华图教师
HTEACHER.NET

教师招聘笔试考试

数学

高频考点 300

华图教育

目　录

第一模块　数与代数

第一章 数

【考点 1】实数的分类

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数}（0,1,2,3,\cdots）\\ \text{负整数}（-1,-2,-3,\cdots）\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}（\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots）\\ \text{负分数}（-\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\cdots）\end{cases}\end{cases} & \text{（有限小数，无限循环小数）}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases} & \text{（无限不循环小数）}\end{cases}
$$

【考点 2】奇数和偶数

1.奇数和偶数：整数按是否是 2 的倍数可分为奇数和偶数，整数中是 2 的倍数的数叫做偶数（0 也是偶数），不是 2 的倍数的数叫做奇数。

2.奇数与偶数的运算性质：

①奇数 ± 奇数 = 偶数；偶数 ± 偶数 = 偶数；奇数 ± 偶数 = 奇数；偶数 ± 奇数 = 奇数。

②奇数 × 奇数 = 奇数；偶数 × 偶数 = 偶数；奇数 × 偶数 = 偶数。

③多个数相加减时，结果的奇偶性由奇数的个数决定：奇数个奇数之和为奇数，偶数个奇数之和为偶数。

④多个数相乘时，结果的奇偶性由偶数决定：只要有偶数，结果必为偶数。

【考点 3】质数和合数

1.质数和合数：一个数，如果只有 1 和它本身两个约数，这样的数叫做质数（或素数）。如 2，3，5 等都是质数，其中 2 为最小的质数。

2.一个数，如果除了 1 和它本身还有别的约数，这样的数叫做合数。如 4，6，8 等都是合数，其中 4 是最小的合数。

3.0 和 1 既不是质数也不是合数；自然数中除了 0 和 1 外，其他的数不是质数就是合数。

4.每个合数都可以写成几个质数相乘的形式，这几个质数叫做这个合数的质因数。把一个合数用几个质因数相乘的形式表示出来，叫做分解质因数。通常情况下用短除法来分解质因数。

【考点 4】公约数和公倍数

1.几个数公有的约数叫做这几个数的公约数，其中最大的一个叫做这几个数的最大公约数；公约数只有 1 的两个数，叫做互质数。如 4 和 7 是互质数。

2.几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数，其中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。

3.几个数的公约数个数是有限的，而几个数的公倍数个数是无限的。

【考点 5】小数

1.小数由整数部分、小数部分和小数点组成。

2.小数计数单位：分位上的最小量。例如 0.9 的计数单位是 0.1；0.57 的计数单位是 0.01。

3.小数的性质：小数的末尾添上“0”或者去掉“0”，小数的大小不变。

【考点 6】分数

1.把单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫分数。分数中间的一条线叫做分数线，分数线上面的数叫做分子，分数线下面的数叫做分母。

2.分数单位：把单位“1”平均分成若干份，取一份的数叫做分数单位。

3.分数的写法：先写分数线，再写分母，最后写分子，按照整数的写法来写。

4.分数和除法的关系：$\text{被除数} \div \text{除数} = \dfrac{\text{被除数}}{\text{除数}}$。

5.分数的基本性质：分数的分子和分母同时乘以或除以同一个数（0 除外），分数的大小不变。

6.分数的加法和减法

同分母分数加、减法：分母不变，分子相加、减；

异分母分数加、减法：通分后再用同分母分数的加、减法；

带分数加、减法：带分数相加、减，整数部分和分数部分分别相加、减，再把所得的结果合并起来。

【考点 7】百分数

1.百分数的意义：百分数表示一个数是另一个数的百分之几。是指两个数的比，因此也叫百分率或百分比。

2.百分数与小数的互化

百分数化小数：把分子的小数点向左移动两位，同时去掉百分号。

小数化百分数：把小数的小数点向右移动两位，同时添上百分号。

3.百分数与分数的互化

百分数化分数：先把百分数改写成分母是 100 的分数，能约分的要约成最简分数。如果百分数的分子是小数时，在改成分母是 100 的分数后，可根据分数的基本性质，化成分子是整数的分数，然后能约分的要约成最简分数。

分数化百分数：如果是常见的分数，可以直接化成小数，再化成百分数；如果分母是 100 的因数，可以根据分数的基本性质，化成分母是 100 的分数，然后再改写成百分数；根据分数和除法的关系，用分子除以分母，除不尽时保留三位小数，再化成百分数。

【考点 8】有理数和无理数

1.整数和分数统称有理数（分数指的是传统意义上的分数，像$\frac{\pi}{3}$这样的数不是有理数）。

2.在理解无理数时，要抓住“无限不循环”这一特点，归纳起来有四类：

①开方开不尽的数，如$\sqrt{3}$等；

②有特定意义的数，如自然常数e，圆周率π，或化简后含有π的数，如$\frac{\pi}{3}+8$等；

③有特定结构的数，如 0.1010010001…等；

④某些三角函数，如$\sin 60°$等。

【考点 9】数的表示

1.有效数字

一个近似数四舍五入到哪一位，就说它精确到哪一位，这时，从左边第一个不是零的数字起到右边精确的数位为止的所有数字，都叫做这个数的有效数字。

2.科学记数法

把一个数写做 $\pm a\times 10^n(1\le a<10)$ 的形式，其中 n 是整数，这种记数法叫做科学记数法。

【考点 10】实数的相反数、绝对值、倒数

1.相反数

如果 a 与 b 互为相反数，则有 $a+b=0$，$a=-b$，反之亦成立。

2.绝对值

一个数的绝对值就是这个数在数轴上所对应的点与原点间的距离。

零的绝对值是它本身，也可看成它的相反数。若 $|a|=a$，则 $a\ge 0$；若 $|a|=-a$，则 $a\le 0$。

3.倒数

如果 a 与 b 互为倒数，则有 $ab=1$，反之亦成立。

倒数等于本身的数是 1 和 -1，零没有倒数。

【考点 11】平方根、算术平方根和立方根

1.平方根

如果一个数的平方等于 a，那么这个数就叫做 a 的平方根（或二次方根）。一个正数有两个平方根，它们互为相反数；零的平方根是零；负数没有平方根。正数 a 的平方根记做“$\pm\sqrt{a}$”。

2.算术平方根

正数 a 的正的平方根叫做 a 的算术平方根，记作“$\sqrt{a}$”。正数和零的算术平方根都只有一个，零的算术平方根是零，$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\ge 0)\\-a(a<0)\end{cases}$

注意：$\sqrt{a}$ 的双重非负性 $\begin{cases}\sqrt{a}\ge 0\\a\ge 0\end{cases}$。

3.立方根

如果一个数的立方等于a，那么这个数就叫做a的立方根（或a的三次方根）。一个正数有一个正的立方根；一个负数有一个负的立方根；零的立方根是零。

注意：$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$，即三次根号内的负号可以移到根号外面。

【考点 12】比较大小

实数大小比较的几种常用方法：

（1）数轴比较法：在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大。

（2）求差比较法：设a、b是实数，$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$。

（3）求商比较法：设a、b是两正实数，$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$。

（4）绝对值比较法：设a、b是两负实数，则$|a|>|b|\Leftrightarrow a<b$。

（5）平方法：设a、b是两负实数，则$a^2>b^2\Leftrightarrow a<b$。

【考点 13】带余除法

整数a除以整数b，若除尽，则余数为 0，称为整除；若除不尽，则余数不为 0，就称为带余除法。在一道带余除法算式中，涉及四个数：被除数÷除数＝商……余数，最基本的数量关系式是：被除数＝商×除数+余数。

【考点 14】比与比例

1.比和比例的意义及基本性质

	比	比例
意义	两个数相除，又叫做两个数的比	表示两个比相等的式子，叫做比例
各部分名称	3 : 2 = 1.5 前项　后项　比值	5 : 6 = 20 : 24 内项 外项
基本性质	比的前项和后项同时乘或者同	两个外项的积等于两个内项的积

	时除以相同的数（0 除外），比值不变	
作用	化简比	解比例

2.正比例和反比例

名称	不同点			相同点
	意义不同	变化方向不同	关系式不同	
正比例	两种量中相对应的两个数的比值，也就是商一定	一种量扩大（或缩小），另一种量也随之扩大（或缩小）	$\frac{x}{y}=k$	两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化
反比例	两种量中相对应的两个数的积一定	一种量扩大（或缩小），另一种量也随之缩小（或扩大）	$xy=k$	

3.比例尺：$\frac{\text{图上距离}}{\text{实际距离}}=\text{比例尺}$

【考点 15】整除

1.若一个整数的末位是 0，2，4，6 或 8，则这个数能被 2 整除。

2.若一个整数的各位数字之和能被 3（9）整除，则这个整数能被 3（9）整除。

3.若一个整数的末尾两（三）位数能被 4（8）整除，则这个数能被 4（8）整除。

4.若一个整数的末位是 0 或 5，则这个数能被 5 整除。

5.若一个整数能被 2 和 3 同时整除，则这个数能被 6 整除。

6.若将一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，减去个位数的 2 倍，如果差是 7 的倍数，则原数能被 7 整除。如果差太大或心算不易看出是否是 7 的倍数，就需要继续上述截尾、倍大、相减、验差的过程，直到能清楚判断为止。

7.一个数从右边向左边数，将奇位上的数字与偶位上的数字分别加起来，再求它们的差，如果这个差是 11 的倍数（包括 0），那么，原来这个数就一定能被 11 整除。

8.一个数末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数的差（以大减小），能被 7，11，13 整除，则这个数能被 7，11，13 整除。

【考点 16】尾数规律

1.几个自然数的和、差、积的尾数等于这几个自然数的个位数的和、差、积的尾数；

2.两个相邻自然数的乘积的尾数只能是 0，2，6 之一；

3.一个自然数的平方的尾数只能是 0，1，4，5，6，9 这六个数之一。

第二章 复数

【考点 17】复数的重要概念

1.i 称为虚数单位，规定 $\mathrm{i}^2=-1$，形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数称为复数，其中 a，$b\in\mathbf{R}$。a，b 分别叫做复数的实部与虚部。

$$\text{复数}a+b\mathrm{i}\begin{cases}\text{实数}(b=0)\begin{cases}\text{有理数 — 循环小数}\\\text{无理数 — 无限不循环小数}\end{cases}\\\text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\\text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

2.复数相等：设复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}(a_1，b_1，a_2，b_2\in\mathbf{R})$，那么 $z_1=z_2$ 的充要条件是：$a_1=a_2$且$b_1=b_2$。特别地，$z=a+b\mathrm{i}=0\Leftrightarrow a=b=0$。

3.共轭复数：实部相同，虚部相反的两个复数互为共轭复数，如果 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$ 的共轭复数为 $a-b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$，记为 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$，那么 z 与 $\bar{z}$ 对应复平面上的点关于实轴对称，且（1）$z+\bar{z}=2a$，$z-\bar{z}=2b\mathrm{i}$，$z\bar{z}=a^2+b^2$；（2）$z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$。

【考点 18】复数的表示形式

1.复数的几何形式：复数 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$ 可用平面直角坐标系内点 $Z(a，b)$ 来表示。这时称此平面为复平面，x 轴称为实轴，y 轴除去原点称为虚轴。这样，全体复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面上全体点集是一一对应的。

2.复数的向量表示：复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，在复平面内还可以用以原点 O 为起点，以点 $Z(a,\ b)$ 为终点的向量 $\overline{OZ}$ 来表示，复数集 $\mathbf{C}$ 和复平面内所有以原点为起点的向量所成的集合也是一一对应的（复数 0 对应点 O，看成零向量）。

3.复数的三角形式：令 $z=a+b\mathrm{i}$，$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，则 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$。其中 θ 称为 z 的辐角，若 $0\le\theta<2\pi$，则 θ 称为 z 的辐角主值，记作 $\theta=Arg(z)$。r 称为 z 的模，记作 $|z|$。

4.复数的指数形式：由勾股定理 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，若用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则有 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。

【考点 19】复数的运算

1.加法：$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$。

2.减法：$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$。

3.乘法：$(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$。

4.除法：$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})\cdot(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})\cdot(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$。

5.乘方：$\mathrm{i}^{4n}=1$，$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$，$n\in\mathbf{N}^*$。

$z^m\cdot z^n=z^{m+n}$，$(z^m)^n=z^{mn}$，$(z_1\cdot z_2)^n=z_1^n\cdot z_2^n$。

第三章 代数式

【考点 20】因式分解

1.因式分解的常用方法

（1）提公因式法：$ab+ac=a(b+c)$。

（2）十字相乘法：$kx^2+mx+n=(ax+b)\cdot(cx+d)$，其中 $k=ac$，$n=bd$，$m=ad+bc$。

（3）配方法：$a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2$，$a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2$，$a^2-b^2=\left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right)$。

（4）求根公式法：令多项式 $f\left(x\right)=0$，求出其根为 x_1，x_2，$x_3,\cdots$，x_n，则多项式可因式分解为 $f\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\cdots\left(x-x_n\right)$。

2.因式分解的一般步骤

（1）如果多项式的各项有公因式，那么先提取公因式；

（2）在各项提出公因式以后或各项没有公因式的情况下，观察多项式的项数：①两项式可以尝试运用公式法分解因式；②三项式可以尝试运用公式法、十字相乘法分解因式；

（3）分解因式必须分解到每一个因式都不能再分解为止。

【考点 21】分式

1.分式的概念

一般地，用 A、B 表示两个整式，$A\div B$ 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式，如果 B 中含有字母，式子 $\frac{A}{B}$ 就叫做分式。其中 A 为分式的分子，B 为分式的分母。

2.分式的运算法则

（1）分式的加减法：$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$，$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$；

（2）分式的乘法：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$；

（3）分式的乘方：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$（$n$ 为整数）；

（4）分式的除法：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$。

【考点 22】二次根式

1.二次根式

把形如 $\sqrt{a}\left(a\geq 0\right)$ 的式子叫做二次根式，二次根式必须满足：

（1）含有二次根号“$\sqrt{\ }$”；（2）被开方数 a 必须是非负数。

2.最简二次根式

若二次根式满足：

（1）被开方数的因数是整数，因式是整式；

（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式叫做最简二次根式。

3.同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式。

4.二次根式的性质

（1）$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\left(a\ge 0\right)$

（2）$\sqrt{a^2}=\left|a\right|=\begin{cases}a\left(a\ge 0\right)\\-a\left(a<0\right)\end{cases}$

（3）$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\left(a\ge 0,\ b\ge 0\right)$

（4）$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left(a\ge 0,\ b>0\right)$

第四章 集合与简易逻辑

【考点23】集合与集合的关系

1.相等：若集合 A、B 中的元素完全相同，则集合 A 与集合 B 相等，即 $A=B$。

2.子集：若集合 A 中的元素都是 B 中的元素，则集合 A 是集合 B 的子集，即 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）。读作：“A 含于 B”（或“B 包含 A”）。

3.真子集：若集合 A 中的元素都是 B 中的元素，且 $A\ne B$，则集合 A 是集合 B 的真子集，即 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）。

4.空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集。

【考点24】区间

介于两个实数之间的一切实数，包括开区间、闭区间、半开半闭区间。

（1）开区间：$(a,\ b)=\{x|a<x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$。

（2）闭区间：$[a,\ b]=\{x|a\le x\le b\}$。

（3）半开半闭区间：$[a,\ b)=\{x|a\le x<b\}$，$(a,\ b]=\{x|a<x\le b\}$，

$[a,+\infty)=\{x|x\ge a\}$，$(-\infty,\ b]=\{x|x\le b\}$。

【考点 25】集合的运算

1.并集

由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$（或 $B\cup A$），读作“A 并 B”（或“B 并 A”），即 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A，\text{或}x\in B\}$。

2.交集

由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$（或 $B\cap A$），读作“A 交 B”（或“B 交 A”），即 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A，\text{且}x\in B\}$。

3.补集

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\,|\,x\in U，\text{且}x\notin A\}$。

【考点 26】逻辑联结词

1.或（$\vee$）：一般地，我们规定：当 p，q 两个命题有一个命题是真命题时，$p\vee q$ 是真命题；当 p，q 两个命题都是假命题时，$p\vee q$ 是假命题。

2.且（$\wedge$）：一般地，我们规定：当 p，q 都是真命题时，$p\wedge q$ 是真命题；当 p，q 两个命题中有一个命题是假命题时，$p\wedge q$ 是假命题。

3.非（$\neg$）：若 p 是真命题，则 $\neg p$ 必是假命题；若 p 是假命题，则 $\neg p$ 必是真命题。

【考点 27】四种命题

1.设命题（1）“若 p，则 q”是原命题，那么，

命题（2）“若 q，则 p”是原命题的逆命题；

命题（3）“若$\neg p$，则$\neg q$”是原命题的否命题；

命题（4）“若$\neg q$，则$\neg p$”是原命题的逆否命题。

2.四种命题之间的真假性

（1）原命题为真，它的逆命题不一定为真。

（2）原命题为真，它的否命题不一定为真。

（3）原命题为真，它的逆否命题一定为真。

【考点 28】四种条件

1.如果已知$P\Rightarrow Q$，那么就说，P是Q的充分条件，Q是P的必要条件；

2.如果既有$P\Rightarrow Q$，又有$Q\Rightarrow P$，就记作$P\Leftrightarrow Q$，则P与Q互为充分必要条件，简称充要条件。

第五章 方程与不等式

【考点 29】一元一次方程

1.一元一次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 1 的整式方程叫做一元一次方程。其中方程$ax+b=0$（x为未知数，$a\neq 0$）叫做一元一次方程的标准形式，a是未知数x的系数，b是常数项。

2.解一元一次方程的一般步骤

（1）去分母；（2）去括号；（3）移项；（4）合并同类项；（5）系数化 1；（6）验根。

【考点 30】一元二次方程

1.一元二次方程

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程。一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$。

2.一元二次方程的解法

（1）直接开平方法：它适用于解形如$(x+a)^2=b$的一元二次方程。

（2）配方法：配方法的理论根据是完全平方公式 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$，把公式中的 a 看作未知数 x，并用 x 代替，则有 $x^2\pm2bx+b^2=(x\pm b)^2$。

（3）公式法：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

（4）因式分解法：如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的左边可以因式分解为 $a(x-m)(x-n)$，那么根据两个因式的积等于 0，则这两个因式至少有一个为 0，原方程转化为两个一元一次方程 $x-m=0$，或 $x-n=0$。

3.一元二次方程根的判别式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中，$\Delta=b^2-4ac$。

【考点 31】韦达定理

如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根是 x_1、x_2，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$。即对于任何一个有实数根的一元二次方程，两根之和等于方程的一次项系数除以二次项系数所得的商的相反数，两根之积等于常数项除以二次项系数所得的商。

【考点 32】二元一次方程组

1.二元一次方程组

把具有相同未知数的两个二元一次方程合在一起，就组成了一个二元一次方程组。

2.二元一次方程组的解法

（1）代入消元法；（2）加减消元法。

【考点 33】分式方程

1.分母里含有未知数的方程叫做分式方程。

2.解分式方程的思想是将“分式方程”转化为“整式方程”。它的一般解法是：

（1）去分母，方程两边都乘以最简公分母；

（2）解所得到的整式方程；

（3）验根：将所得的根代入最简公分母，若等于零，就是增根，应该舍去；若不等于零，就是原方程的根。

【考点 34】无理方程

1.定义：根号下含有未知数的方程称为无理方程。

有理方程和无理方程统称为代数方程。

2.解题步骤：去根号、解有理方程、检验、写出答案。

【考点 35】绝对值方程

1.定义：绝对值符号中含有未知数的方程叫做绝对值方程。

2.解题步骤：去掉绝对值符号，把绝对值方程转化为一般的方程来解。

3.不同类型绝对值方程的解法：

（1）形如$|ax+b|=c(a\neq 0)$的绝对值方程的解法：

①当$c<0$时，根据绝对值的非负性，可知此时方程无解；

②当$c=0$时，原方程变为$|ax+b|=0$，即$ax+b=0$，解得$x=-\frac{b}{a}$；

③当$c>0$时，原方程变为$ax+b=c$或$ax+b=-c$，解得$x=\frac{c-b}{a}$或$x=\frac{-c-b}{a}$。

（2）形如$|ax+b|=cx+d(ac\neq 0)$的绝对值方程的解法：

①根据绝对值的非负性可知$cx+d\geq 0$，求出x的取值范围；

②根据绝对值的定义将原方程化为两个方程$ax+b=cx+d$和$ax+b=-(cx+d)$；

③分别解方程$ax+b=cx+d$和$ax+b=-(cx+d)$；

④将求得的解代入$cx+d\geq 0$检验，舍去不符合条件的解。

（3）形如$|ax+b|=|cx+d|(ac\neq 0)$的绝对值方程的解法：

①根据绝对值的定义将原方程化为两个方程$ax+b=cx+d$或$ax+b=-(cx+d)$；

②分别解方程$ax+b=cx+d$和$ax+b=-(cx+d)$。

（4）形如$|x-a|+|x-b|=c\ (a<b)$的绝对值方程的解法：

①根据绝对值的几何意义可知：$|x-a|+|x-b|\geq|a-b|$；

②当$c<b-a$时，方程无解；当$c=b-a$时，方程的解为$a\le x\le b$；当$c>b-a$时，分两种情况：当$x<a$时，原方程的解为$x=\frac{a+b-c}{2}$；当$x>b$时，原方程的解为$x=\frac{a+b+c}{2}$。

（5）形如$|ax+b|\pm|cx+d|=ex+f\ (ac\ne 0)$的绝对值方程的解法：

①找绝对值零点：令$|ax+b|=0$，得$x=x_1$，令$|cx+d|=0$得$x=x_2$；

②零点分段讨论：不妨设$x_1<x_2$，将数轴分为三个区段，即 a. $x<x_1$；b. $x_1\le x<x_2$；c. $x\ge x_2$；

③分段求解方程：在每一个区段内去掉绝对值符号，求解方程并检验，舍去不在区段内的解。

【考点 36】指数方程和对数方程

1.指数方程

$a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b\left(a>0\text{且}a\ne 1,\ b>0\right)$

$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$（$a>0$且$a\ne 1$）

$a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\lg a=g(x)\lg b$（$a$、$b>0$且$a\ne 1$，$b\ne 1$）

2.对数方程

$\log_a f(x)=b\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=a^b\\ f(x)>0\end{cases}$（$a>0$且$a\ne 1$）

$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\ f(x)>0\\ g(x)>0\end{cases}$（$a>0$且$a\ne 1$）

【考点 37】不定方程

1.定义

所谓不定方程，是指未知数的个数多于方程个数，且未知数受到某些限制（如有理数、整数或正整数等）的方程或方程组。

2.不定方程求解

解不定方程时一般要将原方程适当变形，把其中的一个未知数用另一个未知数来表示，然后在一定范围内试验求解。解题时要注意观察未知数前面系数的特点，尽量缩小未知数的取值范围，减少试验的次数。

【考点 38】不等式的基本性质

1.对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$。

2.传递性：$a>b，b>c \Rightarrow a>c$。

3.加法法则：①$a>b \Rightarrow a+c>b+c$；②$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$。

4.乘法法则：①$a>b，c>0 \Rightarrow ac>bc$；②$a>b，c<0 \Rightarrow ac<bc$；③$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$。

5.乘方法则：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n\left(n\in \mathbf{N}，n>1\right)$。

6.开方法则：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\left(n\in \mathbf{N}，n>1\right)$。

7.除法法则：①$a>b，c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；②$a>b，c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$；③$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0$。

8.倒数法则：$a>b$，$ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

【考点 39】均值不等式

1.设a、b是两个正数，则$\frac{a+b}{2}$称为正数a、b的算术平均数，$\sqrt{ab}$称为正数a、b的几何平均数。

2.均值不等式：若$a>0$，$b>0$，则$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，即$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时，“$=$”成立。

【考点 40】常用基本不等式

$a^2+b^2\geq 2ab$；$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$；$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$。

【考点 41】极值定理

设 x、y 都为正数，则有：

若 $x+y=s$（和为定值），则当 $x=y$ 时，积 xy 取得最大值 $\frac{s^2}{4}$；

若 $xy=p$（积为定值），则当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 取得最小值 $2\sqrt{p}$。

【考点 42】贝努利不等式

对任意整数 $n\geq 0$ 和任意实数 $x>-1$，有 $(1+x)^n\geq 1+nx$ 成立；如果 $n\geq 0$ 是偶数，则不等式对任意实数 x 都成立。

一般式：$(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)\leq(1+x_1)\cdots(1+x_n)$，当且仅当 $n=1$ 时“$=$”成立。

【考点 43】不等式的证明

1.比较法

①作差比较法：作差→变形→判断（与 0 的大小）→结论

②作商比较法：作差→变形→判断（与 1 的大小）→结论

2.综合法：从已知条件出发，得出命题成立，这种证明方法称为综合法。

3.分析法：从所要证明的结论入手，向已知条件反推，这种证法称为分析法。

4.反证法：先假设要证的命题不成立，进行正确的推理，得到和命题的条件矛盾的结论，以说明假设不正确，从而证明原命题成立，这种方法称为反证法。

5.放缩法：通过把不等式中的某些部分的值放大或缩小，简化不等式，从而达到证明的目的，这种方法称为放缩法。

【考点 44】不等式的同解原理

1.不等式 $f(x)<g(x)$ 与不等式 $g(x)>f(x)$ 同解。

2.如果函数 $f(x)$、$g(x)$ 的定义域被 $h(x)$ 的定义域所包含，那么 $f(x)<g(x)$ 与不等式 $f(x)+h(x)<g(x)+h(x)$ 同解。

3.如果函数 $f(x)$、$g(x)$ 的定义域被 $h(x)$ 的定义域所包含，当 $h(x)>0$ 时，不等式

$f(x)<g(x)$与不等式$f(x)\cdot h(x)<g(x)\cdot h(x)$同解；当$h(x)<0$时，不等式$f(x)<g(x)$与不等式$f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x)$同解。

【考点 45】一元一次不等式（组）的解法

1.一元一次不等式的解法

①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤将x的系数化为 1。

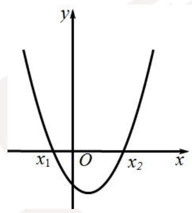
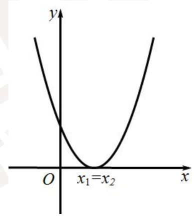
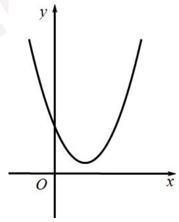
2.一元一次不等式组的解法

①分别求出不等式组中各个不等式的解集；

②利用数轴求出这些不等式的解集的公共部分（取交集），即这个不等式组的解集。

【考点 46】一元二次不等式的解法

二次函数的图象、一元二次方程的根、一元二次不等式的解集间的关系

<table>
<tr><td colspan="2">判别式$\varDelta=b^2-4ac$</td><td>$\varDelta>0$</td><td>$\varDelta=0$</td><td>$\varDelta<0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">二次函数
$y=ax^2+bx+c(a>0)$
的图象</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">一元二次方程
$ax^2+bx+c=0(a>0)$
的根</td><td>有两个相异实数根
$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$(x_1<x_2)$</td><td>有两个相等实数根
$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$</td><td>没有实数根</td></tr>
<tr><td rowspan="2">一元二次不等式的解集</td><td>$ax^2+bx+c>0$
$(a>0)$</td><td>$\{x|x<x_1或x>x_2\}$</td><td>$\left\{x\,|\,x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$</td><td>**R**</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c<0$
$(a>0)$</td><td>$\{x|x_1<x<x_2\}$</td><td>$\varnothing$</td><td>$\varnothing$</td></tr>
</table>

【考点 47】高次不等式

1.高次不等式的概念：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数不低于 2 的不等式。

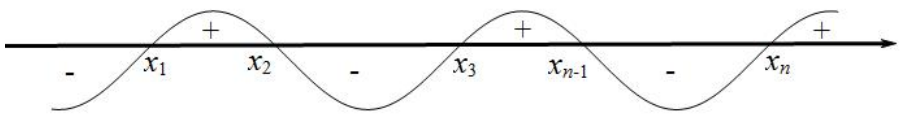
2.高次不等式的解法

①将不等式转化为$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0(<0)$的形式，其中$x_1<x_2<\cdots<x_n$，并将各因式$x$的系数化“+”。

②将x_1，$x_2,\cdots$，x_n在数轴上从左至右按从小到大的顺序表示出来。

③从数轴右上方开始穿线，经过数轴上表示x_1，$x_2,\cdots$，x_n的点。

④若不等式（x的系数化“+”后）是“>0”，则找“线”在x轴上方的区间；若不等式是“<0”，则找“线”在x轴下方的区间。



【考点 48】分式不等式

1.分式不等式的概念：分母里含有未知数的不等式称为分式不等式。

2.分式不等式的解法

①将分式不等式化为标准形式：移项，通分，化为$\dfrac{f(x)}{g(x)}>(<,\geq,\leq)0$。

②将分式不等式标准形转化为整式不等式求解：

$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$；$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$；

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geq 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$；$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leq 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$。

【考点 49】绝对值不等式

1.绝对值不等式的概念：含有绝对值的不等式称为绝对值不等式。

2.绝对值不等式的解法

①将绝对值不等式化为标准形式：$\left|f(x)\right|>(<,\geq,\leq)c(c>0)$；

②去绝对值符号：当$c>0$时，$\begin{cases}\left|f(x)\right|>c\Leftrightarrow f^{2}(x)>c^{2}\Leftrightarrow f(x)>c \text{ 或 } f(x)<-c\\ \left|f(x)\right|<c\Leftrightarrow f^{2}(x)<c^{2}\Leftrightarrow -c<f(x)<c\end{cases}$；

③解不等式。

【考点50】线性规划

线性规划问题求解步骤：

（1）作出可行域：画出约束条件（不等式组）所确定的平面区域；

（2）平移：将目标函数对应的直线平移，最先通过或最后通过的顶点便是最优解的位置；

（3）求解：解有关的方程组，求出最优解的坐标，再代入目标函数，求出目标函数的最值。

第六章 函数

【考点51】映射

1.映射的定义

设A、B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合A、B以及A到B的对应法则f）叫做集合A到集合B的映射，记作：f：$A\rightarrow B$。

2.映射的性质

（1）任意性；（2）有序性；（3）存在性；（4）唯一性；（5）封闭性。

【考点52】定义域

1.具体函数的定义域

①偶次方根的被开方数不小于0；②对数函数的真数大于0；③0的零次幂没有意义；④分母不为0。

2.抽象函数的定义域

①若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，则 $f[g(x)]$ 的定义域为 $g(x)\in D$ 的解集。

②若函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 D，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 的值域。

【考点 53】值域

1.定义法

2.单调性法：先确定函数在给定区间上的单调性，然后依据单调性求函数的值域，这是确定函数值域最常用的方法。

3.换元法：代数换元和三角换元。

4.配方法：配方法是求二次函数最值的基本方法，如 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$ 。

5.分离常数法

6.均值不等式法：$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}(a>0，b>0)$。

7.数形结合法

【考点 54】解析式

1.待定系数法：对函数类型已知时，可以假设函数解析式，如一次函数为 $y=kx+b(k\neq 0)$。

2.配凑法

3.换元法

4.解方程组法：适用于给出 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 或 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的关系方程，通过对 x 进行替换，得到关于 $f(x)$ 的方程组。

【考点 55】单调性

1.定义：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果对于定义域 I 内的某个区间 D 内的任意两个自变量 x_1， x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增（减）函数。

2.确定单调区间的方法

（1）定义法；（2）导数法；（3）图象法；（4）复合函数 $y=f\left[g\left(x\right)\right]$ 在公共定义域上的单调性：同增异减。

3.一些有用的结论

（1）奇函数在其对称区间上的单调性相同；

（2）偶函数在其对称区间上的单调性相反；

（3）在公共定义域内：

增函数 $f\left(x\right)+$ 增函数 $g\left(x\right)$ 是增函数；

减函数 $f\left(x\right)+$ 减函数 $g\left(x\right)$ 是减函数；

增函数 $f\left(x\right)-$ 减函数 $g\left(x\right)$ 是增函数；

减函数 $f\left(x\right)-$ 增函数 $g\left(x\right)$ 是减函数。

【考点 56】奇偶性

1.定义：一般地，对于函数 $f\left(x\right)$ 的定义域内的任意一个 x，若：

（1）有 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，那么 $f\left(x\right)$ 就叫做偶函数；

（2）有 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，那么 $f\left(x\right)$ 就叫做奇函数。

2.具有奇偶性的函数图象的特征

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点对称。

3.复杂函数的奇偶性

已知：$H\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$

（1）若非零函数 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的奇偶性相同，则在公共定义域内 $H\left(x\right)$ 为偶函数；

（2）若非零函数 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的奇偶性相反，则在公共定义域内 $H\left(x\right)$ 为奇函数。

4.常用的结论：若 $f\left(x\right)$ 是奇函数，且 0，$a\in$ 定义域，则 $f\left(0\right)=0$ 或 $f\left(-a\right)=-f\left(a\right)$。

【考点57】周期性

1.定义：若T为非零常数，对于定义域内的任意一个x，使$f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$恒成立，则$f\left(x\right)$叫做周期函数，$T$叫做这个函数的一个周期。

2.判定

（1）$y=f\left(x\right)$对$x\in\mathbf{R}$时，$f\left(x+a\right)=f\left(x-a\right)$或$f\left(x-2a\right)=f\left(x\right)$ $\left(a>0\right)$恒成立，则$y=f\left(x\right)$是周期为$2a$的周期函数；

（2）若$y=f\left(x\right)$是偶函数，其图象又关于直线$x=a\left(a\neq 0\right)$对称，则$f\left(x\right)$是周期为$2a$的周期函数；

（3）若$y=f\left(x\right)$是奇函数，其图象又关于直线$x=a\left(a\neq 0\right)$对称，则$f\left(x\right)$是周期为$4a$的周期函数；

（4）若$f\left(x\right)=-f\left(x+a\right)$ $\left(a\neq 0\right)$恒成立，则$f\left(x\right)$是周期为$2a$的周期函数；

（5）若$f\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x+a\right)}\left(a\neq 0\right)$恒成立，则$f\left(x\right)$是周期为$2a$的周期函数；

（6）若$f\left(x+a\right)=f\left(x+b\right)$ $\left(a，b\neq 0，b\neq a\right)$恒成立，则$f\left(x\right)$是周期为$b-a$的周期函数。

【考点58】对称性

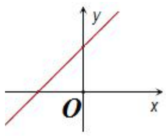
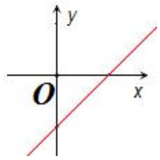
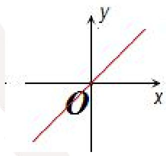
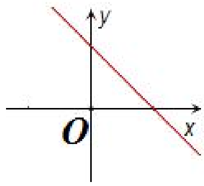
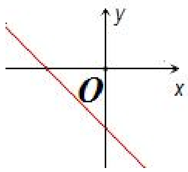
$f\left(a+x\right)=f\left(a-x\right)\Leftrightarrow f\left(2a-x\right)=f\left(x\right)\Leftrightarrow$ 函数$f\left(x\right)$关于直线$x=a$对称。

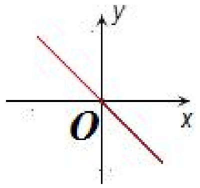
【考点59】凹凸性

设$f(x)$在区间I上连续，若对于I上任两点$x_1，x_2$恒有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，那么$f(x)$在$I$上的图形是凸的(凸弧)；如果恒有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，那么称$f(x)$在$I$上的图形是凹的（或凹弧）。

【考点 60】一次函数

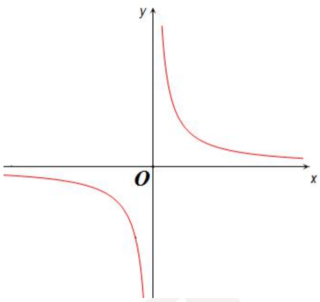
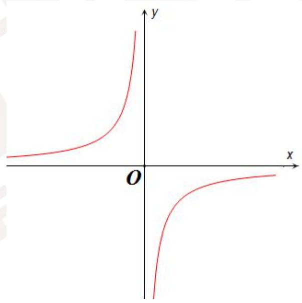
一次函数 $y=kx+b\left(k\neq 0\right)$

k 的符号	b 的符号	函数图象	函数性质
$k>0$	$b>0$		定义域 **R**； 值域 **R**； 单调递增； 图象过第一、二、三象限
	$b<0$		定义域 **R**； 值域 **R**； 单调递增； 图象过第一、三、四象限
	$b=0$		定义域 **R**； 值域 **R**； 单调递增； 奇函数； 图象过第一、三象限
$k<0$	$b>0$		定义域 **R**； 值域 **R**； 单调递减； 图象过第一、二、四象限
	$b<0$		定义域 **R**； 值域 **R**； 单调递减； 图象过第二、三、四象限

	$b=0$		定义域 **R**； 值域 **R**； 单调递减； 奇函数； 图象过第二、四象限
$b=0$ 为正比例函数（一次函数的特例），k 不存在时不是一次函数，但是图象也为直线			

【考点 61】反比例函数

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$

k 的符号	$k>0$	$k<0$
函数图象		
图象特点	经过第一、三象限	经过第二、四象限
定义域	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
单调性	$(-\infty,0)\downarrow$，$(0,+\infty)\downarrow$	$(-\infty,0)\uparrow$，$(0,+\infty)\uparrow$
奇偶性	奇函数	奇函数
周期性	无	无
对称轴	$y=\pm x$	$y=\pm x$
对称中心	$(0,0)$	$(0,0)$

【考点 62】指数运算法则

（1）$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\left(a>0，m、n\in\mathbf{N}_+，n>1\right)$；

（2）$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\left(a>0，m、n\in\mathbf{N}_+，n>1\right)$；

（3）$a^r a^s=a^{r+s}\left(a>0，r、s\in\mathbf{R}\right)$；

（4）$a^r\div a^s=a^{r-s}\left(a>0，r、s\in\mathbf{R}\right)$；

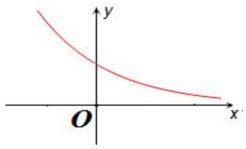
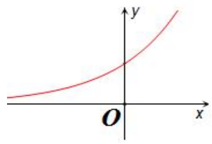
（5）$\left(a^r\right)^s=a^{rs}\left(a>0，r、s\in\mathbf{R}\right)$；

（6）$\left(ab\right)^r=a^r b^r\left(a、b>0，r\in\mathbf{R}\right)$。

【考点 63】指数函数

1.定义：一般地，函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）叫做指数函数。其中 x 是自变量，函数定义域是 $\mathbf{R}$。

2.指数函数的图象与性质：

a的范围	$0<a<1$	$a>1$
图象		
恒过点	$(0,1)$	$(0,1)$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
单调性	↓	↑
奇偶性	非奇非偶	非奇非偶
周期性	无	无
对称轴	无	无

对称中心	无	无

【考点 64】对数运算法则

设 $a>0$，且 $a\neq 1$， M 、 $N>0$，则有

（1） $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$ ；

（2） $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ ；

（3） $\log_{a^n}M^m=\dfrac{m}{n}\log_a M\ (m\in\mathbf{R}，\ n\neq 0)$；

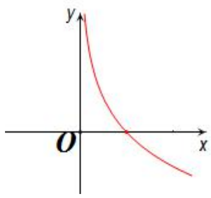
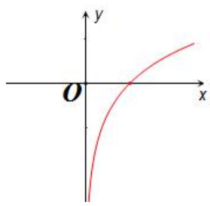
（4） $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\ (c>0$ 且 $c\neq 1，\ b>0)$；

（5） $a^{\log_a M}=M$ 。

【考点 65】对数函数

1.定义：一般地，函数 $y=\log_a x$ 叫做对数函数，其中 $x>0$，$a>0$且$a\neq 1$。对数函数的一般形式为 $y=\log_a x(a>0$且$a\neq 1，x>0)$， a 为底数， x 为真数，它实际上就是指数函数的反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称。因此指数函数对于 a 的规定，同样适用于对数函数。

2.对数函数的图象与性质

a 的范围	$0<a<1$	$a>1$
图象		
恒过点	$(1{,}0)$	$(1{,}0)$
定义域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
单调性	↓	↑

奇偶性	非奇非偶	非奇非偶
周期性	无	无
对称轴	无	无
对称中心	无	无

【考点 66】幂函数

1.定义：

（1）幂函数的解析式必须是 $y=x^{\alpha}$ 的形式，前面的系数必须是 1，没有其他项；

（2）定义域与 α 的值有关系；

（3）判断一个函数是幂函数还是指数函数切入点：看未知数 x 是指数（指数函数）还是底数（幂函数）。

2.图象及性质：只需要关注 $\alpha=1,2,3,-1,\frac{1}{2}$ 时的情形。

【考点 67】二次函数的解析式

1.一般式：$y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$）；

2.顶点式：$y=a\left(x-h\right)^2+k$（a，h，k 是常数，$a\neq0$）；

3.两根式：$y=a\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)$。注意：如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点，则不能这样表示。

【考点 68】二次函数的最值

1.如果自变量的取值范围是全体实数，那么函数在顶点处取得最大值（或最小值），即当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

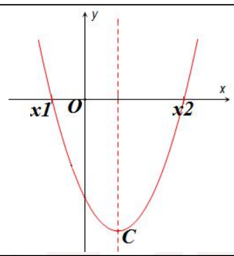
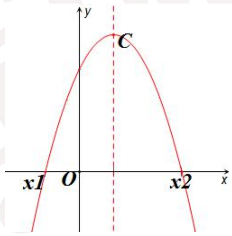
2.如果自变量的取值范围是 $x_1\leq x\leq x_2$，那么，首先要看 $-\frac{b}{2a}$ 是否在自变量取值范围 $x_1\leq x\leq x_2$ 内：①若 $-\frac{b}{2a}$ 在此范围内，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；②若 $-\frac{b}{2a}$ 不在此范围内，则需要考虑函数在 $x_1\leq x\leq x_2$ 范围内的增减性：

A.如果在此范围内 y 随 x 的增大而增大，则当 $x=x_2$ 时，$y_{\max}=ax_2^{\ 2}+bx_2+c$；当 $x=x_1$ 时，$y_{\min}=ax_1^{\ 2}+bx_1+c$；

B.如果在此范围内 y 随 x 的增大而减小，则当 $x=x_1$ 时，$y_{\max}=ax_1^{\ 2}+bx_1+c$；当 $x=x_2$ 时，$y_{\min}=ax_2^{\ 2}+bx_2+c$。

【考点 69】二次函数的图象及性质

二次函数的图象及性质

函数解析式	$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$	
a 的符号	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$（最低点）	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$（最高点）
定义域	**R**	**R**
值域	$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$
单调性	$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)\downarrow$，$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)\uparrow$	$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)\uparrow$，$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)\downarrow$
奇偶性	当 $b=0$ 时，偶函数	当 $b=0$ 时，偶函数
周期性	无	无
对称轴	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$
对称中心	无	无

其中a、b、c的含义：

（1）a表示开口方向：$a>0$时，抛物线开口向上；$a<0$时，抛物线开口向下；

（2）b与对称轴有关：对称轴为$x=-\dfrac{b}{2a}$；

（3）c表示抛物线与y轴的交点坐标：$(0,\ c)$。

【考点70】二次函数与一元二次方程的关系

1.一元二次方程的解是其对应的二次函数的图象与x轴交点的横坐标，因此可以根据一元二次方程中$\Delta=b^2-4ac$的值，判断在二次函数的图象中与x轴是否有交点：

①当$\Delta>0$时，一元二次方程有两个不等的实数根x_1、x_2，相应的二次函数的图象与x轴有两个交点$(x_1,\ 0)$、$(x_2,\ 0)$；

②当$\Delta=0$时，一元二次方程有两个相等的实数根$x_1=x_2$，相应的二次函数的图象与x轴有唯一的交点$(x_1,\ 0)$；

③当$\Delta<0$时，一元二次方程没有实数根，相应的二次函数的图象与x轴没有交点。

2.方程$f(x)=0$有实数根$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$的图象与x轴有交点$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$有零点。

3.零点存在定理：如果函数$y=f(x)$在区间$[a,\ b]$上的图象是连续不断的一条曲线，并且有$f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数$y=f(x)$在区间$(a,\ b)$内有零点，即存在$c\in(a,\ b)$，使得$f(c)=0$，这个c也即是方程$f(x)=0$的根。

【考点71】反函数

1.定义

一般地，设函数$y=f(x)\ (x\in A)$的值域是C，根据这个函数中x、y的关系，用y把x表示出，得到$x=g(y)$。若对于y在C中的任何一个值，通过$x=g(y)$，x在A中都有

唯一的一个值和它对应，那么，函数 $x=g(y)$ 就表示 y 是自变量，因变量 x 是 y 的函数，这样的函数 $x=g(y)$ $(y\in C)$ 叫做函数 $y=f(x)$ $(x\in A)$ 的反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$。反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域、值域分别是函数 $y=f(x)$ 的值域、定义域。

2.反函数性质

（1）互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称；

（2）函数存在反函数的充要条件是函数的定义域与值域是一一映射；

（3）一个函数与它的反函数在相应区间上单调性一致；

（4）反函数是相互的；

（5）定义域、值域相反，对应法则互逆（三反）；

（6）原函数一旦确定，反函数即确定（三定）（在有反函数的情况下，即满足（2））。

3.求反函数的步骤

（1）反解：把 $y=f(x)$ 看作是 x 的方程，解出 $x=f^{-1}(y)$；

（2）互换：将 x，y 互换得 $y=f^{-1}(x)$，注明其定义域（即原函数的值域）。

【考点 72】平移变换

1.水平变换：$y=f(x)\xrightarrow{\text{左移}a}y=f(x+a)$；$y=f(x)\xrightarrow{\text{右移}a}y=f(x-a)$。

2.竖直变换：$y=f(x)\xrightarrow{\text{上移}a}y=f(x)+a$；$y=f(x)\xrightarrow{\text{下移}a}y=f(x)-a$。

总结：左加右减，上加下减。

【考点 73】对称变换

1.函数 $y=f(-x)$ 的图象可以将函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称即可得到：

$$y=f(x)\xrightarrow{y\text{轴}}y=f(-x)$$

2.函数 $y=f(2a-x)$ 的图象可以将函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=a$ 对称即可得到：

$$y=f(x)\xrightarrow{x=a}y=f(2a-x)$$

3.函数 $y=-f(x)$ 的图象可以将函数 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称即可得到：

$$y=f(x)\xrightarrow{x轴}y=-f(x)$$

4.函数 $y=2b-f(x)$ 的图象可以将函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $y=b$ 对称即可得到：

$$y=f(x)\xrightarrow{y=b}y=2b-f(x)$$

5.函数 $y=2b-f(2a-x)$ 的图象可以将函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a，b)$ 对称即可得到：

$$y=f(x)\xrightarrow{(a，b)点对称}y=2b-f(2a-x)$$

【考点 74】翻转变换

1.函数 $y=|f(x)|$ 的图象可以将函数 $y=f(x)$ 的图象的 x 轴下方部分沿轴翻折到 x 轴上方，去掉原 x 轴下方部分即可得到：

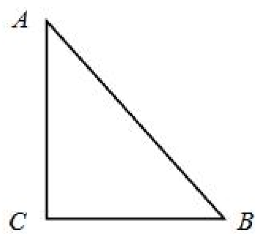
$$y=f(x)\xrightarrow{x轴翻折}y=|f(x)|$$

2.函数 $y=f(|x|)$ 的图象可以将函数 $y=f(x)$ 的图象的 y 轴右边部分沿轴翻折到 y 轴左边，并保留原 y 轴右边部分即可得到：

$$y=f(x)\xrightarrow{y轴翻折}y=f(|x|)$$

【考点 75】锐角三角函数

1.锐角三角函数



Rt $\triangle ABC$ 中，设 $\angle C=90°$，$\angle\alpha$ 为 Rt $\triangle ABC$ 的一个锐角，则：

$\angle\alpha$ 的正弦 $\sin\alpha=\dfrac{\angle\alpha\text{的对边}}{\text{斜边}}$；

$\angle\alpha$ 的余弦 $\cos\alpha=\dfrac{\angle\alpha\text{的邻边}}{\text{斜边}}$；

$\angle\alpha$ 的正切 $\tan\alpha=\dfrac{\angle\alpha\text{的对边}}{\angle\alpha\text{的邻边}}$。

2.同角三角函数之间的关系：

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$； $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$。

函数的增减性：（$0°<\alpha<90°$）

（1）$\sin\alpha,\tan\alpha$ 的值随 α 的增大而增大；

（2）$\cos\alpha$ 的值随 α 的增大而减小。

【考点 76】不同象限中三角函数的符号

1. $\sin\alpha$ 在一二象限为正，三四象限为负；

2. $\cos\alpha$ 在一四象限为正，二三象限为负；

3. $\tan\alpha$ 、 $\cot\alpha$ 在一三象限为正，二四象限为负。

符号口诀：“一全二正弦，三切四余弦”。

【考点 77】诱导公式

1. $\left|\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\pm\alpha\right)\right|=\begin{cases}\sin\alpha\,(n\text{为偶数})\\ \cos\alpha\,(n\text{为奇数})\end{cases}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. $\left|\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\pm\alpha\right)\right|=\begin{cases}\cos\alpha\,(n\text{为偶数})\\ \sin\alpha\,(n\text{为奇数})\end{cases}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

求任意角的三角函数时，可以转化为特殊角的三角函数：“奇变偶不变，符号看象限”。

【考点 78】三角恒等变换

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$， $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ ， $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$ ；

2. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$， $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ；

3. $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$， $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$， $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$。

【考点 79】两角和与差公式

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ ；

2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

3. $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$。

【考点 80】积化和差公式和和差化积公式

1.积化和差公式

① $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$；

② $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$；

③ $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$；

④ $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$。

2.和差化积公式

① $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

② $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

③ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

④ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

【考点 81】倍角公式

1. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；

2. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

3. $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$。

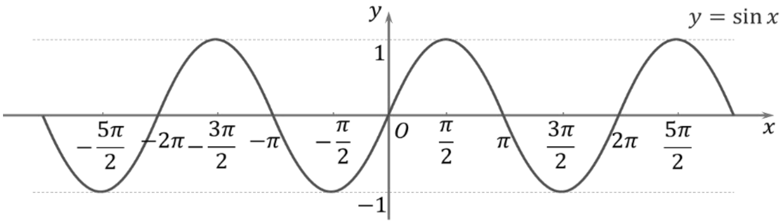
【考点 82】半角公式

1. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$；

2. $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$；

3. $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$。

【考点 83】正弦函数



1.定义域：$\mathbf{R}$

2.值域：$[-1, 1]$

当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 时，$y_{\max}=1$；$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 时，$y_{\min}=-1$。

3.单调性：

$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 上单调递增；$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 上单调递减。

4.奇偶性与对称性：

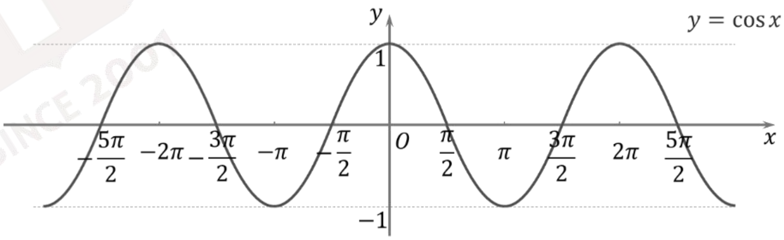
A.奇函数，关于原点对称；

B.对称中心：$(k\pi, 0)$ $(k\in\mathbf{Z})$，是图象与 x 轴的交点；

C.对称轴：直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，是过最高点或最低点且垂直于 x 轴的直线。

5.周期性：最小正周期是 $T=2\pi$。

【考点 84】余弦函数



1.定义域：$\mathbf{R}$

2.值域：$[-1, 1]$

当 $x=2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$；$x=\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$。

3.单调性：

$[-\pi+2k\pi，2k\pi]\ (k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增；$[2k\pi，\pi+2k\pi]\ (k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减。

4.奇偶性与对称性：

A.偶函数，关于 y 轴对称；

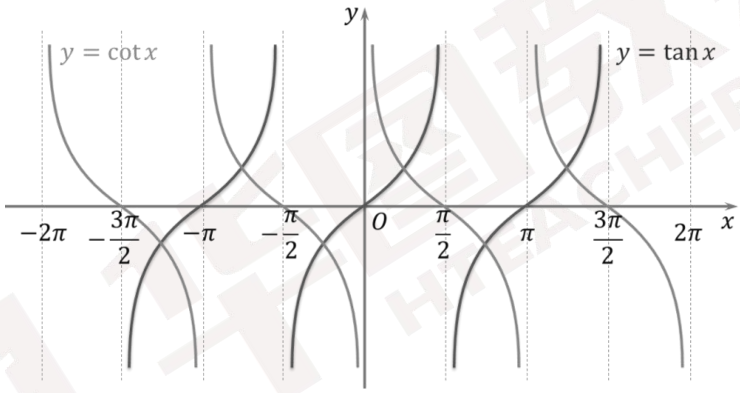
B.对称中心：$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi，0\right)(k\in\mathbf{Z})$，是图象与 x 轴的交点；

C.对称轴：直线 $x=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，是过最高点或最低点且垂直于 x 轴的直线。

5.周期性：最小正周期是 $T=2\pi$。

【考点 85】正切函数和余切函数

1.正切函数



①定义域：$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$

②值域：$\mathbf{R}$

③单调性：$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增。

④奇偶性与对称性：

A.奇函数，关于原点对称；

B.对称中心：$\left(\frac{k\pi}{2}，0\right)(k\in\mathbf{Z})$，是图象与 x 轴的交点或渐近线与 x 轴的交点；

C.对称轴：不存在。

⑤周期性：最小正周期是 $T=\pi$。

2.余切函数

①定义域：$\{x \mid x \neq k\pi，k \in \mathbf{Z}\}$

②值域：$\mathbf{R}$

③单调性：$(k\pi，\pi + k\pi)\ (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递减。

④奇偶性与对称性：

A.奇函数，关于原点对称；

B.对称中心：$\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)\ (k \in \mathbf{Z})$，是图象与 x 轴的交点或渐近线与 x 轴的交点；

C.对称轴：不存在。

⑤周期性：最小正周期是 $T = \pi$ 。

【考点 86】三角函数的一般形式

函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)\left(A > 0，\omega > 0，|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$

（1）参数的意义：

振幅（A），函数的最小值为 $-A$，最大值为 A；

周期（T），函数的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$；

初相（φ，当 $x = 0$ 时的相位），函数与 y 轴交点的纵坐标为 $y = A\sin\varphi$ 。

（2）定义域：$\mathbf{R}$；值域：$[-A，A]$。

当 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ 时，$y_{\max} = A$；$\omega x + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ 时，$y_{\min} = -A$ 。

（3）单调性：$\omega x + \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]\ (k \in \mathbf{Z})$ 时单调递增；

$\omega x + \varphi \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]\ (k \in \mathbf{Z})$ 时单调递减。

（4）奇偶性与对称性：

A.奇偶性根据定义或图象判断；

B.对称中心：图象与 x 轴的交点；

C.对称轴：过最高点或最低点且垂直于 x 轴。

（5）周期性：最小正周期是$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。

（6）辅助角公式：$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\arctan\dfrac{b}{a}\right),(a>0)$

【考点 87】三角函数图象变换

1.先平移后伸缩

平移变换：函数$y=\sin x$的图象纵坐标不变，横坐标向左$(\varphi>0)$或向右$(\varphi<0)$平移$|\varphi|$个单位得到$y=\sin(x+\varphi)$的图象；

周期变换：函数$y=\sin(x+\varphi)$的图象的纵坐标不变，横坐标缩短$(\omega>1)$或伸长$(0<\omega<1)$到原来的$\dfrac{1}{\omega}$倍，得到函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象；

振幅变换：函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象的横坐标不变，纵坐标伸长$(A>1)$或缩短$(0<A<1)$为原来的A倍，得到函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象。

2.先伸缩后平移

周期变换：函数$y=\sin x$的图象的纵坐标不变，横坐标缩短$(\omega>1)$或伸长$(0<\omega<1)$为原来的$\dfrac{1}{\omega}$倍，得到函数$y=\sin\omega x$的图象；

平移变换：函数$y=\sin\omega x$的图象纵坐标不变，横坐标向左$(\varphi>0)$或向右$(\varphi<0)$平移$\dfrac{|\varphi|}{\omega}$个单位得到$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象；

振幅变换：函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$图象的横坐标不变，纵坐标伸长$(A>1)$或缩短$(0<A<1)$为原来的A倍，得到函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象。

【考点 88】解三角形

1.正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$为外接圆半径）；

2.余弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$；$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$；$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$；

3.面积公式：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$；$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$。

第七章 数列

【考点 89】等差数列

1.概念：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列。这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示。

2.通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d\ (n\in\mathbf{N}^*)$

由三个数 a，A，b 组成的等差数列可以看成最简单的等差数列。

3.前 n 项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=na_n-\frac{1}{2}n(n-1)d$

4.性质（解题时常用到的）

① $a_m-a_n=(m-n)d$，其中 a_m，a_n 为第 m，n 项；

②等差中项：a，b，c 成等差数列，b 叫做 a 与 c 的等差中项，则 $2b=a+c$；

③若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$（m、n、p、q 均为正整数）；

④ $S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$，$S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$；

⑤ S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$ 成等差数列。

【考点 90】等比数列

1.概念：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列。这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示 $(q\neq 0)$。

2.通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*，a_1\neq 0，q\neq 0)$

3.前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-qa_n}{1-q}(q\neq 1)\\ na_1(q=1)\end{cases}$

4.性质（解题时常用到的）

①$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$，其中a_m，a_n为第m，n项；

②若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；

③若三个数等比，常设$\frac{a_1}{q}$，a_1，a_1q；

④等比中项：a，b，c成等比数列，b叫做a与c的等比中项，则$b^2=a\cdot c$；

⑤S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$成等比数列。

【考点 91】特殊数列求通项

1.公式法：当已知$S_n=f(n)$时，直接运用公式$a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$求解。

2.累加法：当已知$a_{n+1}=a_n+f(n)(n\geq 1)$时，运用累加法。

3.累乘法：当已知$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$时，运用累乘法。

4.待定系数构造法：当已知$a_{n+1}=pa_n+f(n)$（p为常数）时，运用构造法，构造成等差数列或者等比数列来求解。

5.倒数法：当已知$a_{n+1}=\frac{a_n}{Aa_n+B}$时，运用倒数法。

6.迭代法（线性）：若数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(a_{n-1})$，则可通过迭代的方法求得通项公式。

【考点 92】特殊数列求前 *n* 项和

1.常用几个数列的求和公式

①$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

②$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

③$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

④$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$

2.裂项相消法

将数列的通项分成两个式子的代数和，即 $a_n = f(n+1) - f(n)$，然后累加时抵消中间的若干项。此方法主要针对 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}$ 这样的求和，其中 $\{a_n\}$ 是等差数列。

3.错项相减法

$c_n = a_n \cdot b_n$，$\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列。S_n 乘等比数列的公比后与原来的前 n 项和 S_n 相减，即 $S_n - qS_n$，求 S_n。但要注意讨论 $q=1$和$q\neq 1$ 两种情况。

4.分组求和法

将数列求和公式中的各项进行分类，合并“同类项”，构造为多个等差数列或等比数列求和。

5.倒序相加法

适用于求和公式中到首尾距离相等的两项和具有典型的规律的数列，采取把正着写与倒着写的两个和式相加，然后求和。如等差数列的推导过程就是用这种方法。

第八章　推理与证明

【考点 93】合情推理与演绎推理

1.合情推理

①归纳推理：由部分到整体、特殊到一般的推理；

②类比推理：由特殊到特殊的推理。

2.演绎推理

从一般性原理出发，推出某个特殊情况下的结论，称为演绎推理。它是由一般到特殊的推理。“三段论”是演绎推理的一般形式，包括：大前提—已知的一般原理；小前提—所研究的特殊情况；结论—根据一般原理，对特殊情况做出的判断。

3.区别与联系

①区别：合情推理所得的结论不一定正确；演绎推理在大前提、小前提、推理形式都正确时，所得的结论一定正确。

②联系：数学结论、证明思路等的发现主要靠合情推理，证明数学结论主要是演绎推

理的过程。

【考点 94】直接证明与间接证明

1.直接证明

①综合法：从命题中的假设出发，经过逐步推理，最后得到命题的结论，这种从原因推导得到结果的证明方法称为综合法。

②分析法：从命题中的结论出发，一步一步寻求结论成立的充分条件，最后得到命题中的假设或已被证明的事实，这种从结果寻找条件的思维方法称为分析法。

2.间接证明

反证法：先假设命题中的结论不成立，然后由此经过推理，引出矛盾，判定所作的假设不正确，从而得到原命题成立，这种证明方法称为反证法。

【考点 95】数学归纳法定义及证明步骤

1.定义

对某些与正整数n有关的数学命题，常采用下面的方法来证明它们的正确性：先证明当n取第一个值$n_0\left(n_0\in\mathbf{N}^*\right)$时，命题成立，然后假设当$n=k\left(k\in\mathbf{N}^*,\ k\geq n_0\right)$时命题成立，并证明当$n=k+1$时命题也成立，那么就证明了这个命题成立，这种证明方法是数学归纳法，它是完全归纳法的一种。

2.数学归纳法证明命题的步骤

①证明当n取第一个值$n_0\left(n_0=\mathbf{N}^*\right)$时命题$p\left(n_0\right)$成立；

②假设$n=k\left(k\geq n,\ k\in\mathbf{N}^*\right)$时，命题$p(k)$成立，证明当$n=k+1$时命题$p(k+1)$也成立；

由①、②就可以断定命题对从n_0开始的所有正整数n都成立。

第九章 算法初步

【考点 96】算法

1.算法：可以用计算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明

确和有效的，而且能够在有限步之内完成。

2.基本算法语句：

（1）赋值语句：在程序运行时给变量赋值的语句，一般格式：变量＝表达式。

（2）条件语句：计算机按照条件进行分析、比较、判断，并且按照判断后的不同情况进行不同的操作处理。如“比较数之间的大小”、“判断数是否为偶数”。

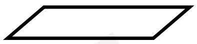
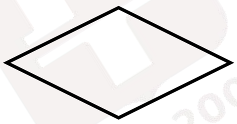
（3）循环语句：变量一般需要进行一定的初始化操作，并且循环语句在循环过程中需要有“结束”的机会，循环过程中循环条件成立对应的变量值需要有改变。

（4）输入语句：实现算法的输入信息功能。一般格式：INPUT “提示内容”；变量。

（5）输出语句：实现算法的输出结果功能。一般格式：PRINT “提示内容”；表达式。

【考点 97】程序框图

常用图形符号

图形符号	名称	符号表示的意义
	终端框（起止框）	算法的起始和结束
	输入、输出框	算法的输入、输出的信息
	处理框（执行框）	赋值、计算
	判断框	判断某一条件是否成立，成立时在出口处标明“是”或“Y”；不成立时标明“否”或“N”
	流程线	流程进行的方向

第十章　奥数

【考点 98】速算与巧算

1.凑整与分拆

凑整：加减法的巧算主要是运用“凑整”的方法，把接近整十、整百、整千的数看作接近的数进行简算。

分拆：这里的分拆是指在计算的过程中以巧算为目的的分拆。为了使计算简便，我们常把一个数写成两个数或多个数的和差积的形式，这种方法叫做分拆。

2.提取公因数

该方法等同于乘法分配律的逆运算。一般情况下，用提取公因数法解决的题目有两个特征。

一是要有“公因数”，如果是“疑似”公因数（例如 38 和 3.8 或 38 和 19），我们可以借助下面几个方法对它加工。

（1）$a\times b=(a\times 10)\times(b\div 10)$；（2）$\frac{a}{b}\times c=\frac{c}{b}\times a$；（3）$a\times b\times c=a\times(b\times c)$。

二是要有互补数。

【考点 99】数的进制

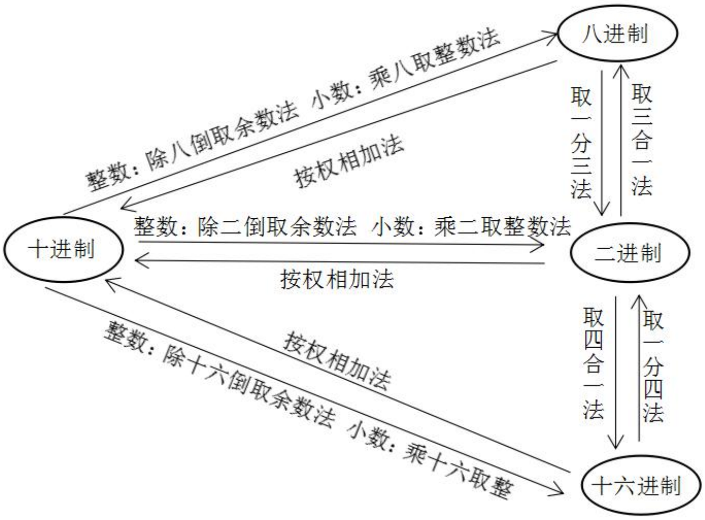
1.二进制

在计算机中，所采用的计数法是二进制，即“逢二进一”，因此二进制中只用两个数字 0 和 1。二进制的计数单位分别是 2^0、2^1、2^2、2^3、…，二进制数也可以写成展开式的形式。二进制的运算法则：“满二进一，借一当二”。

2.n 进制

n 进制的运算法则是“逢 n 进一，借一当 n”，n 进制的四则混合运算和十进制一样，先乘除，后加减；同级运算，先左后右；有括号时先计算括号内的。

3.进制间的转换我们只研究整数之间的转换，如下图所示：



【考点 100】错中求解

在解决错中求解时，要采用倒推的方法，从错误入手，分析错误的原因，在加、减法中，利用和与差的变化求出加数或被减数、减数；在乘、除法中，利用积与商的变化求出因数或被除数、除数。

常见的错误原因：①数字看错；②运算符号看错；③括号错误。

【考点 101】基本应用题

1.和倍问题：解决这类问题的关键是要先找出两数的和以及对应的倍数和，进而先求出 1 倍数，再求出几倍数。

公式：两数和÷（倍数＋1）＝小数（1 倍数）

小数×倍数＝大数（几倍数）

两数和－小数＝大数

2.差倍问题：该类问题的关键是找出两数的差以及与其对应的倍数，从而先求出 1 倍数，再求出几倍数。

公式：两数差÷（倍数－1）＝小数（1 倍数）

小数×倍数＝大数（几倍数）

3.和差问题：解决这类问题的方法一是假设法：假设小数增加到与大数一样多，先求大数，再求小数或者假设大数减少到与小数一样多，先求小数，再求大数；方法二则是利

用线段图进行求解。

公式：（和＋差）÷2＝大数

（和－差）÷2＝小数

【考点 102】追及与相遇问题

相向而行：相遇时间＝距离÷速度和；

相背而行：相背距离＝速度和×时间；

追及问题：一般指两个物体同方向运动，由于各自的速度不同后者追上前者的问题。

此类问题的基本数量关系是：速度差×追及时间＝追及路程。

【考点 103】火车过桥问题

火车过桥（或隧道）所用的时间＝（桥或隧道长+火车身长）÷火车速度；

两列火车相向而行，从相遇到相离所用的时间＝两火车车身长度和÷两车速度和；

两车同向而行，快车从追上到超过慢车所用的时间＝两火车车身长度和÷两车速度差。

【考点 104】流水行船问题

解答时的思路与和差问题相似。划速相当于和差问题中的大数，水速相当于小数，顺流速相当于和数，逆流速相当于差数。

（1）划速＝（顺流船速＋逆流船速）÷2；

（2）水速＝（顺流船速－逆流船速）÷2；

（3）顺流船速＝划速＋水速；

（4）逆流船速＝划速－水速；

（5）顺流船速＝逆流划速＋水速×2；

（6）逆流船速＝顺流划速－水速×2。

【考点 105】环形问题

在行程问题中，与环形有关的行程问题需要注意如下两点：

（1）两人同地、背向运动，从第一次相遇到下次相遇共行一个全程；

（2）同地、同向运动时，甲追上乙时，甲比乙多行一个全程。

【考点 106】分数问题

在解分数应用题问题时，分析题中数量之间的关系，准确找出“量”与“率”之间的对应是解题的关键。

（1）部分数和总数

在同一整体中，部分数和总数作比较关系时，部分数通常作为比较量，而总数则作为标准量，那么总数就是单位“1”。

（2）两种数量比较

分数应用题中，两种数量相比的关键句非常多。有的是“比”字句，有的则没有“比”字，而是带有指向性特征的“占”、“是”、“相当于”。在含有“比”字的关键句中，比后面的那个数量通常就作为标准量，也就是单位“1”。

（3）原数量与现数量

有的关键句中不是很明显地带有一些指向性特征的词语，也不是部分数和总数的关系。这类分数应用题的单位“1”比较难找。需要将题目文字完善成我们熟悉的类似带“比”的文字，然后再分析。

【考点 107】百分数问题

出现了比较数、标准数、分率（百分数），这三者的关系如下：

（1）比较数÷标准数＝分率（百分数）;

（2）标准数×分率＝比较数；

（3）比较数÷分率＝标准数。

【考点 108】经济问题

1.售价＝进价＋利润＝进价×（1+利润率）

2.利润＝售价－进价

3.利润率＝（售价－进价）/进价×100%

【考点 109】浓度问题

浓度就是溶质质量与溶液质量的比值，通常用百分数表示：

$$浓度=\frac{溶质质量}{溶液质量}\times100\%=\frac{溶质质量}{溶质质量+溶剂质量}\times100\%$$

【考点 110】工程问题

涉及到完成一项工程的时候，可以将总任务设为“1”；遇到复杂的应用题时，可从题目中找出不变的量，把不变的量看作单位“1”，将已知条件进行转化，找出所求数量相当于单位“1”的几分之几，再列式解答。

工程总量＝工程效率×工程时间

【考点 111】植树问题

1.在线段上的植树问题可以分为以下四种情形：

（1）两端都要植树，棵数＝间隔数＋1；

（2）只有一端要植树，棵数＝间隔数；

（3）两端都不植树，棵数＝间隔数－1；

（4）路线的两边要植树，那么植树的棵数应乘以 2。

2.封闭线路上植树：棵数＝间隔数。

【考点 112】爬井问题

蜗牛每天先向上爬 M 米，然后向下退 N 米，如果井深 L 米，需要多少天才能到达井口？

蜗牛每天先向上爬 M 米，然后向下退 N 米，则它每天向上爬 $M-N$ 米。所以，需要 $\frac{L-M}{M-N}+1$ 天。

【考点 113】爬楼问题

从地面爬到第 N 楼：要爬 $N-1$ 层，中间可以休息 $N-2$ 次；

从第 M 楼爬到第 N 楼：要爬 $N-M$ 层，中间可以休息 $N-M-1$ 次。

【考点 114】优化问题

科学、合理地安排时间的方法，就叫做最佳安排。

必须要考虑以下几个问题：

1.要知道做哪几件事；

2.做每件事需要的时间；

3.要弄清先做什么？后做什么？哪些事可以同时做？

【考点 115】钟表问题

表针间的距离用夹角表示：重合时距离为 0 度，成一直线时距离为 180 度，成直角时距离为 90 度。

表针各自的速度也用角度来表示：

①时针：每十二个小时绕钟面转一圈，每分钟走 $360 \div 12 \div 60 = 0.5$ 度；

②分针：每小时绕钟面转一圈，每分钟走 $360 \div 60 = 6$ 度；

③速度差为 $6 - 0.5 = 5.5$ 度/分钟，速度和为 $6 + 0.5 = 6.5$ 度/分钟。

【考点 116】几何问题

几何问题的题型包括三大类：

（1）正方体、长方体、圆柱、圆锥表面积的求法；

（2）体积的求法，包含等体积变换、旋转体类型；

（3）立体图形表面的染色问题。

不规则形体的体积常用方法：

（1）化虚为实法

（2）切片转化法

（3）先补后去法

（4）实际操作法

【考点 117】抽屉原理

1.基本抽屉原理：

（1）如果把 $x + k\left(k \geq 1\right)$ 个元素放到 x 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里含有 2 个或 2 个以上的元素；

（2）如果把 $m \times x + k\left(x > k \geq 1\right)$ 个元素放到 x 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里含有 $m+1$ 个或更多的元素。当元素总数达到抽屉数的若干倍后，可用抽屉数除元素总数，写成下面的等式：

元素总数＝商×抽屉数＋余数

如果余数不是 0，则最小数＝商＋1；如果余数正好是 0，则最小数＝商。

2.解题策略：

一定注意题目中哪些是“抽屉”，哪些是“元素”。

3.按照如下步骤解答：

（1）构造抽屉，指出元素；

（2）把元素放入（或取出）抽屉；

（3）说明理由，得出结论。

【考点 118】找次品问题

找次品的规律

要辨别的物品总数目	保证能找到次品需要的次数
2~3	1
4~9	2
10~27	3
28~81	4
82~243	5
…	…
$3^{n-1}+1\sim3^n$	n

利用天平找次品的时候，要使称的次数少，把待测物品分成 3 份，能平均分的平均分，不能平均分的尽量使多的与少的一份只差 1，就能保证找出次品并且称的次数少。

【考点 119】鸡兔同笼问题

“假设法”：依照已知条件进行推算，根据数量上出现的矛盾，作适当调整，从而找到正确答案。

运用假设法的思路解应用题，先要根据题意假设未知的两个量是同一种量，或者假设要求的两个未知量相等；其次，要根据所作的假设，注意数量关系发生的变化并作出适当

调整。

“鸡兔同笼”关系：

兔数=（总脚数－每只鸡脚数×鸡兔总数）÷（每只兔子脚数－每只鸡脚数）

鸡数=鸡兔总数－兔数

【考点 120】牛吃草问题

当牛在吃草的时候，草每天都在生长，草的数量在不断变化。这类工作总量不固定（均匀变化）的问题就是“牛吃草”问题。

公式总结：$Y=\left(X-V\right)T$，其中 Y 为原有的草量，X 为牛的头数，V 为每天草长的量，T 为牛吃的时间。

【考点 121】年龄问题

年龄问题：已知两人的年龄，求若干年前或若干年后两人年龄之间倍数关系的应用题，叫做年龄问题。年龄问题的三个基本特征：

（1）两个人的年龄差是不变的；

（2）两个人的年龄是同时增加或者同时减少的；

（3）两个人的年龄的倍数是发生变化的；

解题规律：抓住年龄差是个不变的数（常数），而倍数却是每年都在变化的这个关键。

【考点 122】盈亏问题

1.基本概念：一定量的对象，按照某种标准分组，产生一种结果，按照另一种标准分组，又产生一种结果，由于分组的标准不同，造成结果的差异，由它们的关系求对象分组的组数或对象的总量。

2.基本思路：先将两种分配方案进行比较，分析由于标准的差异造成结果的变化，根据这个关系求出参加分配的总份数，然后根据题意求出对象的总量。

3.基本题型：

①一次有余数，另一次不足；

基本公式：总份数＝（余数＋不足数）÷两次每份数的差

②当两次都有余数；

基本公式：总份数＝（较大余数一较小余数）÷两次每份数的差

③当两次都不足；

基本公式：总份数＝（较大不足数一较小不足数）÷两次每份数的差

基本特点：对象总量和总的组数是不变的。

关键问题：确定对象总量和总的组数。

【考点 123】周期问题

1.周期：我们把连续两次出现所经过的时间叫周期；解决有关周期性问题的关键是确定循环周期。

2.分类：①图形中的周期问题；②数列中的周期问题；③年月日中的周期问题。

3.闰年：一年有 366 天。①年份能被 4 整除；②如果年份能被 100 整除，则年份必须能被 400 整除。

4.平年：一年有 365 天。①年份不能被 4 整除；②如果年份能被 100 整除，但不能被 400 整除。

5.周期性问题的基本解题思路是：首先要正确理解题意，从中找准变化的规律，利用这些规律作为解题的依据；其次要确定解题的突破口。

主要方法有观察法、逆推法、经验法等；主要问题有年月日、星期问题等。

①观察、逆推等方法找规律，找出周期。确定周期后，用总量除以周期，如果正好有整数个周期，结果就为周期里的最后一个；

②如果比整数个周期多 n 个，那么为下个周期里的第 n 个；

③如果不是从第一个开始循环，可以从总量里减掉不是循环的个数后，再继续算。

第二模块　图形与几何

第一章 平面几何

【考点 124】三角形

1.三角形的分类

（1）按边的关系分类：$$\text{三角形}\begin{cases}\text{不等边三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底和腰不相等的等腰三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\end{cases}$$

（2）按角的关系分类：$$\text{三角形}\begin{cases}\text{直角三角形（有一个角是直角）}\\ \text{斜三角形}\begin{cases}\text{锐角三角形（三个角都是锐角）}\\ \text{钝角三角形（有一个角是钝角）}\end{cases}\end{cases}$$

把边和角联系在一起，我们又有一种特殊的三角形：等腰直角三角形，它是两条直角边相等的直角三角形。

2.三角形具有稳定性。

3.三角形的内角和定理：三角形的内角和等于$180°$。

4.三角形三边关系定理：三角形的两边之和大于第三边。

5.三角形的周长与面积：$C_{\triangle ABC}=a+b+c$；$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}$。

【考点 125】三角形的内心

1.三角形的三条角平分线交于一点，该点即为三角形的内心。

2.三角形的内心到三条边的距离相等，都等于内切圆半径r。

3.$r=\dfrac{2S}{a+b+c}$。

4.在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$r=\dfrac{a+b-c}{2}$。

5.$\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$，$\angle BOA=90°+\frac{1}{2}\angle C$，$\angle AOC=90°+\frac{1}{2}\angle B$。

6. $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\left[(a+b+c)r\right]}{2}$（$r$ 是内切圆半径）。

【考点 126】三角形的外心

1.三角形的三条边的垂直平分线的交点，即为三角形外接圆的圆心。

2.三角形的外接圆有且只有一个，即对于给定的三角形，其外心是唯一的，但一个圆的内接三角形却有无数个，这些三角形的外心重合。

3.锐角三角形的外心在三角形内；钝角三角形的外心在三角形外；直角三角形的外心与斜边的中点重合。

4. $OA=OB=OC=R$ 。

5. $\angle BOC=2\angle BAC$，$\angle AOB=2\angle ACB$，$\angle COA=2\angle CBA$ 。

6. $S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R}$（$R$ 是外接圆半径）。

【考点 127】三角形的重心

1.重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 $2:1$；

2.重心与三角形的三个顶点组成的三个三角形面积相等；

3.若三角形三个顶点坐标分别为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，则重心 G 的坐标为 $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

4.三角形的垂心：从三角形一个顶点向它的对边作垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高线（简称三角形的高）。（三角形的三条高的交点称为三角形的垂心）

【考点 128】三角形的中位线

1.连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线。

2.三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半。

3.常用结论：任一个三角形都有三条中位线，由此有：

结论 1：三条中位线组成一个三角形，其周长为原三角形周长的一半。

结论 2：三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形。

结论 3：三条中位线将原三角形划分出三个面积相等的平行四边形。

结论 4：三角形一条中线和与它相交的中位线互相平分。

结论 5：三角形中任意两条中位线的夹角与这夹角所对的三角形的顶角相等。

【考点 129】等腰三角形

1.性质

定理：等腰三角形的两个底角相等（简称：等边对等角）。

推论 1：等腰三角形顶角平分线平分底边并且垂直于底边，即等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高重合（简称：三线合一）。

推论 2：等边三角形的各个角都相等，并且每个角都等于 $60°$。

2.判定

定理：如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简称：等角对等边）。这个判定定理常用于证明同一个三角形中的边相等。

推论 1：三个角都相等的三角形是等边三角形。

推论 2：有一个角是 $60°$ 的等腰三角形是等边三角形。

【考点 130】直角三角形

1.性质

（1）两个锐角互余：$\angle C = 90° \Rightarrow \angle A + \angle B = 90°$。

（2）在直角三角形中，$30°$ 角所对的直角边等于斜边的一半。

（3）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

（4）勾股定理：直角三角形两直角边 a，b 的平方和等于斜边 c 的平方，即 $a^2 + b^2 = c^2$。

（5）射影定理：在直角三角形中，斜边上的高线是两直角边在斜边上的射影的比例中项，每条直角边是它们在斜边上的射影和斜边的比例中项。

2.判定

（1）有一个角是直角的三角形是直角三角形。

（2）如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。

（3）勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a，b，c 有关系 $a^2 + b^2 = c^2$，那么这个三角形是以 $\angle C$ 为直角的直角三角形。

【考点 131】三角形相似

1.概念

对应角相等，对应边成比例的三角形叫做相似三角形。相似用符号“∽”来表示，读作“相似于”。相似三角形对应边的比叫做相似比（或相似系数）。

2.判定

（1）三角形相似的判定方法

定义法：对应角相等，对应边成比例的两个三角形相似。

平行法：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似。

判定定理 1：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似，可简述为两角对应相等，两三角形相似。

判定定理 2：如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似，可简述为两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似。

判定定理 3：如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似，可简述为三边对应成比例，两三角形相似。

（2）直角三角形相似的判定方法

以上各种判定方法均适用。

定理：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似。

垂直法：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似。

3.性质

（1）相似三角形的对应角相等，对应边成比例。

（2）相似三角形对应高的比、对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比。

（3）相似三角形周长的比等于相似比。

（4）相似三角形面积的比等于相似比的平方。

【考点 132】三角形全等

1.概念

能够完全重合的两个图形叫做全等形。

能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形。两个三角形全等时，互相重合的顶点叫做对应顶点，互相重合的边叫做对应边，互相重合的角叫做对应角。夹边就是三角形中相邻两角的公共边，夹角就是三角形中有公共端点的两边所成的角。

2.判定

（1）三角形全等的判定方法

边角边定理：有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可简写成“边角边”或“SAS”）；

角边角定理：有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角边角”或“ASA”）；

角角边定理：有两邻角和它们的一条对边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角角边”或“AAS”）；

边边边定理：有三边对应相等的两个三角形全等（可简写成“边边边”或“SSS”）。

（2）直角三角形全等的判定方法

以上各种判定方法均适用。

HL 定理（斜边、直角边定理）：有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可简写成“斜边、直角边”或“HL”）。

【考点 133】四边形

1.对角线

（1）在四边形中，连接不相邻两个顶点的线段叫做四边形的对角线。

（2）设多边形的边数为n，则多边形的对角线条数为$\frac{n(n-3)}{2}$。

2.四边形的内角和定理及外角和定理

（1）四边形的内角和定理：四边形的内角和等于$360°$。

（2）四边形的外角和定理：四边形的外角和等于$360°$。

（3）推论：①多边形的内角和定理：n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$；②多边形的外角和定理：任意多边形的外角和等于 $360°$。

【考点 134】平行四边形

1.性质

性质 1：平行四边形的邻角互补，对角相等。

性质 2：平行四边形的对边平行且相等。

推论：夹在两条平行线间的平行线段相等。

性质 3：平行四边形的对角线互相平分。

性质 4：若一直线过平行四边形两对角线的交点，则这条直线被一组对边截下的线段以对角线的交点为中点，并且这条直线二等分此平行四边形的面积。

2.判定

定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形。

判定定理 1：两组对角分别相等的四边形是平行四边形。

判定定理 2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形。

判定定理 3：对角线互相平分的四边形是平行四边形。

判定定理 4：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形。

3.周长与面积

$C_{\square ABCD}=2(a+b)$（其中 a，b 为邻边）；$S_{\square ABCD}=底\times 高=ah_a$

【考点 135】矩形

1.性质

性质 1：具有平行四边形的一切性质。

性质 2：矩形的四个角都是直角。

性质 3：矩形的对角线相等。

性质 4：矩形是轴对称图形。

2.判定

定义：有一个角是直角的平行四边形是矩形。

判定定理 1：有三个角是直角的四边形是矩形。

判定定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形。

3.周长与面积

$C_{\square ABCD}=2(a+b)$（其中 a，b 为邻边）；$S_{\square ABCD}=长\times宽=ab$

【考点 136】菱形

1.性质

性质 1：具有平行四边形的一切性质。

性质 2：菱形的四条边相等。

性质 3：菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角。

性质 4：菱形是轴对称图形。

2.判定

定义：有一组邻边相等的平行四边形是菱形。

判定定理 1：四条边都相等的四边形是菱形。

判定定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

3.周长与面积

$C_{菱形ABCD}=4\times边长=2\sqrt{a^2+b^2}$

$S_{菱形ABCD}=底\times高=\frac{1}{2}\times a\times b$（$a$、$b$ 分别为菱形的两条对角线）

【考点 137】正方形

1.性质

性质 1：具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质。

性质 2：正方形的四个角都是直角，四条边都相等。

性质 3：正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角。

性质 4：正方形是轴对称图形，有 4 条对称轴。

性质 5：正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形，两条对角线

把正方形分成四个全等的小等腰直角三角形。

性质 6：正方形的一条对角线上的一点到另一条对角线的两端点的距离相等。

2.判定

①判定一个四边形是正方形的主要依据是定义，途径有两种：a.先证它是矩形，再证有一组邻边相等；b.先证它是菱形，再证有一个角是直角。

②判定一个四边形为正方形的一般顺序如下：先证明它是平行四边形，再证明它是菱形（或矩形），最后证明它是正方形。

3.周长与面积

$C_{\text{正方形}ABCD}=4a$；$S_{\text{正方形}ABCD}=a^2=\frac{1}{2}\times\text{对角线}^2$

【考点 138】等腰梯形

1.等腰梯形的性质

性质 1：等腰梯形的两腰相等，两底平行。

性质 2：等腰梯形的对角线相等。

性质 3：等腰梯形是轴对称图形，它只有一条对称轴，即两底的垂直平分线。

2.等腰梯形的判定

定义：两腰相等的梯形是等腰梯形。

判定定理 1：在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形。

判定定理 2：对角线相等的梯形是等腰梯形。

【考点 139】圆

1.垂径定理及其推论

（1）垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧。

（2）推论 1

①平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧。

②弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧。

③平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧。

（3）推论 2：圆的两条平行弦所夹的弧相等。

垂径定理及其推论可概括为：直径$\left\{\begin{matrix}\text{过圆心}\\\text{垂直于弦}\\\text{平分弦}\\\text{平分弦所对的优弧}\\\text{平分弦所对的劣弧}\end{matrix}\right\}$知二推三

2.弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理及其推论

（1）定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

（2）推论：在同圆或等圆中，如果两个圆的圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等。

3.圆周角定理及其推论

定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等。

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90° 的圆周角所对的弦是直径。

【考点 140】切线的判定和性质

切线的判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。

切线的性质定理：圆的切线垂直于经过切点的半径。

【考点 141】弧长及面积公式

1.弧长公式及圆周长

（1）弧长公式：$n°$ 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式为 $l=\dfrac{n\pi R}{180}$。

（2）圆周长：$C=2\pi R$。

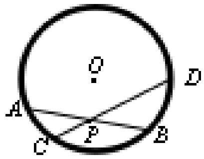
2.面积公式

（1）扇形面积：$S_{扇形}=\dfrac{n}{360}\pi R^2=\dfrac{1}{2}lR$，其中 n 是扇形的圆心角度数，R 是扇形的半径，l 是扇形的弧长。

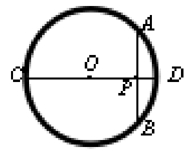
（2）圆面积：$S=\pi R^2$。

【考点 142】相交弦定理及推论

定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等：$PA\cdot PB=PC\cdot PD$。

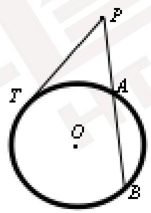


推论：如果弦与直径垂直相交时，那么弦的一半是它分直径所成两线段的比例中项：$PA^2=PC\cdot PD$。

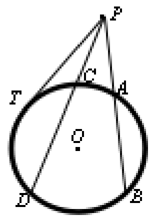


【考点 143】切割线定理及推论

定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆的交点的两条线段长的比例中项。PT 切 $\odot O$ 于 $T\Rightarrow PT^2=PA\cdot PB$。



推论：从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等。$PA\cdot PB=PC\cdot PD$。



【考点 144】图形变换

1.平移

（1）平移不改变图形的大小和形状，但图形上的每个点都沿同一方向进行了移动。

（2）连接各组对应点的线段平行（或在同一直线上）且相等。

2.旋转

（1）对应点到旋转中心的距离相等。

（2）对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角。

3.轴对称

（1）关于某条直线对称的两个图形是全等形。

（2）如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是对应点连线的垂直平分线。

（3）两个图形关于某直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上。

4.轴对称图形

把一个图形沿着某条直线折叠，如果直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴。

5.中心对称

（1）关于中心对称的两个图形是全等形。

（2）关于中心对称的两个图形，对称点连线都经过对称中心，并且被对称中心平分。

（3）关于中心对称的两个图形，对应线段平行（或在同一直线上）且相等。

【考点 145】点的坐标变换

图形上的某点(a, b)：

（1）平移：向左平移$x_0(>0)$个单位：$(a-x_0, b)$；向右平移$x_0(>0)$个单位：$(a+x_0, b)$；

向下平移$y_0(>0)$个单位：$(a, b-y_0)$；向上平移$y_0(>0)$个单位：$(a, b+y_0)$。

按照向量$\boldsymbol{a}=(x_0, y_0)$平移：$(a+x_0, b+y_0)$。

（2）对称：关于x轴对称的点是$(a,-b)$；关于y轴对称的点是$(-a, b)$；关于原点对称的点是$(-a,-b)$。

【考点 146】投影与三视图

1.投影

（1）定义：用光线照射物体，在地面上或墙壁上得到的影子，叫做物体的投影。

（2）平行投影：由平行光线（如太阳光线）形成的投影称为平行投影。

（3）中心投影：由同一点（点光源）发出的光线所形成的投影称为中心投影。

2.视图

（1）主视图：在正面内得到的由前向后观察物体的视图，叫做主视图。

（2）俯视图：在水平面内得到的由上向下观察物体的视图，叫做俯视图。

（3）左视图：在侧面内得到的由左向右观察物体的视图，叫做左视图，有时也叫做侧视图。

第二章 立体几何

【考点 147】多面体

多面体：由若干个多边形围成的几何体叫做多面体。其中，每个多边形称为多面体的面，相邻两个面的公共边称为多面体的棱，两条棱的交点称为多面体的顶点，连接不在同一个平面内的两个顶点的线段称为多面体的对角线。多面体有几个面就称为几面体，如由四个面围成的就是四面体。

凸多面体：把多面体的任一个面延展成平面，若其余各面都位于这个面的同一侧，这样的多面体称为凸多面体。

正多面体：多面体的各个面都是全等的正多边形，并且各个多面角都是全等的正多面角。正多面体只有正四面体、正六面体（正方体）、正八面体、正十二面体、正二十面体。

【考点 148】棱柱

1.定义

有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的几何体称为棱柱。互相平行的两个面称为棱柱的底面，其余各面称为棱柱的侧面，相邻侧面的公共边称为棱柱的棱，不在同一个平面内的两个顶点的连线称为棱柱的对角线，两底面间的距离称为棱柱的高。

2.性质

（1）各个侧面都是平行四边形，侧棱都相等；

（2）棱柱的两个底面与平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形；

（3）过棱柱不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形。

3.分类

（1）斜棱柱：侧棱不垂直于底面的棱柱；

（2）直棱柱：侧棱垂直于底面的棱柱。

4.常见的棱柱

（1）正棱柱：底面是正多边形的直棱柱；

（2）直平行六面体：侧棱垂直于底面的平行六面体；

（3）长方体：底面是矩形的直平行六面体；

（4）正四棱柱：底面是正方形的直平行六面体；

（5）正方体：棱长都相等的正四棱柱。

【考点 149】棱锥

1.定义

由一个底面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形围成的几何体称为棱锥。有公共顶点的三角形称为棱锥的侧面，多边形称为棱锥的底面，所有侧面的公共顶点称为棱锥的顶点，顶点到底面的距离称为棱锥的高。

正棱锥：底面是正多边形，顶点在底面上的射影是底面的中心的棱锥。

2.性质

（1）平行于底面的截面与底面是相似多边形，相似比等于从顶点到截面和从顶点到底面距离的比；

（2）截面面积和底面面积的比等于上述相似比的平方。

【考点 150】圆柱、圆锥和圆台

1.定义

圆柱：以矩形的一边为旋转轴，旋转一周而形成的几何体称为圆柱。

圆锥：以直角三角形的一条直角边为旋转轴，旋转一周形成的几何体称为圆锥。

圆台：用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，截面和底面之间的部分称为圆台。

2.性质

（1）平行于底面的截面都是圆；

（2）圆柱、圆锥、圆台过轴的截面（轴截面）分别是全等的矩形、等腰三角形、等腰梯形；

（3）圆台的上底变大到与下底相同时，可以得到圆柱；圆台的上底变小为一点时，可以得到圆锥。

【考点 151】球

1.定义

半圆以其直径为旋转轴，旋转一周所成的曲面围成的几何体称为球。半圆的圆心称为球心，连接球心和球面上任意一点的线段称为球的半径，连接球面上两点且经过球心的线段称为球的直径。

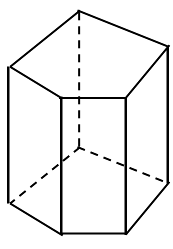
2.性质

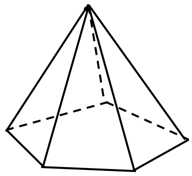
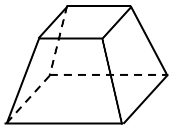
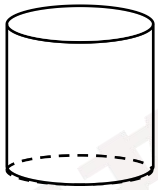
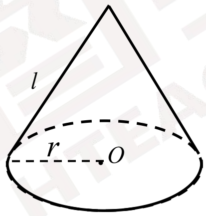
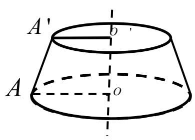
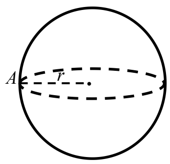
（1）用一个平面去截球，截面是圆面，用一个平面去截球面，截线是圆；

（2）球心与不过球心的截面圆心的连线垂直于截面，球心在截面上的射影是截面的圆心；

（3）球心到截面的距离 d 与球的半径 R 、截面圆的半径 r ，三者的关系为：$r=\sqrt{R^2-d^2}$ 。

【考点 152】空间几何体的结构、表面积与体积

几何体		定义	图形	表面积和体积
多面体	棱柱	有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面围成的多面体叫做棱柱		$S_{直棱柱侧面积}=Ch$ ，$V_{柱}=S_{底}h$ （ C 为底面周长， $S_{底}$ 为底面面积， h 为高）

	棱锥	有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体叫做棱锥		$V_{锥}=\frac{1}{3}S_{底}h$（$S_{底}$ 为底面面积， h 为高）
	棱台	棱锥被平行于棱锥底面的平面所截后，截面和底面之间的部分叫做棱台		$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}})(h为高)$
旋转体	圆柱	以矩形的一边所在的直线为轴旋转，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫圆柱		$S_{侧}=2\pi rh$ ，$S_{表}=2\pi r^2+2\pi rh$ $V_{柱}=S_{底}h$
	圆锥	以直角三角形的一条直角边所在的直线为轴旋转，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫圆锥		$S_{侧}=\pi rl$，$S_{表}=\pi r^2+\pi rl$ $V_{锥}=\frac{1}{3}S_{底}h$
	圆台	用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，截面和底面之间的部分叫做圆台		$V_{台体}=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+R\cdot r)(h为高)$
	球	以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体，叫球体，简称球		$S=4\pi r^2$ $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

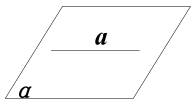
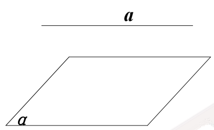
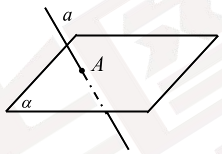
【考点 153】线线位置关系

直线与直线的位置关系

位置关系	是否共面	公共点数量
相交	在同一平面内	有且只有一个
平行	在同一平面内	无公共点
异面	不同在任何一个平面内	无公共点

【考点 154】线面位置关系

直线与平面的位置关系

<table>
<tr><th colspan="2">位置关系</th><th>图示</th><th>表示方法</th><th>公共点个数</th></tr>
<tr><td colspan="2">直线在平面内</td><td>
</td><td>$a\subset\alpha$</td><td>无数个</td></tr>
<tr><td rowspan="2">直线在平面外</td><td>平行</td><td>
</td><td>$a\,/\!/\,\alpha$</td><td>0 个</td></tr>
<tr><td>相交</td><td>
</td><td>$a\cap\alpha=A$</td><td>1 个</td></tr>
</table>

1.直线与平面平行

判定定理 1：平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，则这条直线与这个平面平行。

判定定理 2：一条直线与一个平面垂直，则平面外与这条直线垂直的直线与该平面平行。

性质定理 1：一条直线和一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线和该直线平行。

2.直线与平面垂直

判定定理 1：如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。

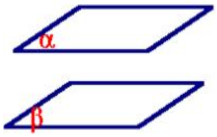
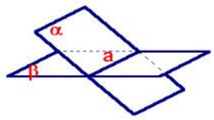
判定定理 2：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。

性质定理 1：如果一条直线和一个平面垂直，则这条直线垂直于平面内任意一条直线。

性质定理 2：垂直于同一个平面的两条直线平行。

【考点 155】面面位置关系

平面与平面的位置关系

位置关系	图示	表示方法	公共点个数
两平面平行		$\alpha // \beta$	0 个
两平面相交		$\alpha \cap \beta = a$	无数个 （有一条公共直线）

1.平面与平面平行

判定定理 1：如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行。

判定定理 2：如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条相交直线，那么这两个平面平行。

判定定理 3：垂直于同一条直线的两个平面平行。

判定定理 4：平行于同一条平面的两个平面平行。

性质定理 1：如果两个平面平行，则其中一个平面内的任意一条直线都平行于另一个平面。

性质定理 2：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行。

性质定理 3：如果两个平行平面有一个垂直于一条直线，那么另一个平面也垂直于这条直线。

2.平面与平面垂直

定义：如果两个平面所成的二面角是直二面角，就说这两个平面相互垂直，记作：

$\alpha \perp \beta$。

判定定理：如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直。

性质定理 1：如果两个平面垂直，则其中一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面。

性质定理 2：如果两个相交平面同时垂直于第三个平面，那么它们的交线垂直于第三个平面。

【考点 156】三垂线定理及其逆定理

定理：在平面内的一条直线，如果它和穿过这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

逆定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直。

【考点 157】异面直线的夹角

1.定义：设 a，b 是两条异面直线，经过空间中任一点 O 作直线 $a' // a$，$b' // b$，把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角）θ。

2.范围：$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$。

3.求法：计算异面直线所成角的关键是平移（中点平移，顶点平移以及补形法：把空间图形补成熟悉的或完整的几何体，如正方体、平行六面体、长方体等，以便易于发现两条异面直线间的关系）转化为相交两直线的夹角。

（向量法）$\theta = \arccos \frac{|\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2|}{|\boldsymbol{m}_1| \cdot |\boldsymbol{m}_2|}$，其中 $\boldsymbol{m}_1$、$\boldsymbol{m}_2$ 分别为异面直线 a、b 的方向向量，$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$。

【考点 158】直线与平面的夹角

1.定义：平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的角，叫这条直线和这个平面所成的角 θ。

2.范围：$\theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

当直线与平面垂直或平行（含直线在平面内）时，规定θ分别为$\dfrac{\pi}{2}$和 0。

3.求法

①定义法：作出直线在平面上的射影，找到线面角；

②射影法：设斜线段AB在平面α内的射影为$A'B'$，则AB与α所成的角θ，$\cos\theta=\dfrac{|A'B'|}{|AB|}$；

③向量法：$\theta=\arcsin\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$，其中$\boldsymbol{n}$为平面$\alpha$内的法向量，$\overrightarrow{AB}$为斜线的共线向量。

4.斜线与平面所成的角的特征：斜线与平面中所有直线所成角中最小的角。

【考点 159】二面角

1.定义

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，以二面角的棱上任一点为端点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角。

2.平面角的三要素：顶点在棱上；角的两边分别在两个半平面内；角的两边与棱都垂直。

3.二面角的范围：$[0，\pi]$。

4.求法

①定义法：直接在二面角的棱上取一点（特殊点），分别在两个半平面内作棱的垂线，得出平面角，用定义法时，要认真观察图形的特性。

②三垂线法：已知二面角其中一个面内一点到一个面的垂线，用三垂线定理或逆定理作出二面角的平面角。

③垂面法：已知二面角内一点到两个面的垂线时，过两垂线作平面与两个半平面的交线所成的角即为平面角，由此可知，二面角的平面角所在的平面与棱垂直。

④射影法：利用面积射影公式 $S_{射影}=S_{原}\cdot\cos\theta$，其中 θ 为平面角的大小，此方法不必在图形中画出平面角。

⑤向量法：$\theta=\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$，其中 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 α、β 的法向量。（同进同出取补角，一进一出取同角）

【考点 160】点到直线的距离

（向量法）点 P 到直线 l 的距离：$d=\dfrac{\sqrt{(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|)^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{|\boldsymbol{a}|}$，其中 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{QA}$ 为直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OP}$，点 Q 为直线 l 上的一点。

【考点 161】点到平面的距离

1.垂面法：借助于面面垂直的性质来作垂线，其中过已知点确定已知面的垂面是关键。

2.体积法：转化为求三棱锥的高。

3.向量法：点 P 到平面 α 的距离：$d=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$，其中点 A 为平面 α 上的一点，PA 为经过平面 α 的一条斜线，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量。

【考点 162】异面直线的距离

1.定义

和两条异面直线都垂直相交的直线叫异面直线的公垂线。两条异面直线的公垂线有且只有一条，而和两条异面直线都垂直的直线有无数条，因为空间中，垂直不一定相交。

2.求法

①直接找公垂线段而求之。

②转化为求直线到平面的距离，即过其中一条直线作平面和另一条直线平行。

③转化为求平面到平面的距离，即过两直线分别作相互平行的两个平面。

④向量法：异面直线 l_1、l_2 的距离：$d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为公垂向量，点 A、B 分别

为直线l_1、l_2上的一点。

【考点 163】线面、面面、球面的距离

1.直线与平面的距离：前提是直线与平面平行，利用直线上任意一点到平面的距离都相等，转化为求点到平面的距离。

2.两平行平面之间的距离：转化为求点到平面的距离。

3.球面距离（球面上经过两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度）的计算步骤：

（1）计算线段AB的长；

（2）计算球心角$\angle AOB$的弧度数；

（3）用弧长公式计算劣弧AB的长。

第三章 解析几何

【考点 164】向量的基本概念

1.向量：既有大小又有方向的量。

2.表示方法：几何表示法（用有长度的有向线段表示）、字母表示法（如$\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AB}$）。

3.向量的模：向量的长度。$\boldsymbol{a}$的模为$|\boldsymbol{a}|$。

4.常见向量

（1）零向量：长度为0的向量称为零向量，记为$\boldsymbol{0}$。

零向量的方向是任意的。零向量与任意向量平行，与零向量相等。

（2）单位向量：与非零向量$\boldsymbol{a}$同方向且长度等于 1 的向量，称为$\boldsymbol{a}$的单位向量$\boldsymbol{e}$。则有$\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。

（3）平行向量：方向相同或相反的非零向量称为平行向量。

任一组平行向量都可平移到同一直线上，故平行向量就是共线向量。

（4）相等向量：长度相等且方向相同的向量称为相等向量，如$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$表示$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为相等向量。

任意两个相等非零向量，都可用同一条有向线段表示，并且与有向线段的起点无关。

（5）相反向量：长度相等且方向相反的向量称为相反向量。

【考点 165】向量的运算

1.向量的加法

已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫做$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$。

2.向量的减法

向量$\boldsymbol{a}$加上$\boldsymbol{b}$的相反向量，是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差。

3.数乘运算

实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积是一个向量，记作$\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度和方向规定：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$相同$(\lambda>0)$或相反$(\lambda<0)$；$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

（1）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{a}$

（2）$(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

（3）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

4.数量积

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle$，$\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\ \pi]$。其中，$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\in\mathbf{R}$，称为$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上的投影。

【考点 166】平面向量的坐标运算

1.若$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则有：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$；$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$

2.若$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则有：

$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1，y_2-y_1\right)$； A 、 B 两点间距离为 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

线段 AB 的中点坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

【考点 167】向量共线

1.向量共线定理

向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是：有且只有一个非零实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 。

2.平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1$， $\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1， λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 。

3.向量平行

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\right)$ 的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 。

【考点 168】向量相交

设 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量， $\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，则：

（1） $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$；

（2） $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

（3）当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$。特别的 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

（4） $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$；

（5） $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$。

【考点 169】向量垂直

设 $\boldsymbol{a}=\left(x_1，y_1\right)$， $\boldsymbol{b}=\left(x_2，y_2\right)$，则有：

（1）向量式： $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\right)\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

（2）坐标式：$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$；

（3）直线 l_1：$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与 l_2：$A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 垂直的充要条件是

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$。

【考点 170】直线方程

直线方程的五种形式

名称	方程	常数的几何含义	适用范围
点斜式	$y - y_0 = k(x - x_0)$	(x_0, y_0) 是直线上一定点，k 为斜率	不能表示垂直于 x 轴的直线
斜截式	$y = kx + b$	k 表示斜率，b 表示在 y 轴的截距	不能表示垂直于 x 轴的直线
两点式	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	(x_1, y_1)，(x_2, y_2) 是直线上两定点	不能表示垂直于坐标轴的直线
截距式	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	a 表示在 x 轴上的截距， b 表示在 y 轴上的截距	不能表示垂直于坐标轴和经过原点的直线
一般式	$Ax + By + C = 0$	当 $A \neq 0$ 且 $B \neq 0$ 时， 斜率为 $-\dfrac{A}{B}$， 在 x 轴上的截距为 $-\dfrac{C}{A}$， 在 y 轴上的截距为 $-\dfrac{C}{B}$	任意直线

【考点 171】距离公式和夹角公式

1.点到直线的距离

已知点$\left(x_0，y_0\right)$与直线$Ax+By+C=0$，则点到直线的距离为$d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

2.平行线间距离

若l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$，则$d=\dfrac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

注意：x，y对应项系数应相等。

3.两直线间位置关系

设直线l_1：$y=k_1x+b_1$或$A_1x+B_1y+C_1=0$，直线l_2：$y=k_2x+b_2$或$A_2x+B_2y+C_2=0$

（1）平行：$k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$，或者$A_1B_2-A_2B_1=0$且$A_1C_2-A_2C_1\neq 0$。

（2）重合：$k_1=k_2$且$b_1=b_2$，或者$A_1B_2-A_2B_1=0$且$A_1C_2-A_2C_1=0$。

（3）相交：$k_1\neq k_2$，或者$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$。

（4）垂直：$k_1\cdot k_2=-1$，或者$A_1A_2+B_1B_2=0$。

4.到角和夹角公式

（1）到角：直线l_1到l_2的到角是l_1绕着交点按逆时针方向旋转到和l_2重合所转的角θ，

$\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\left(k_1k_2\neq -1\right)$，$\theta\in\left(0，\pi\right)$。

（2）夹角：直线l_1到l_2相交形成的两对对顶角中，不大于直角的角θ，

$\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|\left(k_1k_2\neq -1\right)$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

【考点172】圆的方程

1.标准方程：$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2$，其中，$\left(a，b\right)$——圆心，$r$——半径。

2.一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，$\left(D^2+E^2-4F>0\right)$

$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$——圆心，$r=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$——半径。

3.参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$，$(a,\ b)$——圆心，$r$——半径。

【考点 173】直线与圆的位置关系

直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种：

若 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，则有：

（1）$d>r\Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta<0$；

（2）$d=r\Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta=0$；

（3）$d<r\Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta>0$。

【考点 174】圆与圆的位置关系

设两圆圆心分别为 O_1，O_2，半径分别为 r_1，r_2，$|O_1O_2|=d$，则有：

（1）$d>r_1+r_2\Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4 条公切线；

（2）$d=r_1+r_2\Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3 条公切线；

（3）$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2\Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2 条公切线；

（4）$d=|r_1-r_2|\Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1 条公切线；

（5）$0<d<|r_1-r_2|\Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线。

【考点 175】椭圆

1.定义

定义I：在同一平面内，若 F_1，F_2 是两定点，P 为动点，且 $|PF_1|+|PF_2|=2a>|F_1F_2|$（$a$ 为常数），则 P 点的轨迹是椭圆。

定义II：若 F_1 为定点，l 为定直线，动点 P 到 F_1 的距离与到定直线 l 的距离之比为常

数 e（$0<e<1$），则 P 点的轨迹是椭圆。

2.标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$

（1）范围：$\{x\mid -a\le x\le a\}$；$\{y\mid -b\le y\le b\}$

（2）长轴长 $2a$，短轴长 $2b$，焦距 $2c$，$a^2=b^2+c^2$

（3）准线方程：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$

（4）焦半径：$|PF_1|=ex+a$，$|PF_2|=a-ex$，$|PF_1|=2a-|PF_2|$，$a-c\le|PF_1|\le a+c$

（注意涉及焦半径时的表示方法有两种：①用点 P 坐标表示；②第一定义）

【考点 176】双曲线

1.定义

定义Ⅰ：在同一平面内，若 F_1、F_2 是两定点，P 为动点，$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a<|F_1F_2|$（$a$ 为常数），则动点 P 的轨迹是双曲线。

定义Ⅱ：若动点 P 到定点 F 与定直线 l 的距离之比是常数 $e\left(e>1\right)$，则动点 P 的轨迹是双曲线。

2.标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$

（1）范围：$\{x\mid x\ge a或x\le -a\}$；$\{y\mid y\in\mathbf{R}\}$

（2）实轴长 $2a$，虚轴长 $2b$，焦距 $2c$，$c^2=a^2+b^2$

（3）准线方程：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$

（4）焦半径：$|PF_1|=-ex-a$，$|PF_2|=a-ex$，$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a$。

【考点 177】抛物线

1.定义：到定点 F 与定直线 l 的距离相等的点的轨迹是抛物线。

即：到定点 F 的距离与到定直线 l 的距离之比是常数 $e\left(e=1\right)$。

2.标准方程：$y^2=2px$（$p>0$），p——焦参数；

（1）焦点：$\left(\frac{p}{2},0\right)$，通径$=2p$（经过抛物线的焦点，作一条垂直于其对称轴的直线，该直线与抛物线有两个交点，这两个交点之间的线段叫做抛物线的通径）；

（2）准线：$x=-\frac{p}{2}$；

（3）焦半径：$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，过焦点弦长$|AB|=x_1+x_2+p$。

【考点 178】极坐标和直角坐标的互化

设 M 是坐标平面内任意一点，它的直角坐标是$(x,\ y)$，极坐标是$(\rho,\ \theta)$，$\rho\geq 0$，于是极坐标与直角坐标的互化公式如下表。

点 M	直角坐标$(x,\ y)$	极坐标$(\rho,\ \theta)$
互化公式	$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$	$\rho^2=x^2+y^2$ $\tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0)$

【考点 179】参数方程和普通方程的互化

1.普通方程化参数方程

①把曲线 C 的普通方程 $F(x,\ y)=0$ 化为参数方程的基本思路是引入参数，即选定合适的参数 t，先确定一个关系式 $x=f(t)$，再代入普通方程求得另一个关系式 $y=g(t)$，那么$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$就是曲线的参数方程，在参数方程与普通方程的互化中，必须使 x，y 的取值范围保持一致；②一般地，常选择的参数有角度、倾斜度、时间等。

2.参数方程化为普通方程

①把参数方程化为普通方程的基本思路是消去参数；②根据参数方程的结构特征，选取适当的消参方法，消参的常用方法有代入消参法、加减消参法、三角恒等式消参法、平方和（差）消参法、乘法消参法和混合消参法等。

第三模块　统计与概率

第一章 统计

【考点 180】统计量

1.平均数：一般地，如果有 n 个数 x_1，$x_2,\cdots x_n$，那么，$\overline{x}=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)$ 叫做这 n 个数的平均数，$\overline{x}$ 读作“x 拔”。

2.加权平均数：如果 n 个数中，x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_k 出现 f_k 次（这里 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$），那么，根据平均数的定义，这 n 个数的平均数可以表示为 $\overline{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$，这样求得的平均数 $\overline{x}$ 叫做加权平均数，其中 f_1，f_2,…，f_k 叫做权。

3.众数：在一组数据中，出现次数最多的数据叫做这组数据的众数。

4.中位数：将一组数据按大小顺序依次排列，处在最中间位置的一个数据（或最中间两个数据的平均数）叫做这组数据的中位数。

中位数的算法：设样本有 n 个数据，按大小顺序依次排列后，

（1）n 为奇数，第 $\frac{n+1}{2}$ 个数据为中位数；

（2）n 为偶数，第 $\frac{n}{2}$ 与 $\frac{n}{2}+1$ 个数据的平均数为中位数。

5.极差：一组数据中最大数据与最小数据的差叫做极差。

6.频数与频率

频数：在一组依大小顺序排列的测量值中，按一定的组距将其分组时，出现在各组内的测量值的数目，即落在各类别（分组）中的数据个数。频数也称“次数”，对总数据按某种标准进行分组，统计出各个组内含个体的个数。

频率：一般我们称落在不同小组中的数据个数为该组的频数，频数与总数的比为频率。

【考点 181】统计学中几个基本概念

1.总体：所有考查对象的全体叫做总体。

2.个体：总体中每一个考查对象叫做个体。

3.样本：从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本。

4.样本平均数：样本中所有个体 x_1，$x_2,\cdots$，x_n 的平均数叫做样本平均数，即 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$。

5.总体平均数：总体中所有个体的平均数叫做总体平均数。在统计中，通常用样本平均数估计总体平均数。

6.样本方差：样本中所有个体 x_1，x_2，...，x_n 与样本平均数 $\overline{x}$ 的差的平方的平均数叫做样本方差，用 s^2 表示。方差反映了一组数据的波动情况。

$$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$$

7.总体方差：总体中所有个体与总体平均数的差的平方的平均数叫做总体方差。在统计中，通常用样本方差估计总体方差。

【考点 182】简单随机抽样

1.一般地，设一个总体含有 N 个个体，从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本（$n\le N$），如果每次抽取时总体内的各个个体被抽到的机会都相等，就把这种抽样方法叫做简单随机抽样。

2.特点：（1）总体个数有限；（2）逐个抽取；（3）不放回抽样；（4）等可能抽样。

3.抽样方法：（1）抽签法；（2）随机数表法。

【考点 183】系统抽样

1.定义：当总体元素个数很大时，样本容量不宜太小，这时可将总体分为均衡的若干部分，然后按照预先制定的规则，从每一部分抽取一个个体，得到所需要的样本（等距抽样）。

2.步骤：

（1）编号：采用随机的方式将总体中的个体编号；

（2）分段：将整个编号 N 进行分段，要确定分段的间隔 k。当 $\frac{N}{n}$ 是整数时，$k=\frac{N}{n}$；当 $\frac{N}{n}$ 不是整数时，通过从总体中剔除一些个体使剩下的个体数 N' 能被 n 整除，这时 $k=\frac{N'}{n}$；

（3）确定起始个体编号：在第 1 段用简单随机抽样确定起始的个体编号 l；

（4）按规则抽取：按照事先确定的规则（常将 l 加上间隔 k）抽取样本：

l，$l+k$，$l+2k,\cdots$，$l+(n-1)k$。

3.特点：（1）总体个数较多；（2）在每一段中进行简单随机抽样；（3）不放回抽样；（4）等可能抽样。

【考点 184】分层抽样

1.定义：当总体由差异明显的几部分组成时，为了使抽取的样本更好地反映总体情况，我们经常将总体中各个个体按某种特征分成若干个互不重叠的几部分，每一部分叫做层，在各层中按层在总体中所占比例进行简单随机抽样。

2.步骤：

（1）确定样本容量与总体个数的比例：样本容量 n，总体 N，则其比例为 $\frac{n}{N}$；

（2）确定各层抽取的个体数：根据样本容量与总体个数的比例，确定含有 N_m 个个体的层中应抽取个体个数为 $N_m\cdot\frac{n}{N}$；

（3）各层抽样：各层按简单随机抽样或系统抽样的方法抽取个体；

（4）合并：综合每层抽取的个体，组成样本。

3.特点：

（1）总体由差异明显的几部分组成；

（2）分成的各层互不重叠；

（3）各层抽取的比例等于样本容量在总体中的比例，即 $\frac{n}{N}$；

（4）不放回抽样；

（5）等可能抽样。

【考点 185】统计表

统计中常用的统计表主要指频率分布表。一般地，当总体很大或不便获取时，用样本的频率分布去估计总体的频率分布，我们把反映总体频率分布的表格称为频率分布表。

编制频率分布表的一般步骤如下：

1.求全距，决定组数和组距：全距是整个取值区间的长度，组距是指分成的区间的长度；

2.分组，通常对组内的数值所在的区间取左闭右开区间，最后一组取闭区间；

3.登记频数，计算频率，列出频率分布表。

【考点 186】统计图

1.条形统计图：可以清楚地表明各种数量的多少，是统计图资料分析中最常用的图形。

2.扇形统计图：可以比较清楚地反映出部分与部分、部分与总体之间的数量关系。

3.折线统计图：不仅可以表示数量的多少，而且可以反映同一事物在不同时间里的数量增减变化的情况。

4.茎叶统计图：原始数据信息无损失，方便记录与表示两位（或一位）有效数字的数据。

【考点 187】样本频率分布

1.研究频率分布的一般步骤：（1）计算极差；（2）决定组距与组数；（3）决定分点；（4）列频率分布表；（5）画频率分布直方图。

2.列表法求概率：当一次试验要设计两个因素，并且可能出现的结果数目较多时，为了不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用列表法。

3.树状图法求概率：当一次试验要设计三个或更多的因素时，用列表法就不方便了，为了不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用树状图法求概率。

4.利用频率估计概率：在同样的条件下，做大量的重复试验，利用一个随机事件发生的频率逐渐稳定到某个常数，可以估计这个事件发生的概率。

【考点 188】正态分布

1.解析式：$f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$ $\left(\sigma>0,-\infty<x<+\infty\right)$

其中π是圆周率；e是自然对数的底；x是随机变量的取值；μ为正态分布的均值；σ是正态分布的标准差；正态分布一般记为$N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$。

2.性质：正态分布由参数μ、σ唯一确定，如果随机变量$\xi\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，根据定义有：

$\mu=E\left(\xi\right)$，$\sigma^2=D\left(\xi\right)$。

（1）曲线在x轴的上方，与x轴不相交；

（2）曲线关于直线$x=\mu$对称；

（3）曲线在$x=\mu$时位于最高点；

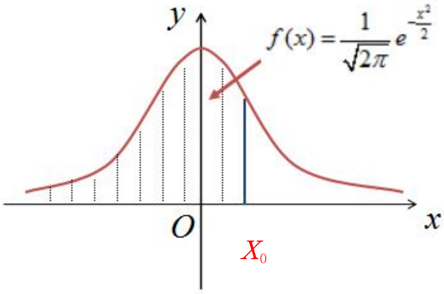
（4）当$x<\mu$时，曲线上升；当$x>\mu$时，曲线下降。并且当曲线向左、右两边无限延伸时，以x轴为渐近线，向它无限靠近；

（5）当μ一定时，曲线的形状由σ确定。σ越大，曲线越“矮胖”，表示总体越分散；σ越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中。

3.标准正态曲线：当$\mu=0$、$\sigma=1$时，正态总体称为标准正态总体，其相应的函数表示式是$f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ $\left(-\infty<x<+\infty\right)$，其相应的曲线称为标准正态曲线。

【考点 189】标准正态总体的概率问题

1.对于标准正态总体$N\left(0,1\right)$，$\Phi\left(x_0\right)$是总体取值小于x_0的概率，即$\Phi\left(x_0\right)=P\left(x<x_0\right)$。其中$x_0>0$，图中阴影部分的面积表示为概率$P\left(x<x_0\right)$。只要有标准正态分布表即可查表解决。从图中不难发现：当$x_0<0$时，$\Phi\left(x_0\right)=1-\Phi\left(-x_0\right)$；而当$x_0=0$时，$\Phi\left(0\right)=0.5$。



2.非标准正态总体在某区间内取值的概率

正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 可以通过 $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 转化成标准正态总体，然后求解。

【考点 190】线性回归

1.回归直线：设所求的直线方程为 $\hat{y}=a\hat{x}+b$，其中 a、b 是待定系数，

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ b=\overline{y}-a\overline{x} \end{cases}$$

，其中 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$。

相应的直线叫做回归直线。

2.相关系数：相关系数是英国统计学家皮尔逊提出的，对于变量 y 与 x 的一组观测值，

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ b=\overline{y}-a\overline{x} \end{cases}$$

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$$

称为变量 y 与 x 之间的样本相关系数，简称相关系数。用它来衡量两个变量之间的线性相关程度。

3.性质

当 $r>0$ 时，表明两个变量正相关；当 $r<0$ 时，表明两个变量负相关。

$|r|\le 1$，且$|r|$越接近 1，相关程度越大；且$|r|$越接近 0，相关程度越小。

当$|r|=1$时，两个变量间成线性关系。

【考点 191】独立性检验

1.定义：利用随机变量来判断“两个分类变量有关”的方法称为两个分类变量的独立性检验。其中，变量的不同“值”表示个体所属的不同类别，这种变量称为分类变量。

2.方法：（1）直观方法：二维条形图、三维柱状图；（2）精确方法：列联表（假设思想）。

3.列联表：列出两个分类变量频数表，称为列联表。

假设有两个分类变量 X 和 Y，它们的可能取值分别为$\{x_1, x_2\}$和$\{y_1, y_2\}$，其样本频数列联表（称为 2×2 列联表）为：

2×2 列联表

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

构造随机变量 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$ 为样本容量。

4.列联表进行独立性检验基本步骤：

（1）确定分类变量及可能取值，作列联表；

（2）根据列联表确定随机变量 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$的值；

（3）利用随机变量 K^2 进行判断检验：先假设两个分类变量 X 与 Y 无关系，计算出 K^2 的观测值 k，并与临界值进行比较，判断可能性。

第二章 排列组合

【考点 192】分步、分类计数原理

1.加法原理（分类计数原理）

做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有：$N=m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

2.乘法原理（分步计数原理）

做一件事，完成它有 n 个步骤，做第一步时有 m_1 种不同的方法，接着做第二步时有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有：$N=m_1\times m_2\times m_3\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法。

特别注意：分类是独立的、一次性的；分步是连续的、多次的。

【考点 193】排列

1.定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m\le n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个中取 m 个元素的一个排列。

2.排列数：从 n 个不同元素中取出 $m(m\le n)$ 个元素的所有不同排列的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示。

排列数公式：

（1）$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$，$n$，$m\in\mathbf{N}^*$，并且 $m\le n$；

（2）$\mathrm{A}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

3.全排列：n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个元素的一个全排列。

全排列数：$\mathrm{A}_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

正整数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘，用 $n!$ 表示。即 $A_n^n=n!$。

规定：$0!=1$。

4.排列数的性质：

（1）$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$

（2）$A_n^m=\dfrac{1}{n-m}A_n^{m+1}=\dfrac{n}{n-m}A_{n-1}^m$

（3）$A_n^m=mA_{n-1}^{m-1}+A_{n-1}^m$

【考点 194】组合

1.定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m\le n)$ 个元素合成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

2.组合数：从 n 个不同的元素中，取出 $m(m\le n)$ 个元素的所有不同组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示。

组合数公式：

（1）$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$，$n$，$m\in\mathbf{N}^*$，并且 $m\le n$；

（2）$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。

规定：$C_n^0=1$。

3.排列与组合的关系：

从 n 个不同元素中取 m 个元素的无重排列是从 n 个不同元素中取 m 个元素的无重组合后，对取出的 m 个不同元素进行全排列得到的，即 $A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m$。

4.组合数的性质：

（1）$C_n^m=C_n^{n-m}$

（2）$C_n^m=C_{n+1}^m-C_n^{m-1}$

【考点 195】排列、组合的常用方法

“16 字方针”，即分类相加、分步相乘、有序排列、无序组合。

1.直接法：适用排列组合的简单情况，可以直接列举所有的情况或利用排列、组合公式。

2.排除法：适用于排列组合的复杂情况，从反面考虑。

3.元素优先法：对于问题中有特殊要求的元素应优先考虑，然后再考虑其他元素。

4.捆绑法：在特定要求下，将几个相关元素当作一个元素来考虑，待整体排好后再考虑他们“局部”的安排。它主要用于解决“元素相邻问题”。

5.插空法：先把其他元素安排好，然后将指定的不相邻的元素插入已排好元素的空隙或两端位置。它主要用于解决“元素不相邻问题”。

6.调序法：当某些元素的次序一定时，如 n 个元素中 m 个元素的次序一定时的排列数，应先将 n 个元素进行全排列为 A_n^n，而次序一定的 m 个元素的全排列为 A_m^m，由于 m 个元素次序一定，只能有一种排列，所以利用除法起到调序的作用，即排列数为 $\frac{\mathrm{A}_n^n}{\mathrm{A}_m^m}$。

【考点 196】二项式定理

1.二项式定理：$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

二项展开式共有 $n+1$ 项，其中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r\left(r=0,1,\cdots,n\right)$，$\mathrm{C}_n^r$ 为第 $r+1$ 项的二项式系数。

2.二项式系数的性质

（1）$(a+b)^n$ 的展开式的各项二项式系数和等于 2^n，即

$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots\mathrm{C}_n^r+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n=2^n$。

（2）奇数项的二项式系数和等于偶数项的二项式系数和，即

$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^2+\cdots=\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^3+\cdots=2^{n-1}$。

第三章 概率

【考点197】确定事件和随机事件

1.确定事件

（1）必然事件：在一定的条件下重复进行试验时，在每次试验中必然会发生的事件。

（2）不可能事件：一定条件下在每次试验中都不会发生的事件。

2.随机事件

在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件。

3.基本事件

具有以下特点的事件称为基本事件：（1）任何两个基本事件都是互斥的；（2）任何事件都可以表示成基本事件的和。

4.确定事件和随机事件的概率之间的关系

（1）当A是必然发生的事件时，$P(A)=1$。

（2）当A是不可能发生的事件时，$P(A)=0$。

（3）当A是随机事件时，$0<P(A)<1$。

【考点198】几何概型

1.概念：如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称几何概型。

2.特点：（1）所有可能出现的基本事件为无限个；（2）每个基本事件发生的可能性相等。

3.概率公式：$P(A)=\dfrac{\text{构成事件}A\text{的区域的几何度量（面积或体积）}}{\text{试验所有可能结果构成的区域的几何度量（面积或体积）}}$

【考点199】古典概型

1.特点

（1）所有可能出现的基本事件为有限个；

（2）每个基本事件发生的可能性相等。

2.概率公式

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{所有基本事件的个数}}=\frac{m}{n}$$

【考点 200】互斥与对立事件

1.互斥事件

（1）概念：不能同时发生的两个事件称为互斥事件。

（2）特征：如果事件 A 和 B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$（加法公式）。

2.对立事件

（1）概念：两个互斥事件中必有一个发生，则这两个事件称为对立事件。

（2）特征：如果事件 A 和 B 对立，则 $P(A)+P(B)=1$。

3.互斥与对立事件的联系

（1）对立事件一定是互斥事件，但是互斥事件不一定是对立事件。

（2）互斥事件的两个事件的交集是空集，但对立事件不仅要求交集是空集，还要求并集是全集。

【考点 201】独立事件

1.相互独立事件

（1）概念：事件 A 的发生对事件 B 的发生没有影响，同样事件 B 的发生对事件 A 的发生也没有影响，则这两个事件称为相互独立事件。

（2）特征：如果事件 A 和 B 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$。

2.独立重复试验

（1）概念：一次试验中，事件 A 发生的概率为 p。相同条件下，独立、重复进行了 n 次试验，称作 n 次独立重复试验。

（2）概率公式：n 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数记为 $\xi\left(\xi=0,1,\cdots,n\right)$，则事件 A 恰好发生 k 次的概率为：$P(\xi=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (0\le k\le n)$。

此时称随机变量ξ服从二项分布，记作$\xi \sim B(n,\ p)$。

【考点202】条件概率

1.概念：对事件A和B，在已知事件B发生的条件下，事件A发生的概率，称为B发生时A发生的条件概率，记为$P(A|B)$。

2.概率公式：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，其中$P(B)>0$。

3. $P(A|B)$与$P(AB)$的区别与联系：

（1）联系：事件A和B都发生。

（2）区别：

①发生时间不同：$P(A|B)$中，事件A和B发生有时间上的差异，即B先A后；$P(AB)$中，事件A和B同时发生。

②样本空间不同：$P(A|B)$中，事件B为样本空间；$P(AB)$中，原样本空间即所有基本事件的总和为样本空间。

【考点203】离散型随机变量

1.概念：对于随机变量可能取的值，我们可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量。

2.离散型随机变量的分布列

设离散型随机变量ξ可能的取值为$x_1,\ x_2,\cdots x_i,\cdots$，$\xi$取每一个值$x_i\ (i=1,2,\cdots)$的概率为$P(\xi=x_i)=p_i$，则随机变量$0\le p_i\le 1,\ i=1,2,\cdots$的概率分布（简称$\xi$的分布列）为：

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	P_1	P_2	$\cdots$	P_i	$\cdots$

分布列具有如下性质：

（1）$0\le p_i\le 1$，$i=1,2,\cdots$；（2）$p_1+p_2+\cdots=1$。

3.离散型随机变量的期望（均值）：$E\left(\xi\right)=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_ix_i+\cdots$

4.离散型随机变量的方差：

$$D\left(\xi\right)=p_1\left(x_1-E\left(\xi\right)\right)^2+p_2\left(x_2-E\left(\xi\right)\right)^2+\cdots+p_i\left(x_i-E\left(\xi\right)\right)^2$$

【考点 204】连续型随机变量函数的分布

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X\left(x\right),-\infty<x<+\infty$，又设函数 $g\left(x\right)$ 处处可导且恒有 $g'\left(x\right)>0$（或恒有 $g'\left(x\right)<0$），则 $Y=g\left(X\right)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases} f_X\left[h\left(y\right)\right]\left|h'\left(y\right)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0 & ，\text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha=\min\left\{g\left(-\infty\right)，g\left(\infty\right)\right\}$，$\beta=\max\left\{g\left(-\infty\right)，g\left(\infty\right)\right\}$，$h\left(y\right)$ 是 $g\left(x\right)$ 的反函数。

第四模块　高等数学

第一章 极限与连续

【考点 205】函数极限存在的条件

函数极限存在的充要条件是左右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 。}$$

【考点 206】无穷大与无穷小

1.定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称在 $x\to x_0$ 过程中，$f(x)$ 是无穷小量；

若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=0$，则称在 $x\to x_0$ 过程中，$f(x)$ 是无穷大量。

2.无穷小与无穷大的关系：在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大。

3.无穷小与极限的关系：$\lim f(x)=A \Leftrightarrow A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$ 。

4.两个无穷小的比较：在自变量同一变化过程（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$）中，设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，且 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，则

（1）$l=0$，称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记作：$f(x)=o\left[g(x)\right]$；

（2）$l=\infty$，称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小；

（3）$l\neq 0$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小；

（4）$\lim\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=l\neq 0$，$k>0$，就说 $f(x)$ 是关于 $g(x)$ 的 k 阶无穷小；

（5）$l=1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记作：$f(x)\sim g(x)$ 。

【考点 207】极限的运算法则

定理 1 有限个无穷小的和也是无穷小。

定理 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小。

推论 2 有限个无穷小的乘积也是无穷小。

定理 3 设 $\lim u(x)=A$， $\lim v(x)=B$，则有

（1）加减法： $\lim\left[u(x)\pm v(x)\right]=\lim u(x)\pm\lim v(x)=A\pm B$ ；

（2）乘法： $\lim\left[u(x)\cdot v(x)\right]=\lim u(x)\cdot\lim v(x)=A\cdot B$ ；

（3）除法：当 $\lim v(x)=B\neq 0$ 时， $\lim\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)}=\dfrac{A}{B}$ 。

推论 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 存在， c 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[cu(x)\right]=c\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 。

推论 2 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 存在， $n\in\mathbf{N}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\right]^n$ 。

【考点 208】最高次幂法求极限

当函数是分式形式，且分子、分母都是多项式时，可以使用这种方法。主要是比较分子与分母次数的高低：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}，当n=m\\0\ ，当n>m\\\infty，当n>m\end{cases}$$

【考点 209】两个重要极限公式

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}$

3.方法：遇到 1^∞ 形式的极限，通常都需要将其化为 $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 的形式；或者利用对数恒

等式，再利用洛必达法则；也可以先取对数，再利用洛必达法则（真数部分大于 0）。

【考点 210】等价无穷小代换

当 $x \to 0$ 时的等价无穷小量，则有

$\sin x \sim x$； $\tan x \sim x$； $\arcsin x \sim x$； $\arctan x \sim x$；

$e^x - 1 \sim x$； $\ln(1+x) \sim x$； $(1+x)^2 - 1 \sim 2x$；

$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$； $a^x - 1 \sim x\ln a$。

【考点 211】洛必达法则

1.法则 1 $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

设（1） $\lim f(x)=0$， $\lim g(x)=0$，

（2） x 变化过程中， $f'(x)$， $g'(x)$ 皆存在，

（3） $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ （或 ∞ ）；

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ （或 ∞ ）。

注意：如果 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则不能得出 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

2.法则 2 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

设（1） $\lim f(x)=\infty$， $\lim g(x)=\infty$，

（2） x 变化过程中， $f'(x)$， $g'(x)$ 皆存在，

（3） $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ （或 ∞ ）；

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ （或 ∞ ）。

【考点 212】函数在一点处连续

1.定义 1：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续（或 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$）。

2.定义 2：设函数 $y=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

3.函数在一点连续的充要条件

$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处既是左连续，又是右连续。

【考点 213】函数在区间内（上）连续

1.开区间内连续：如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 $(a，b)$ 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 $(a，b)$ 内连续。

2.闭区间上连续：如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 $(a，b)$ 内连续，在区间端点 a 右连续，在区间端点 b 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a，b]$ 上连续。

【考点 214】函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义，在此前提下，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

（1）在 $x=x_0$ 没有定义；

（2）虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点。

【考点 215】函数间断点的类型

1.第一类间断点

设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点，如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在，则称

x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点。

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。

①可去间断点：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而 $f(x)$ 在点 x_0 无定义，或有定义但 $f(x_0) \neq A$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点；

②跳跃间断点：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点。

2.第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点。（至少一个单侧极限不存在。）

常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点。

【考点 216】闭区间上连续函数的性质

定理 1：（有界性定理）闭区间 $[a，b]$ 上的连续函数必在 $[a，b]$ 上有界。

定理 2：（最大值最小值定理）闭区间 $[a，b]$ 上的函数 $f(x)$，必在 $[a，b]$ 上有最大值和最小值，即在 $[a，b]$ 上，至少存在两点 ξ_1 与 ξ_2，使得对 $[a，b]$ 上的一切 x，恒有 $f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$，此处 $f(\xi_1)$，$f(\xi_2)$ 就是在 $[a，b]$ 上的最小值与最大值。

定理 3：（介值定理）设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，m 与 M 分别为在 $[a，b]$ 上的最小值与最大值，则对于任一实数 $c(m \leq c \leq M)$，至少存在一点 $\eta \in [a，b]$，使 $f(\eta) = c$。

定理 4：（零点定理或根的存在定理）设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，$f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a，b)$，使 $f(\xi) = 0$。

第二章　导数及微分

【考点 217】导函数的定义

1.函数在开区间内可导

若 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内每一点可导，则称 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内可导。

2.函数在闭区间上可导

$f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内可导，且 $f_+'(a)$ 与 $f_-'(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可导。

3.导函数：若 $f(x)$ 在区间 I 内每一点可导，则 $f(x)$ 在 I 内任一点的导数是 x 的函数，称为 $f(x)$ 的导函数，记为 $f'(x)$ 或 y' 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}。$$

【考点 218】基本初等函数求导

1.$(C)'=0$

2.$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，特别：$(x)'=1$，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

3.$(a^x)'=a^x\ln a$，特别：$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

4.$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，特别：$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

5.$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$　　$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\tan x\sec x$　　$(\csc x)'=-\cot x\csc x$

6.$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　　$(\operatorname{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

【考点 219】函数的求导法则

定理：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导，则

（1）$\left[u(x)\pm v(x)\right]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，特别地，$\left[Cu(x)\right]'=Cu'(x)$；

（3）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$。

【考点 220】复合函数的求导法则

定理：若 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 也可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，或 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，或 $\left(f\left[g(x)\right]\right)'=f'(u)g'(x)=f'\left[g(x)\right]g'(x)$。

简言之，函数对自变量的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数。

【考点 221】隐函数求导

1.概念：由二元方程 $F(x，y)=0$ 所确定的函数称为隐函数。

2.求导：方程两边对 x 进行求导，并把 y 看成 x 的函数，用复合函数求导法则进行求导。

3.常用方法：对数求导法

对于一般形式的幂指函数 $y=u^v\,(u>0)$ ①，如果 $u=u(x)$、$v=v(x)$，可利用对数求导法求出幂指函数①的导数，也可把幂指函数①表示为 $y=\mathrm{e}^{v\ln u}$，这样，便可直接求得

$$y'=\mathrm{e}^{v\ln u}\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)=u^v\left(v'\cdot\ln u+\frac{vu'}{u}\right)。$$

【考点 222】参数方程求导

若参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 可确定一个 y 与 x 之间的函数关系，$\varphi(t)$、$\psi(t)$ 可导，且 $\left[\varphi(t)^2+\psi(t)^2\right]\neq 0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$。

【考点 223】反函数求导

定理：如果函数 $x=f(y)$ 在某个区间内单调、可导，且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=g(x)$ 在对应区间上也可导，且 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$，即：$y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$。

简言之，反函数的导数等于直接函数导数的倒数。

【考点 224】二阶导数

定义：一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即 $y''=(y')'$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$。

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导数。

【考点 225】可导与连续

定理：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处必连续。

1.逆命题不成立，即“连续不一定可导”；

2.逆否命题成立，即“不连续一定不可导”。

【考点 226】求曲线上一点处的切线方程与法线方程

1.切线斜率：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率，即 $f'(x_0)=k_{切}$。

2.切线方程：$y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

3.法线方程：$y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

4.注意：（1）函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处具有不垂直于 x 轴的切线；

（2）若 $f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴。

【考点 227】函数的单调性

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

（1）如果在$(a,\ b)$内$f'(x)>0$，那么函数$y=f(x)$在$[a,\ b]$上单调增加；

（2）如果在$(a,\ b)$内$f'(x)<0$，那么函数$y=f(x)$在$[a,\ b]$上单调减少。

如果把这个判定中的闭区间换成其他各种区间（包括无穷区间），那么结论成立。

【考点 228】函数的极值

设函数$y=f(x)$在x_0及其附近有定义，如果对x_0附近的所有的点都有$f(x)>f(x_0)$（或$f(x)<f(x_0)$），则称$f(x_0)$是函数$f(x)$的极小值（或极大值）。

可导函数的极值，可通过研究函数的单调性求得，基本步骤是：

（1）确定函数$f(x)$的定义域；

（2）求导数$f'(x)$；

（3）求方程$f'(x)=0$的全部实根，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，顺次将定义域分成若干个小区间，并列表：x变化时，$f'(x)$和$f(x)$值的变化情况：

x	$(-\infty,\ x_1)$	x_1	$(x_1,\ x_2)$	$\cdots$	x_n	$(x_n,+\infty)$
$f'(x)$	正负	0	正负	$\cdots$	0	正负
$f(x)$	单调性	极值	单调性	$\cdots$	极值	单调性

（4）检查的符号$f'(x)$并由表格判断极值。

【考点 229】函数的最值

如果函数$f(x)$在定义域I内存在x_0，使得对任意的$x\in I$，总有$f(x)\le f(x_0)$（或$f(x)\ge f(x_0)$），则称$f(x_0)$为函数在定义域上的最大值（或最小值）。函数在定义域内的极值不一定唯一，但在定义域内的最值是唯一的。

求函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上的最大值和最小值的步骤：

（1）求 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 上的极值；

（2）将第一步中求得的极值与 $f(a)$，$f(b)$ 比较，得到 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的最大值与最小值。

【考点 230】微分的运算法则

1. $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$

2. $\mathrm{d}(u+v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$

3. $\mathrm{d}(uv)=\mathrm{d}u\cdot v+\mathrm{d}v\cdot u$

4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq 0)$

【考点 231】微分中值定理

1.罗尔定理（Rolle 定理）：若函数 $f(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续；

（2）在开区间 $(a,\ b)$ 内可导；

（3）$f(a)=f(b)$，

则在 $(a,\ b)$ 内至少有一点 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

2.拉格朗日中值定理（Lagrange 中值定理）：设函数 $f(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续；

（2）在开区间 $(a,\ b)$ 内可导；

则在 $(a,\ b)$ 内至少有一点 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

【考点 232】一元函数可导、可微、连续之间的关系

1.可导一定连续，连续不一定可导；

2.可微一定连续，连续不一定可微；

3.可微与可导等价。

第三章 积分

【考点 233】不定积分的性质与公式

1.性质

性质 1：$\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$；

性质 2：$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为常数，$k\neq 0$）。

2.积分公式

（1）$\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k 为常数）

（2）$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq -1)$

（3）$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

（4）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

（5）$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$

（6）$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

（7）$\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$

（8）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\arctan x+C$

（9）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x}=\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$

（10）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

（11）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{2}x}=\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

（12）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

（13）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$

【考点 234】积分方法

1.第一类换元积分法（凑微分法）：设 $F(u)$ 为 $f(u)$ 的原函数，$u=\varphi(x)$ 可微，则 $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$（第一类换元积分公式）

2.第二类换元积分法：设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数，且在区间内部有 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)$ 具有原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$。其中 $\psi^{-1}(x)$ 为

$x=\psi(t)$ 的反函数。上式称为第二类换元积分公式。

3.分部积分法：假定 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 均具有连续的导函数，则 $\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int vu'\mathrm{d}x$，$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$。上述公式称为分部积分公式。

【考点 235】定积分的性质

1.积分的运算性质

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$\int_a^b c\mathrm{d}x=c(b-a)$（$c$ 为常数）

2.积分的保序性：如果在区间 $[a,\ b]$ 上，恒有 $f(x)\geq g(x)$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

3.积分估值定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，则 $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)$。

4.积分中值定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，则在 $[a,\ b]$ 内至少有一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$，$\xi\in[a,\ b]$。

5.对称区间上奇偶函数的积分性质：设 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,\ a]$ 上连续，则有

如果 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$；

如果 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$。

【考点 236】牛顿—莱布尼兹公式

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，那么

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$。

上述公式称为牛顿—莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式，又称为微积分基本公式。

【考点 237】定积分的求法

1.换元积分法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a，b]$ 上连续，并且满足下列条件：

（1）$x=\varphi(t)$，且 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$；

（2）$\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha，\beta]$ 上单调且有连续的导数 $\varphi'(t)$；

（3）当 t 从 α 变到 β 时，$\varphi(t)$ 从 a 单调地变到 b，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$。

2.分部积分法

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 在区间 $[a，b]$ 上有连续的导数，则有

$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$。

上述公式称为定积分的分部积分公式。

【考点 238】定积分的应用——求平面图形的面积

计算由区间 $[a，b]$ 上的两条连续曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$，以及两条直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的平面图形的面积，所求平面图形的面积 A 为 $A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$。

【考点 239】定积分的应用——求旋转体的体积

计算由区间 $[a，b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$、两直线 $x=a$ 与 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积，所求旋转体的体积为：$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x$。

【考点 240】二重积分的性质

1.若 $f(x，y)$ 在 D 上连续或 $f(x，y)$ 在 D 上分块连续有界，则 $f(x，y)$ 在 D 上可积。

2.二重积分的运算性质

（1）$\iint\limits_D \left(Af(x, y)+Bg(x, y)\right)\mathrm{d}\sigma = A\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma + B\iint\limits_D g(x, y)\mathrm{d}\sigma$。

（2）$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D = D_1 + D_2, D_1 \cap D_2 = \varnothing$。

（3）若 $f(x, y) \le g(x, y)$，则 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D g(x, y)\mathrm{d}\sigma$。

特别的：又有 $f(x, y), g(x, y)$ 连续，但两函数不全相等，则

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma < \iint\limits_D g(x, y)\mathrm{d}\sigma。$$

（4）若 $f(x, y)$ 在 D 上可积，则函数 $|f(x, y)|$ 在 D 上也可积，且有

$$\left|\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x, y)|\mathrm{d}\sigma。$$

（5）若 $f(x, y)$ 在 D 上可积，且 $m \le f(x, y) \le M, (x, y) \in D$，则

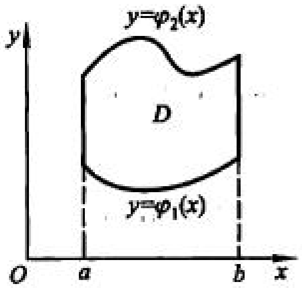
$$mS_D \le \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \le MS_D$$，这里 S_D 是积分区域 D 的面积。

（6）中值定理

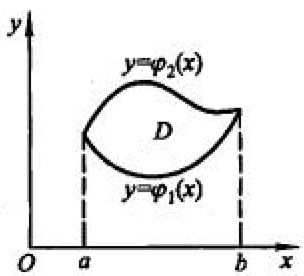
设 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 $(\xi, \eta) \in D$，使得 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta)\cdot\sigma$。

（7）二重积分是一个数。

【考点 241】利用直角坐标计算二重积分

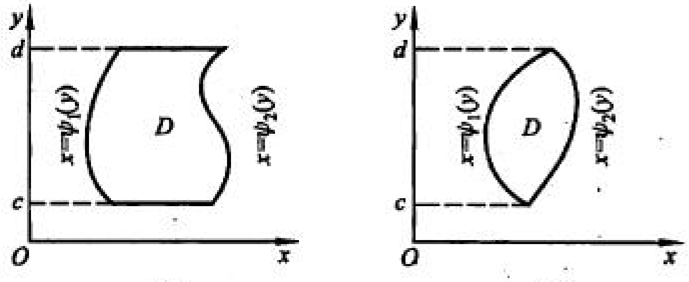


(a)



(b)

$\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{a}^{b}\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$（先固定 x，得到 y 范围再确定 x 可移动范围）



(a)　(b)

$\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{c}^{d}\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x$（先固定 y，得到 x 范围再确定 y 可移动范围）

第四章　空间解析几何

【考点 242】空间向量的直角坐标运算律

若 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z)$，

$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)(\lambda\in\mathbf{R})$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$。

【考点 243】空间向量的位置关系

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=\lambda b_x, a_y=\lambda b_y, a_z=\lambda b_z(\lambda\in\mathbf{R})$；

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$。

【考点 244】模长公式

若 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$。

【考点 245】空间两点间的距离公式

若 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$，

或 $d_{AB}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$。

【考点 246】空间向量的数量积

1.向量的数量积：已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫做 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$。

2.空间向量数量积的性质：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle$；$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$。

3.夹角公式：$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$。

【考点 247】空间向量的向量积

1.两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积（外积）是一个向量 $\boldsymbol{c}$，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角。

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$），$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定。

2.向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\boldsymbol{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\boldsymbol{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\boldsymbol{k}\text{ 或 }\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}。$$

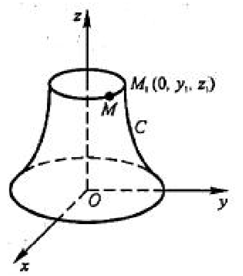
【考点 248】球面

球心在 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$，半径为 R 的球面的方程 $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2$。

特别地，如果球心在原点，那么球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

【考点 249】旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线和定直线依次叫旋转曲面的母线和轴。



设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，它的方程为 $f(y, z)=0$。

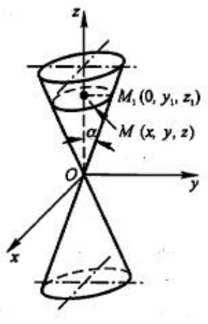
把这曲线绕 z 轴旋转一周，得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，就有旋转曲面的方程为

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$$

旋转曲线绕哪个轴旋转，该轴对应变量不变，另外的变量将缺的变量补上改成正负二者的完全平方根的形式，即得旋转曲面方程。

【考点 250】锥面

直线绕直线旋转，两直线的夹角 α （$0°<\alpha<90°$）



方程为：$z^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$，其中，$a=\cot\alpha$。

【考点 251】柱面

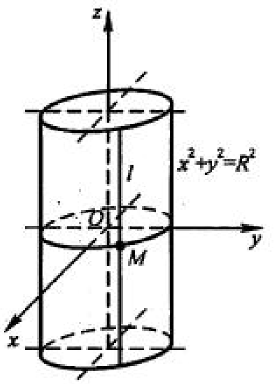
1.定义：平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面。其中定曲线 C 叫做准线，动直线 L 叫做母线。

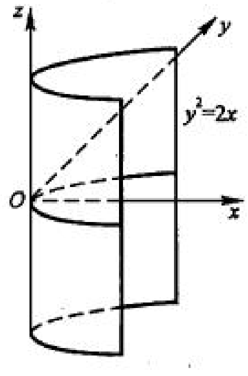
2.特征：x，y，z 三个变量中若缺其中之一（例如 y），则表示母线平行于 y 轴的柱面。

3.几个常用的柱面：

①圆柱面：$x^2+y^2=R^2$（母线平行于 z 轴）

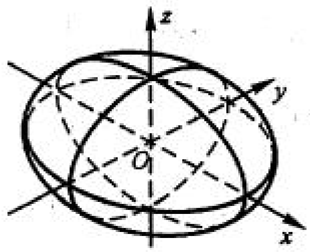
②抛物柱面：$y^2=2x$（母线平行于 z 轴）





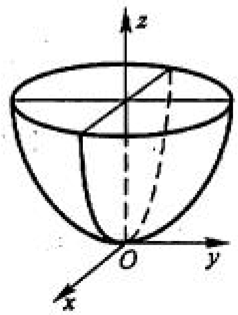
【考点 252】椭球面

把 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转，所得的曲面称为旋转椭球面，其方程为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，再把旋转椭球按沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，便得椭球面方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。



【考点 253】抛物面

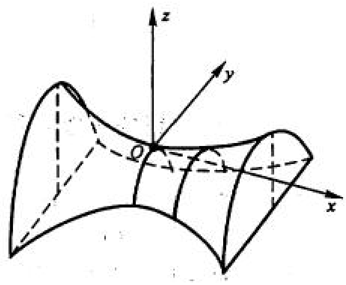
1.椭圆抛物面



把 xOz 面上的抛物线 $\frac{x^2}{a^2}=z$ 绕 z 轴旋转，所得曲面叫做旋转抛物面，再把此旋转曲面

沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，即得椭圆抛物面方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$。

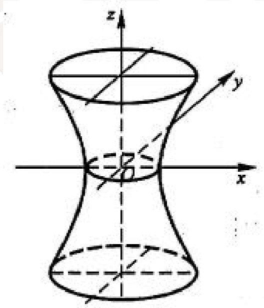
2.双曲抛物面（鞍形曲面）



用平面 $x=t$ 截此曲面，所得截痕 l 为平面 $x=t$ 上的抛物线 $-\frac{y^2}{b^2}=z-\frac{t^2}{a^2}$，此抛物线开口朝下，其顶点坐标为 $x=t$，$y=0$，$z=\frac{t^2}{a^2}$。当 t 变化时，l 的形状不变，位置只作平移，而 l 的顶点轨迹 L 为平面 $y=0$ 上的抛物线 $z=\frac{x^2}{a^2}$。因此，以 l 为母线，L 为准线，母线 l 的顶点在准线 L 上滑动，且母线作平行移动，这样得到双曲抛物面的方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$。

【考点 254】双曲面

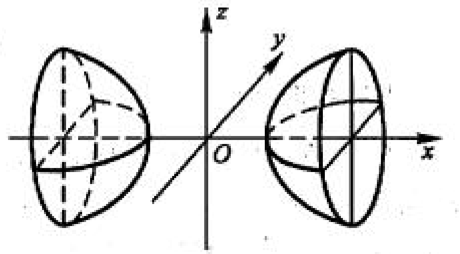
1.单叶双曲面



把 xOz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转，得旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，即得单叶双曲面方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 也是单叶双曲面。

2.双叶双曲面



把 xOz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转，得旋转双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$，把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{c}$ 倍，即得双叶双曲面方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 也是双叶双曲面。

【考点 255】空间平面及其方程

1.平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。

2.平面的一般方程为：$Ax+By+Cz+D=0$。

【考点 256】两平面间的夹角

1.定义：两平面法线向量之间的夹角（通常指锐角）称为两平面的夹角。

2.设平面 Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，法线向量分别是：$\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$。

按照两向量夹角余弦公式有：

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

3.几个常用的结论：

设平面 1 和平面 2 的法向量依次为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$

①两平面垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$（法向量垂直）；

②两平面平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$（法向量平行）；

③两平面重合：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$；

④平面外一点到平面的距离公式：设平面外的一点$P_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$，平面的方程为$Ax+By+Cz+D=0$，则点到平面的距离为$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

【考点 257】空间直线及其方程

1.直线的点向式方程：在空间直角坐标系中，若$M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$是直线$l$上的一个点，$\mathbf{s}=\left(m,n,p\right)$为$l$的一个方向向量，则称$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$为直线$l$的**点向式方程**（也叫**标准式**或者**对称式**）。

2.直线的参数方程：设$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，得方程组$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$，则称此方程组就是直线的**参数方程**。

3.直线的一般方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，其中$A_1,B_1,C_1$与$A_2,B_2,C_2$不成比例。

【考点 258】空间中两条直线位置关系的判定

设两条直线l_1与l_2的方程为：l_1：$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，方向向量$\mathbf{s}_1=\left(m_1,n_1,p_1\right)$，$l_2$：$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，方向向量$\mathbf{s}_2=\left(m_2,\ n_2,p_2\right)$，由它们的方程构成的方程组：

$$\begin{cases}\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\\\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\end{cases}\qquad（1）$$

①若方程组（1）有无穷组解，则l_1与l_2重合；

②若方程组（1）只有一组解，则l_1与l_2相交，且方程组的解即为l_1与l_2的交点坐标；

③若方程组（1）无解，且$\mathbf{s}_1/\!/\mathbf{s}_2$，即$\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2=\mathbf{0}$，则$l_1$与$l_2$平行；

④若方程组（1）无解，且 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\neq\boldsymbol{0}$，则 l_1 与 l_2 异面直线。

【考点 259】空间中两条直线的夹角

两相交直线 l_1 与 l_2 所形成的 4 个角中，把不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的那对对顶角 θ 叫做这两条直线的夹角。若 l_1 与 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，显然有：

$$\cos\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}$$

（1）若 $l_1/\!/l_2$，规定 l_1 与 l_2 的夹角为 0；

（2）对于异面直线，可把这两条直线平移至相交状态，此时，它们的夹角称为异面直线的夹角；

（3）若 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$。

第五章 微分方程

【考点 260】可分离变量的微分方程

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot g(y)$ 的方程，称为**可分离变量的微分方程**。

求解的具体步骤：（分离变量法）

（1）分离变量得：$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$；

（2）两边同时求积分得：$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$；

（3）化简整理，从而求出方程的通解：$G(y)=F(x)+C$。

【考点 261】齐次型微分方程

如果一阶微分方程可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式，那么就称这微分方程为齐次型微分方程。

求解的具体步骤：

（1）引进新的未知函数，令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原方程得：

$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$；

（2）分离变量得：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$；

（3）两端积分得：$\int\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$；

（4）积分后再用$\dfrac{y}{x}$代替u，得原方程的通解。

【考点 262】一阶线性微分方程

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$的方程，叫做**一阶线性微分方程**。如果$Q(x)=0$，则方程为齐次的；如果$Q(x)\neq 0$，则方程为非齐次的。

求解的具体步骤：

（1）求解对应齐次方程$y'+P(x)y=0$的通解，得$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$；

（2）令原方程的解为$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$；

（3）代入原方程整理，得$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)\Rightarrow C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1$；

（4）写出原方程的通解为$y=\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$。

通解公式：$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$。

【考点 263】常系数齐次线性微分方程

形如$y''+py'+qy=0$的方程，叫做**二阶常系数齐次线性微分方程**。

求解步骤：

（1）写出微分方程的特征方程$r^2+pr+q=0$；

（2）求出特征方程的两个根r_1，r_2；

（3）根据特征方程根的不同，写出微分方程的通解。

特征方程$r^2+pr+q=0$的两个根r_1，r_2	微分方程$y''+py'+qy=0$的通解

两个不相等的实根 r_1，r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

【考点 264】可降阶的高阶微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

特点：微分方程的右端仅含有自变量 x。

求解的具体步骤：

（1）只要将 $y^{(n-1)}$ 作为新的未知函数，那么原方程可以看作是新未知函数的一阶微分方程；

（2）对两边进行积分，就可以得到 $n-1$ 阶的微分方程：$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$；

（3）同理依次进行积分，接连积分 n 次，就可以得到通解。

2. $y''=f(x，y')$ 型的微分方程

特点：微分方程的右端含有未知函数 y'。

求解的具体步骤：

（1）设 $y'=p$，则 $y''=p'$，则方程为 $p'=f(x，p)$，这是一个关于 x，p 的一阶微分方程；

（2）对其进行积分，就可以得到通解。

3. $y''=f(y，y')$ 型的微分方程

求解的具体步骤：

（1）设 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，则方程为 $p\frac{dp}{dy}=f(y，p)$，这是一个关于 y，p 的一阶微分方程；

（2）对其进行分离变量并积分，就可以得到通解。

第六章 多元函数微分

【考点 265】偏导数的求法

求 z 对 x 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把变量 y 暂时看作常量而对 x 求导数；求 z 对 y 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时，则只要把 x 暂时看作常量而对 y 求导数。

注：偏导数的记号是一个整体记号，不能看作分子与分母之商。

【考点 266】高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$，那么在 D 内 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 都是 x，y 的函数。如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数。按照对变量求导次序的不同，有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)。$$

其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数。同样，可得三阶、四阶、……以及 n 阶偏导数。二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数。

【考点 267】可微分的条件

1.必要条件：若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$。

2.充分条件：如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则称函数在该点可微分。

总结：由 1 和 2 可知二元函数的可导、可微、连续的关系如下图所示：

$$\begin{array}{c} f_x'(x,\ y) \\ f_y'(x,\ y) \end{array} \Longrightarrow f(x,\ y)\text{可微} \begin{array}{l} \nearrow f(x,\ y)\text{连续} \\ \searrow \begin{array}{l} f_x'(x,\ y) \\ f_y'(x,\ y)\text{存在} \end{array} \end{array}$$

【考点 268】全微分的计算

规定自变量的微分等于它的增量，即 $\mathrm{d}x=\Delta x,\ \mathrm{d}y=\Delta y$，则二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x,\ y)$ 处的全微分可写成 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$。

第七章 级数

【考点 269】收敛级数的基本性质

性质 1：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于和 s，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，且其和为 ks。

性质 2：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于 s 、σ，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $s+\sigma$。

性质 3：在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性。

性质 4：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数

$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$ 仍然收敛，且其和不变。

性质 5（级数收敛的必要条件）：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则它的一般项 u_n 趋于 0，即 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$。

【考点 270】绝对收敛和条件收敛

1.绝对收敛与条件收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

2.绝对收敛与收敛的关系

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛。

【考点 271】收敛半径

1.收敛半径

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的相邻两项的系数满足条件：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则称正数$R=\frac{1}{\rho}$就是$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径。

2.求解方法

幂级数的收敛半径可如下求得：设极限$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是幂级数相邻两项的系数，则：

（1）若$\rho\neq 0$，则$R=\frac{1}{\rho}$；

（2）若$\rho=0$，则$R=+\infty$；

（3）若$\rho=+\infty$，则$R=0$。

【考点 272】常见函数幂级数展开式

（1）$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots,(x\in\mathbf{R})$

（2）$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots,(x\in\mathbf{R})$

（3）$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$，（$x\in\mathbf{R}$）

（4）$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$，$x\in(-1,1)$

（5）$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots$，$x\in(-1,1)$

（6）$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$，$x\in(-1,1]$

（7）$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots$，$x\in[-1,1)$

（8）$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots$，$x\in[-1,1]$

第五模块　线性代数

第一章 行列式

【考点 273】行列式的性质

性质 1：行列式 $D=$它的转置行列式 D^{T} 或 D'，即有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 2：交换一个行列式的两行（或两列），行列式改变符号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3：如果一个行列式有两行（列）完全相同，那么这个行列式等于零。

性质 4：把一个行列式的某一行（列）的所有元素同乘以某一个数 k，等于以数 k 乘这个行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这就是说，一行的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行相当于用这个数乘此行列式。令 $k=0$，就有如果行列式中一行为零，那么行列式为零。

性质 5：若行列式的某一行（列）的元素都是两元素之和，则该行列式可分解成两个行列式的和，除了相应那行（列）分别各是一个加数外，其余的行（列）和原行列式一样。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6：把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变。

性质 7：如果行列式中两行成比例，那么行列式为零。

【考点 274】余子式与代数余子式

1.余子式：n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。

2.代数余子式：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式。

【考点 275】行列式的计算

1.对角线法

（1）二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

（2）三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

即：二阶和三阶行列式的值等于主对角线元素的乘积减去副对角线元素的乘积。

2.化三角法：将行列式转化为上三角形或者下三角形行列式，这样所得行列式的值等于主对角线元素的乘积。

3.代数余子式法：将行列式按某一行（或列）展开，达到降阶的目的。

第二章 矩阵

【考点 276】矩阵的运算

1.矩阵的加法：矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，且

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}。$$

2.矩阵的数乘：常数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，且

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}。$$

3.矩阵的乘法：设矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$ 与 $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$ 的乘积是 $\boldsymbol{C}=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$ $(i=1,2,\cdots，m；j=1,2,\cdots，n)$。

4.矩阵的转置：将矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 中行与列的元素互换，得到 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}'=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$。

【考点 277】矩阵的初等变换

1.下面三种变换称为矩阵的初等变换：

（1）互换 $\boldsymbol{A}$ 的 i 与 j 两行（列）所得的矩阵；

（2）用非零常数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（列）所得的矩阵；

（3）把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（列）的 k 倍加到第 j 行（列）所得的矩阵。

2.初等矩阵：n 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换所得矩阵称为 n 阶初等矩阵。

3.性质：对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行（列）变换，相当于用一个相应的 $m(n)$ 阶初等矩阵左（右）乘 $\boldsymbol{A}$。

【考点 278】矩阵的秩

k 阶子式：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意 k 行和 k 列交叉点上的元素构成 k 阶子矩阵，此子矩阵的行

列式即为k阶子式。

若矩阵$\boldsymbol{A}$有一个非零r阶子式，且所有$r+1$阶子式全为零，则矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为r，记为$R(\boldsymbol{A})=r$。

求法：通过初等行变换将给定矩阵化为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即为给定矩阵的秩。

【考点 279】逆矩阵

1.定义：对于n阶矩阵$\boldsymbol{A}$，如果有一个n阶矩阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$（$n$阶单位矩阵），则称矩阵$\boldsymbol{A}$是可逆的，把矩阵$\boldsymbol{B}$称为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵，记为$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$。

当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$\boldsymbol{A}$称为奇异矩阵，可逆矩阵就是非奇异矩阵。

2.定理 1：若矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，则$|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

定理 2：若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$，其中$\boldsymbol{A}^{*}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵。

3.逆矩阵满足下述运算规律：

（1）若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{-1}$亦可逆，且$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$；

（2）若$\boldsymbol{A}$可逆，数$\lambda\neq 0$，则$\lambda\boldsymbol{A}$可逆，且$(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（3）若$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶矩阵且均可逆，则$\boldsymbol{AB}$亦可逆，且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

【考点 280】求矩阵方程

常见的三种矩阵方程：

（1）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，解为$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$；

（2）$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，解为$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$；

（3）$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，解为$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$。

第三章　线性方程组

【考点 281】克莱姆法则

含有 n 个未知数 x_1，$x_2,\cdots x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

若上述线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于零，即

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则上述线性方程组有唯一解，其解为 $x_j=\dfrac{A_j}{A}\left(j=1,2,\cdots,\ n\right)$，其中 $A_j\left(j=1,2,\cdots,\ n\right)$ 是把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 列元素 a_{1j}，$a_{2j},\cdots$，a_{nj} 对应地换成常数项 b_1，$b_2,\cdots b_n$，而其余各列保持不变所得到的 n 阶矩阵。

【考点 282】极大线性无关组

1.设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$，满足

（1）向量组 A_0：$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2,\cdots$，$\boldsymbol{a}_r$ 线性无关；

（2）向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关，那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个极大线性无关向量组（简称极大无关组）。

2.向量组的秩：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组所含有的向量的个数称为向量组的秩。

【考点 283】线性方程组的解

1.解的情况

设 n 元线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $R\left(\boldsymbol{A}\right)$，其增广矩阵的秩为 $R\left(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}\right)$，则

（1）若 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A}，\boldsymbol{b})$，则该线性方程组无解；

（2）若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}，\boldsymbol{b})=n$，则该线性方程组有唯一解；

（3）若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}，\boldsymbol{b})<n$，则该线性方程组有无穷多解。

2.齐次线性方程组的解

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 总是有解的，因为 $x_1=x_2=\cdots x_n=0$ 就是它的一个解。因此，齐次线性方程组的解有两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解。

定理：系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})<n \Leftrightarrow$ 齐次线性方程组有非零解。

推理：若齐次线性方程组的方程个数小于未知数的个数，即 $m<n$，则它必有非零解。

3.非齐次线性方程组的解

对于非齐次线性方程组来说，只需要将其增广矩阵化为行阶梯形矩阵，以此来判断其是否有解。

定理：n 元非齐次线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ 的秩。

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时，方程组没有自由未知量，只有唯一解。

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时，方程组有 $n-r$ 个自由未知量，有无穷多个解。

第六模块 课标与教学论

第一章 课程标准

【考点 284】课程性质

义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程，具有**基础性**、**普及性**和**发展性**。数学课程能使学生掌握必备的基础知识和基本技能，培养学生的抽象思维和推理能力，培养学生的创新意识和实践能力，促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展。义务教育的数学课程能为学生未来生活、工作和学习奠定重要的基础。

【考点 285】课程基本理念

1.数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：**人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展**。

2.课程内容要反映社会的需要、数学的特点，要符合学生的认知规律。它不仅包括数学的结果，也包括数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法。课程内容的选择要贴近学生的实际，有利于学生体验与理解、思考与探索。课程内容的组织要**重视过程**，处理好过程与结果的关系；要**重视直观**，处理好直观与抽象的关系；要**重视直接经验**，处理好直接经验与间接经验的关系。课程内容的呈现应注意层次性和多样性。

3.教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。

4.学习评价的主要目的是为了全面了解学生数学学习的过程和结果，激励学生学习和改进教师教学。应建立目标多元、方法多样的评价体系。**评价既要关注学生学习的结果，也要重视学习的过程；既要关注学生数学学习的水平，也要重视学生在数学活动中所表现出来的情感与态度，帮助学生认识自我、建立信心。**

5.信息技术的发展对数学教育的价值、目标、内容以及教学方式产生了很大的影响。数学课程的设计与实施应**根据实际情况合理地运用现代信息技术**，要注意信息技术与课程内容的整合，注重实效。

【考点 286】课程设计思路

1.学段划分

为了体现义务教育数学课程的整体性，本标准统筹考虑九年的课程内容。同时，根据学生发展的生理和心理特征，将九年的学习时间划分为三个学段：**第一学段（1—3 年级）、第二学段（4—6 年级）、第三学段（7—9 年级）。**

2.课程目标

义务教育阶段数学课程目标分为**总目标**和**学段目标**，从**知识技能、数学思考、问题解决、情感态度**四个方面加以阐述。

数学课程目标包括结果目标和过程目标。结果目标使用“了解、理解、掌握、运用”等行为动词表述，过程目标使用“经历、体验、探索”等行为动词表述。

3.课程内容

在各学段中，安排了四个部分的课程内容：**“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”。**其中，“综合与实践”内容设置的目的在于培养学生综合运用有关的知识与方法解决实际问题，培养学生的问题意识、应用意识和创新意识，积累学生的活动经验，提高学生解决现实问题的能力。

在数学课程中，应当注重发展学生的**数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想**。为了适应时代发展对人才培养的需要，数学课程还要特别注重发展学生的**应用意识**和**创新意识**。

【考点 287】课程总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生能：

1.获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的**基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。**

2.体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，**增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。**

3.了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和科学态度。

【考点 288】教学建议

教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。

1.数学教学活动要注重课程目标的整体实现。

2.重视学生在学习活动中的主体地位。

3.注重学生对基础知识、基本技能的理解和掌握。

4.感悟数学思想，积累数学活动经验。

5.关注学生情感态度的发展。

6.合理把握“综合与实践”的实施。

7.教学中应当注意的几个关系：

（1）“预设”与“生成”的关系；

（2）面向全体学生与关注学生个体差异的关系；

（3）合情推理与演绎推理的关系；

（4）使用现代信息技术与教学手段多样化的关系。

【考点 289】评价建议

评价的主要目的是全面了解学生数学学习的过程和结果，激励学生学习和改进教师教学。评价应以课程目标和内容标准为依据，体现数学课程的基本理念，全面评价学生在知识技能、数学思考、问题解决和情感态度等方面的表现。

评价不仅要关注学生的学习结果，更要关注学生在学习过程中的发展和变化。

1.基础知识和基本技能的评价：

在对学生学习过程进行评价时，应依据“经历、体验、探索”不同层次的要求，采取灵活多样的方法，**定性与定量相结合、以定性评价为主。**

2.数学思考和问题解决的评价。

3.情感态度的评价。

4.注重对学生数学学习过程的评价。

5.体现评价主体的多元化和评价方式的多样化：

评价主体的**多元化**是指教师、家长、同学及学生本人都可以作为评价者，可以综合运用教师评价、学生自我评价、学生相互评价、家长评价等方式，对学生的学习情况和教师的教学情况进行全面的考查。

评价方式**多样化**体现在多种评价方法的运用，包括书面测验、口头测验、开放式问题、活动报告、课堂观察、课后访谈、课内外作业、成长记录等等。

6.恰当地呈现和利用评价结果：

评价结果的呈现应采用定性与定量相结合的方式。**第一学段的评价应当以描述性评价为主，第二学段采用描述性评价和等级评价相结合的方式，第三学段可以采用描述性评价和等级（或百分制）评价相结合的方式。**

7.合理设计与实施书面测验。

【考点 290】高中数学学科核心素养

数学学科核心素养包括：**数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。**这些数学学科核心素养既相对独立、又相互交融，是一个有机的整体。

1.数学抽象：数学抽象是指通过对数量关系与空间形式的抽象，得到数学研究对象的素养。主要包括：从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构，并用数学语言予以表征。

数学抽象主要表现为：获得数学概念和规则，提出数学命题和模型，形成数学方法与思想，认识数学结构与体系。

2.逻辑推理：逻辑推理是指从一些事实和命题出发，依据规则推出其他命题的素养。主要包括两类：一类是从特殊到一般的推理，推理形式主要有归纳、类比；一类是从一般到特殊的推理，推理形式主要有演绎。

逻辑推理主要表现为：掌握推理基本形式和规则，发现问题和提出命题，探索和表述论证过程，理解命题体系，有逻辑地表达与交流。

3.数学建模：数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养。数学建模过程主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、建立模型，确定参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终

解决实际问题。

数学建模主要表现为：发现和提出问题，建立和求解模型，检验和完善模型，分析和解决问题。

4.直观想象：直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形，理解和解决数学问题的素养。主要包括：借助空间形式认识事物的位置关系、形态变化与运动规律；利用图形描述、分析数学问题；建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路。

直观想象主要表现为：建立形与数的联系，利用几何图形描述问题，借助几何直观理解问题，运用空间想象认识事物。

5.数学运算：数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等。

数学运算主要表现为：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果。

6.数据分析：数据分析是指针对研究对象获取数据，运用数学方法对数据进行整理、分析和推断，形成关于研究对象知识的素养。数据分析过程主要包括：收集数据，整理数据，提取信息，构建模型，进行推断，获得结论。

数据分析主要表现为：收集和整理数据，理解和处理数据，获得和解释结论，概括和形成知识。

【考点 291】高中数学课程目标

1.通过高中数学课程的学习，学生能获得进一步学习以及未来发展所必需的数学**基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验（简称“四基”）；提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力（简称“四能”）。**

2.在学习数学和应用数学的过程中，学生能发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等数学学科核心素养。

3.通过高中数学课程的学习，学生能提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯，发展自主学习的能力；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的

科学精神；不断提高实践能力，提升创新意识；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

【考点 292】高中课程内容

1.必修课程

必修课程包括五个主题，分别是预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动。数学文化融入课程内容。必修课程共 8 学分 144 课时。

2.选择性必修课程

选择性必修课程包括四个主题，分别是函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动、数学文化融入课程内容。选择性必修课程共 6 学分 108 课时。

3.选修课程

选修课程是由学校根据自身情况选择设置的课程，供学生依据个人志趣自主选择，分为 A，B，C，D，E 五类。数学建模活动、数学探究活动、数学文化融入课程内容。

第二章 数学教学论

【考点 293】教学原则

1.抽象与具体相结合的原则

2.严谨性与量力性相结合的原则

3.培养“双基”与策略创新相结合的原则

4.精讲多练与自主建构相结合的原则

【考点 294】数学概念的内涵和外延

1.内涵：概念反映的所有对象的共同本质属性的总和，叫做这个概念的内涵，又称涵义。

2.外延：适合于概念所指的对象的全体，叫做这个概念的外延，又称范围。

3.概念的内涵和外延是相互依存、相互制约的，**概念的内涵越大，外延越小；概念的内涵越小，外延越大，呈反比关系。**例如：在“长方形”概念的内涵中增加“一组邻边相等”的属性时，就得到外延缩小了的“正方形”的概念；在“长方形”概念的内涵中去掉

“有一个角是直角”的属性，就得到外延扩大了的“平行四边形”的概念。

【考点 295】概念间的关系

1.学习概念主要有**概念形成**与**概念同化**两种基本形式。

2.概念之间的关系分为：**相容关系和不相容关系。**

（1）相容关系

如果两个概念 A 和 B 的外延集合的交集非空，就称这两个概念的关系为相容关系。相容关系又可分为下面三种情形：①同一关系；②交叉关系；③从属关系（种属关系）。

（2）不相容关系

如果两个概念 A 和 B 是属于同一从属概念下的种属概念，并且它们的外延集合的交集为空集，那么称这两个概念间的关系是不相容关系或全异关系。不相容关系又分成下面两种：①反对关系（对立关系）；②矛盾关系。

【考点 296】常见的定义方法

1.**原始概念。**比如，代数中的集合、元素、对应等，几何中的点、线、面等。

2.**属加种差定义法。**这种定义法是中学数学中最常用的定义方法，该法即按公式“邻近的属+种差=被定义概念”下定义。例如，平行四边形给出如下的定义方式：“一组对边平行并且相等的四边形叫做平行四边形”。其中，平行四边形的概念邻近的属是四边形，平行四边形区别于四边形的其他种概念的属性即种差是“一组对边平行并且相等”。

属加种差的定义方法有两种特殊形式：①**发生式定义方法。**例如，“在平面内，一个动点与一个定点等距离运动所成的轨迹叫做圆”；②**关系定义法。**例如，“大于直角而小于平角的叫做钝角”。

3.**外延定义法。**例如，整数和分数统称为有理数；正弦、余弦、正切和余切函数叫做三角函数；椭圆、双曲线和抛物线叫做圆锥曲线。

外延定义有一种特殊的形式：**约定式定义法。**例如，$a^0=1\left(a\neq 0\right)$。

4.**词语定义法。**用词语说明被定义项的含义的方式。例如：“$\in$”表示属于。

5.**递归定义法。**一般适用于自然数的性质有直接关系的对象。例如：用递推公式

$a_n = a_{n-1} + d$ 定义等差数列。

6.公理式定义法。

【考点 297】数学思想方法

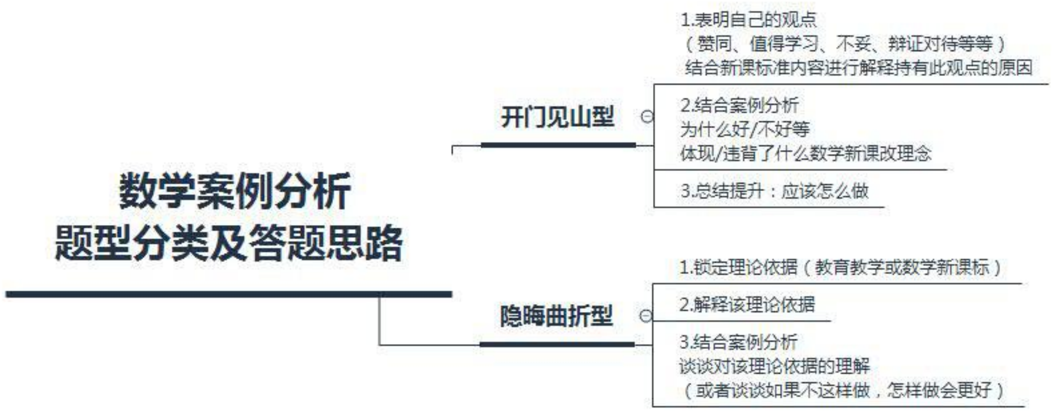
常见的数学思想方法有：符号思想、集合思想、数形结合思想、函数与方程思想、转化与化归思想、分类与整合思想、特殊与一般思想、有限与无限思想、或然与必然思想、归纳思想、类比思想、演绎思想、模型思想等。

【考点 298】数学教学中常用的教学方法

数学教学中常用的教学方法：讲授法、谈话法、讲练结合法、自学辅导法、发现法、小组教学法、探究性数学教学、情境教学法

第三章 案例分析

【考点 299】案例分析



第四章 教学设计

【考点 300】教学设计

1.课题：所讲的题目，一般要写在一页的首行中间，要醒目。

2.课时：一课时或两课时，一般都是一课时。

3.课型：新授课、复习课、测验讲评课或练习课等，一般为新授课。

4.教材分析：（1）教材的地理位置；（2）教材的主要内容；（3）教材的作用意义。

5.学情分析：（1）学生的认知水平；（2）学生的知识经验。

6.教学目标：（1）知识与技能目标；（2）过程与方法目标；（3）情感态度与价值观目标。

7.教学重难点

8.教学方法：

（1）数学学科常用教学方法：讲解法、练习法、谈话法、小组教学法、探究性数学教学法、情境教学法。

（2）数学学科常用的学习方法：自主学习、合作学习、探究学习（自主探究法，小组合作法）。

9.课前准备：教具、学具的准备。

10.教学过程：

（1）导入新课

常用的导入方法有：活动（游戏）导入、动手实践导入、诗歌导入、图片导入、实际问题导入、悬念导入、直观导入等。

可以采用的名称有：以旧拓新、承上启下、开门见山、设置疑问，引起悬念，直观演示等。

（2）讲授新课

要注意精选合作学习的内容；选准合作学习的时机；明确合作学习的步骤；必须保证合作学习的时间。

（3）巩固练习

要求练习设计精巧、有层次、有梯度、有密度，要考虑到进行的方式和所需时间。

（4）课堂小结

可以让学生自己总结，可以是知识方面，也可以是情感方面，也可以完成表格等等。

（5）布置作业

要考虑布置哪些内容，需不需要提示或解释等。多一些开放性作业和分层次作业。

11.板书设计：上课时准备写在黑板上的内容。板书要求具有科学性、整体性、条理性。

12.教学反思：教学反思包括教学前反思、教学中反思和教学后反思。一般是教学后反思，但是为了保证教案的完整性，在写教案的时候一般采用教学反思留白的形式。