当$\vec{b}$为零向量时, ④不成立. 根据向量数量积的概念可知⑤错误. 故正确需要为②③.

9．$\{1\}$

【解析】$\because U=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3\}$，

$\therefore \complement_U B=\{1,4,5\}$，又$A=\{1,3\}$

$\therefore A\cap\left(\complement_U B\right)=\{1\}$

故答案为： $\{1\}$

点睛：在进行集合的运算时要尽可能地借助 Venn 图和数轴使抽象问题直观化．一般地，集合元素离散时用 Venn 图表示；集合元素连续时用数轴表示，用数轴表示时要注意端点值的取舍．

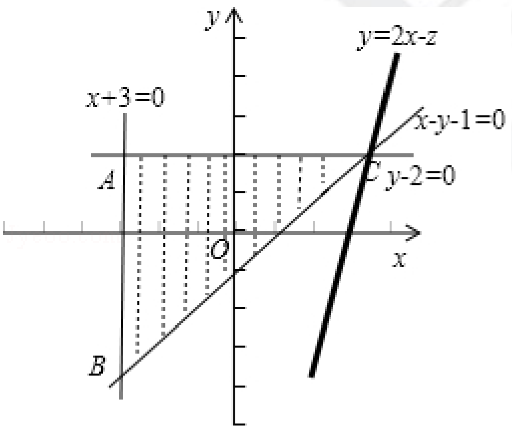
不等式

一、选择题

1、选 D

【解答】解：作出约束条件$\begin{cases}x-y-1\leq 0\\x+3\geq 0\\y-2\leq 0\end{cases}$ 所对应的可行域，

如图△ABC：



变形目标函数可得 y=2x－z，

平移直线 y=2x 可知，

当直线经过点 C（3，2）时，

直线的截距最小，z 取最大值，

代值计算可得 z=2x－y 的最大值为

z_{max}=2×3－2=4．

故选：D.

2．C

【解析】本题考查不等式的性质，基本不等式及解决问题的能力.

$\because 0<x<1, \therefore b=1+x>2\sqrt{x}=a$, 又 $c-b=\frac{1}{1-x}-(1+x)=\frac{1-(1-x)(1+x)}{1-x}=\frac{x^2}{1-x}>0$. 故选 C

3．D

【解析】$\because x>-2, \therefore x+2>0$ ， $x+\frac{1}{x+2}=\left(x+2\right)+\frac{1}{x+2}-2\geq 2\sqrt{\left(x+2\right)\times\frac{1}{x+2}}-2=0$（当且仅当 $\left(x+2\right)=\frac{1}{x+2}$ 时等号成立），所以 $x+\frac{1}{x+2}$ 的最小值为 0 ，故选 D.

【易错点睛】利用基本不等式求最值，属于中档题. 利用基本不等式求最值时，一定要正确理解和掌握“一正，二定，三相等”的内涵：一正是，首先要判断参数是否为正；二定是，其次要看和或积是否为定值（和定积最大，积定和最小）；三相等是，最后一定要验证等号能否成立（主要注意两点，一是相等时参数否在定义域内，二是多次用 $\geq$ 或 $\leq$ 时等号能否同时成立）.

4．C

【解析】

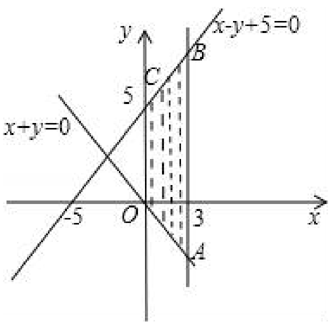
【分析】

本题可先将不等式解出，再在平面直角坐标系中做出图形，最后得出结果。

【详解】

不等式 $\begin{cases}(x-y+5)(x+y)\geq 0\\ 0\leq x\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+5\geq 0\\ x+y\geq 0\\ 0\leq x\leq 3\end{cases}$ ①或 $\begin{cases}x-y+5\leq 0\\ x+y\leq 0\\ 0\leq x\leq 3\end{cases}$ ②，

以上不等式组①表示的平面区域如图，



不等式组②中的几个二元一次不等式表示的平面区域无公共部分，

所以原不等式组表示的平面区域是图中的梯形$OABC$.

故选 C.

【点睛】

在解不等式时，如果出现多种情况，可以分类讨论。

5．C

【解析】略

6、选 C

【解答】解：作出不等式组对应的平面区域，

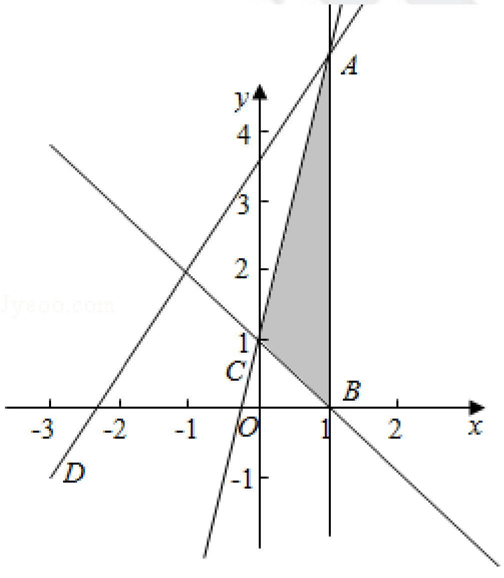
z=$\frac{y+1}{x+3}$的几何意义是区域内的点到点 D（﹣3，﹣1）的斜率，

由图象知 AD 的斜率最大，

由$\begin{cases}4x-y+1=0\\x-1=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$，即 A（1，5），

则 z=$\frac{y+1}{x+3}$的最大值 z=$\frac{5+1}{1+4}$=$\frac{6}{4}$=$\frac{3}{2}$，

故选：C.



7、选 C

【解答】解：作出不等式组对应的平面区域如图：

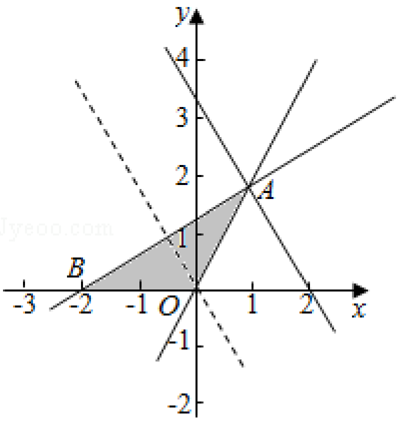
设 z=$\sqrt{3}x+y$，则 y=﹣$\sqrt{3}$x+z

平移直线 y=－$\sqrt{3}$x+z，则由图象知当直线经过点时，直线的截距最大，此时 z 最大，

由$\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0\\x-\sqrt{3}y+2=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{3}\end{cases}$，即 A（1，$\sqrt{3}$），

此时 z=$\sqrt{3}$×1+$\sqrt{3}$=2$\sqrt{3}$，

故选：C.



8、【答案】A

【解答】解：设 x＞0，若 x+$\frac{a}{x}$＞1 恒成立，

则：x^2－x+a＞0，即$(x-\frac{1}{2})^2$+a－$\frac{1}{4}$＞0，

∴a－$\frac{1}{4}$＞0，解得：a＞$\frac{1}{4}$，

故选：A.

9、【答案】B

【解答】解：由已知得$\vec{AB}\cdot\vec{AC}$=bccos∠BAC=2$\sqrt{3}$⇒bc=4，

故 $S_{\triangle ABC}$=x+y+$\frac{1}{2}$=$\frac{1}{2}$bcsinA=1⇒x+y=$\frac{1}{2}$，

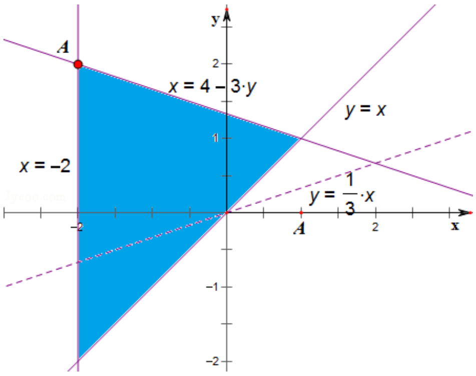
而$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$=2（$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$）×（x+y）

=2（5+$\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}$）≥2（5+2$\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{4x}{y}}$）=18，

故选：B．

10、【答案】B

【解答】解：由题意作出其平面区域，



m=$\frac{|x-3y|}{\sqrt{10}}$表示了区域内的点到直线 x－3y=0 的距离；

而 m 取得最大值时 z 也取得最大值；

当取点 A（－2，2）时，m 取得最大值；

故 z=|x－3y|的最大值为|－2－3×2|=8；

故选：B．

二、填空题

1、【解答】解：根据题意，x+2y=（x+2）+2（y+2）－6=[（x+2）+2（y+2）]（$\frac{3}{x+2}$+$\frac{3}{y+2}$）

－6=3+$\frac{6(y+2)}{x+2}$+$\frac{3(x+2)}{y+2}$≥3+2$\sqrt{\frac{6(y+2)}{x+2}\cdot\frac{3(x+2)}{y+2}}$=3+6$\sqrt{2}$，

即 x+2y 的最小值为 3+6$\sqrt{2}$，

故答案为：3+6$\sqrt{2}$．

2、【解答】解：根据题意，若 x+2y=4xy，则有$\frac{1}{y}$+$\frac{2}{x}$=4，

则 x+$\frac{y}{2}$=$\frac{1}{4}$×（x+$\frac{y}{2}$）（$\frac{1}{y}$+$\frac{2}{x}$）=$\frac{1}{4}$（$\frac{5}{2}$+$\frac{x}{y}$+$\frac{y}{x}$）≥$\frac{1}{4}$（$\frac{5}{2}$+2）=$\frac{9}{8}$，

当且仅当 x=y=$\frac{3}{4}$时等号成立；

即 x+$\frac{y}{2}$的最小值为$\frac{9}{8}$；

故答案为：$\frac{9}{8}$.

3、【解答】解：∵a＞b＞0，则 $a^2+\frac{1}{4b(a-b)}\geqslant a^2+\frac{1}{(b+a-b)^2}=a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2$，当且仅当 a=2b＞0 时取等号.

故答案为：2.

4、【解答】解：∵0＜x＜1，∴0＜1 - x＜1，

则 $y=\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}\right)[x+(1-x)]=1+4+\frac{1-x}{x}+\frac{4x}{1-x}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{1-x}{x}\cdot\frac{4x}{1-x}}=9$，

当且仅当$\frac{1-x}{x}=\frac{4x}{1-x}$，即 $x=\frac{1}{3}$时，取等号，

故 $y=\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}$ 的最小值为 9，

故答案为：9.

5、【解答】解：∵实数 a，b 满足 a＞b，且 ab=2，

∴$\frac{a^2+b^2+1}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab+1}{a-b}=(a-b)+\frac{5}{a-b}\geqslant 2\sqrt{(a-b)\cdot\frac{5}{a-b}}=2\sqrt{5}$，当且仅当$b=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{2}$，$a=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}$时取等号.

∴$\frac{a^2+b^2+1}{a-b}$的最小值是 $2\sqrt{5}$.

故答案为：$2\sqrt{5}$.

6、【解答】解：∵$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，x、y∈$R^+$，

∴$x+y=(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=\frac{x+y}{x}+\frac{9(x+y)}{y}=10+\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}=16$（当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$，x=4，y=12 时取“=”）.

故答案为：16.

7、【解答】解：∵a，b，c 为正实数，a - 3b+2c=0，∴$b=\frac{a+2c}{3}$.

则$\frac{b^2}{ac}=\frac{(a+2c)^2}{9ac}\geq\frac{8ac}{9ac}=\frac{8}{9}$，当且仅当 a=2c，b=$\frac{4c}{3}$>0 时取等号，

∴$\frac{b^2}{ac}$的最小值是$\frac{8}{9}$.

故答案为：$\frac{8}{9}$.

8、【解答】解：作出不等式对应的平面区域，
若 a=0，则目标函数为 z=2x，即此时函数在 A（3，4）时取得最大值，不满足条件.

当 a≠0，由 z=2x+ay 得 y=－$\frac{2}{a}$x+$\frac{z}{a}$，

若 a>0，目标函数斜率－$\frac{2}{a}$<0，

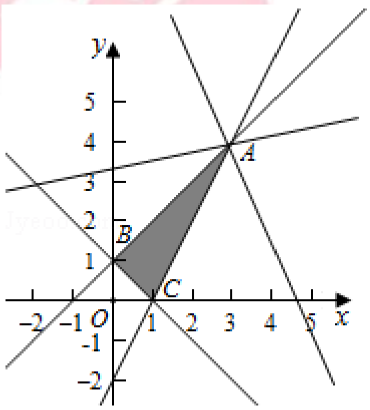
此时平移 y=－$\frac{2}{a}$x+$\frac{z}{a}$，得 y=－$\frac{2}{a}$x+$\frac{z}{a}$在点 A（3，4）处的截距最大，此时 z 取得最大值，不满足条件.

若 a<0，目标函数斜率－$\frac{2}{a}$>0，

要使目标函数 z=2x+ay 仅在点 A（3，4）处取得最小值，

则－$\frac{2}{a}$<k_{AB}=1，

即 a<－2，
故答案为：a<－2



9、【解答】解：∵x>2，
∴x－2>0，

∴f（x）=x+$\frac{1}{x-2}$=（x－2）+$\frac{1}{x-2}$+2≥2$\sqrt{(x-2)\frac{1}{x-2}}$+2=4，

当且仅当 x－2=1，即 x=3 时取等号

∴函数 f（x）的最小值为 f（3）=4.

故答案为：4.

10、【解答】解：因为 a+b=ab－3，

所以 ab－a=b+3，

又因为 a＞0，b＞0，

所以 a=$\frac{b+3}{b-1}$，

所以 a+2b=$\frac{b+3}{b-1}$+2b=$\frac{b-1+4}{b-1}+2(b-1)+2$=$\frac{4}{b-1}$+2（b－1）+3≥2$\sqrt{\frac{4}{b-1}\cdot 2(b-1)}$+3=4$\sqrt{2}$+3，

当且仅当$\frac{4}{b-1}$=2（b－1）即 b=$\sqrt{2}+1$时取“=”，

所以答案为：4$\sqrt{2}$+3.

函数

答案

一、选择题

1．D

【解析】本题考查函数的定义域、单调性及不等式的解法.

要使函数有意义，需使 $\log_{0.5}(4x-3)\geq 0$，根据对数函数的单调性得 $0<4x-3\leq 1$，解得 $\frac{3}{4}<x\leq 1$. 故选 D

2．B

【解析】略

3．D

【解析】

试题分析：选项 A、C 中两个函数的解析式一样，定义域不同，故不是同一函数；选项 B 的两个函数解析式不同，定义域一样，所以也不是同一函数；只有答案 D 中的两个函数解析式和定义域均相同，故为同一函数，所以选 D.

考点：判断两个函数为同一函数的标准，即函数的三要素：解析式、定义域、值域.

4．A

【解析】

试题分析：函数 $f(x)=4x^2-mx+5$ 的增区间为 $\left[\frac{m}{8},+\infty\right)$，由已知可得

$\frac{m}{8}\le -2\Rightarrow m\le -16$ …①，

$f(1)=4\times 1^2-m\times 1+5=9-m$ …② 由①②得：$f(1)\ge 25$.

考点：二次函数的单调区间，不等式运算.

5．A

【解析】函数 $y=\log_a(x+1)$ （$a>0$且$a\ne 1$）的定义域就是保证真数大于 0，$x+1>0$，即 $x>-1$. 故选 A

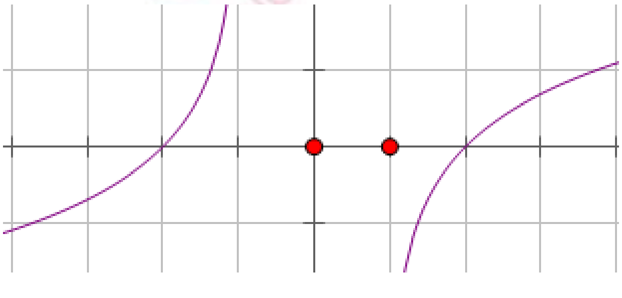
6．A

【解析】略

7．B

【解析】

试题分析：根据题意，画出函数图象如下图所示，由图可知 x 与 $f(x)$ 异号的区间是 $(-2,0)\cup(0,2)$.



考点：函数的奇偶性与单调性.

【思路点睛】本题主要考查函数的奇偶性，考查函数的单调性，考查数形结合的数学思想方

法. 由于函数是奇函数，所以图象关于原点对称，结合 $f(2)=0$ 和函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，可以画出函数在 $(0,+\infty)$ 上的函数图象，根据对称性画出 $(-\infty,0)$ 上的图象. 如果函数是偶函数，则图象关于 y 轴对称，$f(|x|)$ 的图象也关于 y 轴对称.

8．C

【解析】

试题分析：已知函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，在同一个坐标系中，画出函数 $y=f(x)$ 和 $y=\log_7 x$ 的图像，可以得出两个图像的交点的个数是 6 个，故选 C.

考点：函数图像的交点个数，数形结合思想.

9．B

【解析】对于 A， $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 R，故不是同一函数，选项 A 错误；

对于 C， $g(x)=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ 而 $f(x)$ 的定义域为 R，故不是同一函数，选项 C 错误；

对于 D， $f(x)=lg(x+1)+lg(x-1)?lg(x^2-1)(x>1)$ 与 $g(x)=lg(x^2-1)(x\langle 1或x\rangle 1)$ 的解析式相同，但定义域不同，不是同一函数；

故答案选 B

10．A

【解析】f(-1)=1, f(1)=3，即 f(f(-1))=3.

故选 A.

11．D

【解析】∵二次函数 f（x）满足 f（4+x）=f（-x），

∴函数的对称轴为直线 x=2，故可设函数解析式为 f（x）=a（x-2）^{2}+h，

∵f（2）=1，f（0）=3，

∴$\begin{cases} h=1 \\ 4a+h=3 \end{cases}$，解得$\begin{cases} h=1 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ∴f（x）=$\dfrac{1}{2}$（x-2）^{2}+1

令$\frac{1}{2}$（x-2）^{2}+1=3，则 x=0 或 x=4

∵f（x）在[0，m]上有最小值 1，最大值 3，

∴实数 m 的取值范围是[2，4].

故选 D.

12．D

【解析】

试题分析：依题意，在区间$(\frac{1}{2},+\infty)$，$f'(x)=2x+a-\frac{1}{x^2}\geq 0$恒成立；

$2x+a\geq\frac{1}{x^2}$在区间$(\frac{1}{2},+\infty)$恒成立，结合函数$y=2x+a,y=\frac{1}{x^2}$的图象可知，

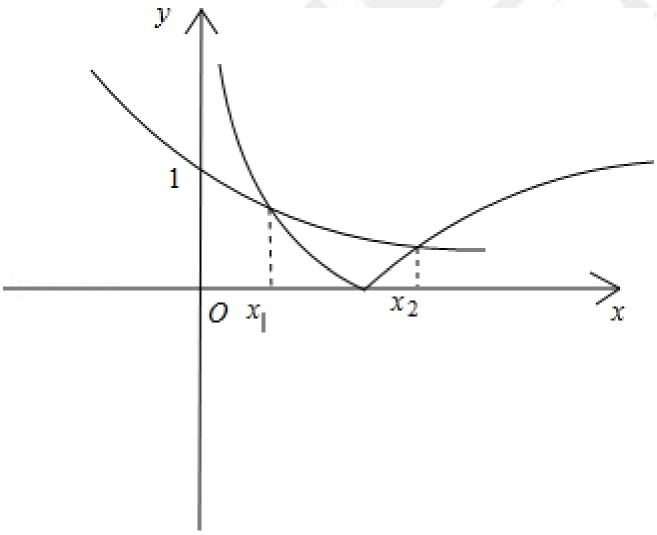
$2\times\frac{1}{2}+a\geq\frac{1}{(\frac{1}{2})^2},a\geq 3$，故选$D$.

考点：1.应用导数研究函数的单调性；2.一次函数、幂函数的图象.

13、选 B

【解答】解：令 f（x）=0，∴|lnx|=e^{-x}；

∴函数 f（x）的零点便是上面方程的解，即是函数|lnx|和函数 e^{-x}的交点，画出这两个函数图象如下：



由图看出 0＜－$\ln x_1$＜1，－1＜$\ln x_1$＜0，0＜$\ln x_2$＜1；

∴－1＜$\ln x_1+\ln x_2$＜1；

∴－1＜$\ln x_1x_2$＜1；

∴$\frac{1}{e}<x_1x_2<e$；

由图还可看出，$-\ln x_1>\ln x_2$；

∴$\ln x_1x_2<0$，$x_1x_2<1$；

∴x_1x_2的范围是（$\frac{1}{e}$，1）.

故选：B.

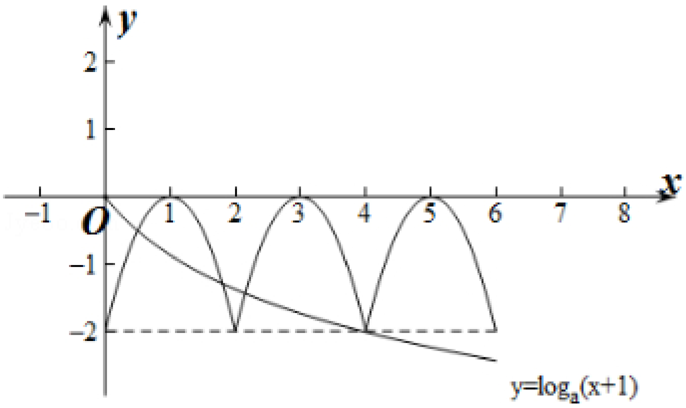
14、选 C

【解答】解：令 x=－1 得 f（1）=f（－1）+f（1）=2f（1），

∴f（1）=0，∴f（x+2）=f（x），

∴f（x）的周期为 2.

作出 f（x）的函数图象如图所示：



∵y=f（x）－$\log_a$（|x|+1）在（0，+∞）上至少有 5 个零点，

∴$\begin{cases}\log_a 5>-2\\0<a<1\end{cases}$，解得 $0<a<\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：C.

15、选 A

【解答】解：∵$x^2-2mx-5=0$ 一定有两个不同的解，且一正一负，

又∵二次函数 f（x）$=x^2-2mx-5$ 在区间（3，4）上存在一个零点，

∴f（3）f（4）<0，

即（4－6m）（11－8m）<0，

故$\frac{2}{3}<m<\frac{11}{8}$，

故选：A.

三角函数

一、单选题

1．B

【解析】$y=\sin x$ 各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，变为 $y=\sin 2x$，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，

得到 $y=\sin\left(2+\frac{\pi}{3}\right)$.

2．D

【解析】由角 α 的终边经过点 $P(x,4)$ 与 $\cos\alpha=\frac{x}{5}$，可得 $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}=\frac{x}{5}$，解得

$x=0,3,-3$，由于 α 为第二象限，故取 $x=-3$，所以 $\tan\alpha=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$.

3．D

【解析】∵函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期是 π，

$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\omega=2$，

将其图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到的函数的表达式为

$g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=2\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$，又 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，

$\therefore \sin\left(0-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\pm1$，

$\therefore \varphi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$

当 $k=-1$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{6}$，即 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

易得：$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=0$

∴函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 对称

故选：D

4．A

【解析】sin（π - α）+sin（π＋α）=sinα - sinα=0．故选 A．

5．A

【解析】y=cos（x+1）的周期是 2π，最大值为 1，最小值为－1，∴y=cos（x+1）图象上相邻的最高点和最低点之间的距离是$\sqrt{\pi^2+2^2}=\sqrt{\pi^2+4}$，故选 A．

6．B

【解析】$sin\left(-600^{\circ}\right)=sin\left(-600^{\circ}+720^{\circ}\right)=sin\left(120^{\circ}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故选 B.

7．D

【解析】由 tan$x$>1，可得$k\pi+\dfrac{\pi}{2}>x>k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in z$.

再根据 x∈(0，2π)，求得 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{4}\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$，

故选：D.

点睛：研究正切函数时注意以下几点：

（1）正切函数 $\mathrm{y}=tanx$ 的定义域为$\{x\,|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\}$；

（2）正切函数 $\mathrm{y}=tanx$ 的周期为π，　$\mathrm{y}=tan\omega x$ 的周期为$\dfrac{\pi}{|\omega|}$；

（3）正切函数 $\mathrm{y}=tanx$ 在其定义与内为增函数.

8．A

【解析】由题可得$k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{4}<k\pi-\dfrac{\pi}{2},(k\in z)$，

解得$2k-\dfrac{3}{2}<x<2k+\dfrac{1}{2},(k\in z)$，故选 A.

9．C

【解析】分析：由已知及正弦定理可得 $ab\cos B=(2c-b)b\cos A$，结合余弦定理可得 $bc=b^2+c^2-a^2$，由余弦定理解得 $\cos A$，结合 A 的范围，即可求得 A 的值.

详解：∵$\dfrac{2\sin C-\sin B}{\sin B}=\dfrac{a\cos B}{b\cos A}$

$\therefore$ 由正弦定理可得 $\dfrac{2c-b}{b}=\dfrac{a\cos B}{b\cos A}$，即 $ab\cos B=\left(2c-b\right)b\cos A$.

$\therefore$ 由余弦定理可得 $ab\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\left(2c-b\right)\cdot b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，整理可得 $bc=b^2+c^2-a^2$.

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$

$\because A\in\left(0,\pi\right)$

$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$

故选 C.

点睛：本题主要考查了正弦定理，余弦定理的综合应用，解题时注意分析角的范围. 对于余弦定理一定要熟记两种形式：（1）$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；（2）$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. 另外，在解与三角形、三角函数有关的问题时，还要记住 $30°$，$45°$，$60°$ 等特殊角的三角函数值，以便在解题中直接应用.

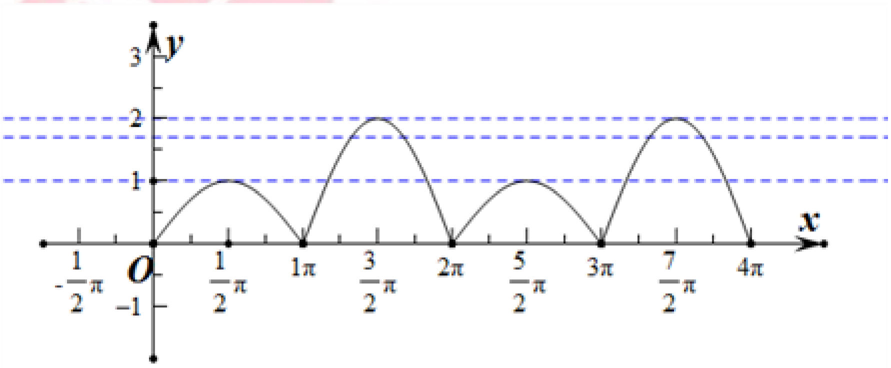
10．A

【解析】

由题意可得，当 $x\in[0,\pi)\cup[2\pi,3\pi)$ 时，函数的解析式为 $f(x)=\sin x$，

当 $x\in[\pi,2\pi)\cup[3\pi,4\pi)$ 时，函数的解析式为 $f(x)=-2\sin x$，绘制函数图象如图所示，满足题意时，该函数与函数 $y=m$ 有 4 个不同的交点，观察函数图象可得，实数 m 的取值范围是 $(1,2)$.

本题选择 A 选项.



点睛：函数零点的求解与判断方法：

(1) 直接求零点：令 $f(x)=0$，如果能求出解，则有几个解就有几个零点.

(2) 零点存在性定理：利用定理不仅要函数在区间 $[a，b]$ 上是连续不断的曲线，且 $f(a)\cdot f(b)$

<0，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点.

(3)利用图象交点的个数：将函数变形为两个函数的差，画两个函数的图象，看其交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点.

11．A

【解析】分析：根据平移变换可得$y=2sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$，根据放缩变换可得函数$g(x)$的解析式，结合对称轴方程求解即可.

详解：将函数$f(x)=2sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象上的每个点的横坐标缩短为原来的一半，

纵坐标不变，得到$y=2sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$，

再将所得图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到函数$g(x)$的图象，

即$g(x)=2sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$，

由$4x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，

得$x=\frac{1}{4}k\pi-\frac{\pi}{24},k\in Z$，

当$k=0$时，离原点最近的对称轴方程为$x=-\frac{\pi}{24}$，故选 A.

点睛：本题主要考查三角函数的图象与性质，属于中档题. 由 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$可求得函数的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$；由$\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$可得对称轴方程；由$\omega x+\varphi=k\pi$可得对称中心横坐标.

12．C

【解析】$\because\alpha=\pi+\frac{2\pi}{5}\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)\therefore$ 角 α 的终边位于第三象限, 选 C.

13．A

【解析】分析：由C的度数求出$\sin C$的值，再由AB，AC的值，利用正弦定理求出$\sin B$的值，根据大边对大角，利用特殊角的三角函数值即可求出角B 的度数.

详解：由题 $AB=c=\sqrt{3}$，$AC=b=1$，$C=60°$ 根据正弦定理可得

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B},\therefore\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{1}{2}$,

又$c>b,\therefore B$为锐角，故$B=30°$.

故选 A.

点睛：此题属于解三角形的题型，涉及的知识有正弦定理，三角形边角的关系，以及特殊角的三角函数值，根据正弦定理求出$\sin B$的值是解本题的关键，同时根据大边对大角注意判断得出角B的具体范围.

14．C

【解析】由$c^2=(a-b)^2+6$可得$a^2+b^2-c^2=2ab-6$，又因为$C=\frac{\pi}{3}$，所以$a^2+b^2-c^2=2ab\cos\frac{\pi}{3}=ab$, 所以 ab=6, 则$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

二、解答题

1．(1)见解析；（2）值域为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

【解析】分析：(1)利用二倍角的正弦公式、二倍角的余弦公式以及两角和与差的正弦公式将函数$f(x)$化为in$\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，利用$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$，$\left(\frac{\pi}{8},1\right)$，$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$，$\left(\frac{5\pi}{8},-1\right)$，$\left(\frac{7\pi}{8},0\right)$描点作图即可；(2)当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，可得$f(x)_{\max}=1$，$f(x)_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而可得结果.

详解：（1）$f(x)=\sqrt{2}(cos^2x+\sin x\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(2cos^2x-1+2\sin x\cos x)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

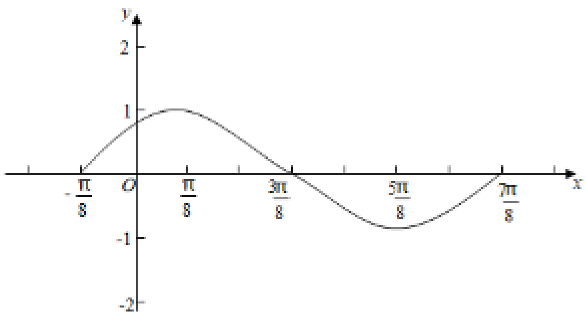
$=\frac{\sqrt{2}}{2}(cos2x+\sin 2x)$,

$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$,

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

五点作图法的五点：

$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$，$\left(\frac{\pi}{8},1\right)$，$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$，$\left(\frac{5\pi}{8},-1\right)$，$\left(\frac{7\pi}{8},0\right)$.



（2）当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$(2x+\frac{\pi}{4})\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，

$\therefore f(x)_{\max}=1$，此时，$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{8}$，

$f(x)_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时，$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即$x=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore f(x)$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时的值域为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

点睛：以三角恒等变换为手段，对三角函数及解三角形进行考查是近几年高考考查的一类热点问题，一般难度不大，但综合性较强.解答这类问题，两角和与差的正余弦公式、诱导公式以及二倍角公一定要熟练掌握并灵活应用，特别是二倍角公式的各种变化形式要熟记于心.

2. （1）$-\frac{4}{5}$；（2）$\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{1-a^2}}{2}$.

【解析】分析：（1）根据三角函数的诱导公式和同角三角函数的平方关系，即可求出答案.

（2）根据已知条件，确定角α的范围，再确定$\frac{2\pi}{9}-\alpha$的范围，即可确定实数a的符号；由$\frac{4\pi}{9}+\alpha=\frac{2\pi}{3}-(\frac{2\pi}{9}-\alpha)$，根据两角差的余弦公式，计算$\cos(\frac{4\pi}{9}+\alpha)$的值.

详解：解：（1）因为$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha$，$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$，

所以$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\alpha-\pi)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{\sin\alpha}=\cos\alpha$

因为α是第二象限的角，所以$\cos\alpha<0$，

所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

所以原式$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\alpha-\pi)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=-\frac{4}{5}$.

（2）因为$\sin\alpha=\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，且$\alpha$是第二象限的角，

所以$2k\pi+\frac{3\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in Z$，所以$2k\pi-\pi<-\alpha<2k\pi-\frac{3\pi}{4},k\in Z$，

所以$2k\pi-\frac{7\pi}{9}<\frac{2\pi}{9}-\alpha<2k\pi-\frac{19\pi}{36},k\in Z$，

即$\frac{2\pi}{9}-\alpha$ 为第三象限的角，所以$a<0$；

所以，

又$\cos(\frac{2\pi}{9}+\alpha)=-\sqrt{1-a^2}$因为$(\frac{4\pi}{9}+\alpha)+(\frac{2\pi}{9}-\alpha)=\frac{2\pi}{3}$；

所以$\cos(\frac{4\pi}{9}+\alpha)=\cos\left[\frac{2\pi}{3}-(\frac{2\pi}{9}-\alpha)\right]=\cos\frac{2\pi}{3}\cos(\frac{2\pi}{9}-\alpha)-\sin\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{2\pi}{9}-\alpha)$

$=-\frac{1}{2}\times(-\sqrt{1-a^2})+\frac{\sqrt{3}}{2}\times a=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{1-a^2}}{2}$.

点睛：本题考查三角函数的平方关系、三角函数的诱导公式、三角函数的符号与位置关系和三角函数的两角差公式.

三角函数求值的三种类型：

（1）给角求值：关键是正确选用公式，以便把非特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数.

（2）给值求值：关键是找出已知式与待求式之间的联系及函数的差异.

①一般可以适当变换已知式，求得另外函数式的值，以备应用；

②变换待求式，便于将已知式求得的函数值代入，从而达到解题的目的.

（3）给值求角：实质是转化为“给值求值”，先求角的某一函数值，再求角的范围，确定角.

3.（1）递增取间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{8},\ k\pi+\frac{3\pi}{8}\right](k\in Z)$；(2) 当$\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)\}$，g（x）的最大值为$\sqrt{2}$.

【解析】分析：（1）利用 y=sinx 的增减性求函数 f（x）的单调递增区间；

（2）由平移变换得$g(x)=\sqrt{2}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，结合图象与性质求出最大值及相应的 x 值.

详解：（1）$f(x)=\sqrt{2}sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，

当$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},(k\in Z)$即$k\pi-\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{8},(k\in Z)$，

因此，函数 f（x）的单调递增取间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{8},\ k\pi+\frac{3\pi}{8}\right](k\in Z)$.

（2）由已知，$g(x)=\sqrt{2}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore$当$sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$，即$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，也即$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$时，$g(x)_{max}=\sqrt{2}$.

$\therefore$当$\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)\}$，g（x）的最大值为$\sqrt{2}$.

点睛：由$y=\sin x$的图象变换出$y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$的图象一般有两个途径，只有区别

开这两个途径，才能灵活进行图象变换，利用图象的变换作图象时，提倡先平移后伸缩，但先伸缩后平移也经常出现无论哪种变形，请切记每一个变换总是对字母 x 而言，即图象变换要看“变量”起多大变化，而不是“角变化”多少.

途径一：先平移变换再周期变换(伸缩变换)先将 $y=\sin x$ 的图象向左 $(\varphi>0)$ 或向右 $(\varphi<0)$ 平移 $|\varphi|$ 个单位，再将图象上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 $(\omega>0)$，便得 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

途径二：先周期变换(伸缩变换)再平移变换：先将 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（$\omega>0$），再沿 x 轴向左（$\varphi>0$）或向右（$\varphi<0$）平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位，便得 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

4．（1）2；（2）最小正周期为π，单调递增区间为$[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi],k\in Z$.

【解析】（1）由题可得$f(\frac{2\pi}{3})=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(-\frac{1}{2})^2-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{1}{2})=2$.

（2）由题可得$f(x)=-\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，所以$f(x)$的最小正周期是$\pi$.

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得$\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in Z$，

所以$f(x)$的单调递增区间是$[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi],k\in Z$.

【名师点睛】本题主要考查了三角函数的化简以及函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质，这是高考中的常考知识点，属于基础题，强调基础的重要性；三角函数解答题中，涉及到周期，单调性，单调区间以及最值等考点时，都属于考查三角函数的性质，首先应把它化为三角函数的基本形式，即$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，然后利用三角函数$y=A\sin u$的性质求解.

5．（1）π，$x=\frac{11\pi}{20}+\frac{1}{2}k\pi$（2）$-1$

【解析】分析：（1）利用两角差的正弦公式化函数为一个角的一个三角函数，即$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的形式，然后由正弦函数的性质可求解.

（2）由$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，求得$2x-\frac{3\pi}{5}\in[-\frac{3\pi}{5},\frac{2\pi}{5}]$，由正弦函数的性质可得最小值.

详解：（1）$f(x)=\sin(2x-\frac{3\pi}{5})$

$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$2x-\frac{3\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

即$2x-\frac{3\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$x=\frac{11\pi}{20}+\frac{1}{2}k\pi$，$k\in Z$.

②$\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$\therefore 0\le 2x\le\pi$

$$\therefore -\frac{3\pi}{5}\le 2x-\frac{3\pi}{5}\le\frac{2\pi}{5}$$

$\therefore 2x-\frac{3\pi}{5}=-\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{1}{20}\pi$时，$f(x)_{\min}=-1$.

点睛：三角函数问题一般都要利用两角和与差的正弦（余弦）公式、二倍角公式、诱导公式等化为一个角的一个三角函数即$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$形式，然后利用正弦函数性质求解.

6.（1）$a=2$，$\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in Z$ (2)$\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

【解析】分析：（1）利用两角差正弦函数公式和倍角公式对函数解析式化简整理，利用函数的最大值求得 a，进而求得函数解析式，由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$. 得到$f(x)$的单调递减区间；

（2）由题意易得$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，进而得到$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，利用配角法可得$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$，从而得到结果.

详解：（1）$f(x)=4\cos x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+a=4\cos x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)+a$

$=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2x+a=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1+a=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1+a$.

当$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$时，$f(x)_{\max}=2-1+a=3$，$\therefore a=2$.

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$. 得到$\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$.

所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in Z$.

（2）$\because f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{11}{5}$，$\therefore\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，

又$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\alpha-\frac{\pi}{6}\le\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，

$\therefore\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

点睛：本题主要考查公式三角函数的图像和性质以及辅助角公式的应用. 利用该公式$f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$ 可以求出:①$f(x)$的周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$;

②单调区间（利用正弦函数的单调区间可通过解不等式求得）；

③值域（$\left[-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}\right]$）；

④对称轴及对称中心（由$\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$可得对称轴方程，由$\omega x+\varphi=k\pi$可得对称中心横坐标.

数列

一、单选题

1．D

【解析】依题意可知第 n 行有 $2n-1$ 个数字，前 n 行的数字个数为 1+3+5+…+（$2n-1$）=n^2，

∵44^2=1 936，45^2=2 025，且 1 936＜2 013，2 025＞2 013，∴2 013 在第 45 行，又 2 025-2 013=12，且第 45 行有 2×45-1=89 个数字，∴2 013 在第 89-12=77 列．故选 D.

2．C

【解析】本题考查等差数列基本量的计算与性质的综合应用.

等差数列$\{a_n\}$中，$S_6=\dfrac{(a_1+a_2)\times 6}{2}=48$，则 $a_1+a_6=16=a_2+a_5$，

又 $a_4+a_5=24$，所以 $a_4-a_2=2d=24-16=8$，得 $d=4$，

故选 C.

3．C

【解析】∵ $a_2,2a_5,3a_8$ 成等差数列，$\therefore 4a_5=a_2+3a_8$，即 $4a_1q^4=a_1q+3a_1q^7,3q^6-4q^3+1=0$，解得 $q^3=\dfrac{1}{3}$ 或 $q^3=1$（舍去），

$$\frac{3S_3}{S_6}=\frac{3\times\frac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}}{\frac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}}=\frac{3\left(1-\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{4}$$，故选 C.

4．B

【解析】根据条件，乌龟每次爬行的距离构成等比数列，公比为$\frac{1}{10}$

当阿基里斯和乌龟的速度恰好为10^{-2}米时，乌龟爬行的总距离为

$$100+10+\ldots+10^{-2}=\frac{100\left(1-\frac{1}{10^5}\right)}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10^5-1}{900}$$

故选 B

5．A

【解析】由数列的通项公式可得 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=-1+4-7+10+\cdots+(-25)+28$

$=(-1+4)+(-7+10)+\cdots+(-25+28)=3+3+\cdots+3=15$．选 A.

6．C

【解析】∵等比数列$\{a_n\}$的各项都为正数，且当 $n\geq3$ 时，$a_4a_{2n-4}=10^{2n}$，∴ $a_n^2=10^{2n}$，即 $a_n=10^n$，∴ $2^{n-1}\lg a_n=2^{n-1}\lg 10^n=n\cdot 2^{n-1}$，

∴ $S_n=1+2\times2+3\times2^2+\ldots+n\times2^{n-1}$，①

$2S_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，②

∴①－②得 $-S_n=1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}-n\cdot2^n=2^n-1-n\cdot2^n=(1-n)\cdot2^n-1$，

∴ $S_n=(n-1)\cdot2^n+1$.

本题选择 C 选项.

7．C

【解析】

【分析】

先写出数列的通项 $a_n=23+(n-1)d$，再解不等式组$\begin{cases}23+(6-1)d>0,\\23+(7-1)d<0\end{cases}$,即得 d 的值.

【详解】

设通项公式为 $a_n=23+(n-1)d$,

由题意列不等式组$\begin{cases}23+(6-1)d>0,\\23+(7-1)d<0,\end{cases}$解得$-\frac{23}{5}<d<-\frac{23}{6}$.

∵ d 是整数，∴ $d=-4$.

故答案为：C

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项和性质，意在考查学生对这些知识的掌握水平和分析推理计算能力.

8．B

【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d, ∵ $a_{11}=S_{13}=13$, ∴ $a_1+10d=13a_1+\frac{13\times12}{2}d=13$，

解得 $a_1=-17$，$d=3$.

则 $a_9=-17+8\times3=7$.

故选：B.

9．D

【解析】分析：由数列递推式得到$a_n+a_{n-1}=2n-5(n\geq2)$，与原递推式作差后得到$a_{n+1}-a_{n-1}=2$，可得$a_8-a_4=(a_8-a_6)+(a_6-a_4)$，从而可得结果.

详解：由$a_{n+1}+a_n=2n-3$，

得$a_n+a_{n-1}=2n-5(n\geq2)$，

两式作差得$a_{n+1}-a_{n-1}=2(n\geq2)$，

所以$a_8-a_4=(a_8-a_6)+(a_6-a_4)$

$=2+2=4$，故选 D.

点睛：本题考查了数列递推式，解答的关键是由已知递推式得到n取$n-1$时的递推式，作差后得到数列偶数项之间的关系，属于中档题.

10．C

【解析】分析：利用等比数列的性质，结合基本不等式可得结果.

详解：∵等比数列$\{a_n\}$，a_2与a_8的等比中项为$\sqrt{2}$，∴ $a_2a_8=2=a_4a_6$，

∵等比数列$\{a_n\}$各项均为正数，

$\therefore {a_4}^2 + {a_6}^2 \geq 2a_4a_6 = 2 \times 2 = 4$，

当且仅当$a_4 = a_6$时，取等号，

${a_4}^2 + {a_6}^2$的最小值是4，故选 C.

点睛：本题主要考查等比数列的性质的应用，属于简单题. 等比数列最主要的性质是下标性质，

解答比数列问题要注意应用等比数列的性质：若$p + q = m + n = 2r$则$a_pa_q = a_ma_n = {a_r}^2$.

11．B

【解析】$\because 2{a_n}^2 = a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2 = (n \geq 2)$，

$\therefore$数列$\{{a_n}^2\}$为等差数列，首项为 1，公差为 $2^2-1=3$，

$\therefore {a_n}^2 = 1+3(n-1) = 3n-2$.

又 $a_n>0$，$\therefore a_n = \sqrt{3n-2}$，$\therefore b_n = \dfrac{1}{a_n + a_{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}} = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}\right)$，

故数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n = \dfrac{1}{3}$ $[(\sqrt{4}-\sqrt{1})+(\sqrt{7}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}]=\dfrac{1}{3}$

$(\sqrt{3n+1}-1)$，

由 $S_n = \dfrac{1}{3}$ $(\sqrt{3n+1}-1)=3$，解得 $n=33$，

故选 B.

点睛：判断数列为等差数列常用的方法有两个，一个是定义法，另一个是等差中项法，本题就是由等差中项的关系得的等差数列.

数列求和常用的方法有：公式法（等差等比数列）；错位相减法，裂项相消法，并项求和和分组求和.

12．C

【解析】分析：推导出 $a_5a_6=9$，从而 $\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=\log_3(a_5a_6)^5$，由此能求出结果.

详解：

$\because$等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且 $a_4a_7+a_5a_6=18$，

$\therefore a_4a_7+a_5a_6=2a_5a_6=18$，

$\therefore a_5a_6=9$，

$\therefore \log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}$

$=\log_3(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10})$

$=\log_3(a_5a_6)^5$

$=\log_3 3^{10}$

=10.

故选：C.

点睛：本题考查对数值求法，考查等比数列的性质、对数性质及运算法则，考查推理能力与计算能力，考查函数与方程思想，是基础题．解决等差等比数列的小题时，常见的思路是可以化基本量，解方程；利用等差等比数列的性质解决题目；还有就是如果题目中涉及到的项较多时，可以观察项和项之间的脚码间的关系，也可以通过这个发现规律。

13．A

【解析】分析：公差$d<0$，首项$a_1>0$，$\{a_n\}$为递减数列，由等差数列的性质知：$2a_9=a_1+a_{17}>0$，$a_9+a_{10}=a_1+a_{18}<0$，由此能求出结果.

解析：$\because \frac{a_{10}}{a_9}<-1$，可得$\frac{a_9+a_{10}}{a_9}<0$，由它的前$n$项和$S_n$有最大值，可得公差$d<0$，

$\therefore\ a_9>0, a_9+a_{10}<0, a_{10}<0.$

$\therefore\ 2a_9=a_1+a_{17}>0$，$a_9+a_{10}=a_1+a_{18}<0$

$\therefore\ S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9>0$，$S_{18}=\frac{18(a_1+a_{18})}{2}=9(a_9+a_{10})<0.$

$\therefore$当$S_n>0$时，n的最大值为 17.

故选：A.

点睛：观察等差数列的符号变化趋势，找最后的非负项或非正项.

二、解答题

1．（1）$a_n=2^n-1$（2）11202

【解析】分析：

（1）由n, a_n, S_n成等差数列，可得$S_n+n=2a_n$，进而得$S_{n-1}+n-1=2a_{n-1}(n\geq 2)$两式相减可化为$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$，由此得数列$\{a_n+1\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，从而可得结果；

（2）据（1）求解知，$b_n=2\log_2(1+2^n-1)-1=2n-1$，进而可得$c_1+c_2+\cdots+c_{100}=(b_1+b_2+\cdots+b_{107})-(a_1+a_2+\cdots+a_7)$，利用等差数列与等比数列的求和公式可得结果.

详解：

（1）因为n,a_n,S_n成等差数列，

所以$S_n+n=2a_n$，①

所以$S_{n-1}+(n-1)=2a_{n-1}(n\geq 2)$. ②

①−②，得$a_n+1=2a_n-2a_{n-1}$，所以$a_n+1=2(a_{n-1}+1)(n\geq 2)$.

又当$n=1$时，$S_1+1=2a_1$，所以$a_1=1$，所以$a_1+1=2$，

故数列$\{a_n+1\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

所以$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，

即$a_n=2^n-1$.

（2）据（1）求解知，$b_n=2\log_2(1+2^n-1)-1=2n-1$，$b_1=1$，

所以$b_{n+1}-b_n=2$，

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

又因为$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=7$，$a_4=15$，$a_5=31$，$a_6=63$，$a_7=127$，$a_8=255$，

$b_{64}=127$，$b_{106}=211$，$b_{107}=213$，

所以$c_1+c_2+\cdots+c_{100}=(b_1+b_2+\cdots+b_{107})-(a_1+a_2+\cdots+a_7)$

$=\dfrac{107\times(1+213)}{2}-[(2^1+2^2+\cdots+2^7)-7]$

$=\dfrac{107\times 214}{2}-\dfrac{2(1-2^7)}{1-2}+7$

$=107^2-2^8+9$

$=11202$.

点睛：

已知S_n求a_n的一般步骤：(1)当$n=1$时，由$a_1=S_1$求a_1的值；(2)当$n\geq 2$时，由$a_n=S_n-S_{n-1}$，求得a_n的表达式；（3）检验a_1的值是否满足（2）中的表达式，若不满足则分段表示a_n；（4）写出a_n的完整表达式.

2．$a_n=2n-5$.

【解析】

【分析】

先由题得到 $S_n=n^2-4n$，再由项和公式求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【详解】

解：由点$(n，S_n)$在曲线 $f(x)=x^2-4x(x\in N^*)$上知，

$S_n=n^2-4n$，

当 $n\geqslant 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n-[(n-1)^2-4(n-1)]=2n-5$；

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-3$，满足上式；

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-5$.

【点睛】

（1）本题主要考查项和公式求数列的通项，意在考查学生对该知识的掌握水平和分析推理能力.(2) 若在已知数列中存在：$S_n=f(a_n)$或$S_n=f(n)$的关系，可以利用项和公式 $a_n=\begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$，求数列的通项.

3．（Ⅰ） $a_2=2,a_3=0,a_4=2$；（Ⅱ） $a_1=1$ 或 $a_1=2+\sqrt{2}$. (Ⅲ) 当且仅当 $a_1=1$ 时，$a_1,a_2,a_3,\cdots$，构成等差数列.

【解析】试题分析：

（Ⅰ）根据递推关系求解即可. （Ⅱ）由条件得 $a_2=2-a_1$， $a_3=2-|2-a_1|$，分类讨论去掉绝对值，并根据 a_1， a_2， a_3 成等比数列可求得 a_1 的值. (Ⅲ) 由条件得 $a_2=2-|a_1|$，$a_3=2-|2-|a_1||$，假设存在 a_1 满足条件，则 $2a_2=a_1+a_3$，即 $2-a_1+|2-|a_1||=2|a_1|$，经分类讨论去掉绝对值可得当且仅当 $a_1=1$ 时， a_1，a_2，$a_3,\cdots$，构成等差数列.

试题解析：

（Ⅰ） $a_2=f(a_1)=f(0)=2$，$a_3=f(a_2)=f(2)=0$，$a_4=f(a_3)=f(0)=2$.

（Ⅱ）由题意得 $a_2=2-|a_1|=2-a_1$,

$a_3=2-|a_2|=2-|2-a_1|$.

当 $0<a_1\leq 2$ 时， $a_3=2-(2-a_1)=a_1$ ，

∵ a_1， a_2， a_3 成等比数列，

∴ $(2-a_1)^2=a_1^2$ ，

解得 $a_1=1$.

当 $a_1>2$ 时， $a_3=2-(a_1-2)=4-a_1$ ，

$\because a_1$， a_2， a_3成等比数列

$\therefore (2-a_1)^2 = a_1(4-a_1)$，

解得$a_1 = 2+\sqrt{2}$或$a_1 = 2-\sqrt{2}$（舍去）.

综上可得$a_1 = 1$ 或$a_1 = 2+\sqrt{2}$.

（III）假设这样的等差数列存在，那么$a_2 = 2-|a_1|$，$a_3 = 2-|2-|a_1||$.

由$2a_2 = a_1 + a_3$ 得$2-a_1+|2-|a_1||=2|a_1|$ $(*)$.

以下分情况讨论：

①当$a_1 > 2$ 时，由$(*)$得$a_1 = 0$ ，与$a_1 > 2$ 矛盾；

②当$0 < a_1 \le 2$ 时，由$(*)$得$a_1 = 1$ ，①

从而$a_n = 1(n=1,2,\cdots)$ ，所以$\{a_n\}$ 是一个等差数列；

③当$a_1 \le 0$ 时，则公差$d = a_2 - a_1 = (a_1+2)-a_1 = 2 > 0$ ，

因此存在$m \ge 2$ 使得$a_m = a_1 + 2(m-1) > 2$.

此时$d = a_{m+1} - a_m = 2-|a_m|-a_m < 0$，与$d > 0$矛盾.

综合①②③可知，当且仅当$a_1 = 1$ 时， a_1，a_2，$a_3,\cdots$构成等差数列.

4. （I）$a_n = 2^n$或$a_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^n$（II）见解析

【解析】试题分析：（I）由题可得$2(1+q^2+q^4)=42$. 由此解得$q=\pm 2$，即可得到数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）由（I）知$a_n = 2^n$或$a_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^n$，分情况讨论即可得到$a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}$

试题解析：

（I）由$\left\{\begin{array}{c} a_1=2 \\ a_1+a_3+a_5=42 \end{array}\right.$ 可得$2(1+q^2+q^4)=42$.

由数列$\{a_n\}$各项为实数，解得$q^2=4$， $q=\pm 2$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = 2^n$或$a_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^n$.

（Ⅱ）当$a_n=2^n$时，$a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=\dfrac{4\left(1-4^n\right)}{1-4}=\dfrac{4}{3}\cdot\left(4^n-1\right)$；

当$a_n=\left(-1\right)^{n-1}\cdot 2^n$时，$a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}=\dfrac{(-4)\cdot\left(1-4^n\right)}{1-4}=\dfrac{4}{3}\cdot\left(1-4^n\right)$.

5．（1）$b_n=4n-2$，（2）$S_n=2-2\left(n+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

【解析】试题分析：（1）先根据等比数列定义判定数列$\left\{a_n\right\}$为等比数列，再根据等比数列通项公式求a_n，代入化简得数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式；（2）因为$c_n=a_n\cdot b_n=\left(4n-2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$为等比成等差型，所以根据错位相减法求数列$\left\{c_n\right\}$的前$n$项和$S_n$.

试题解析：（Ⅰ）解：（Ⅰ） $a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，

$$b_n=4\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^n-2=4n-2,$$

（Ⅱ） $c_n=a_n\cdot b_n=\left(4n-2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

$$S_n=\left(4-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+\left(4\times 2-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(4\times 3-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(4n-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\frac{1}{3}S_n=\left(4-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(4\times 2-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(4\left(n-1\right)-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(4n-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

作差得：：$\dfrac{2}{3}S_n=\dfrac{2}{3}+4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots+4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\left(4n-2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$$=\frac{2}{3}+4\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\left(4n-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)-\left(4n-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

则 $S_n = 2 - 2(n+1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

点睛：用错位相减法求和应注意的问题(1)要善于识别题目类型，特别是等比数列公比为负数的情形；(2)在写出“S_n”与“qS_n”的表达式时应特别注意将两式“错项对齐”以便下一步准确写出“$S_n - qS_n$”的表达式；(3)在应用错位相减法求和时，若等比数列的公比为参数，应分公比等于 1 和不等于 1 两种情况求解.

算法初步

一、单选题

1．A

【解析】经过第一次循环得到 $s=\frac{1}{2}$，

$i=2$，此时的 i 不满足判断框中的条件；

经过第二次循环得到 $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，$i=3$，此时的 i 不满足判断框中的条件；

经过第三次循环得到 $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$，$i=4$，此时的 i 不满足判断框中的条件；

……

经过第十次循环得到 $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{20}$，$i=11$，此时的 i 满足判断框中的条件，执行输出，

故判断框中的条件是 $i>10$？. 故选 A.

2．B

【解析】分析：由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，可得答案.

详解：当 S=0，n=1 时，不满足退出循环的条件，执行循环体后，S=2，n=2；

当 S=2，n=2 时，不满足退出循环的条件，执行循环体后，S=6，n=3；

当 S=6，n=3 时，不满足退出循环的条件，执行循环体后，S=14，n=4；

当 S=14，n=4 时，不满足退出循环的条件，执行循环体后，S=30，n=5；

当 S=30，n=5 时，满足退出循环的条件，

故判断框内的条件是 n＜5？，

故选：B.

点睛：本题主要考查程序框图的循环结构流程图，属于中档题．解决程序框图问题时一定注意以下几点：(1) 不要混淆处理框和输入框；(2) 注意区分程序框图是条件分支结构还是循环结构；(3) 注意区分当型循环结构和直到型循环结构；(4) 处理循环结构的问题时一定要正确控制循环次数；(5) 要注意各个框的顺序，(6) 在给出程序框图求解输出结果的试题中只要按照程序框图规定的运算方法逐次计算，直到达到输出条件即可.

3．C

【解析】分析：执行程序，按 i 与 10 大小关系判断是否继续循环，直至跳出循环，输出结果.

详解：执行程序，$S=1\times2^1, i=1; S=1\times2^1\times2^3, i=2; S=1\times2^1\times2^3\times2^5, i=3;$

$\cdots$，$S=1\times2^1\times2^3\times2^5\times\cdots\times2^{17}, i=9; S=1\times2^1\times2^3\times2^5\times\cdots\times2^{19}, i=10;$结束循环，

输出$T=\log_2 S=1+3+5+\cdots+19=100$

因此选 C.

点睛：算法与流程图的考查，侧重于对流程图循环结构的考查. 先明晰算法及流程图的相关概念，包括选择结构、循环结构、伪代码，其次要重视循环起点条件、循环次数、循环终止条件，更要通过循环规律，明确流程图研究的数学问题，是求和还是求项.

4．C

【解析】模拟程序框图的运行过程，如下： $i=1$， $s=0$， $S=0+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$； $i=2$，$i\ge50?$， 否， $S=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$； $i=3$， $i\ge50?$， 否， $S=\frac{\sqrt{2}+2}{2}+\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{2}+1$； $i=4$， $i\ge50?$，否， $S=\sqrt{2}+1+0=\sqrt{2}+1$； $i=5$， $i\ge50?$， 否， $S=\sqrt{2}+1+\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$； $i=6$， $i\ge50?$， 否， $S=\frac{\sqrt{2}+2}{2}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$； $i=7$， $i\ge50?$，否， $S=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{7\pi}{4}=0$； $i=8$， $i\ge50?$，否， $S=0+\sin2\pi=0$； $i=9$， $i\ge50?$，否， $S=0+\sin\frac{9\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\cdots$； s的值是随i的变化而改变的，且周期为 8，又$50=6\times8+2$，此时终止循环，$\therefore$输出的s值与$i=2$时相

同，为$S=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$，故选 C.

5．C

【解析】 由题意，执行如图所示的程序框图可得：

第一次循环： $r=90,m=135,n=90$；

第二次循环： $r=45,m=90,n=45$；

第三次循环： $r=0,m=45,n=0$，此时满足判断条件，输出结果$m=45$，故选 C.

6．D

【解析】$a=2,i=1$ 进入

第一次循环： $a=\dfrac{1}{2},i=2$

第二次循环： $a=-1,i=3$

第三次循环： $a=2,i=4$

第四次循环： $a=\dfrac{1}{2},i=5$ 很明显循环周期为 3，故 2018=672×3+2,所以$a=\dfrac{1}{2}$

故选 D

7．C

【解析】执行第一次循环后，$s=1+1$，$i=2,k=3$，执行第二次循环后，$s=1+1+2+3<16$，$i=3,k=5$，执行第三次循环后，$s=1+1+2+3+3+5<16$，$i=4,k=7$，执行第四次循环后$s=1+1+2+3+3+5+4+7>16$，此时$i=5,k=9$，不再执行循环体，故选 C.

点睛：对于比较复杂的流程图，可以模拟计算机把每个语句依次执行一次，找出规律即可.

8．C

【解析】由程序框图可知，其功能是运算分段函数 $y=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant 1\\ 3^x, & 1<x\leqslant 2,\\ \log_2 x, & x>2\end{cases}$ 因此 y=3，所以$\begin{cases}x\leqslant 1\\ x^2-1=3\end{cases}$或$\begin{cases}1<x\leqslant 2\\ 3^x=3\end{cases}$ 或$\begin{cases}x>2\\ \log_2 x=3\end{cases}$，解得 x=－2 或 x=8，故选 C.

9．B

【解析】 模拟执行程序框图，可得 $x=1, y=2, z=2$，

满足条件 $z<20, x=2, y=2, z=4$；

满足条件 $z<20, x=2, y=4, z=8$；

满足条件 $z<20, x=4, y=8, z=32$；

不满足条件 $z<20$，推出循环，输出 z 的值为 32，故选 B.

10．D

【解析】

【分析】

该程序的作用是计算一个分段函数的函数值，由条件为 $t<1$ 求得分段函数的函数值.

【详解】

执行程序框图知，输入的 $t\in[-1,2]$，

输出算式 $S=\begin{cases}2^{1-t}, & t<1\\ \frac{1}{t}, & t\geq 1\end{cases}$；

输出 s 的值，由 $-1\leq t<1$ 时，$S=2^{1-t}\in(1,4]$；$1\leq t\leq 2$ 时，$S=\frac{1}{t}\in[\frac{1}{2},1]$，

此分段函数在 $t\in[-1,2]$ 时，输出的 $s\in[\frac{1}{2},4]$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了程序框图及数形结合能力，是基础题.

11．B

【解析】第一次循环：$S=0+10=10$，$k=7$；第二次循环：$S=10+7=17$，$k=4$；第三次循环：$S=17+4=21$，$k=1$；第四次循环：$S=21+1=22$，$k=-2$；第五次循环：$S=22+(-2)=20$，$k=-5$，此时 $k<-2$ 成立，结束循环，输出 $S=20$. 故选 B.

12．C

【解析】因为 $\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$，

所以由 $T=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$，得 $n=4$ 时终止循环，因此 $n<4$，选 C.

13．B

【解析】初始值 $S=2,n=1$，

第一次循环：　$S=-3,n=2$，

第二次循环：　$S=-\dfrac{1}{2},n=3$

第三次循环：$S=\dfrac{1}{3},n=4$

第四次循环：　$S=2,n=5$，所以 S 是一个周期 $T=4$ 数列，

当 n=2017 时，S=-3, n=2018, 退出循环，S=-3. 选 B.

14．D

【解析】由分段函数的表达式知, 当 $x>0$ 时, $y=x^2+1$, 故①处填 $y=x^2+1$;

由②的否执行为 $y=x+6$ 知②处填 $x=0$?;

当 $x=0$ 时, $y=0$, 故③处填 $y=0$.

故选 D.

15．A

【解析】由程序框图知：算法的功能是求 $y=\begin{cases} x^2-1? & x\ge 0 \\ |x|-1 & x<0 \end{cases}$ 的值，∵输出的结果为 1，当 $x\ge 0$ 时，$x^2-1=1\Rightarrow x=\sqrt{2}$；当 $x<0$ 时，$|x|-1=1\Rightarrow x=-2$，故选 A.

立体几何

答案

一、选择题

1．D

【解析】$BD // B_1D_1$，所以 $BD //$平面 CB_1D_1；因为 $AD //$ BC，所以异面直线 AD 与 CB_1 所成的角为 $\angle BCB_1 =$ 45°；因为 $AC_1 \perp B_1D_1, AC_1 \perp B_1C$，所以 $AC_1 \perp$平面 CB_1D_1； AC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle CAC_1 \neq 30°$，选 D.

2．C

【解析】

【分析】

由三视图知几何体是一个侧棱与底面垂直的三棱锥，底面是斜边上的高为$\sqrt{2}$的等腰直角三角形，与底面垂直的侧面是个等腰三角形，底边长为2，高为2，故三棱锥的外接球与以棱长为2的正方体的外接球相同，由此可得结论

【详解】

由三视图知几何体是一个侧棱与底面垂直的三棱锥，

底面是斜边上的高为$\sqrt{2}$的等腰直角三角形，

与底面垂直的侧面是个等腰三角形，底边长为2，高为2，

故三棱锥的外接球与以棱长为2的正方体的外接球相同，其直径为$2\sqrt{3}$，半径为$\sqrt{3}$

∴三棱锥的外接球体积为$\frac{4}{3}\pi \times \left(\sqrt{3}\right)^3 = 4\sqrt{3}\pi$

故选C

【点睛】

本题主要考查了三视图，几何体的外接球的体积，考查了空间想象能力，计算能力，属于中档题。

3．D

【解析】

【分析】

由题意可知，$PO \perp$平面$ABCD$，并且是半径，由四棱锥$P-ABCD$的体积公式求出球的半径，然后求出的体积，即可得到答案.

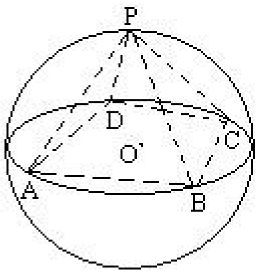
【详解】

如图，正四棱锥$P-ABCD$的底面的四个顶点A,B,C,D在球O的同一个大圆上，

点P在球面上，所以$PO \perp$平面$ABCD$，$PO=r, S_{ABCD}=2R^2, V_{P-ABCD}=\frac{16}{3}$，

所以$\frac{1}{3}\times 2R^2\cdot R=\frac{16}{3}$，解得$R=2$，

所以球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32}{3}\pi$，故选 D.



【点睛】

本题主要考查了球的组合体的应用，对于一个求解一个外接球的体积时，关键是求出外接球的半径，常见的方法：（1）构造三角形解三角形求出半径R；（2）找出几何体上到各个顶点距离相等的点，即球心，进而求出半径；（3）将结合体补成一个长方体，其对角线即为求的直径，进而求解球的半径，着重考查了空间想象能力，以及推理与运算能力.

4．C

【解析】分析：根据两个向量的数量积的定义式，推导出其所成角的余弦公式，从而利用$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，结合$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$，将有关量代入求得 z 的值，得到结果.

详解：根据题意得$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\sqrt{3}\times 1+1\times 0+0\cdot z}{\sqrt{3+1+0}\cdot\sqrt{1+0+z^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{2}$，

化简得$z^2=2$，解得$z=\pm\sqrt{2}$，故选 C.

点睛：该题考查的是有关向量夹角余弦公式的问题，在解题的过程中，需要把握住向量夹角余弦公式，再者就是向量的模的平方和向量的平方是相等的，还有就是向量的模的坐标运算式.

5．D

【解析】试题分析：因几何体的正视图和侧视图一样，所以易判断出其俯视图可能为①②③④，故选 D.

考点：三视图.

6．C

【解析】由三视图可知，该几何体由两个$\frac{1}{4}$圆柱组成，该几何体的表面积为$\pi a^2+\pi a\times 3a+4\times 3a^2=4\pi a^2+12a^2=8\pi+24, \therefore a=\sqrt{2}$

若$a=1$，则其体积为$V=2\times\frac{1}{4}\times\pi\times 1^2\times 3=\frac{3}{2}$

故p假q真，$(\neg p)\wedge q$为真命题

故选 C

7．B

【解析】

试题分析：三视图复原的几何体是四棱锥，判断底面形状，四棱锥的特征，利用三视图的数据，求出全面积即可.

考点：三视图.

8．C

【解析】试题分析：设底面正方形 ABCD 的中心为 E，连接 SE，根据正四棱锥的性质可知，SE 为该正四棱锥的高，则外接球的球心 O 在 SE 上，设外接球的半径为 R，在$Rt\Delta OEA$中，$OE=8-R$，$OA=R$，$AE=4$，根据勾股定理有：$OE^2+EA^2=OA^2$，即$(8-R)^2+4^2=R^2$，解得：$R=5$。

考点：几何体的外接球。

9．B

【解析】此几何体是正四棱台上有一个和棱台上底同底的正四棱柱，棱台的下底是边长为 8 的正方形，上底是边长为 4 的正方形，棱台高为 2；正四棱柱高为 2；所以该几何体的体积为$\frac{1}{3}(64+\sqrt{64\times 16}+16)\times 2+16\times 2=\frac{320}{3}$. 故选 B

10．C

【解析】略

11．B

【解析】若$l\perp n$，$m\perp n$，则$l\parallel$ m，l与 m 相交或异面，故①不对；

若$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$l\perp m$，$l\perp n$，则$l\perp\alpha$或l与α相交或l在α内，故②不对

若$l \parallel m$， $m \parallel n$，则$l \parallel n$,又$l \perp \alpha$，则$n \perp \alpha$ 故③对

若$l \parallel m$， $m \perp \alpha$，则$l \perp \alpha$，又$n \perp \beta$， $\alpha \parallel \beta$，则$l \parallel n$，故④对

故选 B

12．C

【解析】

试题分析：$\because AB = BC$，$AD = CD$，E是AC的中点$\therefore AC \perp DE, AC \perp BE \therefore AC \perp$平面

BDE，因此有平面$ABC \perp$平面BDE，且平面$ACD \perp$平面BDE，C 正确

考点：线面垂直，面面垂直的判定

二、简答题

1、【解答】（Ⅰ）证明：连接 DP，CQ，在△ABE 中，P、Q 分别是 AE，AB 的中点，∴$PQ \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}BE$，

又$DC \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}BE$，

∴$PQ \underset{=}{\parallel} DC$，

又 PQ⊄平面 ACD，DC⊂平面 ACD，

∴PQ∥平面 ACD.

（Ⅱ）解：在△ABC 中，AC=BC=2，AQ=BQ，∴CQ⊥AB.

而 DC⊥平面 ABC，EB∥DC，

∴EB⊥平面 ABC.

而 EB⊂平面 ABE，

∴平面 ABE⊥平面 ABC，

∴CQ⊥平面 ABE

由（Ⅰ）知四边形 DCQP 是平行四边形，∴DP∥CQ.

∴DP⊥平面 ABE，

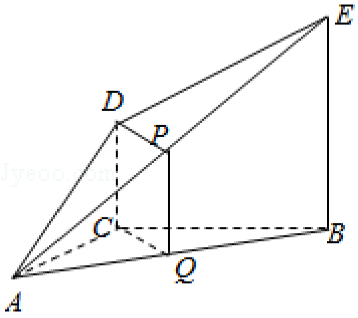
∴直线 AD 在平面 ABE 内的射影是 AP，

∴直线 AD 与平面 ABE 所成角是∠DAP.

在 Rt△APD 中，$AD=\sqrt{AC^2+DC^2}$=$\sqrt{2^2+1^2}$=$\sqrt{5}$，

DP=CQ=2sin∠CAQ=2sin30°=1.

$\therefore sin\angle DAP=\frac{DP}{AD}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.



2、【解答】

（Ⅰ）证明：连结 BD 交 AC 于 E，连结 ME，

∵ABCD 是正方形，∴E 是 BD 的中点.

∵M 是 SD 的中点，∴ME 是△DSB 的中位线.

∴ME∥SB. …（2 分）

又 ME⊂平面 ACM，SB⊄平面 ACM，

∴SB∥平面 ACM. …（4 分）

（Ⅱ）证法一：由条件有 DC⊥SA，DC⊥DA，

∴DC⊥平面 SAD，且 AM⊂平面 SAD，∴AM⊥DC.

又∵SA=AD，M 是 SD 的中点，∴AM⊥SD.

∴AM⊥平面 SDC. SC⊂平面 SDC，∴SC⊥AM. …（6 分）

由已知 SC⊥AN，∴SC⊥平面 AMN.

又 SC⊂平面 SAC，∴平面 SAC⊥平面 AMN. …（8 分）

（Ⅱ）证法二：如图，以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 O﹣xyz，

由 SA=AB，可设 AB=AD=AS=1，

则$A(0，0，0)$，$B(0，1，0)$，$C(1，1，0)$，$D(1，0，0)$，$S(0，0，1)$，$M(\frac{1}{2}，0，\frac{1}{2})$.

$\because \overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2}，0，\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{CS}=(-1，-1，1)$，

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CS}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$，$\therefore \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CS}$，即有 SC⊥AM…（6 分）

又 SC⊥AN 且 AN∩AM=A. ∴SC⊥平面 AMN.　又 SC⊂平面 SAC，

∴平面 SAC⊥平面 AMN. …（8 分）

（III）解法一：取 AD 中点 F，则 MF∥SA.

作 FQ⊥AC 于 Q，连结 MQ.

∵SA⊥底面 ABCD，∴MF⊥底面 ABCD.

∴FQ 为 MQ 在平面 ABCD 内的射影.

∵FQ⊥AC，∴MQ⊥AC.

∴∠FQM 为二面角 D－AC－M 的平面角.　　…（10 分）

设 SA=AB=a，在 Rt△MFQ 中，$MF=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$，$FQ=\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，

∴$tan\angle FQM=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=\sqrt{2}$.

∴二面角 D－AC－M 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　　…（12 分）

（III）解法二：∵SA⊥底面 ABCD，

∴$\overrightarrow{AS}$是平面 ABCD 的一个法向量，$\overrightarrow{AS}=(0，0，1)$.

设平面 ACM 的法向量为$\vec{n}=(x，y，z)$，$\overrightarrow{AC}=(1，1，0)$，$\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2}，0，\frac{1}{2})$，

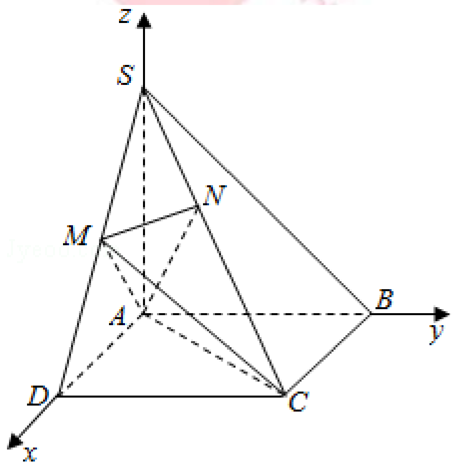
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0.\end{cases}$ 即$\begin{cases}x+y+0=0\\ \frac{1}{2}x+0+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$，∴$\begin{cases}y=-x\\ z=-x.\end{cases}$

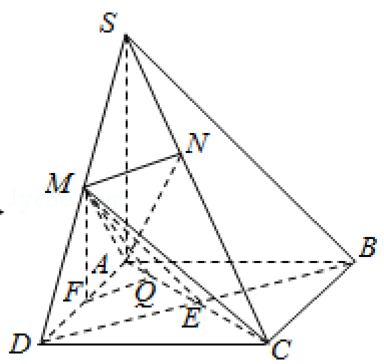
令 x=－1，则$\vec{n}=(-1，1，1)$. …（10 分）

$cos<\overrightarrow{AS}，\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{AS}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AS}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由作图可知二面角 D－AC－M 为锐二面角

∴二面角 D－AC－M 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. …（12 分）





3、（1）证明：连接 OC，∵BO=DO，AB=AD，∴AO⊥BD，

∵BO=DO，BC=CD，∴CO⊥BD.

在△AOC 中，由题设知 AO=1，CO=$\sqrt{3}$，AC=2，

∴$AO^2+CO^2=AC^2$，
∴∠AOC=90°，即 AO⊥OC.
∵AO⊥BD，BD∩OC=O，
∴AO⊥平面 BCD.
（2）取 AC 的中点 M，连接 OM、ME、OE，由 E 为 BC 的中点，
知 ME∥AB，OE∥DC，
∴直线 OE 与 EM 所成的锐角就是异面直线 AB 与 CD 所成的角.

在△OME 中，EM=$\frac{1}{2}$AB=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，OE=$\frac{1}{2}$DC=1，

∵OM 是直角△AOC 斜边 AC 上的中线，∴OM=$\frac{1}{2}$AC=1，

∴$\cos\angle OEM=\dfrac{1+\frac{1}{2}-1}{2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

∴异面直线 AB 与 CD 所成角大小的余弦为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$；

（3）设点 E 到平面 ACD 的距离为 h.

∵$V_{E-ACD}=V_{A-CDE}$，
∴$\frac{1}{3}h\times S_{\triangle ACD}=\frac{1}{3}\times AO\times S_{\triangle CDE}$，

在△ACD 中，CA=CD=2，AD=$\sqrt{2}$，

∴$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

∵AO=1，$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，，

∴h= $\dfrac{AO\times S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

∴点 E 到平面 ACD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$。

解析几何

一、单选题

1．B

【解析】由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=x+a\end{cases}$，得 $N\left(\dfrac{a^3+ab^2}{b^2-a^2},\dfrac{2ab^2}{b^2-a^2}\right)$，则 ΔMNF 的面积为

$\dfrac{1}{2}(a+c)\cdot\dfrac{2ab^2}{b^2-a^2}=\dfrac{(a+c)ab^2}{b^2-a^2}=\dfrac{3}{2}b^2$，$\therefore 2(a^2+ac)=3(c^2-2a^2)$，

$\therefore 2(1+e)=3(e^2-2)$，$\therefore 3e^2-2e-8=0,\therefore e=2$，故选 B.

【 方法点睛】本题主要考查双曲线的定义及离心率，属于难题. 离心率的求解在圆锥曲线的考查中是一个重点也是难点，一般求离心率有以下几种情况：①直接求出 a,c，从而求出 e；②构造 a,c 的齐次式，求出 e；③采用离心率的定义以及圆锥曲线的定义来求解；④根据圆锥曲线的统一定义求解．本题中，根据 ΔMNF 的面积为 $\dfrac{3}{2}b^2$，建立关于焦半径和焦距的关系．从而找出 a,c 之间的关系，求出离心率 e .

2．B

【解析】设左焦点为 F'

由题意可得 $|FP|$=｜ FF' ｜=2c， $\angle OFP$ =120°，

即有｜PF'｜^{2}=｜PF｜^{2}+｜ $F'F$ ｜^{2}－2｜PF｜•｜ $F'F$ ｜cos $\angle OFP$

=4c^2+4c^2－2•4c^2•（－$\dfrac{1}{2}$）

=12c^2，即有｜PF'｜=2$\sqrt{3}$c，

由双曲线的定义可得｜PF'｜－｜PF｜=2a，即为 2$\sqrt{3}$c－2c=2a，

即有 c=$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$a，可得 e=$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

点睛：解决椭圆和双曲线的离心率的求值及范围问题其关键就是确立一个关于 a，b，c 的方程或不等式，再根据 a，b，c 的关系消掉 b 得到 a，c 的关系式，建立关于 a，b，c 的方程或不等式，要充分利用椭圆和双曲线的几何性质、点的坐标的范围等.

3．C

【解析】∵直线$L: y=mx+1$恒过定点$(0,1)$，∴要使直线l与椭圆C恒有公共点，

则（$(0,1)$在椭圆内部或在椭圆上，

若椭圆$C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$是焦点在$x$轴上的椭圆，则$1\leq b<4$；

若椭圆$C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$是焦点在$y$轴上的椭圆，则$b>4$.

∴实数b的取值范围是$[1,4)\cup(4,+\infty)$.

故选 C.

4．C

【解析】

【分析】

利用配方法得到圆心坐标，消去参数得到圆心的轨迹方程，关键注意自变量的取值范围要求。

【详解】

配方得$[x-(2m+1)]^2+(y-m)^2=m^2\ \ (m\neq 0)$

所以圆心坐标为$(2m-1,m)$，则令$\begin{cases} x=2m+1 \\ y=m \end{cases}$

消 m 得$x-2y-1=0\ \ (x\neq 1)$

所以选 C

【点睛】

本题考查了圆的标准方程，轨迹方程的简单求法，属于基础题。

5．C

【解析】分析：首先将图画出来，之后结合向量的性质，可以确定出P是F_1Q的中点，之后借助于等腰三角形的性质，得到OP是$\angle QOF_1$的角分线，之后与渐近线的倾斜角联系，求得其倾斜角，从而得到斜率，结合双曲线中系数的关系，求得离心率.

详解：根据题意，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OF_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$，可以确定$P$是$F_1Q$的中点，

又因为$F_1Q\perp OP$，结合等腰三角形的性质，可以得到OP是$\angle QOF_1$的角分线，

结合双曲线的性质，可以求得双曲线的渐近线的倾斜角为$60°,120°$，

从而确定出$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=2$，故选C.

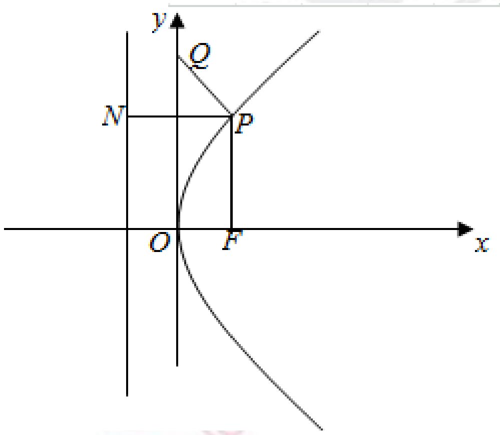
点睛：该题考查的是有关双曲线的离心率的求解问题，在解题的过程中，需要对向量的基本定理理解的特别透彻，从而确定出有关中点的结论，之后借助于等腰三角形的特征，得到倾斜角的大小，之后得到其系数的关系，从而求得结果.

6．A

【解析】分析：求出抛物线的焦点坐标，利用已知条件以及三角不等式，转化求解即可.

详解：抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为F（1，0），设点P到抛物线的准线的距离为d，

根据抛物线的定义有 d=|PF|，∴|PQ|+d=|PQ|+|PF|≥|QF|$=\sqrt{17}$，故选A.

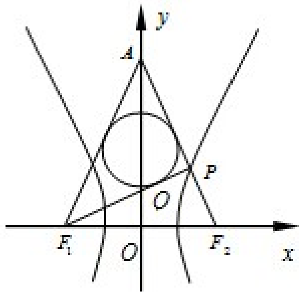


点睛：本题考查直线与抛物线的位置关系的应用，抛物线的定义的理解为解题关键，考查计算能力．属于中档题.

7．A

【解析】分析：根据题意，由双曲线的标准方程可得a的值，设ΔAPF_1的内切圆半径为r，由直角三角形的性质分析可得$|PF_1|+|PA|-|AF_1|=2r$，由双曲线的几何性质分析$|AF_2|-|AF_1|=2r-4$，由图形的对称性知2r-4=0，即可得答案.

详解：根据题意，双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$，其中$a=2$，



设ΔAPF_1的内切圆半径为r，$\because\ PF_1\perp PF_2$，

$\therefore\ |PF_1|+|PA|-|AF_1|=2r$

$\therefore\ |PF_2|+2a+|PA|-|AF_1|=2r$

$\therefore\ |AF_2|-|AF_1|=2r-4$，

$\because$由图形的对称性知$|AF_2|=|AF_1|$，

即$2r-4=0$

$\therefore\ r=2.$

故选：A.

点睛：本题考查了双曲线的几何性质、双曲线的定义，注意直角三角形的内切圆公式.

8．B

【解析】

【分析】

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，不仿设$y_1>0$，由$x_1+1=\frac{3}{2}\Rightarrow A\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，求出直线$AF$的方程与抛物线方程联立可得$B$坐标，结合抛物线定义可得结果.

【详解】

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，不仿设$y_1>0$，因为$|AF|=\frac{3}{2}$，

由抛物线的定义可知，$|AF|$等于A到抛物线$y^2=4x$的准线$x=-1$的距离，

即$x_1+1=\frac{3}{2},x_1=\frac{1}{2},A\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，

直线AF：$y=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}-1}(x-1)$,即为$y=-2\sqrt{2}(x-1)$，

与$y^2=4x$可得，$2x^2-5x+2=0$，

解得$x_2=2$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=2+1=3$，

故选 B.

【点睛】

本题主要考查抛物线的定义和几何性质，属于中档题.与焦点、准线有关的问题一般情况下都与抛物线的定义有关，解决这类问题一定要注意点到点的距离与点到直线的距离的转化：（1）将抛线上的点到准线距离转化为该点到焦点的距离；(2)将抛物线上的点到焦点的距离转化为到准线的距离，使问题得到解决.

9．B

【解析】分析：根据椭圆的方程算出 A（4，0）、B（0，3），从而得到|AB|=5 且直线 AB：3x+4y﹣12=0．设点 P（4cosθ，3sinθ），由点到直线的距离公式算出 P 到直线 AB 距离为 d=$\frac{12}{5}|\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-1|$，结合三角函数的图象与性质算出 $d_{max}=\frac{12}{5}(\sqrt{2}+1)$，由此结合三角形面积公式，即可得到△PAB 面积的最大值.

详解：由题得椭圆 C 方程为：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，

∴椭圆与 x 正半轴交于点 A（4，0），与 y 正半轴的交于点 B（0，3），

∵P 是椭圆上任一个动点，设点 P（4cosθ，3sinθ）（θ∈[0，2π]）

∴点 P 到直线 AB：3x+4y﹣12=0 的距离为

$d=\frac{|12\cos\theta+12\sin\theta-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}|\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-1|$，

由此可得：当 $\theta=\frac{5}{4}\pi$时，$d_{max}=\frac{12}{5}(\sqrt{2}+1)$

∴△PAB 面积的最大值为 $S=\frac{1}{2}|AB|\times d_{max}=6(\sqrt{2}+1)$．

点睛：(1)本题主要考查椭圆的参数方程和三角函数的图像和性质，意在考查学生对这些知识的掌握水平和分析推理能力计算能力.(2)对于$|\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-1|$，不是 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=1$ 时，整个函数取最大值，而应该是 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=-1$，要看后面的“-1”.

10．B

【解析】双曲线的离心率是$\frac{5}{3}$，即$\frac{c}{a}=\frac{5}{3}\therefore 1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{25}{9}\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{9}\therefore\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ 因为焦点在x轴

上，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$

故选 B

11．C

【解析】在ΔABF中，由余弦定理可得$36=100+|BF|^2-20|BF|\times\frac{4}{5}$，解得$|BF|=8$，又在$\Delta BOF$中，由余弦定理得$|OF|^2=64+25-80\times\frac{4}{5}=25$，所以$c=5$，设椭圆右焦点是$F'$，则由椭圆对称性可得$|BF|=|AF'|$，所以$2a=|AF|+|AF'|=14, a=7$，则离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{7}$，故选 C.

12．C

【解析】设圆心为O，直线上点为M，切点为N，

由题意可得： $MN=\sqrt{OM^2+ON^2}=\sqrt{OM^2-1}$，

切线长最小时OM 最小即可，

利用点到直线距离公式可得： $OM_{\min}=\frac{|3-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$，

则切线长的最小值为$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$.

本题选择 C选项.

13．C

【解析】当直线l的斜率不存在时，直线$x=2$显然满足题意；

当直线l的斜率存在时，设直线l的斜率为k

则直线l为$y-1=k(x-2)$，即$kx-y+1-2k=0$

由A到直线l的距离等于B到直线l的距离得：

$$\frac{|-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}},$$

化简得： $-k=k-4$或$k=k-4$（无解），解得$k=2$

$\therefore$直线l的方程为$2x-y-3=0$

综上，直线l的方程为$2x-y-3=0$或$x=2$

故选C

14．C

【解析】$Rt\triangle OAF$ 中， $\tan\angle AOF=\frac{b}{a}$，所以 $\cos\angle AOF=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{c}$

且 $|OF|$=c，所以 $|OA|=a$.

根据题意有： $a=\frac{1}{2}c$，即离心率 $\frac{c}{a}=2$.

故选 C.

点睛：本题主要考查双曲线的渐近线及离心率，离心率的求解在圆锥曲线的考查中是一个重点也是难点，一般求离心率有以下几种情况：①直接求出 a,c，从而求出 e；②构造 a,c 的齐次式，求出 e；③采用离心率的定义以及圆锥曲线的定义来求解；④根据圆锥曲线的统一定义求解.

15．C

【解析】直线的倾斜角为 $45°$，所以直线的斜率为 1，又在 y 轴上的截距为 2，即过点 $(0,2)$ 所以直线方程为 $y=x+2$

故选 C

二、解答题

1．（1） $x+y-1=0$；（2） $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

【解析】试题分析：(1)设直线方程为： $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，由题意得所求的直线方程为： $x+y-1=0$.

（2）设圆心坐标 $(a,-a+1)$， $(a-2)^2+(-a+1-1)^2=(a-4)^2+(-a+1+1)^2$，得 $a=2$，

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

试题解析：

（1）设所求的直线方程为： $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，

∵过点 $P(-1,2)$ 且与两坐标轴的正半轴所围成的三角形面积等于 $\frac{1}{2}$，

$\therefore \begin{cases}\frac{-1}{a}+\frac{2}{b}=1\\ \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $a=b=1$，

故所求的直线方程为： $x+y-1=0$.

（2）设圆心坐标$(a,-a+1)$，则∵圆经过$M(2,1)$，$N(4,-1)$，

$\therefore (a-2)^2+(-a+1-1)^2=(a-4)^2+(-a+1+1)^2$，

$\therefore a=2$，$(2,-1)$，圆半径$r=2$，

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=4$.

2.（I）$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$；（II）$\left[2,2\sqrt{2}\right]$.

【解析】试题分析：

（I）由题意可得圆的标准方程为$(x-1)^2+y^2=1$. 由结合关系可知，满足题意时PQ是$\odot C$的切线. 求得斜率为$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 直线PQ的方程为：$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$.

（II）由题意可知M在以CQ为直径的圆上，设$|MC|=x$，$|MQ|=y$，$|MC|+|MQ|=t$，原问题等价于与$y=-x+t$与$x^2+y^2=4(x\ge0,y\ge0)$有交点，据此可得$2\le t\le2\sqrt{2}$.

试题解析：

（I）$\odot C:(x-1)^2+y^2=1$.

$\because CP=1$，$CQ=2$，$\angle PCQ=60^\circ$，$\therefore CP\perp PQ$，PQ是$\odot C$的切线.

设直线$PQ:y=k(x-3)$，即$kx-y-3k=0$，

$\therefore \dfrac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得：$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$直线PQ的方程为：$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$.

（II）$\because CM\perp MQ$，$\therefore M$在以CQ为直径的圆上

$|MC|^2+|MQ|^2=4$，

设$|MC|=x$，$|MQ|=y$，$|MC|+|MQ|=t$，

$y=-x+t$与$x^2+y^2=4(x\ge0,y\ge0)$有交点，

$\therefore 2 \le t \le 2\sqrt{2}$.

3．(1)m<$-\frac{\sqrt{6}}{3}$或 m>$\frac{\sqrt{6}}{3}$. (2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】试题分析：（1）设直线AB的方程为$x=-\frac{1}{m}y+b$，代入椭圆方程消去y，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，可得$\Delta>0$，设线段AB的中点$M(x_0,y_0)$，利用中点坐标公式及其根与系数的可得M，代入直线$y=mx+\frac{1}{2}$，可得$b=-\frac{m^2+2}{2m}$，代入$\Delta>0$，即可解出m 的范围；（2）结合（1），$t=\frac{1}{m}$ 换元后根据韦达定理、弦长公式、点到直线距离公式，利用三角形面积公式，将三角形面积用t 表示，再利用二次函数配方法即可得出三角形面积的最大值.

试题解析：（1）由题意知 m≠0,

可设直线 AB 的方程为 $y=-\frac{1}{m}x+b$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=-\frac{1}{m}x+b,\end{cases}$ 消去 y, 得 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m^2}\right)x^2-\frac{2b}{m}x+b^2-1=0$.

因为直线 $y=-\frac{1}{m}x+b$ 与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个不同的交点，所以 $\Delta=-2b^2+2+\frac{4}{m^2}>0$,①

将线段 AB 中点 M（$\frac{2mb}{m^2+2},\frac{m^2b}{m^2+2}$）代入直线方程 $y=mx+\frac{1}{2}$, 解得 $b=-\frac{m^2+2}{2m^2}$. ②

由①②得 m<$-\frac{\sqrt{6}}{3}$或 m>$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)令 $t=\frac{1}{m}\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

则$|AB|=\sqrt{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{-2t^4+2t^2+\frac{3}{2}}}{t^2+\frac{1}{2}}$,

且 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{t^2+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+1}}$.

设△AOB 的面积为 S(t),

所以 $S(t)=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{-2(t^2-\frac{1}{2})^2+2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当且仅当 $t^2=\frac{1}{2}$时，等号成立.

故△AOB 面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【方法点睛】本题主要考查直线与椭圆的位置关系及圆锥曲线求最值，属于难题.解决圆锥曲线中的最值问题一般有两种方法：一是几何意义，特别是用圆锥曲线的定义和平面几何的有关结论来解决，非常巧妙；二是将圆锥曲线中最值问题转化为函数问题，然后根据函数的特征选用参数法、配方法、判别式法、三角函数有界法、函数单调性法以及均值不等式法，本题（2）就是用的这种思路，利用配方法法求三角形面积最值的.

统计与概率

一、选择题

1、【答案】A

【解析】若 C 停在原来位置上，则剩下三辆车都不停在原来位置上，有 3 种方法；因此共有 9 种方法，故所求概率为$\frac{9}{A_4^4}=\frac{3}{8}$，选 A.

2、【答案】D

【解析】由茎叶图可知：该组数据为$58,59,61,62,67,67,70,76$，平均数为

$\frac{58+59+61+62+67+67+70+76}{8}=65$，众数为$67$，极差为$76-58=18$，

中位数为$\frac{62+67}{2}=64.5$，故选 D.

3、【答案】B

【解析】一共有2^5种基本事件，其中没有相邻的两个人站起来包括如下情况：没有人站起来，共 1 种基本事件；只有一个人站起来，有$C_5^1=5$种基本事件；有两个人站起来，只有$13,14,,24,25,35$这五种基本事件，因此所求概率为$\frac{1+C_5^1+5}{2^5}=\frac{11}{32}$，选 B.

4、【答案】C

【解析】由题得甲不是第一，乙不是最后，先排乙，乙得第一，有$A_4^4=24$种，乙没得第一有 3 种再排甲也有 3 种，余下得有$A_3^3=6$种，故有$6\times3\times3=54$种，所以一共有 24+54=78 种

5、【答案】B

【解析】由题意知，的可能取值为 2, 3, 4, 其概率分别为 $P\left(\xi=2\right)=\dfrac{A_2^2}{A_5^2}=\dfrac{1}{10}$，

$P\left(\xi=3\right)=\dfrac{A_2^2C_3^1C_2^1+A_3^3}{A_5^3}=\dfrac{3}{10}$， $P\left(\xi=4\right)=\dfrac{A_3^3C_3^2C_2^1C_2^1}{A_5^4}=\dfrac{6}{10}$，所以

$E\xi=2\times\dfrac{1}{10}+3\times\dfrac{3}{10}+4\times\dfrac{6}{10}=\dfrac{7}{2}$，故选 B.

6、【答案】A

【解析】解：三个小球放入盒子是不对号入座的方法有种，由排列组合的知识可得，不同的方法总数是： $2C_6^3=40$ 种.

本题选择 A 选项.

二、填空题

7、【答案】12

【解析】先排甲乙两名女志愿者，有 3 种方法. 剩余女 2 男，分为男女和男两组，分组后排到两间学校，共有 $2\times2=4$ 种方法，故总的方法数有 $3\times4=12$ 种。

8、【答案】0.2；

【解析】解：由题意结合正态分布的性质可知： $P\left(2\le x\le4\right)=0.3$ ，

则： $P(X>4)=\dfrac{1-0.3\times2}{2}=0.2$.

9、【答案】$\dfrac{19}{35}$

【解析】 由题意得，从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 中随机抽取 3 个不同的数， $C_7^3=35$ 种，

当这 3 个和为偶数分为两类情形：当三个数同时为偶数时，共有 $C_3^3=1$ 种，

当三个数中两个奇数、一个偶数时，共有 $C_4^2C_3^1=18$ 种，

所以概率为 $P=\dfrac{18+1}{35}=\dfrac{19}{35}$.

三、简答题

10、【答案】（Ⅰ）17；（Ⅱ）0.7

【解析】试题分析：（Ⅰ）先根据频率分布直方图中小长方形面积等于对应区间概率得概率，再根据组中值与对应概率乘积的和等于平均数，计算该技术指标值平均数 $\bar{x}$；（Ⅱ）由 $\left|x-\bar{x}\right|>4$，得 $x\in\left[11,13\right]\cup\left[21,23\right]$ ，因此根据频率分布直方图中小长方形面积等于对应

区间概率得概率 $P(|x-\overline{x}|>4)=0.14$，最后根据二项分布概率得数学期望.

试题解析：（Ⅰ） $\overline{x}=12\times0.06+14\times0.14+16\times0.3+18\times0.32+20\times0.10+22\times0.08=17$

（Ⅱ）由频率分布直方图可知 $P(|x-\overline{x}|>4)=0.14$，

$\therefore \xi\sim B(5,0.14)$，所以 $E\xi=5\times0.14=0.7$

11、【答案】（Ⅰ） $x=0.009$ （Ⅱ） $\frac{4}{3}$

试题解析：

（Ⅰ）由 $(0.005+0.021+0.035+0.030+x)\times10=1$，解得 $x=0.009$.

（Ⅱ）满意度评分值在 90，100]内有 $100\times0.009\times10=9$ 人，

其中男生 6 人，女生 3 人.

则 X 的值可以为 0，1，2，3.

$P(X=0)=\frac{C_6^4C_3^0}{C_9^4}=\frac{15}{126}$， $P(X=1)=\frac{C_6^3C_3^1}{C_9^4}=\frac{60}{126}$，

$P(X=2)=\frac{C_6^2C_3^2}{C_9^4}=\frac{45}{126}$， $P(X=3)=\frac{C_6^1C_3^3}{C_9^4}=\frac{6}{126}$.

则 X 分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{15}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{45}{126}$	$\frac{6}{126}$

所以 X 的期望 $E(X)=0\times\frac{15}{126}+1\times\frac{60}{126}+2\times\frac{45}{126}+3\times\frac{6}{126}=\frac{168}{126}=\frac{4}{3}$.

导数

一、单选题

1．C

【解析】

试题分析：由 $f'(x)+\frac{f(x)}{x}>0$，得 $\frac{xf'(x)+f(x)}{x}>0$，

当$x>0$时，$xf''(x)+f(x)>0$，即$[xf(x)]'>0$，函数$xf(x)$单调递增；

当$x<0$时，$xf''(x)+f(x)<0$，即$[xf(x)]'<0$，函数$xf(x)$单调递减.

又$g(x)=f(x)+x^{-1}=\dfrac{xf(x)+1}{x}$，函数$g(x)=\dfrac{xf(x)+1}{x}$的零点个数等价为函数$y=xf(x)+1$的零点个数.

当$x>0$时，$y=xf(x)+1>1$，当$x<0$时，$y=xf(x)+1>1$，所以函数$y=xf(x)+1$无零点，所以函数$g(x)=f(x)+x^{-1}$的零点个数为 0 个．故选 C.

考点：函数的零点，利用导数研究函数的单调性.

2．A

【解析】$f'(x)=e^x\cos x$，在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上$f'(x)\geq 0$，所以函数 f(x)在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$单调递增，$f(0)=\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$，所以值域为$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\right]$，选 A.

【点睛】利用导数求函数的最值步骤:

一般地，求函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值的步骤如下：

（1）求$f(x)$在(a,b)内的极值；

（2）将$f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a)$、$f(b)$比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值，得出函数$f(x)$在$[a,b]$上的最值.

3．B

【解析】把 x=1 代入 y=2x+1，解得 y=3，即 g（1）=3，由 y=2x+1 的斜率为 2，得到 g′（1）=2，∵f′（x）=2g′（2x−1）+2x，∴f′（1）=2g′（1）+2=6，即所求切线的斜率为 6，又 f（1）=g（1）+1=4，即所求直线与 f（x）的切点坐标为（1，4），则所求切线的方程为：y-4=6（x-1），即 6x−y−2=0，故选 B

4．A

【解析】分析：求出$g'(x)$，由$f(x),f'(x)$的图象确定$g'(x)$的正负.

详解：$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，由图知当$x\in(0,1)或(4,+\infty)$时，$f'(x)<f(x)$，即$g'(x)<0$，∴$g(x)$

减区间为$(0,1)$和$(4,+\infty)$，

故选 A.

点睛：$f(x)$的极值点是$f'(x)$的零点，由此对应关系可确定图中哪个是$f(x)$的图象，哪个是$f'(x)$的图象.

5．A

【解析】分析：根据题意，曲线 $y=ax^2+3x-\ln x$ 存在与直线 $x+y-1=0$ 垂直的切线，转化为 $f'(x)=1$ 有正根，分离参数，求最值，即可得到结论.

详解：令 $y=f(x)=ax^2+3x-\ln x$，

由题意，$x+y-1=0$ 斜率是 -1，则与直线 $x+y-1=0$ 垂直的切线的斜率是 1，

$\therefore f'(x)=1$ 有解，

$\because$ 函数的定义域为$\{x|x>0\}$，$\therefore f'(x)=1$ 有正根，

$\because f(x)=ax^2+3x-\ln x$，$\therefore f'(x)=2ax+3-\frac{1}{x}=1$ 有正根

$\therefore 2ax^2+2x-1=0$ 有正根　　$\therefore 2a=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=(\frac{1}{x}-1)^2-1$

$\therefore 2a\geqslant -1$，$\therefore a\geqslant -\frac{1}{2}$.

故答案为：A

点睛：（1）本题主要考查导数的几何意义、考查零点问题等知识，意在考查学生对这些基础知识的掌握能力及转化能力.(2)本题的关键是转化，首先是把曲线 $y=ax^2+3x-\ln x$ 存在与直线 $x+y-1=0$ 垂直的切线转化为 $f'(x)=1$ 有正解，再转化为 $2ax^2+2x-1=0$ 有正根，最后分离参数转化为 $2a=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=(\frac{1}{x}-1)^2-1$ 由正解.转化的思想是高中数学比较普遍的数学思想，遇到复杂的问题要会灵活运用.

6．A

【解析】

【分析】

根据复合函数的求导公式求导即可

【详解】

函数$y=cos(2x-1)$的导数为

$y'=-sin(2x-1)\cdot(2x-1)'=-2\,sin(2x-1)$

故选A

【点睛】

本题是一道关于求解函数的导数的题目，熟练掌握复合函数求导法则以及常用函数的导数是解答此题的关键，属于基础题。

7．B

【解析】构造函数$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,

因$F'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$,

故$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$在$[0,+\infty)$上单调递增,

则$F(2)<F(3)$,

即$\frac{f(2)}{e^2}<\frac{f(3)}{e^3}$,

所以$m<n$.

故选B.

点睛：利用导数比较大小，实质是利用导数研究对应函数单调性，而对应函数需要构造. 构造辅助函数常根据导数法则进行：如$f'(x)<f(x)$构造$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$f'(x)+f(x)<0$构造$g(x)=e^x f(x)$，$xf'(x)<f(x)$构造$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，$xf'(x)+f(x)<0$构造$g(x)=xf(x)$等

8．A

【解析】∵函数$y=\sin x$，∴导函数$y'=\cos x$，$x=0$时，$y'=\cos 0=1$，所求切线斜率为1，∴所求切线方程为$y=x$，故选 A.

【方法点睛】本题主要考查利用导数求曲线切线方程，属于难题.求曲线切线方程的一般步骤是：（1）求出$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数，即$y=f(x)$在点P $(x_0,f(x_0))$出的切线斜率（当曲线$y=f(x)$在P处的切线与y轴平行时，在 处导数不存在，切线方程为$x=x_0$）；（2）由点斜式求得切线方程$y-y_0=f'(x)\bullet(x-x_0)$.

9．C

【解析】因为$f(x)=2^x, \therefore f'(x)=\ln 2\times 2^x, f'(0)=\ln 2\times 2^0=\ln 2$ ，故选 C.

10．B

【解析】由题意得$f'(x)=x^2 \Rightarrow f'(1)=1$，即切线的斜率为$k=1$，故选 B.

考点：利用导数研究曲线在某点的切线的斜率.

11．D

【解析】分析:先化简 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$ 即得$f'(x_0)$的值.

详解：由题得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$，

所以$3\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=1$，

所以$3f'(x_0)$=1，所以$f'(x_0)$=$\frac{1}{3}$.

故答案为：D

点睛：本题易错选 B, 主要是对导数的定义理解不清，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}$中自变量的增量是（$x_0+3\Delta x)-x_0=3\Delta x$，所以分母中必须是$3\Delta x$，

根据极限的运算必须化成$3\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=1$之后，才能化成导数.

二、解答题

1．解：（1）设 $x\in[-e,0)$,则$-x\in(0,e]$ $\therefore f(-x)=-ax+2\ln(-x)$.

$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(x)=-f(-x)=ax-2\ln(-x)$. …（3 分） 又 $f(0)=0$ …（4 分）

故函数 $f(x)$ 的解析式为：$f(x)=\begin{cases}ax-2\ln(-x), x\in[-e,0)\\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad x=0\\ ax+2\ln x,\quad x\in(0,e]\end{cases}$ …（5 分）

（2）假设存在实数 a，使得当 $x\in[-e,0)$时,

$f(x)=ax-2\ln(-x)$ 有最小值是 4. $\because f'(x)=a-\frac{2}{x}=\frac{ax-2}{x}$. …（6 分）

①当 $a\ge 0$ 或$\begin{cases}\frac{2}{a}\le -e\\ a<0\end{cases}$, 即$a\ge -\frac{2}{e}$ 时,

由于 $x\in[-e,0)$,则$f'(x)\ge 0$. 故函数 $f(x)=ax-2\ln(-x)$是$[-e,0)$ 上的增函数。

$\therefore$所以$f(x)_{\min}=f(-e)=-ae-2=4$, 解得 $a=-\frac{6}{e}<-\frac{2}{e}$（舍去）…（9 分）

②当$\begin{cases}\frac{2}{a}>-e\\ a<0\end{cases}$, 即$a<-\frac{2}{e}$时,则

x	$(-e,\frac{2}{a})$	$(\frac{2}{a},0)$

$f'(x)$	—	+
$f(x)$	↘	↗

$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{2}{a})=2-2\ln(-\frac{2}{a})=4,$ 解得 $a=-2e$ ks*5 …（12 分）u

综上所知，存在实数 $a=-2e$，使得当 $x\in[-e,0)$时, $f(x)$ 最小值 4。…（13 分）

【解析】略

2．（1）$x+y-1=0$；（2）当$a>-1$时，$h(x)$在$(0,a+1)$上单调递减, 在$(a+1,+\infty)$上单调递增. 当$a\le-1$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

【解析】

【分析】

（1）求出导函数，求出$f'(1)$和$f(1)$，求出过点$(1,f(1))$，斜率为$f'(1)$的直线方程即为切线方程；

（2）对函数求导，通分后对分子因式分解，结合定义域分类讨论导函数的零点，从而分析出导函数的正负，进而求得函数的单调区间.

【详解】

（1）当 $a=2$时，$f(x)=x-2\ln x, f(1)=1$,

切点$(1,1)$, $\therefore f'(x)=1-\frac{2}{x}$,

$\therefore k=f'(1)=1-2=-1$,

$\therefore$曲线$f(x)$在点$(1,1)$处的切线方程为：$y-1=-(x-1)$, 即$x+y-2=0$.

（2）$h(x)=x-a\ln x+\frac{1+a}{x}$, 定义域为$(0,+\infty)$,

$h'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{1+a}{x^2}=\frac{x^2-ax-(1+a)}{x^2}=\frac{(x+1)[x-(1+a)]}{x^2}$,

①当$a+1>0$, 即$a>-1$时,

令$h'(x)>0$, $\because x>0$, $\therefore x>1+a$,

令$h'(x)<0$, $\because x>0$, $\therefore 0<x<1+a$.

②当$a+1\le0$, 即$a\le-1$时，$h'(x)>0$恒成立,

综上: 当$a>-1$时，$h(x)$在$(0,a+1)$上单调递减, 在$(a+1,+\infty)$上单调递增.

当$a\le-1$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

【点睛】

本题考查切线方程的求法以及函数单调区间的求法，求切线方程时注意给的点是否为切点，求单调区间时注意函数定义域的限制，二次函数零点如果含参数，要结合定义域分类讨论.

3．(1)答案见解析；(2)$\left[-\frac{1}{2\ln 2},\ +\infty\right)$.

【解析】试题分析：

（1）函数$f(x)$的定义域为$(0,\ +\infty)$，且$f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}+(4-2a)x+1$，

$f'(x)=\frac{-[(a-2)x-1](2x-1)}{x^2}$. 分类讨论可得：

当$a=4$时，$f(x)$在$(0,\ +\infty)$内单调递减；

当$2<a<4$时，$f(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{a-2},\ +\infty\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{a-2}\right)$上单调递增；

当$a>4$时，$f(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{a-2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{a-2},\ \frac{1}{2}\right)$上单调递增.

（2）原问题等价于当$a\geq -2$时，$F(x)$在区间$(0,\ 2]$上的最大值$F(x)_{max}\geq 2$.

且$F(x)=a\ln x-\frac{1}{x}+x+1$，则$F'(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2}(0<x\leq 2)$. 分类讨论$-2\leq a\leq 2$和$a>2$两种情况可得$F(x)_{max}=F(2)$. 据此求解关于实数 a 的不等式可得实数a的取值范围是$\left[-\frac{1}{2\ln 2},\ +\infty\right)$.

试题解析：

（1）函数$f(x)$的定义域为$(0,\ +\infty)$，由$2a+b=4$得$f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}+(4-2a)x+1$，

所以$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}+(4-2a)=\frac{-[(a-2)x-1](2x-1)}{x^2}$.

当$a=4$时，$f'(x)\leq 0$，$f(x)$在$(0,\ +\infty)$内单调递减；

当$2<a<4$时，$f'(x)>0\Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{1}{a-2}$；$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{2}$或$x>\frac{1}{a-2}$,

所以，$f(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{a-2},\ +\infty\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{a-2}\right)$上单调递增；

当$a>4$时，$f'(x)>0\Rightarrow \frac{1}{a-2}<x<\frac{1}{2}$；$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{a-2}$或$x>\frac{1}{2}$,

所以，$f(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{a-2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{a-2},\ \frac{1}{2}\right)$上单调递增.

（2）由题意，当$a\geq -2$时，$F(x)$在区间$(0,\ 2]$上的最大值$F(x)_{max}\geq 2$.

当$b=1$时，$F(x)=alnx+\frac{1}{x}+x+1-\frac{2}{x}=alnx-\frac{1}{x}+x+1$，

则$F'(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2}(0<x\le 2)$.

①当$-2\le a\le 2$时，$F'(x)=\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+1}{x^2}>0$，

故$F(x)$在$(0，\ 2]$上单调递增，$F(x)_{max}=F(2)$；

②当$a>2$时，设$x^2+ax+1=0(\Delta=a^2-4>0)$的两根分别为$x_1$，$x_2$，

则 $x_1+x_2=-a<0$，$x_1\cdot x_2=1$，$\therefore x_1<0$，$x_2<0$，所以在$(0，\ 2]$上$F'(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2}>0$，

故$F(x)$在$(0，\ 2]$上单调递增，$F(x)_{max}=F(2)$.

综上，当$a\ge -2$时，$F(x)$在区间$(0，\ 2]$上的最大值$F(x)_{max}=F(2)=aln2-\frac{1}{2}+2+1\ge 2$，

解得$a\ge -\frac{1}{2ln2}$，所以实数a的取值范围是$\left[-\frac{1}{2ln2}，\ +\infty\right)$.

点睛：导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，所以在历届高考中，对导数的应用的考查都非常突出 ，本专题在高考中的命题方向及命题角度 从高考来看，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行： (1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系． (2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数． (3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题． (4)考查数形结合思想的应用．

4．（1）$n=5$；（2）见解析；（3）1

【解析】分析：（1）求导得切线斜率为$g'(1)$和$f'(1)$，由垂直得斜率积为-1，从而得解；

（2）$y=f(x)-g(x)=\ln x-\frac{m(x+n)}{x+1}$，求导得$y'=\frac{x^2+(2-m+mn)x+1}{x(x+1)^2}$，令$p(x)=x^2+(2-m+mn)x+1$，要使函数在定义域内不单调，只需要$p(x)=0$在$(0,+\infty)$有非重根，利用二次方程根的分别即可得解；

（3）$k<e^x-x\ln x$ 对 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立，令 $h(x)=e^x-x\ln x$，$h'(x)=e^x-\ln x-1$，令

$r(x)=e^x-\ln x-1$，存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$r'(x_0)=0$，即$e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，则$x_0=-\ln x_0$，$r(x)$取到最小值$r(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-1=x_0+\frac{1}{x_0}-1>0$，所以$h'(x)>0$，即$h(x)$在区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$内单调递增，从而得解.

详解：（1）当$m=1$时，$g'(x)=\frac{1-n}{(x+1)^2}$，则$y=g(x)$在$x=1$处的斜率为$g'(1)=\frac{1-n}{4}$，

又$y=f(x)$在$x=1$处的斜率为$f'(1)=1$，则$\frac{1-n}{4}=-1$，解得$n=5$.

（2）函数$y=f(x)-g(x)=\ln x-\frac{m(x+n)}{x+1}$，

则$y'=\frac{1}{x}-\frac{m(1-n)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+(2-m+mn)x+1}{x(x+1)^2}$.

$\because x>0$，$\therefore x(x+1)^2>0$，令$p(x)=x^2+(2-m+mn)x+1$，

要使函数在定义域内不单调，只需要$p(x)=0$在$(0,+\infty)$有非重根，

由于$p(x)$开口向上，且$p(0)=1$

只需要$\begin{cases}-\frac{2-m+mn}{2}>0\\ \Delta=(2-m+mn)^2-4>0\end{cases}$，得$m(1-n)>4$，

因为$m>0$，所以$-n>\frac{4}{m}-1$，

故$m-n>m+\frac{4}{m}-1\geq 2\sqrt{m\cdot\frac{4}{m}}-1=3$，当且仅当$m=2$时取等号，命题得证 .

（3）假设存在实数k满足题意，则不等式$\ln x+\frac{k}{x}<\frac{e^x}{x}$对$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$恒成立，

即$k<e^x-x\ln x$对$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$恒成立 .

令$h(x)=e^x-x\ln x$，则$h'(x)=e^x-\ln x-1$，

令$r(x)=e^x-\ln x-1$，则$r'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，

因为$r'(x)$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，$r'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$r'(1)=e-1>0$，且$r'(x)$的图象在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上不间断，

所以存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$r'(x_0)=0$，即$e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，则$x_0=-\ln x_0$，

所以当$x\in\left(\frac{1}{2},x_0\right)$时，$r(x)$单调递减；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$r(x)$单调递增.

则$r(x)$取到最小值$r(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-1=x_0+\frac{1}{x_0}-1\geq 2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}-1=1>0$，

所以$h'(x)>0$，即$h(x)$在区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$内单调递增，

所以$k\leq h\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln 2=1.99525$，

所以存在实数k满足题意，且最大整数k的值为1．

点睛：导数问题经常会遇见恒成立的问题：

（1）根据参变分离，转化为不含参数的函数的最值问题；

（2）若$f(x)>0$就可讨论参数不同取值下的函数的单调性和极值以及最值，最终转化为$f(x)_{min}>0$，若$f(x)<0$恒成立$\Leftrightarrow f(x)_{max}<0$；

（3）若$f(x)>g(x)$恒成立，可转化为$f(x)_{min}>g(x)_{max}$（需在同一处取得最值）．

定积分

一、单选题

1．A

【解析】分析：根据微积分的运算性质和微积分基本定理求解即可.

详解：$\int_2^3 e^{2-x}dx = e^2\int_2^3 e^{-x}dx = e^2\cdot(-e^{-x})|_2^3 = -e^2(e^{-3}-e^{-2}) = 1-\frac{1}{e}$.

故选 A.

点睛：定积分的计算是考查定积分的一种常见形式，能否快速、准确地求解原函数是解决问题的关键，然后再根据微积分基本定理求解.

2．B

【解析】$\int_1^a\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx = (x^2+\ln x)|_1^a = a^2+\ln a-1$，

由题意可得：$a^2+\ln a-1 = 8+\ln 3$，

构造函数$f(x) = x^2+\ln x-1(x>0)$，

则$f'(x) = 2x+\frac{1}{x}>0,\therefore f(x)$单调递增，

注意到$f(3) = 8+\ln 3$，据此可得：a=3 是方程的唯一解.

本题选择 B 选项.

3．D

【解析】A 中，$\because f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称，则 x 轴上方的面积和 x 轴下方的面积相等，故积分是 0，故正确；

B 中，$\because f(x)$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称，故 y 轴两侧的图象都在 x 轴上方或下方且面积相等，故正确；

C 中，由定积分的几何意义知，C 项正确；

D 中，$f(x)$ 也可以小于 0，但必须有大于 0 的部分，且 $f(x)>0$ 的曲线围成的面积比 $f(x)<0$ 的曲线围成的面积大，故错误；

故选 D

4．A

【解析】停车时 $v(t)=0$，由 27－0.9t=0，得 t=30，

所以 $s=\int_0^{30} v(t)dt = \int_0^{30}(27-0.9t)dt = \left(27t-0.9t^2\right)|_0^{30} = 405$.

故选 A.

5．C

【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以在 y 轴两侧的图象对称. 所以对应的面积相等. 所以原式

$$=2\int_0^1 f(x)dx=2\times4=8.$$

6．D

【解析】由由 $x=0$， $y=0$， $x=\frac{\pi}{2}$， 及 $y=\cos x$ 围成区域内围成的区域面积

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\pi 2=1,$$

由 $x=0$， $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 围成的区域面积

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx=(\sin x+\cos x)|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1,$$

∴根据根据几何概型的概率公式可得所求的概率 $P=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$，

故选：D.

7．C

【解析】 $W=\int_5^{10} F(x)\,dx=\int_5^{10}(3x^2-2x+5)\,dx=(x^3-x^2+5x)\,|_5^{10}$

$=(1\ 000-100+50)-(125-25+25)=825$(J)．选 C.

8．B

【解析】由已知得$\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\cos xdx+\int_{\pi}^{2\pi}1dx=\sin x|_0^{\pi}+x|_{\pi}^{2\pi}=\pi$，故选 B.

9．A

【解析】依题意，$a=\int_0^2 xdx=\frac{1}{2}x^2|_0^2=\frac{1}{2}\times4=2$, 则二项式$(ax-\frac{1}{\sqrt{x}})^5$, 即$(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^5$，故展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r\cdot(-1)^r\cdot2^{5-r}\cdot x^{5-\frac{3r}{2}}$, 令 $5-\frac{3r}{2}=2$，得$r=2$，故展开式中含 x^2 项的系数为$C_5^2\cdot2^3=80$，故选 A.

10．D

【解析】阴影部分 BCD 的面积为$\int_0^1(e-e^x)dx=(ex-e^x)|_0^1=(e-e)-(0-e^0)=1$，长方形 $OABC$ 内面积为 e，故点 P 落在阴影部分 BCD 内的概率为$\frac{1}{e}$

选 D

二、填空题

1. $\pm\frac{e-2}{e}$

【解析】分析：先根据导数几何意义求切点以及切线方程，再根据定积分求封闭区域的面积，解得a的值.

详解：设切点(x_1,e^{ax_1})，因为$f'(x)=ae^{ax}$，

所以$ae^{ax_1}=\frac{e^{ax_1}}{x_1}\therefore x_1=\frac{1}{a}\therefore l:y-e=ae(x-\frac{1}{a}),y=aex.$

所以当$a>0$时封闭区域的面积为$\int_0^{\frac{1}{a}}(e^{ax}-aex)dx=(\frac{e^{ax}}{a}-\frac{aex^2}{2})\Big|_0^{\frac{1}{a}}=\frac{e-2}{2a}$

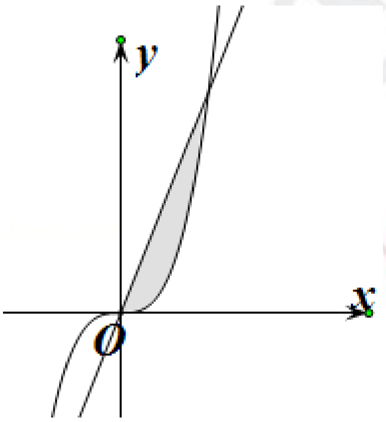
因此$\frac{e-2}{2a}=\frac{e}{2}\therefore a=\frac{e-2}{e}$，当$a<0$时，同理可得$a=-\frac{e-2}{e}$，即$a=\pm\frac{e-2}{e}$

点睛：利用定积分求曲边图形面积时，一定要找准积分上限、下限及被积函数．当图形的边界不同时，要分不同情况讨论.

2. 4

【解析】联立方程可得$\begin{cases}y=x^3\\y=kx\end{cases}$，解得 x=0，或 x=$\sqrt{k}$，

先根据题意画出图形，



直线 y=kx 与曲线 y=x³ 所围图形的面积 S=$\int_0^{\sqrt{k}}\left(kx-x^3\right)dx$

而$\int_0^{\sqrt{k}}\left(kx-x^3\right)dx=\left(\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^{\sqrt{k}}=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{4}k^2=\frac{1}{4}k^2=4$

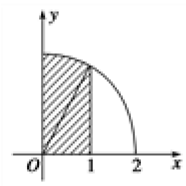
∴解得 k=4，

故答案为：4

点睛：点睛：本题考查了曲线围成的图形的面积，着重考查了定积分的几何意义和定积分计算公式等知识，属于基础题；用定积分求平面图形的面积的步骤：（1）根据已知条件，作出平面图形的草图；根据图形特点，恰当选取计算公式；（2）解方程组求出每两条曲线的交点，以确定积分的上、下限；（3）具体计算定积分，求出图形的面积.

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\pi$

【解析】 根据积分的几何意义，由图可得$\int_0^1\sqrt{4-x^2}d_x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\pi$，故填$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\pi$.



点睛：当利用定积分不能直接求解时，一般要注意被积函数的几何意义，利用几何图形计算其面积，从而得到定积分的值.

4. $\frac{3}{2}-\ln 2$

【解析】$\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-\ln x|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2$

故答案为： $\frac{3}{2}-\ln 2$

5. $\frac{\pi}{4}+1$

【解析】分析:由题意$\int_0^1(\sqrt{1-x2}+2x)dx=\int_0^1(\sqrt{1-x2})dx+\int_0^1 2xdx$,其中$\int_0^1(\sqrt{1-x2})dx$表示$y=\sqrt{1-x^2},x\in(0,1)$所围成的$\frac{1}{4}$个单位圆的面积，得$\int_0^1(\sqrt{1-x2})dx=\frac{\pi}{4}$，再求解$\int_0^1 2xdx=x^2|_0^1=1$，即可计算定积分的值.

详解：由题意$\int_0^1(\sqrt{1-x2}+2x)dx=\int_0^1(\sqrt{1-x2})dx+\int_0^1 2xdx$,

其中$\int_0^1(\sqrt{1-x2})dx$表示$y=\sqrt{1-x^2},x\in(0,1)$所围成的$\frac{1}{4}$个单位圆的面积，

所以$\int_0^1(\sqrt{1-x2})dx=\frac{\pi}{4}$,

又由$\int_0^1 2xdx = x^2|_0^1 = 1$，所以$\int_0^1(\sqrt{1-x2}+2x)dx = \frac{\pi}{4}+1$.

点睛：本题主要考查了定积分的几何意义和微积分基本定理的应用，其中正确理解定积分的几何意义表示围成曲边形的面积是解答的关键，着重考查了分析问题和解答问题的能力，以及推理与运算能力.

6．$\dfrac{28}{3}$

【解析】$\int_{-2}^{2}(x^2+1)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)|_{-2}^{2}=\left(\frac{1}{3}\times 2^3+2\right)-\left(-\frac{1}{3}\times 2^3-2\right)=\frac{28}{3}$.

7．$2\int_0^1\left(x^3+sin\mathrm{x}\right)dx$

【解析】$\because y=x^3+\sin x$为奇函数

$$\therefore \int_{-1}^{0}\left(x^3+\sin x\right)dx=-\int_{0}^{1}\left(x^3+\sin x\right)dx<0$$

$$\therefore S=2\int_0^1\left(x^3+\sin x\right)dx$$

点睛：本题是一道定积分在几何中的应用，准确地计算积分的上下界以及掌握求解定积分的方法是解题的关键。根据奇函数的对称性可知$\int_{-1}^{0}\left(x^3+\sin x\right)dx=-\int_{0}^{1}\left(x^3+\sin x\right)dx$，据此得到答案

8．$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

【解析】分析：$\int_0^1\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$，其中$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$利用定积分的几何意义计算.

详解：$\int_0^1\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$，

其中$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$的几何意义为函数$y=\sqrt{1-x^2}$与直线$x=0,x=1$及x轴所围成的图形的面积，

即圆$x^2+y^2=1$在第一象限的部分的面积，其值为$\frac{\pi}{4}$.

而$\int_0^1 \quad xdx=\frac{1}{2}x^2|_0^1=\frac{1}{2}\times 1^2-\frac{1}{2}\times 0^2=\frac{1}{2}$.

所以原式$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

点睛：本题主要考查定积分，定积分的几何意义，圆的面积等基础知识，考查数形结合思想，解答定积分的计算，关键是熟练掌握定积分的相关性质.

9．1

【解析】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$

即答案为 1.

综合练习答案解析

一、单项选择题。

1．选 D。

【解析】$M=\left\{y\left|y=(x-2)^2-1,x\in R\right.\right\}=\left\{y\left|y\geq -1\right.\right\}$，而 $N=R$，$\therefore M\cap N=\left\{y\left|y\geq -1\right.\right\}$。故本题选 D。

2．选 B。

【解析】$\because A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5,6,7\}$，全集 $U=A\cup B$，$\therefore U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A\cap B=\{2,3,4\}$，$\therefore$集合 $C_U(A\cap B)=\{1,5,6,7\}$，即集合 $C_U(A\cap B)$ 中有 4 个元素。故本题选 B。

3. 选 B。

【解析】令 $g(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$；$h(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，则 $g(-x)=\ln\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$，因为 $g(x)+g(-x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)+\ln\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=0$，所以 $g(-x)=-g(x)$，又因为 $h(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^x+1}=-h(x)$；所以 $f(-a)=g(-a)+h(-a)=-\left[g(a)+h(a)\right]=-f(a)=-1$。故本题选 B。

4. 选 C。

【解析】$y=\log_2\dfrac{x+2}{4}=\log_2(x+2)-\log_2 4=\log_2(x+2)-2$，平移中，$x$ 变化时，左加右减，y 变化时，上加下减。那么由 $y=\log_2 x$ 向左移动 2 个单位，变为 $y=\log_2(x+2)$，再向下移动移动 2 个单位，变为 $y==\log_2(x+2)-2$，故本题选 C。

5. 选 B。

【解析】由图像可知，$\dfrac{1}{4}T=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，那么一个周期 $T=\dfrac{4}{3}\pi$，而 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{3}{2}$. 故本题选 B。

6．选 D。

【解析】由题意可知，点 P 的横坐标为 c，代入椭圆方程得纵坐标为 $\pm\dfrac{b^2}{a}$，所以

$|PF_2|=\dfrac{b^2}{a}$，又椭圆 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|PF_1|=2|PF_2|$，解得 $|PF_2|=\dfrac{2}{3}a$，而椭圆中 $a^2=b^2+c^2$，代入求得离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故本题选 D。

7．选 A。

【解析】x 取值需要满足以下条件 $\begin{cases}x-4\geq 0\\ x-1>0\\ \lg(x-1)\neq 0\end{cases}$，因此函数的定义域为 $[4,+\infty)$. 故本题选 A。

8．选 B。

【解析】根据题意可得 $a=1-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$，$E(X)=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{6}\times 0+1\times\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}$，

$\therefore E(Y)=6E(X)+1=(-\dfrac{1}{6})\times 6+1=0$。故本题选 B。

9．选 B。

【解析】根据椭圆的定义可得命题“平面内一动点 P 到两个定点的距离的和为常数”推不出定点的轨迹为椭圆，但是命题“平面内一动点 P 的轨迹为椭圆”是可以得到平面内一动点 P 到两个定点的距离的和为常数，因此为必要不充分条件。故本题选 B。

10．选 A。

【解析】$\because f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ 且当 $0\leq x\leq\pi$ 时，$f(x)=0$

$\therefore f(\dfrac{23\pi}{6})=f(\dfrac{5}{6}\pi)+\sin\dfrac{17}{6}\pi+\sin\dfrac{11}{6}\pi+\sin\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{2}$。故本题选 A。

11．选 A。

【解析】常见的全程量词有：任意一个，每一个，任给，所有的等，含有全称量词的命题叫全称命题，只有 A 选项符合题意。故本题选 A。

12．选 C。

【解析】由 $a_7=a_6+2a_5$ 得公比 $q=2$；由 $\sqrt{a_ma_n}=4a_1$ 即 $a_1{}^2q^{m+n-2}=16a_1{}^2$ 得 $m+n=6$，即 $\dfrac{m+n}{6}=1$；$\dfrac{1}{m}+\dfrac{9}{n}=\dfrac{m+n}{6m}+\dfrac{9(m+n)}{6n}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{n}{6m}+\dfrac{9m}{6n}\geq\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{2}+2\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{8}{3}$，当且仅当 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{9}{n}$ 时 $m=\dfrac{3}{2}$，不合题意。若 $\mathrm{m}=1,n=5,\dfrac{1}{m}+\dfrac{9}{n}=\dfrac{14}{5}$，若 $\mathrm{m}=2,n=4,\dfrac{1}{m}+\dfrac{9}{n}=\dfrac{11}{4}$，故最小值为 $\dfrac{11}{4}$。故本题选 C。

13．选 A。

【解析】由 $e=\frac{c}{a}=2$ 得 $c=2a$ 即 $|F_1F_2|=2c=4a$，由 $C_{\triangle AF_1F_2}=|AF_2|+|AF_1|+|F_1F_2|=10a$ 解得 $|AF_2|+|AF_1|=6a$；假设点 A 在双曲线的左支上，由双曲线第一定义得 $|AF|_2-|AF_1|=2a$，联立解得 $|AF_2|=4a;|AF_1|=2a$，ΔAF_1F_2 为等腰三角形其高为 $\sqrt{15}a$，ΔAF_1F_2 的面积 $S=\frac{2a\cdot\sqrt{15}a}{2}=\sqrt{15}a^2$。故本题选 A。

14．选 A。

【解析】由三角函数的诱导公式得 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha$，$\sin 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$，由倍角公式可得 $\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$，故本题选 A。

15．选 C。

【解析】由题意可知，该几何体是由圆柱和圆锥组合而成：其表面积等于圆锥侧面积+圆柱侧面积+圆柱底面积。圆锥 $S_{侧}=\pi rl=8\pi$，圆柱侧面+圆柱底面积 $=4\times 2\pi r+\pi r^2=16\pi+4\pi=20\pi$，所以几何体的表面积为 28π。故本题选 C。

16．选 B。

【解析】设应当从高三年级的学生中抽取的人数是 x，则由分层抽样的定义可得 $\frac{400}{1600}=\frac{x}{80}$ 解得 $x=20$。故本题选 B。

17．选 D。

【解析】条件概率，$P=\frac{0.6}{0.75}=0.8$。故本题选 D。

18．选 C。

【解析】由正态分布可知，$P(\varepsilon<0)=P(\varepsilon>4)=1-P(\varepsilon<4)=0.2$，$\therefore P(0<\varepsilon<2)=\frac{1}{2}P(0<\varepsilon<4)=\frac{1}{2}(0.8-0.2)=0.3$。故本题选 C。

19．选 D。

【解析】依题意，$\frac{a+0+1+2+3}{5}=1$，解得 $a=-1$，所以方差为 $S^2=\frac{1}{5}\left[(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2\right]=2$，故本题选 D。

20．选 A。

【解析】本题考查抛物线的标准方程及其性质。$\dfrac{S_{\Delta BCF}}{S_{\Delta ACF}}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{x_B}{x_A}=\dfrac{BF-1}{AF-1}$，故本题选 A。

二、填空题。

1. $\dfrac{1}{2}$

【解析】$M=-1+1+2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=\dfrac{1}{2}$

2. $x+y-2=0$

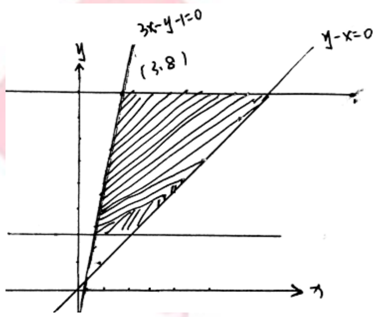
【解析】曲线 $y=\dfrac{x}{2x-1}$ 的导函数为 $y'=\dfrac{x'(2x-1)-x(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\dfrac{-1}{(2x-1)^2}$，将 $x=1$ 代入导函数求得切线斜率为：-1，故在点 $(1,1)$ 处的切线方程为：$y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$。

3. 9

【解析】因为 $0<a<1$，所以 $0<1-a<1$，而 $a+1-a=1$，那么 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{1-a}=(a+1-a)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{1-a})=1+\dfrac{1-a}{a}+\dfrac{4a}{1-a}+4\geq 5+2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}\bullet\dfrac{4a}{1-a}}=9$，即最小值为 9。

4. −5

【解析】根据题意画出所在区域的范围



函数 $Z=x-y$ 可看作是 $y=x-Z$，当取点 $(3,8)$ 时，Z 值最小。

5. $-160x^3$

【解析】∵偶数项二项式系数和为 32，∴ $\dfrac{1}{2}\cdot 2^n=32$，$n=6$。∴中间项为 $T_4=C_6^3(-2x)^{6-3}=-160x^3$。

6. $y=-x+3$

【解析】圆的标准方程可写为$(x-4)^2+(y-1)^2=5$，所以圆心$O(4,1)$，PO所在直线可以通过P,O两点坐标来确定为：$y=x-3$，那么最短弦所在直线即为：与PO垂直的直线：$y=-x+3$。

7. 2

【解析】$\because l:kx-y+2\sqrt{2}k=0$，$\therefore d_{O\to l}=\dfrac{2\sqrt{2}|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，$\therefore |AB|=2\sqrt{4-\left(\dfrac{2\sqrt{2}|k|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2}=4\sqrt{\dfrac{1-k^2}{1+k^2}}$

$\therefore S=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d_{O\to l}=\dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{k^2(1-k^2)}}{1+k^2}$，定义域：$-1<k<1$且$k\neq0$。设$k^2+1=t(t>1)$，则

$\sqrt{k^2(1-k^2)}=\sqrt{(t-1)(2-t)}=\sqrt{-t^2+3t-2}$　　$\therefore S=4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{-t^2+3t-2}}{t}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1+\dfrac{3}{t}-\dfrac{2}{t^2}}=$

$4\sqrt{2}\cdot\sqrt{-2\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}}$，$\therefore$当$\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{4}$,即$t=\dfrac{4}{3}$时，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore S_{\max}=4\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=2$，$\therefore S$的最大值是2。

8. 14π

【解析】$\because P,A,B,C$是球O表面上的四个点，PA,PB,PC两两垂直，则球的直径就是以PA，PB，PC为棱长的长方体的体对角线长，已知$PA=1,PB=2,PC=3$，则$2R=\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}=\sqrt{14}$，球的表面积$S=4\pi R^2=14\pi$。

9. $m\geq1$

【解析】已知在$x\in[0,2]$上，恒有$f(x)>g(x)$，那么，只需$f(x)$的最小值大于等于$g(x)$的最大值即可。根据题意，$0\leq f(x)\leq4,\dfrac{1}{4}-m\leq g(x)\leq1-m$，要保证$f(x)\geq g(x)$在$x\in[0,2]$上恒成立，则有$1-m\leq0$，即$m\geq1$。

10. 2017

【解析】因为$4S_n=(a_n-1)(a_n+3)$，所以$4S_{n-1}=(a_{n-1}-1)(a_{n-1}+3)$，两式相减整理得：$2a_n+2a_{n-1}={a_n}^2-{a_{n-1}}^2$，又因为数列$\{a_n\}$是正项数列，所以$a_n-a_{n-1}=2$，因为$4S_n=(a_n-1)(a_n+3)$，令$n=1$，则$a_1=3$，所以$\{a_n\}$是首项为3，公差为2的等差数列，其通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1$，所以$a_{1008}=2\times1008+1=2017$

三、简答题。

1.（I）$a=1$；（II）$f(x)$ 的单增区间为 $(-\infty,-1)$、$(3,+\infty)$；$f(x)$ 的单减区间为 $(-1,3)$

【解析】（I）导函数 $f'(x)=\frac{1}{3}\times 3\cdot x^2-2x-3a$，函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，所以 $f'(-1)=\frac{1}{3}\times 3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)-3a=0$，即得 $a=1$。

（II）$f'(x)=\frac{1}{3}\times 3\cdot x^2-2x-3=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，

在定义域范围内，$f'(x)$、$f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$f(x)$ 的单增区间为 $(-\infty,-1)$、$(3,+\infty)$；$f(x)$ 的单减区间为 $(-1,3)$

2. $E(\xi)=5$

【解析】ξ 的分布列为：

ξ	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

数学期望 $E(\xi)=3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{3}{9}+6\times\frac{2}{9}+7\times\frac{1}{9}=5$

3.（I）见解析；（II）$\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】(I)证明：在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1$，而 $DE\subset$ 面 $A_1B_1C_1$，

$\therefore DE\perp AA_1$，已知 $DE\perp AE$，$AA_1\cap AE=A$ 点，又 DE 在面 ADE 内，

$\therefore$ 平面 $\mathrm{ADE}\perp$ 平面 $\mathrm{ACC_1A_1}$。

（II）过点 D 作 $DO\perp$ 面ABC_1，故直线 AD 和平面 ABC_1 所成角的正弦值为 $\sin\theta=\dfrac{DO}{AD}$

正三角形 $A_1B_1C_1$ 中，点 D 是 A_1B_1 的中点，所以 $C_1D\perp A_1B_1$，又 $AA_1\perp$ 平面$A_1B_1C_1$，

$\therefore DC_1\perp AA_1,\because AA_1\cap A_1D=A_1$点,$\therefore DC_1\perp$ 平面AA_1BB_1， $DC_1\perp$ 平面 ABD，四面体

$DABC_1$ 的体积 $V_{D-ABC_1}=V_{C_1-ABD}$，即 $\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABC_1}\cdot DO=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABD}\cdot C_1O$ $\because AB=\sqrt{2}AA_1$，

$\therefore AC_1=BC_1=\sqrt{3}AA_1$， $C_1D=\dfrac{\sqrt{6}}{2}AA_1$， 而 $AD=\sqrt{(AA_1)^2+(A_1D)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}AA_1$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{2}AA_1\cdot DO=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AA_1\cdot DC_1$，解得 $DO=\dfrac{\sqrt{60}}{10}AA_1$， $\therefore \sin\theta=\dfrac{DO}{AD}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

故直线 AD 和平面 ABC_1 所成角为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{5}$。

4.（I）$a_n=3^n-1$；（II）见解析

【解析】（I）$\because a_{n+1}=3a_n+2\left(n\in N^*\right),\therefore a_{n+1}+1=3(a_n+1)\left(n\in N^*\right)$，即

$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$。所以 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=3$ 为首项，公比为 3 的等比数列。

$\therefore a_n+1=(a_1+1)\cdot 3^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}\left(n\in N^*\right)$，$a_n=3^n-1$

（II）$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{3^n-1}{3^{n+1}-1}<\dfrac{3^n-1}{3^{n+1}-3}=\dfrac{3^n-1}{3(3^n-1)}=\dfrac{1}{3}\ \therefore \dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3}=\dfrac{n}{3}$

因为 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{3^n-1}{3^{n+1}-1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3\left(3^{k+1}-1\right)}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{8\cdot 3^k+3^k-3}\geq\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{3^k}$，所以

$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\geq\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)=\dfrac{n}{3}-$

$\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)>\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{8}$。综上所得 $\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{8}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{3}$。

5.（1）见解析；（2）$a_n=3^n-(-2)^n$

【解析】（1）根据题意 $a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}$ 可得 $a_{n+1}+2a_n=3(a_n+3a_{n-1})$ $n\geq 2$ $\because a_1=5,a_2=5$

$\therefore a_2+2a_1=15$，故数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$是以 15 为首项，3 为公比的等比数列。

（2）由（1）$a_{n+1}+2a_n=5\times 3^n$ 由待定系数法可得 $a_{n+1}-3^{n+1}=-2(a_n-3^n)$，即 $a_n-3^n=2(-2)^{n-1}$

故 $a_n=3^n-(-2)^n$。

6. 10.5

【解析】在 ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 所以 $\angle B=45°$。过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D，则 $\sin C=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{3}{5}$

因为 $AC=5$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore BD=AD=3$，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=4$ $\therefore BC=BD+DC=7$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AD=\dfrac{1}{2}\times 7\times 3=10.5$。

7.（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；（2）见解析

【解析】（1）根据题意可知点 C，点 D，点 P 坐标表示且 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$，可得 $\begin{cases}1-b^2=-1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$

解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$，因此椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）当动直线斜率存在的时候，设直线的方程为 $y=kx+1$，分别设交点的坐标为 (x_1,y_1)，

(x_2,y_2)，联立方程 $\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 可得 $(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$ $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=-\dfrac{-2}{2k^2+1}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1+\lambda)(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\dfrac{(-2\lambda-4)k^2+(-2\lambda-1)}{2k^2+1}$

$=-\dfrac{\lambda-1}{2k^2+1}-\lambda-2$ 所以当 $\lambda=1$ 时，$-\dfrac{\lambda-1}{2k^2+1}-\lambda-2=-3$ 此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$ 为定值。

当直线 AB 斜率不存在时，直线 AB 即为直线 CD，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$。故存在常数 $\lambda=1$，

使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$。

8.（1）$-\dfrac{1}{4}$；（2）$2\sqrt{3}$

【解析】（1）$\because$ a，b，c 依次成等差数列，$\therefore 2b=a+c$，$\because$ 向量 $\vec{m}=(3,\sin B)$ 与 $\vec{n}=(2,\sin C)$

共线，$\therefore$ 两向量成比例，即 $2\sin B=3\sin C$，由正弦定理可得 $2b=3c$，$\therefore a=2c$，$b=\dfrac{3}{2}c$，由

余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{4}$；

（2）∵ a，b，c 依次成等差数列，即 $2b=a+c$，$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{3a^2+3c^2-2ac}{8ac}\geq$ $\dfrac{3\times 2\sqrt{a^2c^2}-2ac}{8ac}=\dfrac{1}{2}$，∵ $B\in(0,\ \pi]$，∴ $0<\sin B\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore S=\dfrac{1}{2}ac\sin B\leq\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，即 ΔABC 的面积 S 的最大值为 $2\sqrt{3}$。

9.（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（2）$x=\pm\dfrac{2\sqrt{21}}{3}y+4$

【解析】（1）$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$a=2$，可得 $c=1,b^2=a^2-c^2=4-1=3$，故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

（2）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $P'(x_1,-y_1)$

$S_{\triangle QTP}=S_{\triangle QST}-S_{\triangle PST}=\dfrac{1}{2}|ST||y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}|ST|\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$。设直线 QP 的方程为 $x=my+4$

联立 $\begin{cases}x=my+4\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}\to y^2\left(3m^2+4\right)+24my+36=0$，即有 $y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$；$y_1+y_2=\dfrac{-24m}{3m^2+4}$，且直线

QP' 的方程为 $y+y_1=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，当 y=0 时，可得 $x_T=\dfrac{4(y_1+y_2)+2my_1y_2}{y_1+y_2}=1$，故 $|ST|=3$，

$S_{\triangle QTP}=\dfrac{1}{2}|ST|\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{18\sqrt{m^2-4}}{4+3m^2}$，令 $t=\sqrt{m^2-4},t\geq 0$

$S_{\triangle QTP}=\dfrac{18t}{3t^2+16}=\dfrac{18}{3t+\dfrac{16}{t}}\leq\dfrac{18}{2\sqrt{3t\cdot\dfrac{16}{t}}}$，当且仅当 $t^2=\dfrac{16}{3}$，即 $m^2=\dfrac{28}{3}$。取“=”，故直线方程为 $x=\pm\dfrac{2\sqrt{21}}{3}y+4$。

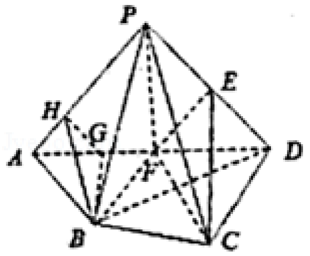
10. 见解析

【解析】证明：(I) 取 AD 中点 F，连接 EF，则 $EF//PA$，又 $EF\not\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $EF//$ 平面 PAB．连接 CF，由 $\angle ADB=30°$，$\angle CDB=60°$，可知 $\angle ADC=90°$，且 $CD=BD=\sqrt{3}DF$，则 $\angle DFC=60°$，所以 $AB//CF$，又 $CF\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $CF//$ 平面 PAB，而 $EF\cap CF=F$，所以平面 $PAB//$ 平面 CEF．又因为 $CE\subset$ 平面 CEF，所以 $CE//$ 平面 PAB．

解：(II) 连接 BF，因为 ΔPAD 为等腰直角三角形，则 $PF=\dfrac{1}{2}AD$．而 $BF=\dfrac{1}{2}AD$，且 $AD=\sqrt{2}PB$，所以 $PF\perp BF$．又 $PF\perp AD$，$AD\cap BF=F$，所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$，而 $PF\subset$

平面 PAD，所以平面 $APD\perp$ 平面 $ABCD$，作 $BG\perp AD$ 于 G 点，作 $GH\perp AP$ 于 H 点，连接 BH，因平面 $APD\cap$ 平面 $ABCD=AD$， $BG\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BG\perp$ 平面 APD． 又 $AP\subset$ 平面 APD，所以 $BG\perp AP$，因为 $BG\cap GH=G$，则 $AP\perp$ 平面 BGH， $BH\subset$ 平面 BGH，所以 $BH\perp AP$．

所以 $\angle BHG$ 为二面角 $B-AP-D$ 的平面角．不妨设 $AD=2a$，则在 RtΔBGH 中， $HG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$， $BG=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $HB=\frac{\sqrt{14}}{4}a$，所以 $\cos\angle BHG=\frac{HG}{HB}=\frac{\sqrt{7}}{7}$．所以二面角 $B-PA-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$．



11. 见解析

【解析】解：（Ⅰ）设动点 P 的坐标为 (x,y)，根据题意得 $\frac{|x-\frac{4\sqrt{3}}{3}|}{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，化简得曲线 C 的方程为： $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）$\because P$ 不在 x 轴上，故直线 AP 的斜率不为 0，设直线 AP 的方程为 $y=k(x-2)$，则直线 DE 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$．由联立 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$．设 $P(x_0$，$y_0)$，则 $2+x_0=\frac{16k^2}{1+4k^2}$，即 $x_0=\frac{8k^2-2}{1+4k^2}$． $|AP|=\sqrt{(x_0-2)^2+y_0{}^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_0-2)^2}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$．

设 $D(x_1$，$y_1)$，由椭圆对称性可知 $|DE|=2|OD|$．由 $\begin{cases} y=-\frac{1}{k}x \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，解得 $x_1{}^2=\frac{4k^2}{4+k^2}$，$y_1{}^2=\frac{4}{4+k^2}$，

$|OD|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}=2\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2+4}}$， $\therefore |DE|=4\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2+4}}$． $\therefore$ $\frac{|DE|}{|AP|}=\frac{4\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2+4}}}{\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}}=\frac{4k^2+1}{\sqrt{k^2+4}}$． 设

$t=\sqrt{k^2+4}$，则 $k^2=t^2-4$，$t>2$．$\dfrac{|DE|}{|AP|}=\dfrac{4(t^2-4)+1}{t}=\dfrac{4t^2-15}{t}(t>2)$．令 $g(t)=\dfrac{4t^2-15}{t}(t>2)$，则 $g'(t)=\dfrac{4t^2+15}{t^2}>0$．$\therefore g(t)$ 是一个增函数，$\therefore \dfrac{|DE|}{|AP|}=\dfrac{4t^2-15}{t}>\dfrac{4\times4-15}{2}=\dfrac{1}{2}$．综上，$\dfrac{|DE|}{|AP|}$ 的取值范围是 $(\dfrac{1}{2}，+\infty)$．

12. 见解析

【解析】解：(I) 由条件可知 $\begin{cases} f(1)=e \\ f'(1)=2e \end{cases}$，对函数 $f(x)=axe^{bx}$ 求导得 $f'(x)=a(1+bx)e^{bx}$，

于是 $\begin{cases} ae^b=e \\ a(1+b)e^b=2e \end{cases}$，解得 $a=b=1$．所以 $f(x)=xe^x$，$f'(x)=(1+x)e^x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$，于是当 $(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增．故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$，单调递增区间为 $(-1,+\infty)$

(II) 由 (I) 知 $g(x)=xe^{2x}-mx-lnx$，

解法 1：要使 $g(x)\geqslant 1$ 在 $\in(0,+\infty)$ 上恒成立，等价于 $m\leqslant e^{2x}-\dfrac{1+lnx}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立．令 $h(x)=e^{2x}-\dfrac{lnx+1}{x}$，则只需 $m\leqslant h(x)_{min}$ 即可．$h'(x)=\dfrac{2x^2e^{2x}+lnx}{x^2}$．令 $H(x)=2x^2e^{2x}+lnx$，$(x>0)$，则 $H'(x)=4(x^2+x)e^{2x}+\dfrac{1}{x}>0$，所以 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $H(\dfrac{1}{4})=\dfrac{\sqrt{e}}{8}-2ln2<0$，$H$（1）$=2e^2>0$，所以 $H(x)$ 有唯一的零点 x_0，且 $\dfrac{1}{4}x_0<1$，$H(x$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0$，$+\infty)$ 上单调递增，因 $2{x_0}^2e^{2x_0}+lnx_0=0$，两边同时取自然对数，则有 $2x_0+ln(2x_0)+lnx_0=ln(-lnx_0)$，即 $2x_0+ln(2x_0)=ln(-lnx_0)+(-lx_0)$，构造函数 $m(x)=x+lnx$，$x>0$，则 $m'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，所以函数 $m(x)$ 在 $\in(0,+\infty)$ 上单调递增，因 $m(2x_0)=m(-lnx_0)$，所以 $2x_0=-lnx_0$，即 $e^{2x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=e^{2x_0}-\dfrac{1+lnx_0}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1-2x_0}{x_0}=2$，即 $h(x)_{min}=2$，于是实数 m 的取值范围是 $(-\infty，2]$．

解法 2：要使 $g(x)\geqslant 1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，等价于 $m\leqslant e^{2x}-\dfrac{lnx+1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立．先证明 $t\geqslant lnt+1$，令 $Q(t)=t-lnt-1$，$t>0$，则 $Q'(t)=\dfrac{t-1}{t}$．于是当 $t\in(0,1)$ 时，$Q'(t)<0$，$Q(t)$ 单调递减；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$Q'(t)>0$，$Q(t)$ 单调递增，所以 $Q(t)\geqslant Q$（1）$=0$，故 $t\geqslant lnt+1$（当且仅当 $t=1$ 时取等号）．所以当 $x>0$ 时，有 $xe^{2x}\geqslant ln(xe^{2x})+1=lnx+2x+1$，所以，

$xe^{2x} \geqslant \frac{lnx}{x}+2+\frac{1}{x}$，即 $e^{2x}-\frac{lnx+1}{x} \geqslant 2$，当且仅当 $xe^{2x}=1$ 时取等号，于是实数 m 的取值范围是 $(-\infty，\ 2]$。

13. 见解析

【解析】解：（1）从箱中取两个球的情形有以下 6 种：

{2 个白球}，{1 个白球，1 个黄球}，{1 个白球，1 个黑球}，{2 个黄球}，{1 个黑球，1 个黄球}，{2 个黑球}.

当取到 2 个白球时，随机变量 $X=-2$；

当取到 1 个白球，1 个黄球时，随机变量 $X=-1$；

当取到 1 个白球，1 个黑球时，随机变量 $X=1$；

当取到 2 个黄球时，随机变量 $X=0$；

当取到 1 个黑球，1 个黄球时，随机变量 $X=2$；

当取到 2 个黑球时，随机变量 $X=4$；

所以随机变量 X 的可能取值为 -2，-1，0，1，2，4…

$P(X=-2)=\frac{C_6^2}{C_{12}^2}=\frac{5}{22}$，$P(X=-1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{2}{11}$，

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{66}$，$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{11}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{33}$，$P(X=4)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{11}$…

$\therefore X$ 的概率分布列如下：

X	-2	-1	0	1	2	4
P	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$

（2）$P(X>0)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=4)=\frac{4}{11}+\frac{4}{33}+\frac{1}{11}=\frac{19}{33}$.