乘华图翅膀 圆教师梦想

2021 年湖北省义务教师成师 30 晚讲义

目 录

第19晚 数

一、实数的分类

1.奇数和偶数：整数中，能被2整除的数叫做偶数（0也是偶数），其他不是2的倍数的数叫做奇数。

奇数与偶数的运算性质：

（i）奇数±奇数=偶数；偶数±偶数=偶数；

奇数±偶数=奇数；偶数±奇数=奇数。

（ii）奇数×奇数=奇数；偶数×偶数=偶数；奇数×偶数=偶数；

（iii）多个数相加减时，结果的奇偶性由奇数的个数决定：奇数个奇数之和为奇数，偶数个奇数和为偶数。

（iv）多个数相乘时，结果的奇偶性由偶数决定：只要有偶数，结果必为偶数。

【例1】三个连续的奇数，如果中间一个用 a 表示，那么另两个表示为（　　）。

A.a-1 和 a+1　　B.a-2 和 a+2

C.a+1 和 a+3　　D.a+2 和 a+4

【例2】一试卷有50道判断题，规定每做对一题得3分，不做或做错一题扣1分。某学生共得分82分，问做对的题与不做或做错的题相差几道题？（　　）

A.15题　　B.16题

C.17题　　D.18题

【例3】一个人到书店买了一本书和一本杂志，在付钱时，他把书的定价中的个位上的数字和十位上的看反了，准备付21元取货，售货员说：“您应该付39元才对。”请问书比杂志贵多少钱？（　　）

A.20　　B.21

C.23　　D.24

2.质数和合数：

一个数，如果只有1和它本身两个因数，这样的数叫做质数（或素数），比如2、3、5等都是质数。其中2为最小的质数。一个数，如果除了1和它本身还有别的因数，这样的

数叫做合数，比如 4、6、8 等都是合数。其中 4 是最小的合数。（0 和 1 既不是质数也不是合数；自然数中除了 0 和 1 外，其他的数不是质数就是合数。）

【例 1】在 -1，1，2，4 四个数中，既是自然数也是质数（素数）的是（　　）。

A. -1　　B.1

C.2　　D.4

【例 2】方程 $px+q=99$ 的解为 x 为奇数，p、q 均为质数，则 $p\times q$ 的值为（　　）。

A.194　　B.197

C.135　　D.155

3.分数

①把单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫分数。分数中间的一条线叫做分数线，分数线上面的数叫做分子，分数线下面的数叫做分母。

②分数单位：把单位“1”平均分成若干份，表示其中一份的数叫做分数单位。例如：$\frac{2}{4}$ 的分数单位是 $\frac{1}{4}$；$\frac{1}{2}$ 的分数单位是 $\frac{1}{2}$。

③分数和除法的关系：被除数 $\div$ 除数$=\dfrac{被除数}{除数}$。

④分数的基本性质

分数的分子和分母同时乘或除以同一个数（0 除外），分数的大小不变。

⑤分数的分类

真分数：分子比分母小的分数；

假分数：分子比分母大或者分子和分母相等的分数，即假分数大于或者等于 1；

带分数：把假分数写成整数和真分数的形式。

【例 1】分数单位是 $\frac{1}{24}$ 的分数中，大于 $\frac{1}{3}$ 且小于 $\frac{1}{2}$ 的最简分数的个数是（　　）。

A.0　　B.1

C.2　　D.3

【例 2】一盒牛奶，第一天喝去它 $\frac{1}{5}$，第二天喝去剩下的 $\frac{1}{5}$，则一共喝了牛奶的（　　）。

A. $\frac{9}{25}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{16}{25}$

【例3】下面分数中不能化成有限小数的是（　　）。

A. $\frac{52}{65}$　　B. $\frac{19}{25}$

C. $\frac{21}{35}$　　D. $\frac{5}{12}$

二、实数的表示

1.有效数字

一个近似数四舍五入到哪一位，就说它精确到哪一位，这时，从左边第一个不是零的数字起到右边精确的数位止的所有数字，都叫做这个数的有效数字。

2.科学记数法

把一个数写做 $\pm a\times10^n(1\leq a<10)$ 的形式，其中n是整数，这种记数法叫做科学记数法。

【例1】0.0036800有几位有效数字？

【例2】“世界银行全球扶贫大会”于2004年5月26日在上海开幕，从会上获知，我国国民生产总值达到11.69万亿元，人民生活总体上达到了小康水平，其中11.69万亿用科学计数法表示为（　　）。

A. $\mathbf{11.69\times10^{14}}$　　B. $\mathbf{1.169\times10^{14}}$

C. $\mathbf{1.169\times10^{13}}$　　D. $\mathbf{0.1169\times10^{14}}$

【随堂练习】

1.若 $\frac{x}{7}$ 是真分数，x 的值有（　　）种可能。

A.3　　B.4

C.5　　D.6

2.某电视台报道，截止到2010年5月5日，慈善会已接受支援玉树地震灾区的指标15510000元，将15510000用科学计数法，表示为（　　）。

A．0.1551×10^{8}　　B．1551×10^{4}

C．1.551×10^{7}　　D．15.51×10^{6}

3.已知甲数是乙数的$\frac{2}{3}$，乙数是丙数的$\frac{4}{5}$，甲乙丙三数的最简比为_______。

第20晚 代数式

一、整式的有关概念

（一）代数式

用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子叫做代数式，单独的一个数或一个字母也是代数式。

（二）单项式

只含有数字与字母的积的代数式叫做单项式。

【注意】单项式是由系数、字母、字母的指数构成的，其中系数不能用带分数表示，如$-4\frac{1}{3}a^2b$，这种表示就是错误的，应写成$-\frac{13}{3}a^2b$一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数。如$-5a^3b^2c$是6次单项式。

（三）多项式

几个单项式的和叫做多项式.其中每个单项式叫做这个多项式的项.多项式中不含字母的项叫做常数项.多项式中次数最高的项的次数，叫做这个多项式的次数.

单项式和多项式统称整式.

用数值代替代数式中的字母，按照代数式指明的运算，计算出结果，叫做代数式的值.

【注意】

1.求代数式的值，一般是**先将代数式化简**，然后再将字母的取值代入.

2.求代数式的值，有时求不出其字母的值，需要利用技巧，**“整体”代入**.

二、整式的计算

（一）同类项

所有字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项叫做同类项.常数项也是同类项.

【例1】下列不是同类项的是（　　）。

A. x^3y^4和$2x^3y^4$　　B. $-3xy^2$和$-\frac{1}{2}yx^2$　　C. $5ab$和$-2ba$　　D. $3a$和$-a$

（二）去括号法则

1.括号前是“+”，把括号和它前面的“+”号一起去掉，括号里各项都不变号.

2.括号前是**“-”**，把括号和它前面的“-”号一起去掉，**括号里各项都变号**.

（三）整式的运算法则

整式的加减法：（1）去括号；（2）合并同类项.

整式的乘法：

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$（m，n都是正整数）　　$(a^n)^m = a^{nm}$（m，n都是正整数）

$(ab)^n = a^n b^n$（n是正整数）　　$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$　　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

整式的除法： $a^m \div a^n = a^{m-n}$（m,n都是正整数$,a \neq 0$）

三、因式分解

（一）因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

（二）因式分解的常用方法

1.如果多项式的各项有公因式，那么先**提取公因式**：$ab + ac = a(b+c)$

2.在各项提出公因式以后或各项没有公因式的情况下，观察多项式的项数：可以尝试运用**公式法**分解因式：$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

3.运用**十字相乘法**分解因式；

4.运用求根公式分解因式。

【注意**】分解因式必须分解到每一个因式都不能再分解为止.**

【例 2】在实数范围内分解$-2x^2 + 3x + 1$的结果是（　　）。

A. $(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4})(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4})$　　B. $-2(x + \frac{3+\sqrt{17}}{4})(x + \frac{3-\sqrt{17}}{4})$

C. $-(x + \frac{3+\sqrt{17}}{4})(x + \frac{3+\sqrt{17}}{4})$　　D. $-2(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4})(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4})$

四、分式

（一）分式的概念

一般地，用 A、B 表示两个整式，A÷B 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式，如果 B 中含有字母，式子 $\frac{A}{B}$ 就叫做分式.其中，A 叫做分式的分子，B 叫做分式的分母.分式和整式通称为有理式.

（二）分式的性质

1.分式的基本性质：**分式的分子和分母都乘以（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变.**

2.分式的变号法则：分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变.

（三）分式的运算法则

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc};\qquad (\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}(n\text{为整数});$$

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c};\qquad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

五、二次根式

（一）二次根式

式子 $\sqrt{a}(a\geq 0)$ 叫做二次根式，二次根式必须满足：含有二次根号“$\sqrt{\ }$”；**被开方数 a 必须是非负数**.

（二）最简二次根式

若二次根式满足：被开方数的因数是整数，因式是整式；被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式叫做最简二次根式.

化二次根式为最简二次根式的方法和步骤：

1.如果被开方数是分数（包括小数）或分式，先利用商的算数平方根的性质把它写成分式的形式，然后利用分母有理化进行化简.

2.如果被开方数是整数或整式，先将他们分解因数或因式，然后把能开得尽方的因数或因式开出来.

（三）同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式.

（四）**二次根式的性质**

1. $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$

2. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$

3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \bullet \sqrt{b}(a \geq 0, b \geq 0)$　　4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a \geq 0, b \geq 0)$

（五）二次根式混合运算

二次根式的混合运算与实数中的运算顺序一样，**先乘方，再乘除，最后加减**，有括号的先算括号里的（或**先去括号**）.

【例 3】下列运算中，正确的是（　　）。

A. $2x^5 - 3x^3 = -x^2$　　B. $2\sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{5}$

C. $\left(3a^6x^3 - 9ax^5\right) \div \left(-3ax^3\right) = 3x^2 - a^5$　　D. $(-x)^5 \cdot \left(-x^2\right) = x^{10}$

【随堂练习】

1.从左到右是因式分解的是（　　）。

A. $a^2 + a - 6 = a(a+1) - 6$　　B. $a^2 + 4a - 21 = (a-3)(a+7)$

C. $(a-2)(a+3) = a^2 + a - 6$　　D. $a^2 + 4a - 21 = (a+2)^2 - 25$

2.若 $a^x = 2$， $a^y = 3$，则 a^{2x-y} 的值为（　　）。

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{4}{3}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $-\dfrac{3}{4}$

3.已知 $x - y = \sqrt{3}$，则代数式 $(x+1)^2 - 2x + y(y-2x)$ 的值为______。

4.已知 $x^2 - x - 1 = 0$，则 $x^3 - 2x + 1$ 的值为______。

5.已知$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$，则$\frac{ab}{|ab|}$的值为_______。

6.已知$x=2005a+2004$，$y=2005a+2005$，$z=2005a+2006$，则$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$的值为（　　）。

A.2　　B.3

C.4　　D.5

7.已知三角形三边为：1，k，3，化简$12+\sqrt{4k^2-36k+81}+|2k-3|=$（　　）。

A.18　　B.6

C.4k　　D.$19-4k$

8.已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则代数式$\frac{2x-14xy-2y}{x-2xy-y}$的值为_________。

第21晚 方程

一、一元一次方程

1.方程：含有未知数的等式叫做方程。

2.方程的解：能使方程两边相等的未知数的值叫做方程的解。

3.等式的性质

（1）等式的两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，所得结果仍是等式。

（2）等式的两边都乘以（或除以）同一个数（除数不能是零），所得结果仍是等式。

4.一元一次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是1的整式方程叫做一元一次方程，其中方程 $\boldsymbol{ax+b=0}$（$\boldsymbol{x}$ 为未知数，$\boldsymbol{a\neq 0}$）叫做一元一次方程的标准形式，$\boldsymbol{a}$ 是未知数 $\boldsymbol{x}$ 的系数，$\boldsymbol{b}$ 是常数项。

【例1】若关于 x 的方程 $(m-2)x^{|m|-2}+3=0$ 是一元一次方程，则m的值是（　　）。

A.3　　B.± 3

C.-3　　D.都不对

二、二元一次方程（组）

1.二元一次方程

含有两个未知数，并且未知项的最高次数是1的整式方程叫做二元一次方程，也叫不定方程，它的一般形式是 $\boldsymbol{ax+by+c=0}$，且a、b不等于0。

2.二元一次方程的解

使二元一次方程左右两边的值相等的一对未知数的值，叫做二元一次方程的一个解，一般用因子分析法或者奇偶数的特点得出整数解。

因子分析法：不定方程 $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ 若其中两项都含有某因子，则剩余的一项必有该因子。

3.二元一次方程组

两个（或两个以上）二元一次方程合在一起，就组成了一个二元一次方程组。

4.二元一次方程组的解

使二元一次方程组的两个方程左右两边的值都相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程组的解。

5.二元一次方程组的解法

（1）代入消元法　　　（2）加减消元法

【例2】$2x+3y=15$ 有______组正整数解。

【例3】设a，b均为正整数，且有等式11a+7b=132成立，则a的值为______。

三、一元二次方程

1.一元二次方程

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫做一元二次方程。

2.一元二次方程的一般形式

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，它的特征是：等式左边是一个关于未知数x的二次多项式，等式右边是零，其中ax^2叫做二次项，a叫做二次项系数；bx叫做一次项，b叫做一次项系数；c叫做常数项。

3.一元二次方程的解法

（1）直接开平方法

利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法。直接开平方法适用于解形如$(x+a)^2=b$的一元二次方程。根据平方根的定义可知，$x+a$是b的平方根，当$b\geq 0$时，$x+a=\pm\sqrt{b}$，$x=-a\pm\sqrt{b}$，当$b<0$时，方程没有实数根。

（2）配方法

配方法是一种重要的数学方法，它不仅在解一元二次方程上有所应用，而且在数学的

其他领域也有着广泛的应用。配方法的理论根据是完全平方公式$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$，把公式中的$a$看作未知数$x$，并用$x$代替，则有$x^2 \pm 2bx + b^2 = (x \pm b)^2$。

（3）公式法（万能法）

公式法是用求根公式解一元二次方程的解的方法，它是解一元二次方程的一般方法。

一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$的求根公式：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}(b^2 - 4ac \geq 0)$$

（4）因式分解法

因式分解法就是利用因式分解的手段，求出方程的解的方法，这种方法简单易行，是解一元二次方程最常用的方法。

四、一元二次方程根的判别式

一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$中，$b^2 - 4ac$叫做一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$的根的判别式，通常用“$\Delta$”来表示，即$\Delta = b^2 - 4ac$，当$\Delta > 0$时，方程有2个不等的实根；当$\Delta = 0$时，方程有2个相等的实根；当$\Delta < 0$时，方程无实数根。

五、一元二次方程根与系数的关系

如果方程$ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$的两个实数根是$x_1$和$x_2$，那么$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$，$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

【例4】已知一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0$，其中$a > 0$，$b < 0$，$c < 0$，求方程式的根的情况为（　　）。

A.有两个正根

B.有两个负根

C.有一正根，一负根且正根的绝对值大于负根的绝对值

D.有一正根，一负根且正根的绝对值小于负根的绝对值

【随堂练习】

1.若关于 x 的方程 $(m-3)x^{m^2-2m-1}-mx+6=0$ 是一元二次方程，则它的一次项系数是（　　）。

A.1　　B.-1　　C.3　　D.3 或-1

2.在实数范围内把 $2x^2-4x-8$ 分解因式为（　　）。

A. $2(x-3)(x+1)$　　B. $2(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})$

C. $(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})$　　D. $2(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})$

3.已知关于 x 的方程 $x^2-mx+m=0$ 的两根的平方和是 3，则 m 的值是（　　）。

A.-1　　B. 1　　C. 3　　D. -1 或 3

4.某种商品因换季准备打折出售，如果按定价的七五折出售将赔 25 元，而按定价的九折出售将赚 20 元，问这种商品的定价是多少？设定价是 x，则下列方程中正确的是（　　）。

A. $\frac{75}{100}x-20=\frac{9}{10}x+25$　　B. $\frac{75}{100}x+20=\frac{9}{10}x+25$

C. $\frac{75}{100}x-25=\frac{9}{10}x+20$　　D. $\frac{75}{100}x+25=\frac{9}{10}x-20$

5.甲、乙二人从 M 地同时出发去 N 地，甲用一半时间以每小时 a 千米的速度行走，另一半时间以每小时 b 千米的速度行走；乙以每小时 a 千米的速度行走一半路程，另一半路程以每小时 b 千米的速度行走，若 $a\neq b$，则下列说法正确的是（　　）.

A.二人同时到达 N 地

B.甲先到达 N 地

C.乙先到达 N 地

D.若 $a>b$，甲先到达 N 地；若 $a<b$，乙先到达 N 地

6.学生合唱队里，男生比女生一半少 9 人，女生比男生 3 倍多 3 人，唱队共有几人？（　　）

A.63　　B.56

C.60　　D.72

7.小明和小亮有邮票若干，小明对小亮说“你的邮票数是我的 $\frac{3}{4}$”，小亮对小明说“如

果你给我你的$\frac{1}{6}$，我就比你多两张”，小明有邮票多少_______张.

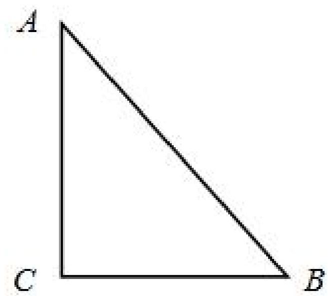
8.甲乙丙丁四人共有 48 本书，若在他们原有的基础上做如下变动：甲增加 3 本，乙减少 3 本，丙增加到原来的 3 倍，丁减少为原来的 1/3，则四人的书一样多，则原来有书本最多的人有多少本？

第 22 晚　三角函数

一、三角函数的计算

（一）锐角三角函数

$Rt\Delta ABC$ 中，设 $\angle C=90^\circ$，$\angle\alpha$ 为 $Rt\Delta ABC$ 的一个锐角，则：



$\angle\alpha$ 的正弦 $\sin\alpha=\dfrac{\angle\alpha\text{的对边}}{\text{斜边}}$；

$\angle\alpha$ 的余弦 $\cos\alpha=\dfrac{\angle\alpha\text{的邻边}}{\text{斜边}}$；

$\angle\alpha$ 的正切 $\tan\alpha=\dfrac{\angle\alpha\text{的对边}}{\angle\alpha\text{的邻边}}$。

（二）求任意角的三角函数

1.任意角

第一象限角：$\left\{\alpha\left|2n\pi<\alpha<2n\pi+\dfrac{\pi}{2},n\in Z\right.\right\}$

第二象限角：$\left\{\alpha\left|2n\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha<2n\pi+\pi,n\in Z\right.\right\}$

第三象限角：$\left\{\alpha\left|2n\pi+\pi<\alpha<2n\pi+\dfrac{3\pi}{2},n\in Z\right.\right\}$

第四象限角：$\left\{\alpha\left|2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2n\pi+2\pi,n\in Z\right.\right\}$

2.弧度制

①正角的弧度数是正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数是 0。

②角的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$（l 为弧长，r 为半径）。

③角度制与弧度制之间的转换：$\alpha=\dfrac{n\pi}{180^\circ}$（$\alpha$ 为弧度制，n 为角度制）。

④常见的角度、弧度间的关系：$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}rad$，$1rad=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$，$30^\circ=\dfrac{\pi}{6}\ rad$，

$45^{\circ}=\frac{\pi}{4}\ rad$，$60^{\circ}=\frac{\pi}{3}\ rad$，$90^{\circ}=\frac{\pi}{2}\ rad$，$180^{\circ}=\pi\ rad$，$360^{\circ}=2\pi\ rad$。

【通常在用弧度制表示角时，弧度（rad）可省略】

3.任意角的三角函数

设α为任意一个角，$P(x,y)$是α的终边上的任意一点（异于原点），它与原点的距离是$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，则

角α正弦：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

角α余弦：$\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

角α正切：$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)$；

角α余切：$\cot\alpha=\frac{x}{y}(y\neq 0)$；

角α正割：$\sec\alpha=\frac{r}{x}(x\neq 0)$；

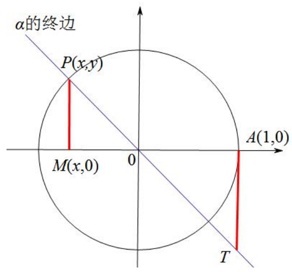
角α余割：$\csc\alpha=\frac{r}{y}(y\neq 0)$。

注意：任意角的三角函数值只与角的大小有关，而与终边上点P的位置无关。

角度α	$0^{\circ}(0)$ $360^{\circ}(2\pi)$	$30^{\circ}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^{\circ}\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^{\circ}\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^{\circ}\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^{\circ}(\pi)$	$270^{\circ}\left(\frac{3}{2}\pi\right)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在

4.三角函数线

设α为任意一个角，圆心在原点的单位圆与角α的终边相交于点$P(x,y)$，与x轴正半轴相交于点A。过点P作x轴垂线，垂足为M，过点$A(1,0)$作单位圆的切线与OP的延长线（反向延长线）交于点T。



则MP为正弦线，OM为余弦线，AT为正切线。

5.三角函数的符号

①$\sin\alpha$在一二象限是正，三四象限为负；

②$\cos\alpha$在一四象限为正，二三象限为负；

③正余切函数在一三象限为正，二四象限为负。

符号口诀：“一全二正弦，三切四余弦”。

【例 1】若$\sin\theta\cos\theta>0$，则θ在（　　）。

A.第一、二象限　　B.第一、三象限

C.第一、四象限　　D.第二、四象限

三、常用公式

（一）基本函数关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$　　$\tan\alpha\cot\alpha=1$

（二）诱导公式

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$　　$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$　　$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$　　$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$　　$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$　　$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$　　$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$　　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$　　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

（三）两角和与差公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

（四）倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

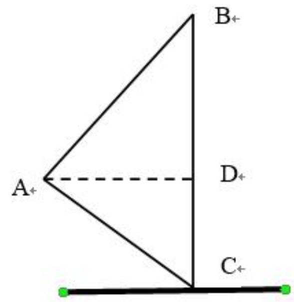
【例 2】若 $\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）。

A. $-\frac{7}{25}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $-\frac{1}{5}$　　D. $\frac{7}{25}$

（五）仰角俯角

【例 3】如题 24 图所示，截拍无人机在 A 处测得一栋建筑物项部 B 的仰角为45°。测得底部 C 得俯角为50°，此时接拍无人机与建筑物得水平距离 AD=100m，求该建筑物得高度（精确到 1m）。（参考数据：$\sin 50°=0.766\cdots,\cos 50°=0.462\cdots,\tan 50°=1.191\cdots$）


B
D
A
C

第23晚　奥数（1）

一、工程问题

工程应用题中的工作(或工作)一般不给出具体数量.解题时首先要将全部工程看作单位“1”，再求出一个单位时间的工作量占总工作量的几分之几，即工作效率。

一般要用到下面三个关系式：工作量=工作效率×工作时间，工作时间=工作量÷工作效率，工作效率=工作量÷工作时间。

【例1】要制作一个工件，若甲单独制作要半个小时完成，乙单独制作需要45分钟完成.若两人一起制作，需要（　　）分钟完成。

A.15　　B.16　　C.18　　D.20

【例2】一个浴缸放满水需要30分钟，排光一浴缸水需要50分钟，假如忘记关上出水口，将这个浴缸放满水需要（　　）分钟。

A.50　　B.60　　C.75　　D.80

【例3】甲乙两个工程队合作一项工程16天完成，现在两个队合作9天，甲队被调走，乙队又单独做21天才完成，问乙队单独做，需几天完成？（　　）

A.36　　B.40　　C.48　　D.56

【例4】某工程队正在修建一条水渠，1月份修建了全长的30%，2月份比1月份少修建了10km，此时整个水渠还有一半未修，求：

（1）该工程已完工的部分占总长的百分比；

（2）1月份比2月份多修建的部分占总长度的百分比；

（3）水渠总长度。

二、行程问题

行程问题是专门讲物体运动速度.时间和路程三者关系的应用题。

主要数量关系是：路程＝速度×时间。

1.相遇追及问题

相向而行：相遇时间＝距离÷速度和

相背而行：相背距离＝速度和×时间

“追及问题”：一般指两个物体同方向运动，由于各自的速度不同后者追上前者的问题。

此类问题的基本数量关系是：速度差×追及时间＝追及路程。

解答此类问题，一定动的运动快的物体之所以能追上运动慢的物体，是因为两者间的速度差。可借助线段图帮助分析。

【例1】某宣讲团甲宣传员骑摩托车从红星村出发以20公里/小时的速度去相距60公里的八一村，1小时后由于路面湿滑，速度减少一半，在甲出发1小时后，乙宣传员以50公里/小时的速度开车从红星村出发追甲，当乙追上甲时，他们与八一村的距离为（　　）。

A.25公里　　B.40公里

C.35公里　　D.30公里

【例2】甲以6千米/小时步行从A地往B地，在甲出发90分钟时，乙发现甲落下重要物品，立即骑自行车以12千米/小时追甲，在11点追上，甲出发的时间为上午（　　）点。

A.7　　B.8

C.9　　D.10

【例3】甲乙两人相距50千米，同时出发相向而行，甲的前进速度为6千米/小时，乙的前进速度为8千米/小时。在途中，甲休息了1小时再继续前进。则甲、乙在出发（　　）小时后相遇。

A.2　　B.3

C.3.5　　D.4

2.火车问题

①火车过桥（或隧道）所用的时间＝（桥或隧道长+火车身长）÷火车速度；

②两列火车相向而行，从相遇到相离所用的时间＝两火车车身长度和÷两车速度和；

③两车同向而行，快车从追上到超过慢车所用的时间＝两火车车身长度和÷两车速度差。

【例4】一列火车途经两个隧道和一座桥梁，第一个隧道长600米，火车通过用时18秒；第二个隧道长480米，火车通过用时15秒；桥梁长800米，火车通过时速度为原来的一半，则火车通过桥梁所需的时间为（　　）。

A.20秒　　　　B.25秒

C.40秒　　　　D.46秒

3.流水行船问题

船速＝（顺流船速＋逆流船速）÷2；

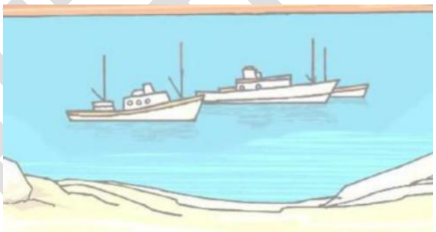
水速＝（顺流船速－逆流船速）÷2；

顺流船速＝船速＋水速；

逆流船速＝船速－水速；

顺流船速＝逆流船速＋水速×2；

逆流船速＝顺流船速－水速×2。



【例5】一条客船往返于甲、乙两个沿海城市之间，由甲市到乙市是顺水航行，由乙市到甲市是逆水航行。已知船在静水中的速度是每小时25海里。由甲市到乙市用了8小时，由乙市到甲市所用的时间是由甲市到乙市所用时间的1.5倍，则甲乙两个城市相距（　　）海里。

A.240　　　　B.260

C.270　　　　D.280

4.环形问题

①两人同地背向运动，从第一次相遇到下次相遇共行一个全程；

②同地、同向运动时，甲追上乙时，甲比乙多行一个全程。

【例6】甲乙两人绕着周长为600米的环形跑道跑步，他们从相同的起点同时同向起跑。已知甲的速度为每秒5米，乙的速度为每秒3米，则当甲第一次与乙相遇时，乙距离起点还有（　　）米。

A.100　　　　B.150

C.300　　　　D.350

【例 7】甲车从 A 地到 B 地需行 6 时，乙车从 B 地到 A 地需行 10 时．现在甲乙两车分别从 A，B 两地同时出发，相向而行，相遇时甲车比乙车多行 90km，A，B 两地相距（　　）km。

A.900　　　　B.540

C.360　　　　D.180

第24晚 奥数（2）

一、经济问题

销售问题中常出现的量有：进价（成本）、标价、折扣、售价、利润等

②有关关系式：

利润=售价-成本

总售价=单价×销量

总利润=单利润×销量=总收入-总成本=总成本×利润率

利润率=利润÷成本

【例1】某超市店庆搞活动，某种台灯原价每个 x 元，第一次降价打“八折”，第二次降价每个又减10元，经两次降价后售价为90元，则得到方程（　　）。

A.$0.8x-10=90$　　B.$0.08x-10=90$

C.$90-0.8x=10$　　D.$x-0.8x-10=90$

【例2】某种商品每件的标价是330元，按标价的八折销售时，仍可获利10%，则这种商品每件的进价为（　　）。

A.200 元　　B.240 元

C.250 元　　D.300 元

【例3】某种商品原价25元，每半天可销售20个。现知道每降价1元，销量即增加5个。某日上午将该商品打八折，下午在上午价格的基础上再打八折出售，问其全天销售额为（　　）元。

A.1760　　B.1940

C.2160　　D.2560

【例4】某地居民用水价格分二级阶梯，户年用水量在0—180（含）吨的水价5元/吨；180吨以上的水价7元/吨。户内人口在5人以上的，每多1人，阶梯水量标准增加30吨。老张家5人，老李家6人，去年用水量都是210吨。问老李家的人均水费比老张家少约（　　）元。

A.12　　B.35

C.47 D.60

【例5】某类商品按质量分为8个档次，最低档次商品每件可获利8元，每提高一个档次，则每件商品的利润增加2元。最低档次商品每天可产出60件，每提高一个档次，则日产量减少5件。若只生产其中某一档次的商品，则每天能获得的最大利润是多少元。

二、牛吃草问题

核心公式：牛吃草总量＝原有量＋新增量

核心解法：方程法　y＝（N－x）×T

y代表原有量、N代表牛的头数、x代表增速、T代表时间

①隐含的假设：每头牛每天的消耗量为1。

【例6】牧场上有一片青草，牛每天吃草，草每天以均匀的速度生长。这片青草供给10头牛可以吃20天，供给15头牛可以吃10天。供给25头牛可以吃多少天？

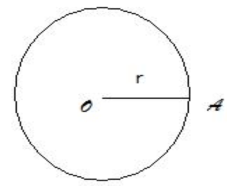
【例7】有一个水池，池底不断有泉水涌出，且每小时涌出的水量相同。现要把水池里的水抽干，若用5台抽水机40小时可以抽完，若用10台抽水机15小时可以抽完。现在用14台抽水机，多少小时可以把水抽完？

【例 8】某河段中的沉积河沙可供 80 人连续开采 6 个月或 60 人连续开采 10 个月。如果要保证该河段河沙不被开采枯竭，问最多可供多少人进行连续不间断的开采？（假定该河段河沙沉积的速度相对稳定）

【例 9】某游乐园的检票口在开园前已有一些人排队。检票开始后陆续有游客前来排队、平均每分钟来 10 人。一个检票口每分钟能让 25 人检票进站，如果开放 2 个检票口，刚好 3 分钟就没有人排队：如果只开放 1 个检票口，那么检票开始后多少分钟没有人排队?

第 25 晚　圆

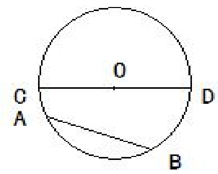
一、圆的定义



在一个个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形叫做圆，固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径.

圆的几何表示：以点 O 为圆心的圆记作“⊙O”，读作“圆 O”

二、弦、弧等与圆有关的定义



（1）**弦：连接圆上任意两点的线段**叫做弦.（如图中的 AB）

（2）直径：**经过圆心的弦叫做直径**.（如图中的 CD）

直径等于半径的 2 倍.

（3）**半圆：圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做半圆**.

（4）弧、优弧、劣弧：**圆上任意两点间的部分**叫做圆弧，简称**弧**.

弧用符号“⌒”表示，以 A，B 为端点的弧记作“$\overset{\frown}{AB}$”，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”.

大于半圆的弧叫做**优弧**（多用**三个字母**表示）；小于半圆的弧叫做**劣弧**（多用**两个字母**表示）

【例 1】.如下列命题中正确的有（　　）。

①直径是圆内最长的弦；②弦是半圆；③过圆心的直线是直径；④半圆是圆弧.

A.1 个　　　B.2 个　　　C.3 个　　　D.4 个

三、垂径定理及其推论

垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧.

【推论 1】

（1）平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

（2）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

（3）平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

【推论 2】**圆的两条平行弦所夹的弧相等**.

【例 2】下列命题中，正确的是（　　）。

A.过弦的中点的直径平分弦所对的弧

B.过弦的中点的直线必过圆心

C.弦所对的两条弧的中点连线垂直平分弦且过圆心

D.弦的垂线平分弦所对的弧

四、圆的对称性

（1）圆的轴对称性

圆是轴对称图形，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴.

（2）圆的中心对称性

圆是以圆心为对称中心的中心对称图形.

五、弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

（1）圆心角：顶点在圆心的角叫做圆心角.

（2）弦心距：从圆心到弦的距离叫做弦心距.

（3）弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理：**在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等**.

推论：在同圆或等圆中，如果两个圆的圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

六、圆周角定理及其推论

（1）圆周角：顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做圆周角.

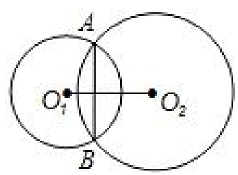
（2）圆周角定理：**一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.**

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等.

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.

推论 3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

【例 3】⊙O_1，⊙O_2 相交于 A、B 两点，两圆半径分别为 $6cm$ 和 $8cm$，两圆的连心线 O_1O_2 的长为 $10cm$，则弦 AB 的长为（　　）。



A.4.8cm　　B.9.6cm

C.5.6cm　　D.9.4cm

七、点和圆的位置关系

设⊙O 的半径是 r，点 P 到圆心 O 的距离为 d，则有：

①d<r⇔点P在⊙O内；　②d=r⇔点P在⊙O上；　③d>r⇔点P在⊙O外.

八、过三点的圆

（1）过三点的圆：**不在同一直线上的三个点确定一个圆**.

（2）三角形的外接圆：经过三角形的三个顶点的圆叫做三角形的外接圆.

（3）圆内接四边形性质（四点共圆的判定条件）：**圆内接四边形对角互补**.

九、弧长和扇形面积

（1）弧长公式

n°的圆心角所对的弧长l的计算公式为$l=\frac{n\pi R}{180}$

（2）扇形面积公式

$S_{扇}=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}lR$，其中n是扇形的圆心角度数，R是扇形半径，$l$是扇形的弧长.

（3）圆锥的侧面积

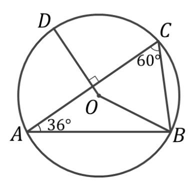
$S=\frac{1}{2}l\bullet 2\pi r=\pi rl$ 其中l是圆锥的母线长，r是圆锥底面圆的半径

【例4】一个形如圆锥冰淇淋纸筒，其底面直径为6cm，母线长为10cm，围成这样的冰淇淋纸筒所需纸的面积是（　）平方厘米。

A. 60π　　B.30π　　C. 28π　　D.15π

【随堂练习】

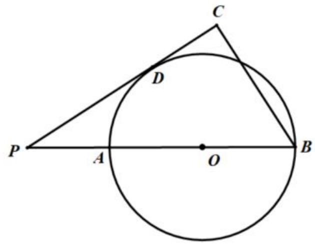
1.如右图，圆O为ΔABC的外接圆，其中D点在$\overset{\frown}{AC}$上，且$OD\perp AC$，已知$\angle A=36^0$，$\angle C=60^0$，则$\angle BOD$为（　）。



A.132°　　B.144°　　C.156°　　D.168°

2.如图，已知AB是圆O的直径，点P在BA的延长线上，PD切O于点D，过点B作PD的垂线交PD的延长线于点C，若圆O的半径为2，BC=3，则PA的长度为（　）。

A.1　　B.2　　C.$\sqrt{3}$　　D.3



3.已知圆 O 半径等于 5，点 P 在直线 L 上，且 OP=5，直线 L 与圆 O 的位置关系是（　　）。

A. 相切　　　B. 相交　　　C. 相离　　　D. 相切或相交

第 26 晚 直线与圆

一、直线方程

（一）倾斜角与斜率

1.倾斜角：直线的倾斜角为直线与水平轴的正方向所成的角。

2.斜率：$\tan\theta = k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$，这时是斜率存在的时候，当斜率不存在时，倾斜角是$90^\circ$，直线是$x = x_0$。

（二）直线方程的三种形式

名称	方程	常数的几何含义	适用范围
点斜式	$y - y_0 = k(x - x_0)$	(x_0, y_0)是直线上一定点，k为斜率	不能表示垂直于X轴的直线
斜截式	$y = kx + b$	k表示斜率，b表示在y轴的截距	不能表示垂直于X轴的直线
两点式	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$是直线上两定点	不能表示垂直于坐标轴的直线
截距式	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	a表示在x上的截距， b表示在y轴上的截距	不能表示垂直于坐标轴和经过原点的直线
一般式	$Ax + By + C = 0$	当$A \neq 0$且$B \neq 0$时， 斜率为$-\dfrac{A}{B}$； 在x轴上的截距为$-\dfrac{C}{B}$ 在y轴上的截距为$-\dfrac{C}{A}$	任意直线

（三）点到直线的距离

已知点(x_0, y_0)与直线$Ax + By + C = 0$，则点到直线的距离为$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$。

【例 1】在平面直角坐标中，点（2，2）到直线 x+2y-2=0 的距离为_______。

二、圆的方程

1.标准方程：$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$，$(a, b)$——圆心，$r$——半径。

2.一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，（$D^2+E^2-4F>0$）

$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$——圆心，$r=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$——半径。

【例2】方程$x^2+y^2-4x+6y+f=0$表示圆的充要条件是（　）。

A. $f>0$　　B. $f<52$　　C. $f<13$　　D. $f<5$

【例3】在平面直角坐标系中，经过三点（0，0）（2，2）$(3,\sqrt{3})$的圆的方程为______。

三、直线与圆位置关系

直线$Ax+By+C=0$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系有三种：

若$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，

$d>r\Leftrightarrow$相离$\Leftrightarrow\Delta<0$；

$d=r\Leftrightarrow$相切$\Leftrightarrow\Delta=0$；

$d<r\Leftrightarrow$相交$\Leftrightarrow\Delta>0$；

【例4】直线$ax-y+2a=0$与圆$x^2+y^2=9$的位置关系是（　）。

A.相离　　B.相交　　C.相切　　D.不确定

【例5】圆$x^2+y^2=1$上的点到直线$3x+4y-25=0$的距离的最小值是（　）。

A.6　　B.4　　C.5　　D.1

【随堂练习】

1.已知直线l过点（-2，0），当直线l与圆$x^2+y^2=2x$有两个交点时，其斜率k的取值范围是__________。

2.以点（2，-1）为圆心且与直线3x-4y+5=0相切的圆的方程为（　）。

$A.(x-2)^2+(y+1)^2=3$　　$B.(x+2)^2+(y-1)^2=3$

$C.(x-2)^2+(y+1)^2=9$　　$D.(x+2)^2+(y-1)^2=3$

第27晚 统计与概率

一、统计量

（一）平均数

1.平均数：一般地，如果有 n 个数 $x_1,x_2,\dots x_n$，那么，$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$ 叫做这 n 个数的平均数，$\overline{x}$ 读作“x 拔”。

2.加权平均数：如果 n 个数中，x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_k 出现 f_k 次（这里 $f_1+f_2+\dots+f_k=n$），那么，根据平均数的定义，这 n 个数的平均数可以表示为 $\overline{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\dots x_kf_k}{n}$，这样求得的平均数 $\overline{x}$ 叫做加权平均数，其中 $f_1,f_2,\dots f_k$ 叫做权。

当一组数据中有数据多次重复出现时，用加权平均数公式计算更加简便，其中相同数据 x_k 的个数即为权 f_k，这里“权”含有所占分量轻重的意思。

（二）众数

1.定义：一组数据中出现次数最多的数据叫做这组数据的众数。

2.特点：

①众数着眼于对各数据出现频数的考查，只与部分数据有关，代表数据的一般水平。

②众数不受极端数据的影响，但可靠性较差；

③众数可以不存在，也可以有多个；

④当一组数据中有较多的重复数据时，众数往往能较好的反映其集中趋势。

（三）中位数

1.定义：将一组数据按大小顺序依次排列，处在最中间位置的一个数据（或最中间两个数据的平均数）叫做这组数据的中位数。

2.中位数的算法：设样本有 n 个数据，按大小顺序依次排列后，

① n 为奇数，第 $\frac{n+1}{2}$ 个数据为中位数；

② n 为偶数，第 $\frac{n}{2}$ 与 $\frac{n}{2}+1$ 个数据的平均数为中位数。

【例1】“中国梦”文艺汇演中合唱队共有30名小演员，他们的身高情况如下表：

身高（cm)	146	147	150	151	153	155
人数	3	3	6	6	9	3

根据以上信息，回答下列问题：求合唱队小演员身高的众数，中位数，平均数。

【例 2】小强在八年级进行的六次数学测验成绩如下（单位：分）：82、91、85、76、84、85，则这六次数学测验成绩的众数和中位数分别为（　　）。

A.91、88　　B.85、88　　C.85、85　　D.85、84.5

【例 3】某小组 5 名同学在一周内参加家务劳动的时间如下表:

劳动时间（小时）	2	3	4	5
人数	1	1	2	1

那么关于“劳动时间”的这组数据，以下说法正确的是(　　)。

A.中位数是 2　　B.中位数是 3　　C.中位数是 4　　D.中位数是 5

二、随机事件

（一）确定事件和随机事件

1.确定事件

必然事件：在一定的条件下重复进行试验时，在每次试验中必然会发生的事件。

不可能事件：在一定的条件下一定不会发生的事件叫做不可能事件。

2.随机事件

在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件。

3.基本事件

试验中不能再分的最简单的“单位”随机事件，称为基本事件。试验前基本事件是确定的，但是试验的具体结果是随机的。试验中的任意随机事件都可以用基本事件或其和的形式来表示，同时任意两个基本事件是互斥的。

【例 4】下列事件：

①在足球赛中，弱队战胜强队.

②抛掷1枚硬币，硬币落地时正面朝上.

③任取两个正整数，其和大于1

④长为3cm，5cm，9cm的三条线段不能围成一个三角形.

其中确定事件有（　　）个。

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

（二）概率的定义与表示方法

1.频率

在相同的条件S下重复n次试验，观察某一事件A是否出现，称n次试验中事件A出现的次数n_A为事件A出现的频数，称事件A出现的比例$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$为事件A出现的频率。

2.概率

对于给定的随机事件A，如果随着试验次数的增加，事件A发生的频率$f_n(A)$稳定在某个常数上，把这个常数记作$P(A)$，称为事件A的概率，简称为A的概率，所有事件发生的概率之和为1。

【例5】不透明袋子中有2个红球，3个蓝球和5个黄球。这些球除颜色以外没有任何区别，从中随机取出1个球，则该球是红球的概率为（　　）。

A.$\frac{1}{10}$　　B.$\frac{1}{5}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{4}{5}$

【随堂练习】

1.小明和小英玩“石头、剪子、布”的游戏。若随机出手一次，则小明获胜的概率是____________。

2.四张扑克牌的点数分别是2、3、4、6，将它们洗匀后背面朝上放在桌面上，从中随机抽取一张牌，这张牌是偶数的概率是_______。

3.一个盒子里装有大小形状都相同的6个球，其中1个红色，2个绿色，3个白色，小明摸到白球的概率是_______。

第 28 晚 极限

一、求极限（收敛）

（一）数列极限

设数列 x_n 与常数 a 有如下关系：对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$ 成立，则称数列 x_n 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

描述语言：当 n 充分大时，数列一般项 x_n 无限趋于（无限接近，充分接近）某个确定的常数 a，则称 a 就是数列 $\left\{x_n\right\}$ 的极限.

（二）函数极限

设数列 x_n 与常数 a 有如下关系：对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$ 成立，则称数列 x_n 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

描述语言：当 n 充分大时，数列一般项 x_n 无限趋于（无限接近，充分接近）某个确定的常数 a，则称 a 就是数列 $\{x_n\}$ 的极限.

“ε-N”语言：$\forall\varepsilon>0,\exists N$, ε>0，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 对任意给定的正数ε，总存在正数δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 f(x)当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

描述语言：当 $x\to x_0$ 时，f(X)无限趋近（接近）于某个常数 A.

“$\varepsilon-N$”语言：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对任意的 $x\in\mathring{U}(x_0)$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

（三）左极限（右极限）

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$ （$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$）

描述语言：当 x 从 x_0 左（右）侧趋于 x_0 时，f(x)无限趋近于某个常数 A.

“$\varepsilon-N$”语言：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对任意的 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 或 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，有

$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

二、求极限的方法

1.代入法

极限的运算法则：若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$; $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$

【例 1】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^5+3x^3+2}{4x^5-x^2-1}$等于（　）。

A.$\dfrac{5}{4}$　B.$\dfrac{3}{4}$　C.2　D.5

2.约公因子法

当分式的分子、分母部分有可约公因式时，可以先约去该项公因式。

【例 2】$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=$________。

【例 3】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=$________。

3.最高次幂法

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\text{时}\\ 0, & m<n\text{时}\\ \infty, & m>n\text{时}\end{cases}$$

【例 4】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}$等于（　）。

A.1　B.$\dfrac{4}{3}$　C.2　D.$\dfrac{2}{3}$

4.两个重要极限公式

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

【例5】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin wx}{x}=$______。

【例6】$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$______。

【例7】$\lim\limits_{x\to 0^{-}}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=$______。

5.等价无穷小替换

（1）无穷小与无穷大的概念

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称在 $x\to x_0$ 过程中，$f(x)$ 是无穷小量；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$，则称在 $x\to x_0$ 过程中，$f(x)$ 是无穷大量；

结论：有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

【例8】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=$______。

【例9】$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=$______。

（2）常用等价无穷小

当 $x\to 0$ 时的等价无穷小量

$\boldsymbol{\sin x \sim x}$； $\boldsymbol{\tan x\sim x}$；

$\arcsin x\sim x$； $\arctan x\sim x$； $1-\boldsymbol{\cos x\sim \frac{1}{2}x^2}$； $\boldsymbol{e^x-1\sim x}$； $\boldsymbol{\ln(1+x)\sim x}$；

$(1+x)^2-1\sim 2x$； $a^x-1\sim x\ln a(x\to 0)$.

6.洛必达法则

$\dfrac{0}{0}$型、$\dfrac{\infty}{\infty}$型：上下同时求导

【例10】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^2-1}=$______。

【例11】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x}=$______。

【随堂练习】

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n(2n+1)}=$________。

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=$________。

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=$________。

第29晚 义务教育课程标准

前言

数学是研究**数量关系**和**空间形式**的科学。数学与人类发展和社会进步息息相关，随着现代信息技术的飞速发展，数学更加广泛应用于社会生产和日常生活的各个方面。数学作为对于客观现象抽象概括而逐渐形成的科学语言与工具，不仅是自然科学和技术科学的基础，而且在人文科学与社会科学中发挥着越来越大的作用。特别是20世纪中叶以来，数学与计算机技术的结合在许多方面直接为社会创造价值，推动着社会生产力的发展。

数学是人类文化的重要组成部分，数学素养是现代社会每一个公民应该具备的基本素养。作为促进学生全面发展教育的重要组成部分，数学教育既要使学生掌握现代生活和学习中所需要的数学知识与技能，更要发挥数学在培养人的**思维能力**和**创新能力**方面的不可替代的作用。

【例1】《义务教育数学课程标准（2011年版）》中提出，数学是研究_____________的科学。

一、课程性质

义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程，具有**基础性**、**普及性**和**发展性**。数学课程能使学生掌握必备的**基础知识**和**基本技能**，培养学生的**抽象思维**和**推理能力**，培养学生的**创新意识**和**实践能力**，促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展。义务教育的数学课程能为学生未来生活、工作和学习奠定重要的基础。

二、课程基本理念

1、数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：**人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展**。

2、课程内容要反映社会的需要、数学的特点，要符合学生的认知规律。它**不仅包括数学的结果，也包括数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法**。课程内容的选择要贴近学生的实际，有利于学生体验与理解、思考与探索。课程内容的组织要重视过程，**处理好过程与结果的关系**；要重视直观，**处理好直观与抽象的关系**；要重视直接经验，**处理好直接**

经验与间接经验的关系。课程内容的呈现应注意**层次性**和**多样性**。

3、教学活动是师生**积极参与、交往互动、共同发展**的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的**组织者、引导者与合作者**。

数学教学活动，特别是课堂教学应激发学生兴趣，调动学生积极性，引发学生的数学思考，鼓励学生的创造性思维；要注重培养学生良好的数学学习习惯，使学生掌握恰当的数学学习方法。

学生学习应当是一个**生动活泼**的、**主动**的和**富有个性**的过程。**认真听讲、积极思考、动手实践、自主探索与合作交流**等，都是**学习数学的重要方式**。学生应当有足够的时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程。

教师教学应该以学生的**认知发展水平**和**已有的经验**为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。教师要发挥主导作用，处理好讲授与学生自主学习的关系，引导学生独立思考、主动探索、合作交流，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能，体会和运用数学思想和方法，获得基本的数学活动经验。

4、**学习评价的主要目的**是为了**全面了解学生数学学习的过程和结果，激励学生学习和改进教师教学**。应建立目标多元、方法多样的评价体系。评价既要关注学生学习的结果，也要重视学习的过程；既要关注学生数学学习的水平，也要重视学生在数学活动中所表现出来的情感与态度，帮助学生认识自我、建立信心。

5、信息技术的发展对数学教育的价值、目标、内容以及教学方式产生了很大的影响。数学课程的设计与实施应根据实际情况合理地运用现代信息技术，要注意信息技术与课程内容的整合，注重实效。要充分考虑信息技术对数学学习内容和方式的影响，开发并向学生提供丰富的学习资源，把现代信息技术作为学生学习数学和解决问题的有力工具，有效地改进教与学的方式，使学生乐意并有可能投入到现实的、探索性的数学活动中去。

三、课程设计思路

义务教育阶段数学课程的设计，充分考虑本阶段学生数学学习的特点，符合学生的认知规律和心理特征，有利于激发学生的学习兴趣，引发学生的数学思考；充分考虑数学本身的特点，体现数学的实质；在呈现作为知识与技能的数学结果的同时，重视学生已有的经验，使学生体验从实际背景中**抽象出数学问题、构建数学模型、寻求结果、解决问题**的过程。

按以上思路具体设计如下。

（一）学段划分

为了体现义务教育数学课程的整体性，本标准统筹考虑九年的课程内容。同时，根据学生发展的生理和心理特征，将九年的学习时间划分为三个学段：第一学段（1~3 年级）、第二学段（4~6 年级）、第三学段（7~9 年级）。

（二）课程目标

义务教育阶段数学课程目标分为总目标和学段目标，从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度等四个方面加以阐述。

数学课程目标包括结果目标和过程目标。结果目标使用“了解、理解、掌握、运用”等行为动词表述，过程目标使用“经历、体验、探索”等行为动词表述（行为动词解释见附录 1）。

（三）课程内容

在各学段中，安排了四个部分的课程内容：**“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”**。其中，**“综合与实践”内容设置的目的在于培养学生综合运用有关的知识与方法解决实际问题，培养学生的问题意识、应用意识和创新意识，积累学生的活动经验，提高学生解决现实问题的能力**。（简答）

“数与代数”的主要内容有：数的认识，数的表示，数的大小，数的运算，数量的估计；字母表示数，代数式及其运算；方程、方程组、不等式、函数等。

“图形与几何”的主要内容有：空间和平面基本图形的认识，图形的性质、分类和度量；图形的平移、旋转、轴对称、相似和投影；平面图形基本性质的证明；运用坐标描述图形的位置和运动。

“统计与概率”的主要内容有：收集、整理和描述数据，包括简单抽样、整理调查数据、绘制统计图表等；处理数据，包括计算平均数、中位数、众数、方差等；从数据中提取信息并进行简单的推断；简单随机事件及其发生的概率。

“综合与实践”是一类以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动。在学习活动中，学生将综合运用“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”等知识和方法解决问题。“综合与实践”的教学活动应当保证**每学期至少一次**，可以在课堂上完成，也可以课内外相结合。提倡把这种教学形式体现在日常教学活动中。

【例2】“综合与实践”的教学活动应当保证至少（　　）一次，可以在课堂上完成，也可以课内外相结合。

A.每周　　B.每月

C.每学期　　D.每年

在数学课程中，应当注重发展学生的**数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想**。为了适应时代发展对人才培养的需要，数学课程还要特别注重发展学生的**应用意识**和**创新意识**。

数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系。

符号意识主要是指能够理解并且运用符号表示数、数量关系和变化规律；知道使用符号可以进行运算和推理，得到的结论具有一般性。建立符号意识有助于学生理解符号的使用是数学表达和进行数学思考的重要形式。

空间观念主要是指根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；想象出物体的方位和相互之间的位置关系；描述图形的运动和变化；依据语言的描述画出图形等。

几何直观主要是指利用图形描述和分析问题。借助几何直观可以把复杂的数学问题变得简明、形象，有助于探索解决问题的思路，预测结果。几何直观可以帮助学生直观地理解数学，在整个数学学习过程中都发挥着重要作用。

数据分析观念包括：了解在现实生活中有许多问题应当先做调查研究，收集数据，通过分析作出判断，体会数据中蕴涵着信息；了解对于同样的数据可以有多种分析的方法，需要根据问题的背景选择合适的方法；通过数据分析体验随机性，一方面对于同样的事情每次收集到的数据可能不同，另一方面只要有足够的数据就可能从中发现规律。数据分析是统计的核心。

运算能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力。培养运算能力有助于学生理解运算的算理，寻求合理简洁的运算途径解决问题。

推理能力的发展应贯穿于整个数学学习过程中。推理是数学的基本思维方式，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式。推理一般包括合情推理和演绎推理，合情推理是从已有的事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳和类比等推断某些结果；演绎推理是从已有

的事实（包括定义、公理、定理等）和确定的规则（包括运算的定义、法则、顺序等）出发，按照逻辑推理的法则证明和计算。在解决问题的过程中，两种推理功能不同，相辅相成：合情推理用于探索思路，发现结论；演绎推理用于证明结论。

模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径。建立和求解模型的过程包括：从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果讨论结果的意义。这些内容的学习有助于学生初步形成模型思想，提高学习数学的兴趣和应用意识。

应用意识有两个方面的含义：一方面，有意识利用数学的概念、原理和方法解释现实世界中的现象，解决现实世界中的问题；另一方面，认识到现实生活中蕴涵着大量与数量和图形有关的问题，这些问题可以抽象成数学问题，用数学的方法予以解决。在整个数学教育的过程中都应该培养学生的应用意识，综合实践活动是培养应用意识很好的载体。

创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。学生自己发现和提出问题是创新的基础；独立思考、学会思考是创新的核心；归纳概括得到猜想和规律，并加以验证，是创新的重要方法。创新意识的培养应该从义务教育阶段做起，贯穿数学教育的始终。

【例3】《义务教育数学课程标准（2011年版）》提出了数感、符号意识、空间意识等10个核心概念，以下不属于这10个核心概念的是（　　）。

A.几何直观　　　　B.推理能力

C.函数思想　　　　D.应用意识

课程目标

一、总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生能：

1、获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。

2、体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思

维方式进行思考，增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。

3、了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和科学态度。

总目标从以下四个方面具体阐述：

知识技能	●经历数与代数的抽象、运算与建模等过程，掌握数与代数的基础知识和基本技能。 ●经历图形的抽象、分类、性质探讨、运动、位置确定等过程，掌握图形与几何的基础知识和基本技能。 ●经历在实际问题中收集和处理数据、利用数据分析问题、获取信息的过程，掌握统计与概率的基础知识和基本技能。 ●参与综合实践活动，积累综合运用数学知识、技能和方法等解决简单问题的数学活动经验。
数学思考	●建立数感、符号意识和空间观念，初步形成几何直观和运算能力，发展形象思维与抽象思维。 ●体会统计方法的意义，发展数据分析观念，感受随机现象。 ●在参与观察、实验、猜想、证明、综合实践等数学活动中，发展合情推理和演绎推理能力，清晰地表达自己的想法。 ●学会独立思考，体会数学的基本思想和思维方式。
问题解决	●初步学会从数学的角度发现问题和提出问题，综合运用数学知识解决简单的实际问题，增强应用意识，提高实践能力。 ●获得分析问题和解决问题的一些基本方法，体验解决问题方法的多样性，发展创新意识。 ●学会与他人合作交流。 ●初步形成评价与反思的意识。
情感态度	●积极参与数学活动，对数学有好奇心和求知欲。 ●在数学学习过程中，体验获得成功的乐趣，锻炼克服困难的意志，建立自信心。 ●体会数学的特点，了解数学的价值。 ●养成认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑等学习习惯。 ●形成坚持真理、修正错误、严谨求实的科学态度。

总目标的这四个方面，不是相互独立和割裂的，而是一个密切联系、相互交融的有机整体。在课程设计和教学活动组织中，应同时兼顾这四个方面的目标。这些目标的整体实现，是学生受到良好数学教育的标志，它对学生的全面、持续、和谐发展有着重要的意义。数学思考、问题解决、情感态度的发展离不开知识技能的学习，知识技能的学习必须有利于其他三个目标的实现。（总目标四个方面的联系）

【例 4 2020 初中】在某教师设计“不等式的基本性质”的教学目标中，“通过探索不等式的基本性质，分析比较不等式与等式的异同，体会类比的思想方法。”属于下列内容中的（　　）。

A.知识技能　　　　B.数学思考

C.问题解决　　　　D.情感态度

【随堂练习】

1.教学活动是师生积极参与、___________、共同发展的过程。

2.义务教育阶段数学课程是培养公民素质的基础课程,具有基础性、普及性和_________。

3.学生是数学学习的主人，教师是数学学习的__________、引导者和合作者。

4.在义务教育的各学段，安排了四个部分的课程内容：__________、__________、____________、____________。

5.数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要__________，适应学生个性发展的需要。

6.通过义务教育阶段的数学学习，学生能获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、___________、基本思想、___________。

7.义务教育《数学课程标准》（2011 年版）指出：数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：人人都能_____________，不同的人___________________。

8.义务教育阶段数学课程目标分为总目标和学段目标，从知识技能、__________________、_________________、_______________四个方面加以阐述。

9.课程内容的组织要重视过程，处理好过程与结果的关系；要重视直观，处理好直观与抽象的关系；要重视直接经验，处理好_________的关系。

10.课程内容要反映社会的需要、数学的特点，要符合学生的认知规律。它不仅包括数学的结果，也包括________。

11.学生学习应当是一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。《义务教育数学课程标（2011 年版）》指出学习数学的重要方式有_________、_________、_________、与________。

12.“综合与实践”是一类以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动。在学习活动中，学生将综合运用______、______、______等知识和方法解决问题。

13.现代社会每一个公民应该具备的基本素养是__________。

14.课程内容的选择要________，有利于学生体验与理解、思考与探索。

15.课程内容的呈现应注意__________和__________。

16.学生应当有足够的时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、________、_______等活动过程。

17.教师的教学活动应该以学生的___________和___________为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。

18.教师要发挥主导作用，处理好讲授与学生自主学习的关系，引导学生独立思考、主动探索、合作交流，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法，获得_______。

19.学习评价的主要目的是为了全面了解学生数学学习的过程和结果，和_________。

20.教学活动中评价要注意主体目标的_________、方法的_________。

21.义务教育阶段数学课程的设计，充分考虑本阶段学生数学学习的特点，符合学生的认知规律和心理特征，有利于激发学生的学习兴趣，引发数学思考；充分考虑数学本身的特点，体现数学的实质；在呈现作为知识与技能的数学结果的同时，重视学生已有的经验，使学生体验从实际背景中________、________、________、________的过程。

22.推理一般包括合情推理和演绎推理，在解决问题的过程中，_________用于探索思路，发现结论；__________用于证明结论。

23.建立学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径是________。

24.__________的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。

25.创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。学生自己__________是创新的基础；_________是创新的核心；归纳概括得到猜想和规律，并加以验证，是创新的重要方法。

26.通过义务教育阶段的数学学习，学生能体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，增强____________的能力、的能力。

27.重视学生在学习活动中的主体地位,有效的数学教学活动是教师教与学生学的统一，应体现________的理念，促进学生的全面发展。

28.学生是数学学习的主体，在积极参与学习活动的过程中不断得到发展。学生获得知识，必须建立在自己思考的基础上，可以通过______的方式，也可以通过_______等方式。

29.学生在获得知识技能的过程中，只有亲身参与教师精心设计的教学，才能在______、_______和情感态度方面得到发展。

30.教师的“引导”作用要能关注________，用不同层次的问题或教学手段，引导每一个学生都能积极参与学习活动，提高教学活动的针对性和有效性。

31.简答题：创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，请简述如何有效地培养学生的创新意识。

第 30 晚 数学教学论

数学概念

数学概念是其所反映的事物在现实世界中的空间形式和数量关系及其本质属性在思维中的反映。数学概念的词语表达的一般形式是“（概念的本质属性）”……叫做……“(概念的名字)”。

1、数学概念的内涵和外延

概念反映的所有对象的共同本质属性的总和，叫做这个概念的内涵，又称涵义。适合于概念所指的对象的全体，叫做这个概念的外延，又称范围。如平行四边形的内涵就是平行四边形所代表的所有对象的本质属性：有四条边，两组对边分别平行，对角线互相平分等；平行四边形的外延包括了一般的平行四边形、长方形、菱形和正方形。

概念的内涵和外延是相互依存、相互制约的，概念的内涵越大，外延越小；概念的内涵越小，外延越大，呈反比关系。例如：在“长方形”概念的内涵中增加“一组邻边相等”的属性时，就得到外延缩小了的“正方形”的概念；在“长方形”概念的内涵中去掉“有一个角是直角”的属性，就得到外延扩大了的“平行四边形”的概念。

2、数学概念教学的意义

首先，数学概念是数学基础知识的重要组成部分。学生掌握基础知识的过程，实际上就是掌握概念并运用概念进行判断、推理的过程。数学中的法则都是建立在一系列概念的基础上的。事实证明，如果学生有了正确、清晰、完整的数学概念，就有助于掌握基础知识，提高运算和解题技能。相反，如果一个学生概念不清，就无法掌握定律、法则和公式。

其次，数学概念是发展思维、培养数学能力的基础。概念是思维形式之一，也是判断和推理的起点，所以概念教学对培养学生的思维能力能起重要作用。没有正确的概念，就不可能有正确的判断和推理，更谈不上逻辑思维能力的培养。

在概念教学过程中，为了使学生顺利地获取有关概念，常常要提供丰富的感性材料让学生观察，在观察的基础上通过教师的启发引导，对感性材料进行比较、分析、综合，最后再抽象概括出概念的本质属性。通过一系列的判断、推理使概念得到巩固和运用。从而

使学生的初步逻辑思维能力逐步得到提高。

3、学习概念的两种基本形式

概念学习实质上就是对一类对象关于数量关系与空间形式的本质属性进行抽象概括的过程，也是舍弃事物非本质属性的过程。表现为对同类对象的本质属性与非本质属性的区分，对概念的肯定例证与否定例证的判别。学习概念主要有概念形成与概念同化两种基本形式。

（1）概念形成

就人类认识来说，概念形成是一种发展过程，也就是在对事物感知和分析、比较、抽象的基础上，概括一类事物的本质属性，不断提出假设，验证假设的过程。在教学条件下，是指从大量的具体例子出发，以学生的感性经验为基础，形成表象，进而以归纳方式抽象出事物的本质属性，提出各种假设加以验证，从而获得初级概念，再把这一概念的本质属性推广到同一类事物之中，并用符号表示。

如自然数的认识过程，基本上是重复人类数的形成的历史。以 4 的认识为例，先是认识 4 辆拖拉机、4 根小棒、4 颗珠子、4 个小木块、4 朵红花……这时的数和物之间呈现出一一对应关系，然后排除形状、颜色、大小等非本质属性，仅仅从数量关系的角度，把数“4”从这些具体的实物中抽象出来，还能自己举例说出许多其他用“4”表示的实物，并能用符号“4”表示。

概念形成需要内部与外部两方面的条件，其内部条件是学生积极地对概念的正反例证进行辨别，其外部条件是教师必须对学生提出的概念的本质属性的假设作出肯定或否定的反应。学生就是通过对外界的肯定或否定反应所获得的反馈信息进行不断地选择，从而概括出概念的本质属性的。

（2）概念同化

所谓概念同化，就是利用学习者认知结构中原有的概念，以定义或描述的方式直接向学习者揭示新概念的本质属性，进而使学习者获得概念的过程。也就是以间接经验为基础，利用已掌握的概念去学习新概念的过程。

如“等腰三角形”是学习三角形之后学习的，是一个发展性概念。教学时可以只给一些三角形模片或图形，让大家先量一量各边的长，然后把有“两条边相等”的三角形放在一起，于是引进“等腰三角形”的定义。

概念的同化也需要外部和内部两方面的条件。外部条件是新学习的概念必须与学生原有认知结构中的某些概念或表象有密切的联系，内部条件是学生有着有意义学习的意向。

如，学习公约数、最大公约数，学生必须主动将它们与自己认知结构中已有的约数概念及有关知识联系起来思考，认识到约数是对一个数来说的，公约数是对两个或更多个数来说，指的是它们都有的约数；由于一个数的约数个数是有限的，其中必有一个最大的约数，所以几个数的公约数中，也必有一个最大的公约数。这样使约数—公约数—最大公约数三个概念精确分化，前后贯通，纳人到原有的整除概念系统中。沟通新概念与原认知结构中有关概念的联系，明确它们的区别，使新概念与原概念得到精确分化和融会贯通。这样，新概念被纳入原认知结构，形成了内容更为丰富也更为完善的新认知结构。

3、概念形成与概念同化的比较

首先从学习过程来看。概念形成主要依靠对具体事物的抽象，通过对正反例证的不断辨析，提出假设，并进行检验，最后发现概念的本质属性；而概念同化主要依靠新旧知识的联系，判别学习的概念与原有认知结构中有关概念的异同，并组成概念的网络系统。它们所需的条件也不相同，概念形成的学习条件是学生必须辨别正反例证，同时外界要有反馈信息，而概念同化的学习条件是学生认知结构中必须有同化新概念的有关概念，外界要有新概念的定义或对概念特征的描述。相同的是这两种不同形式的概念学习都需要学生进行积极的有意义的学习活动。

其次从适用情况来看，概念的形成往往与人类自发形成的概念相近，它适用于低年级；就学习内容而言，尤其适用于几何知识的学习。原始概念和一些层次较低的概念，一般采用概念形成的方式，就是凭借事物的具体形象和表象进行抽象。概念的同化则是具有一定心理水平的学生学习概念的方式，比较适合中高年级。对于发展性概念，一般采用同化的形式，因为随着学生年龄的增长，认知结构中的知识不断积累，智力不断发展，就应借助学生已有的概念去认识新的概念。在课堂教学条件下，概念同化就逐渐成为他们获得新概念的主要方式。在引入概念时，要充分复习学生的已有知识，使新概念在已有的概念中精确深化，产生新的认识，即在旧概念的基础上引入新概念。值得注意的是：在实际教学过程中，由于小学生的逻辑思维在很大程度上需要具体形象的支持，在以概念同化为主的学习中，往往也结合着概念形成的过程。特别是在引入新概念时，除了复习有关的已有概念，以促进概念同化外，还常常提供一些典型的例子，由具体到抽象地引人新概念。如小学生

“倍”的概念的建立便是如此。教师一方面利用直观手段，让学生去摆小棒、小圆片等，另一方面又复习有关“一个数里面有几个几”的知识。这样既符合学生由具体到抽象的认识规律，又可以利用原有的概念进行迁移，在较短的时间内揭示本质属性。

4、概念间的关系

概念间的关系，指的是外延间的关系。根据概念有无重合之处，概念之间的关系分为：相容关系和不相容关系。

1.相容关系

如果两个概念 A 和 B 的外延集合的交集非空，就称这两个概念的关系为相容关系。相容关系又可分为下面三种情形：

(1)同一关系。如果两个概念 A 和 B 的外延相等，那么称这两个概念之间的关系是同一关系。例如，无理数与无限不循环小数、正三角形和等边三角形两组概念中概念间的关系是同一关系。

(2)交叉关系。如果概念 A 和概念 B 的外延仅有一部分互相重合，那么这两个概念的关系叫做交叉关系，这两个概念叫做交叉概念。例如，“等腰三角形”和“锐角三角形”就是具有交叉关系的概念。

(3)从属关系（种属关系）。如果概念 A 的外延集合是概念 B 的外延集合的真子集，那么这两个概念的关系是从属关系。外延较大的叫从属概念，或者上位概念；外延较小的叫做种属概念，或下位概念。即外延较大的概念 B 叫做概念 A 的从属概念；概念 A 叫做概念 B 的种属概念。例如，有理数概念是实数概念的种属概念。而实数概念是有理数概念的从属概念。需要注意的是，从属概念和种属概念是相对的，例如，“矩形”相对于“平行四边形”来说是种属概念，而“矩形”相对于“正方形”来说是从属概念。同时还要注意一个概念的从属概念是不唯一的，例如，“矩形”这个概念的从属概念有平行四边形、四边形。我们把一个概念的从属概念中，内涵最多的概念称为这个概念的邻近的从属，给概念下定义时常要找出其邻近的从属。上述平行四边形的概念就是概念“矩形”邻近的从属。

2．不相容关系

如果两个概念 A 和 B 是属于同一从属概念下的种属概念，并且它们的外延集合的交集为空集，那么称这两个概念间的关系是不相容关系或全异关系。不相容关系又分成下面两种：

(1)反对关系。如果两个概念 A 和 B 的外延集合的交集是空集，它们的外延的并集是其从属概念的外延的真子集，那么称这两个概念间的关系是反对关系(对立关系)。例如，“等腰梯形”和“直角梯形”相对于它们的从属概念“梯形”而言是反对关系。

(2)矛盾关系。如果两个种概念 A 和 B 的外延集合的交集是空集，而它们外延集合的并集与它们的种属概念的外延集合相等，那么这两个概念间的关系是矛盾关系。例如，实数和虚数相对于复数而言是矛盾关系。

5、概念间的定义

概念是反映客观事物思想，是客观事物在人的头脑中的抽象概括，是看不见摸不着的，要用词语表达出来，这就是给概念下定义。概念定义就是揭示概念的内涵或外延的逻辑方法。揭示概念内涵的定义叫内涵定义，揭示概念外延的定义叫做外延定义。在中学里，大多数概念的定义是内涵定义。

任何定义都由被定义项、定义项和定义联项三部分组成。被定义项是需要明确的概念，定义项是用来明确被定义项的概念，定义联项则是用来联接被定义项和定义项的。例如，在定义“三边相等的三角形叫做等边三角形”中，“等边三角形”是被定义项，“三边相等的三角形”是定义项，“叫做”是定义联项。

常见定义方法

1、原始概念在数学中总是力求对数学概念下定义，就是说用一些已知的概念来定义新的概念，这样就构成了一个概念体系，但是数学概念的个数是有限的，所以在在数学概念体系中总有一些概念是不能引用其他概念来定义的，这就是不定义的原始概念。比如：代数中的集合、元素、对应等，几何中的点、线、面等。

2、属加种差定义法。这种定义法是中学数学中最常用的定义方法，该法即按公式：“邻近的属+种差=被定义概念”下定义，其中，种差是指被定义概念与同一属概念之下其他种概念之间的差别，即被定义概念具有而它的属概念的其他种概念不具有的属性。例如，平行四边形给出如下的定义方式：“一组对边平行并且相等的四边形叫做平行四边形”。其中，平行四边形的概念邻近的属是四边形，平行四边形区别于四边形的其他种概念的属性即种差是“一组对边平行并且相等”。

属加种差的定义方法有两种特殊形式：（1）发生式定义方法。它是以被定义概念所反映的对象产生或形成的过程作为种差来下定义的。例如，“在平面内，一个动点与一个定

点等距离运动所成的轨迹叫做圆”即是发生式定义。在其中，种差是描述圆的发生过程。

（2）关系定义法。它是以被定义概念所反映的对象与另一对象之间关系或它与另一对象对第三者的关系作为种差的一种定义方式。例如，大于直角而小于平角的叫做钝角。

3、外延定义法。数学中有些概念，不易揭示其内涵，可直接指出概念的外延作为它的概念的定义。通常就是通过列举“被定义概念所有互不相容的种概念”的方式下定义。例如，整数和分数统称为有理数；正弦、余弦、正切和余切函数叫做三角函数；椭圆、双曲线和抛物线叫做圆锥曲线；逻辑的和、非、积运算叫做逻辑运算等等，都是这种定义法。

外延定义有一种特殊的形式，即采用约定的方法来揭示外延，这种外延定义也称为约定式定义法。例如，$a^0=1(a\neq 0)$，就是用约定式方法定义的概念。

4.词语定义法。用词语说明被定义项的含义的方式。例如：“∈”表示属于。

5.递归定义法。一般适用于自然数的性质有直接关系的对象。例如：用递推公式 $a_n=a_{n-1}+d$ 定义等差数列。

【例 1】“无理数与“无限不循环小数”这两个概念的关系是（　　）。

A.同一关系　　B.从属关系　　C.交叉关系　　D.全异关系

【例 2】“负数”和“整数”这两个概念的关系是（　　）。

A.同一关系　　B.交叉关系　　C.属种关系　　D.对立关系

数学教学方法

1．数学教学中的常用教学方法

教学方法不同于教学工具或手段，它是教法与学法的相互联系与作用，体现了教学活动的双边性。

讲授法

课堂上教师的主要活动是口头讲解、扼要板书，学生的主要活动是听讲、思考、重点记录、做练习，这种教学方法叫讲解法。讲解法主要用于新单元的开始、新概念的引入、新命题的得出、新知识的归纳总结以及学生提问的几种答疑。

讲授法的基本要求：科学性、系统性、启发性、针对性、深刻性、语言要生动。

（1）优点：能保证教师传授知识的系统性、主动性与连贯性，易于控制课堂教学，充分利用时间。

（2）缺点：学生处于被动状态，不利于培养学生自学习惯和独立思考能力，容易变成注入式、满堂灌。

谈话法

谈话法是使用谈话、回答的方式，由教师提出问题，启发学生认真思考的基础上给出回答，从而使学生获得知识的一种教学方法。

（1）优点：它在设计中就把师生的双边活动固定化了。

（2）缺点：由于学生对问题的提出是即席回答，缺少思想准备和一定的组织准备，会耽误一定的时间。

讲练结合法

这是一种通过教师的讲、学生的练、讲讲练练、边讲边练、讲练结合的教学方法。

（1）优点：能够把教师的教与学生的学紧密地联结起来，较好地发挥教师的主导作用和学生的主体作用。

（2）缺点：讲与练的衔接不易控制，教师难以预料练习中可能出现的各种情况。

自学辅导法

（1）优点：能够培养学生的研究能力和养成认真钻研课本的好习惯。教材既是教师教的蓝本，也是学生学习的范本，任何轻视教材的行为都是不可行的。

（2）缺点：时间不易掌握，运用不好会影响教学质量。

发现法

（1）优点：

学生的学习主动性、积极性可得到发挥，常处于主动进取的学习状态之中。

在学习过程中，学生具有较高级的心理活动。有利于培养学生发现和探究问题的习惯，激发学习数学的兴趣，增强自信心，使学生理解知识深刻而牢固。

有利于培养学生掌握探索问题的方法与研究问题的能力，特别是自学能力。

（2）缺点：

花费时间较多，不利于学生掌握系统知识，影响数学理论体系建立。

易减少教学中数学知识容量，程度较差的学生可能较难适应。

小组教学法

小组教学法是指这样一种教学方法，学生通常被分成4~6人一组，独立思考和合作交流的方式展开学习活动，每名学生既作为认知个体，也作为社会个体加入学习活动。

探究性数学教学

由于在教学中提倡“创新意识的培养”，数学教学开始注重“探究性数学课题”的模式。数学探究问题的涉及范围比较广，有时类似数学作文，学生有充分的自由思考余地。探究性数学课题可以联系一些重要的数学概念和数学分支，对培养学生创新意识有较大的其他作用。这种探究性的课题，不是要学生凭空去做，而是由教师启发，追寻数学家创造性数学活动的思想轨迹，体验数学家发现数学的历程。

情境教学法

教师为激发学生思考的积极性，创设特定的问题情境，以培养他们独立探求问题本领的教学方法。一个生动的情境设置，可以引起学生的亲切感和新鲜感，从而调动大脑皮层中的兴奋中心，提供想象和思维的前提，其后教师便利用学生感受后的兴奋状态，引导学生对问题做层层深入的思考，挖掘学生大脑潜在的能力，使学生能在一种轻松愉快的情境中学习。

2.教学方法的选择

(1)教学方法的选择要考虑教学目标

根据教学目标来选择方法要考虑以下几个方面：

①特定的目标往往要求特定的方法去实现。

②各种教学方法有机结合发挥最佳功效。

③扬长避短地选用各种方法。

（2）教学方法的选择要考虑教学内容特点

每节课的教学内容必定都有重点部分、难点部分和关键所在，教学方法的选择就要考虑怎样选择适合突出重点，突破难点，抓住关键的方法。

（3）教学方法的选择需要考虑教师自身特点

任何一种教学方法，只有适应教师自身的条件。能为教师理解和驾驭，才能更好地发挥作用，取得好的教学效果，反之则不然。

（4）教学方法的选择需要考虑学生的实际情况

教学活动的效果最终在学生身上得到体现，因此，在选择教学方法时，教师必须考虑学生的自身情况，只有符合学生的年龄特征、兴趣、需要和学习基础的教学方法才能真正达到教学的高效率。

（5）教学方法的选择要考虑教学条件

我们国家教育发展极不均衡，发达城市教学资源丰富，欠发达山区教学条件落后。教学条件对教学方法功能的全面发挥也有着一定的制约作用，特别是现代化教学手段的充分运用。

【例 3】下列描述的四种教学场景中，采用的教学方法为演示法的是（　　）。

A.课堂上老师运用实物、直观教具将教学内容生动形象地展示给学生

B.课堂上老师运用口头语音，辅以表情姿态，向学生传授知识

C.课堂上在老师指导下，学生运用所学知识完成随堂练习题

D.课堂上老师向学生提出问题，并要求学生回答，以对话方式探讨新知识