

2021 年 10 月线性代数(经管类)试题及答案

- 1.请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2.答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 已知 2 阶行列式 D 的第 1 行元素及其余子式都为 a , 则 D 的值为

A. 0

B. a^2
$$C_1 = -a^2$$

D. $2a^2$

2. 若 A, B, C 均是 n 阶矩阵, 且满足 $ABC = E$, 则 $B^{-1} =$

A. AC

B. CA

$$C, A^{-1}C^{-1}$$
D. $C^{-1}A^{-1}$

3. 设向量组 $(1,1,1)^T, (a,1,0)^T, (1,b,0)^T$ 线性相关, 则数 a, b 可取值为

A. $a=0, b=0$

B. $a = 0, b = 1$

C. $a=1, b=0$

D. $a=1, b=1$

4. 设非齐次线性方程组 $Ax=b$, 其中 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, $r(A)=r$, 则

- A. 当 $r=n$ 时, $Ax=b$ 有惟一解
- B. 当 $r < n$ 时, $Ax=b$ 有无穷多解
- C. 当 $r=m$ 时, $Ax=b$ 有解
- D. 当 $m=n$ 时, $Ax=b$ 有惟一解

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 的关系为

- A. 相似且合同
- B. 相似但不合同
- C. 不相似但合同
- D. 不相似且不合同

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} ($i, j=1, 2$), 则 $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} =$ _____.

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是 3 维列向量, 且 3 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1| = m$, $|\alpha_2, \beta_2, \alpha_1| = n$, 则 $|\alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$ _____.

8. 若 $\alpha = (1, 2, 3, 4)^T$, 则 $\alpha^T \alpha =$ _____.

9. 设 A 为 2 阶矩阵, 将 A 的第 1 行与第 2 行互换得到矩阵 B , 再将 B 的第 2 行加到第 1 行得到单位矩阵 E , 则 $A =$ _____.

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$, 则数 $a =$ _____.

11. 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -1)^T$, $\alpha_3 = (2, -4, 5)^T$, 若仅当常数 k_1, k_2, k_3 全为零时, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 才能成立, 则数 a 的取值满足_____.

12. 设 3 阶矩阵 A 的各行元素之和为 0, $r(A) = 2$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____.

13. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似, 则数 $a =$ _____.

14. 设 A 为 3 阶矩阵, α_i 为 3 维非零列向量, 且 $A\alpha_i = i\alpha_i$ ($i=1,2,3$), 则 $r(A) =$ _____.

15. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2$ 的正惯性指数为 _____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分。

16. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+\frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+\frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+\frac{1}{4} \end{vmatrix}$ 的值.

17. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $BA + B^T$.

18. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足关系式 $6A + X = XA$, 求 X .

19. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, -2)^T$, $\alpha_2 = (2, 5, -3, -3)^T$, $\alpha_3 = (-1, -1, 1, 2)^T$, $\alpha_4 = (6, 17, -9, -9)^T$, 求该向量组的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 的通解 (要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 判定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ 能否相似于对角矩阵, 说明理由.

22. 求正交变换 $x = Qy$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题: 本题 7 分。

23. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶矩阵 A 的两个不同的特征值, α_1, α_2 分别是 A 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明 α_1, α_2 线性无关.

