

# 2012 年成人高等学校招生全国统一考试

## 高等数学（一）

### 第 I 卷（选择题，共 40 分）

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} =$

A.  $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 不存在

【答案】A

2. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续，则  $a =$

A. 1

B. 0

C. -1

D. -2

【答案】C

3. 设  $y = x^2$ ，则  $y' =$

A.  $x^3$

B.  $x$

C.  $\frac{x}{2}$

D.  $2x$

【答案】D

4. 设  $y = 3 \ln x$ ，则  $dy =$

A.  $\frac{3}{x} dx$

B.  $3e^x dx$

C.  $\frac{1}{3x} dx$

D.  $\frac{1}{3} e^x dx$

【答案】A

5. 设  $y = 2 - \cos x$  , 则  $y'(0) =$

A. 1

B. 0

C. -1

D. -2

【答案】B

6.  $\int 3x dx =$

A.  $6x^2 + C$

B.  $3x^2 + C$

C.  $2x^2 + C$

D.  $\frac{3}{2} x^2 + C$

【答案】D

7.  $\int_0^2 e^x dx =$

A.  $e^2 + 1$

B.  $e^2$

C.  $e^2 - 1$

D.  $e^2 - 2$

【答案】C

8. 设  $z = x^2 y$  , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A.  $xy$

B.  $2xy$

C.  $x^2$

D.  $2xy + x^2$

【答案】B

9. 微分方程  $y' = 6$  有特解  $y =$

A.  $6x$

B.  $3x$

C.  $2x$

D.  $x$

【答案】A

10. 下列点中, 为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$  收敛点的是

A.  $x = -2$

B.  $x = 1$

C.  $x = 2$

D.  $x = 3$

【答案】B

## 第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】0

12. 设  $y = \sin(x + 2)$ , 则  $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\cos(x + 2)$

13. 设  $y = e^x - 3$ , 则  $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $e^x dx$

14. 函数  $f(x) = x^3 - 12x$  的极小值点  $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】2

15.  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $\ln 2$

16. 曲线  $y = x^2 - x$  在点  $(1, 0)$  处的切线斜率为\_\_\_\_\_.

【答案】 1

17. 设  $y = x^3 + 2$  , 则  $y'' =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $6x$

18. 设  $z = x^2 - y$  , 则  $dz =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $2xdx - dy$

19. 过点  $M(1, 2, 3)$  且与平面  $2x - y + z = 0$  平行的平面方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $2x - y + z = 3$

20. 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  , 则  $\iint_D 3dxdy =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $3\pi$

### 三、解答题 ( 21~28 小题 , 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤 )

21. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$

【答案】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

22. 设  $y = xe^x$  , 求  $y'$

【答案】  $y' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$

23. 设函数  $f(x) = x - \ln x$  , 求  $f(x)$  的单调增区间

【答案】 函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ .

令  $y = f(x)$  , 则  $y' = 1 - \frac{1}{x}$ .

令  $y' = 0$  , 解得  $x = 1$ .

当  $0 < x < 1$  时 ,  $y' < 0$  ; 当  $x > 1$  时 ,  $y' > 0$  .

因此函数  $f(x)$  的单调增区间为  $(1, +\infty)$ .

24. 求  $\int (x^2 + \sin x) dx$ .

【答案】  $\int (x^2 - \sin x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \cos x + C$

25. 设  $z = x^2y - xy^3$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

【答案】  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^3$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - 3y^2$

26. 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 3$  的通解

【答案】 原方程对应的齐次微分方程为  $y'' - 2y' - 3y = 0$ . 其特征方程为  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ .

特征根为  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 3$ . 齐次方程的通解为  $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ .

设原方程的特解为  $y^* = A$ , 代入原方程可得  $y^* = -1$ .

所以原方程的通解为  $y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - 1$  ( $C_1, C_2$  为任意常数)

27. 设  $L$  是曲线  $y = x^2 + 3$  在点  $(1, 4)$  处的切线. 求由该曲线, 切线  $L$  及  $y$  轴围成的平面图形的面积  $S$ .

【答案】  $y = x^2 + 3$ ,  $y' = 2x$ .

切点  $(1, 4)$ ,  $y'(1) = 2$ .

故切线  $l$  的方程为  $y = 2x + 2$ .

$$S = \int_0^1 [(x^2 + 3) - (2x + 2)] dx = \left( \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

28. 设  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 求  $\iint_D x^2 y dx dy$ .

【答案】  $\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 x^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$ .

# 2013 年成人高等学校招生全国统一考试

## 高等数学（一）

### 第 I 卷（选择题，共 40 分）

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x-1} =$

A.  $e$

B. 1

C.  $e^{-1}$

D.  $-e$

【答案】C

2. 设  $y = 3 + x^2$ ，则  $y' =$

A.  $2x$

B.  $3 + 2x$

C. 3

D.  $x^2$

【答案】A

3. 设  $y = 2x^3$ ，则  $dy =$

A.  $2x^2 dx$

B.  $6x^2 dx$

C.  $3x^2 dx$

D.  $x^2 dx$

【答案】B

4. 设  $y = -2e^x$ ，则  $y' =$

A.  $e^x$

B.  $2e^x$

C.  $-e^x$

D.  $-2e^x$

【答案】D

5. 设  $y = 3 + \sin x$  , 则  $y' =$

A.  $-\cos x$

B.  $\cos x$

C.  $1 - \cos x$

D.  $1 + \cos x$

【答案】B

6.  $\frac{d}{dx} \int_0^x t^2 dt =$

A.  $x^2$

B.  $2x^2$

C.  $x$

D.  $2x$

【答案】A

7.  $\int \frac{3}{x} dx =$

A.  $-\frac{3}{x^2} + C$

B.  $-3\ln|x| + C$

C.  $\frac{3}{x^2} + C$

D.  $3\ln|x| + C$

【答案】D

8.  $\int_0^\pi \frac{1}{2} \cos x dx =$

A.  $-\frac{1}{2}$

B. 0

C.  $\frac{1}{2}$

D. 1

【答案】B

9. 设  $z = 2x^2 + 5y$  , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A.  $5y$

B.  $3x$

C.  $6x$

D.  $6x+5$

【答案】C

10. 微分方程  $(y')^2 = x$  的阶数为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

## 第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

### 二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} 2(1+x)^{\frac{1}{x}} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $2e$

12. 设  $y = (x+3)^2$  , 则  $y' =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $2(x+3)$

13. 设  $y = 2e^x - 1$  , 则  $y'' =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $2e^{x-1}$

14. 设  $y = 5 + \ln x$  , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{x} dx$

15.  $\int \cos(x+2) dx =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\sin(x+2) + C$

16.  $\int_0^1 2e^x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $2(e-1)$

17. 过坐标原点且与平面  $2x - y + z + 1 = 0$  平行的平面方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $2x - y + z = 0$

18. 设  $z = xy$  , 则  $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $ydx + xdy$

19. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  的收敛半径  $R = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1

20. 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$  , 则  $\iint_D \frac{1}{4} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $\pi$

### 三、解答题 ( 21~28 小题 , 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤 )

21. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \neq 1, \\ a, & x = 1 \end{cases}$  在  $x=1$  处连续 , 求  $a$  .

【答案】  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 2$

由于  $f(x)$  在  $x=1$  处连续 , 因此  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a$  , 可得  $a = 2$  .

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} .$

【答案】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1} = 0$

23. 求  $\int_0^1 \frac{2}{x+1} dx .$

【答案】  $\int_0^1 \frac{2}{x+1} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{x+1} d(x+1) = 2 \ln(x+1) \Big|_0^1 = 2 \ln 2$

24. 求函数  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  的极大值与极小值.

【答案】  $f'(x) = 3x^2 - 3$ .

令  $f'(x) = 0$  , 解得  $x_1 = -1$  ,  $x_2 = 1$ .

又  $f''(x) = 6x$  , 可知  $f''(-1) = -6 < 0$  ,  $f''(1) = 6 > 0$ .

故  $x = -1$  为  $f(x)$  的极大值点, 极大值  $f(-1) = 7$  ;  $x = 1$  为  $f(x)$  的极小值点, 极小值,  $f(1) = 3$ .

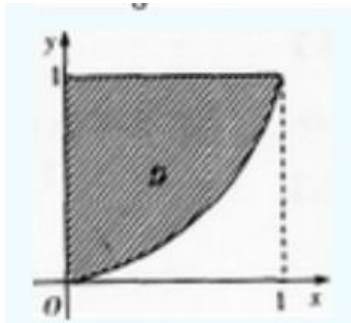
25. 设  $z = xy^2 + e^y \cos y$  , 求  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

【答案】 因为  $z = xy^2 + e^y \cos y$  , 故  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + e^y \cos x$ .

26. 求由曲线  $y = x^2 (x \geq 0)$  , 直线  $y = 1$  及  $y$  轴围成的平面图形的面积.

【答案】  $y = x^2 (x \geq 0)$  ,  $y = 1$  及  $y$  轴围成的平面图形  $D$  如图所示. 其面积为

$$S = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left( x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$



27. 计算  $\iint_D xy^2 dx dy$  , 其中积分区域  $D$  由直线  $y = x$  ,  $x = 1$  及  $x$  轴围成.

【答案】  $\iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{15} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{15}$ .

28. 求微分方程  $y'' - 2y' + y = e^{-x}$  的通解.

【答案】 对应齐次微分方程的特征方程为  $r^2 - 2r + 1 = 0$ . 特征根为  $r = 1$  (二重根).

齐次方程的通解为  $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$  (其中  $C_1$ 、 $C_2$  为任意常数).

设原方程的特解为  $y^* = A e^{-x}$  , 代入原方程可得  $A = \frac{1}{4}$

因此  $y^* = \frac{1}{4}e^{-x}$ . 故原方程的通解为  $y = Y + y^* = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$  ( $C_1$ 、 $C_2$  为任意常数).



# 2014 年成人高等学校招生全国统一考试

## 高等数学（一）

### 第 I 卷（选择题，共 40 分）

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} =$

A.  $e^{-2}$

B.  $e^{-1}$

C.  $e$

D.  $e^2$

【答案】D

2. 设  $y = e^{-5x}$ ，则  $dy =$

A.  $-5e^{-5x}dx$

B.  $-e^{-5x}dx$

C.  $e^{-5x}dx$

D.  $5e^{-5x}dx$

【答案】A

3. 设函数  $f(x) = x \sin x$ ，则  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

A.  $\frac{1}{2}$

B. 1

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $2\pi$

【答案】B

4. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 在  $(a, b)$  可导,  $f'(x) > 0$ . 若  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则  $y = f(x)$  在  $(a, b)$

- A. 不存在零点
- B. 存在唯一零点
- C. 存在极大值点
- D. 存在极小值点

【答案】 B

5.  $\int x^2 e^{x^3} dx =$

- A.  $\frac{1}{3} x^2 e^{x^3} + C$
- B.  $3x^2 e^{x^3} + C$
- C.  $\frac{1}{3} x^2 e^{x^3} + C$
- D.  $3e^{x^3} + C$

【答案】 C

6.  $\int_{-1}^1 (3x^2 + \sin^5 x) dx =$

- A. -2
- B. -1
- C. 1
- D. 2

【答案】 D

7.  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx =$

- A.  $-e$
- B.  $-e^{-1}$
- C.  $e^{-1}$
- D.  $e$

【答案】 C

8. 设二元函数  $z = x^2y + x \sin y$  , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$

- A.  $2xy + \sin y$
- B.  $x^2 + x \cos y$
- C.  $2xy + x \sin y$
- D.  $x^2y + \sin y$

【答案】 A

9. 设二元函数  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  , 则  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 =$

- A. 1
- B. 2
- C.  $x^2 + y^2$
- D.  $\frac{1}{x^2} + y^2$

【答案】 A

10. 设球面方程为  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$  , 则该球的球心坐标与半径分别为

- A.  $(-1, 2, -3)$  ; 2
- B.  $(-1, 2, -3)$  ; 4
- C.  $(1, -2, -3)$  ; 2
- D.  $(1, -2, -3)$  ; 4

【答案】 C

## 第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 曲线的  $y = \frac{x+1}{2x+1}$  铅直渐近线方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{2}{3}$

12. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = 3$  , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $x = -\frac{1}{2}$

13. 设  $y = \frac{x}{1+x}$  , 则  $y' =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{(1+x)^2}$

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 3

15. 曲线  $y = x + \cos x$  在点  $(0,1)$  处的切线的斜率  $k =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 1

16.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{2}$

17. 设函数  $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$  , 则  $f'(0) =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 1

18. 设二元函数  $z = x^2 + 2xy$  , 则  $dz =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $2(x+y)dx - 2xdy$

19. 过原点  $(0,0,0)$  且垂直于向量  $(1,1,1)$  的平面方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $x + y + z = 0$

20. 微分方程  $y' - 2xy = 0$  的通解为  $y =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $y = Ce^{x^2}$

### 三、解答题 ( 21~28 小题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤 )

21. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^{-x} - 1}{x^2}$ .

【答案】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^{-x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^{-x} - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + e^{-x}}{2} = \frac{3}{2}.$

22. 设  $y = y(x)$  满足  $2y + \sin(x+y) = 0$ , 求  $y'$ .

【答案】 将  $2y + \sin(x+y) = 0$  两边对  $x$  求导, 得  $2y' + \cos(x+y) \cdot (1+y') = 0$ . 解得

$$y' = -\frac{\cos(x+y)}{2 + \cos(x+y)}.$$

23. 求函数  $f(x) = x^3 - 3x$  的极大值.

【答案】 因为  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . 又  $f''(x) = 6x$ ,

$f''(-1) = -6 < 0$ ,  $f''(1) = 6 > 0$ . 所以  $x_1 = -1$  为  $f(x)$  的极大值点,  $f(x)$  的极大值为

$$f(-1) = 2.$$

24. 计算  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ .

【答案】  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+e^x} d(e^x + 1) = \ln(1+e^x) + C.$

25. 设函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x-1)$ , 求  $f'(1)$ .

【答案】 因为  $f'(x) = x - \sin(x-1)$ , 所以  $f'(1) = 1$ .

26. 计算  $\iint_D (x+1) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x=0$ ,  $y=0$  及  $x+y=1$  围成的平面有界区域.

【答案】  $\iint_D (x+1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+1) dy = \int_0^1 (1+x)(1-x) dx = \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

27. 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{5^n}$  的收敛性.

【答案】 因为  $u_n = \frac{5n+1}{5^n} > 0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5(n+1)+1}{5^{n+1}}}{\frac{5n+1}{5^n}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1} = \frac{1}{5} < 1, \text{ 所以原级数收敛.}$$

28. 求微分方程  $y'' + 3y' + 2y = e^x$  的通解.

【答案】 $y'' + 3y' + 2y = e^x$  对应的齐次方程为  $y'' + 3y' + 2y = 0$ . 特征方程为  $r^2 + 3r + 2 = 0$ .

特征根为  $r_1 = -2$ ,  $r_2 = -1$ .

所以齐次方程的通解为  $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ .

设  $y^* = Ae^x$  为原方程的一个特解, 代入原方程可得  $A = \frac{1}{6}$

所以原方程的通解为  $y = Y + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{6} e^x$ .



# 2015 年成人高等学校招生全国统一考试

## 高等数学（一）

### 第 I 卷（选择题，共 40 分）

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设  $b \neq 0$ ，当  $x \rightarrow 0$  时， $\sin bx$  是  $x^2$  的

A. 高阶无穷小量

B. 等价无穷小量

C. 同阶但不等价无穷小量

D. 低阶无穷小量

【答案】D

2. 设函数  $f(x)$  可导，且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(1+x) - f(1)} = 2$ ，则  $f'(1) =$

A. 2

B. 1

C.  $\frac{1}{2}$

D. 0

【答案】C

3. 函数  $f(x) = x^3 - 12x + 1$  的单调减区间为

A.  $(-\infty, +\infty)$

B.  $(-\infty, -2)$

C.  $(-2, 2)$

D.  $(2, +\infty)$

【答案】C

4. 设  $f'(x_0) = 0$ ，则  $x = x_0$

- A.为  $f(x)$  的驻点
- B.不为  $f(x)$  的驻点
- C.为  $f(x)$  的极大值点
- D.为  $f(x)$  的极小值点

【答案】A

5.下列函数中为  $f(x) = e^{2x}$  的原函数的是

- A.  $e^x$
- B.  $\frac{1}{2}e^{2x}$
- C.  $e^{2x}$
- D.  $2e^{2x}$

【答案】B

6.  $\int x \cos x^2 dx =$

- A.  $-2 \sin x^2 + C$
- B.  $-\frac{1}{2} \sin x^2 + C$
- C.  $2 \sin x^2 + C$
- D.  $\frac{1}{2} \sin x^2 + C$

【答案】D

7.  $\frac{d}{dx} \int_x^0 t e^{t^2} dt =$

- A.  $x e^{x^2}$
- B.  $-x e^{x^2}$
- C.  $x e^{-x^2}$
- D.  $-x e^{-x^2}$

【答案】B

8. 设  $z = x^y$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A.  $yx^{y-1}$

B.  $xy \ln x$

C.  $xy^{-1}$

D.  $xy^{-1} \ln x$

【答案】A

9. 设  $z = x^2 + y^2$ , 则  $dz|_{(1,1)} =$

A.  $3dx + 2dy$

B.  $2dx + 3dy$

C.  $2dx + dy$

D.  $dx + 3dy$

【答案】B

10. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$  ( $k$  为非零常数)

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 收敛性与  $k$  的取值有关

【答案】A

## 第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

二、填空题 ( 11~20 小题 , 每小题 4 分 , 共 40 分 )

11. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 1

12. 函数  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$  的间断点为  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 2

13. 设  $y = x^2 + e^2$  , 则  $dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $2xdx$

14. 设  $y = (2+x)^{100}$  , 则  $y' = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $100(2+x)^{99}$

15.  $\int \frac{dx}{3-x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $-\ln|3-x| + C$

16.  $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 0

17.  $\int_0^1 e^{3x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$

18. 设  $z = y^2 \sin x$  , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $y^2 \cos x$

19. 微分方程  $y' = 2x$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $x^2 + C$

20. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  的收敛半径  $R = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 1

三、解答题 (21~28 小题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ .

【答案】  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{2x} = \frac{1}{2}$ .

22. 设曲线方程为  $y = e^x + x$ , 求  $y'|_{x=0}$  以及该曲线在点  $(0,1)$  处的法线方程.

【答案】  $y' = e^x + 1$ ,  $y'|_{x=0} = 2$ , 曲线在点  $(0,1)$  处的法线方程为  $y-1 = -2(x-0)$ , 即  $x+2y-2=0$ .

23. 计算  $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

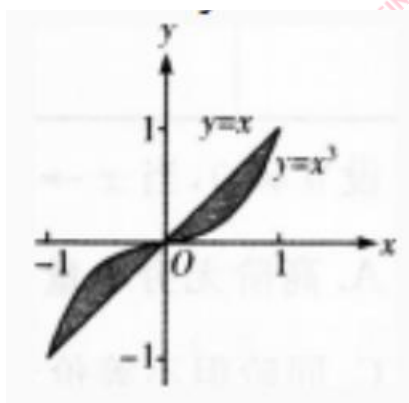
【答案】 设  $x=t$ , 则  $x=t^2$ ,  $dx=2tdt$ .

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{-t}}{t} \cdot 2tdt = 2 \int e^{-t} dt = -2e^{-t} + C = -2e^{-\sqrt{x}} + C.$$

24. 计算  $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$ .

【答案】  $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^e = \frac{3}{2}$ .

25. 求曲线  $y = x^3$  与直线  $y = x$  所围图形 (如图中阴影部分所示) 的面积  $S$ .



【答案】 由对称性知  $S = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ .

26. 设二元函数  $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 5$ , 求  $z$  的极值.

【答案】  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1$  ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1$ .

由  $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$  ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$  ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ .

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2$  ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 1$  ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 2$  .  $B^2 - AC = -3 < 0$  ,  $A > 0$  .

因此点  $(-1,1)$  为  $z$  的极小值点 , 极小值为  $-6$  .

27. 求微分方程  $y' + \frac{1}{x}y = x$  的通解.

【答案】  $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( \int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left( \int x^2 dx + C \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{3} x^3 + C \right)$ .

28. 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$  , 其中  $D$  是由直线  $y = x$  ,  $x = 1$  及  $x$  轴围成的有界区域.

【答案】  $\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{10} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{10}$  .



# 2016 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

## 高等数学（一）

### 第 I 卷（选择题，共 40 分）

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{2x} =$

A.  $\frac{2}{3}$

B. 1

C.  $\frac{3}{2}$

D. 3

1. 【答案】C。

2. 设函数  $y = 2x + \sin x$ ，则  $y' =$

A.  $1 - \cos x$

B.  $1 + \cos x$

C.  $2 - \cos x$

D.  $2 + \cos x$

2. 【答案】D。

3. 设函数  $y = e^x - 2$ ，则  $dy =$

A.  $e^x - 3dx$

B.  $e^x - 2dx$

C.  $e^x - 1dx$

D.  $e^x dx$

3. 【答案】B。

4. 设函数  $y = (2 + x)^3$ ，则  $y' =$

A.  $(2 + x)^2$

B.  $3(2+x)^2$

C.  $(2+x)^4$

D.  $3(2+x)^4$

4. 【答案】 B。

5. 设函数  $y = 3x + 1$  , 则  $y' =$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

5. 【答案】 D。

6.  $\frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt =$

A.  $e^x$

B.  $e^t - 1$

C.  $e^x - 1$

D.  $e^x + 1$

6. 【答案】 A。

7.  $\int x dx =$

A.  $2x^2 + C$

B.  $x^2 + C$

C.  $\frac{1}{2}x^2 + C$

D.  $x + C$

7. 【答案】 C。

8.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx =$

A.  $\frac{1}{2}$

B. 1

- C.2  
D.3

8.【答案】C。

9.设函数  $z = 3x^2y$  , 则  $\frac{\partial z}{\partial y} =$

- A.  $6y$   
B.  $6xy$   
C.  $3x$   
D.  $3x^2$

9.【答案】D。

10.幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  的收敛半径为

- A.0  
B.1  
C.2  
D.  $+\infty$

10.【答案】B。

## 第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} =$  \_\_\_\_\_。

11.【答案】  $e^2$ 。

12.设函数  $y = x^3$  , 则  $y' =$  \_\_\_\_\_。

12.【答案】  $3x^2$ 。

13.设函数  $y = (x-3)^4$  , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_。

13.【答案】  $4(x-3)^3 dx$ 。

14.设函数  $y = \sin(x-2)$  , 则  $y'' =$  \_\_\_\_\_。

14.【答案】  $-\sin(x-2)$ 。

15.  $\int \frac{1}{2x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 【答案】  $\frac{1}{2} \ln|x| + C$ 。

16.  $\int_{-1}^1 x^7 dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 【答案】 0。

17. 过坐标原点且与直线  $\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y+1)}{2} = \frac{(z-3)}{-2}$  垂直的平面方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 【答案】  $3x + 2y - 2z = 0$ 。

18. 设函数  $z = 3x + y^2$ ，则  $dz = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

18. 【答案】  $3dx + 2ydy$ 。

19. 微分方程  $y' = 3x^2$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

19. 【答案】  $x^3 + C$ 。

20. 设区域  $D = \{(x, y) | 0, x, 1, 0, y, 1\}$ ，则  $\iint_D 2xdy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

20. 【答案】 2。

### 三、解答题 (21~28 小题，共 70 分。解答应写出推理、演算步骤)

21. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} (x \neq 0), \\ a (x = 0) \end{cases}$ ，在  $x = 0$  处连续，求  $a$ 。

21. 【答案】  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，由于  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续，因此  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ，

可得  $a = 1$ 。

22. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}$ 。

22. 【答案】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{\cos x} = -1$ 。

23. 求曲线  $y = x^3 - 3x + 5$  的拐点。

23. 【答案】  $y' = 3x^2 - 3$ ， $y'' = 6x$ ，令  $y'' = 0$ ，解得  $x = 0$ 。

当  $x < 0$  时,  $y'' < 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $y'' > 0$ ; 当  $x = 0$  时,  $y = 5$ .

因此, 点  $(0, 5)$  为所给曲线的拐点。

24. 求  $\int (x - e^x) dx$ .

24. 【答案】  $\int (x - e^x) dx = \frac{x^2}{2} - e^x + C$ 。

25. 设函数  $z = x^2 \sin y + ye^x$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

25. 【答案】  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y + ye^x$ 。

26. 设  $D$  为曲线  $y = x^2$  与直线  $y = x$  所围成的有界平面图形, 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V$ .

26. 【答案】 由  $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x \end{cases}$  可解得两曲线的交点为  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{旋转体的体积 } V &= \int_0^1 \pi \left[ x^2 - (x^2)^2 \right] dx \\ &= \pi \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{15} \pi. \end{aligned}$$

27. 求  $\iint_D (x^3 + y) dx dy$  是由曲线  $y = x^2$  与直线  $y = 1$  所围成的有界平面区域面积.

27. 【答案】 由于积分区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 因此  $\iint_D x^3 dx dy = 0$

记  $D_1$  为区域  $D$  在第一象限的部分, 则

$$\iint_D y dx dy = 2 \iint_{D_1} y dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 y dy = \int_0^1 (1 - x^4) dx = \frac{4}{5}$$

$$\text{所以 } \iint_D (x^3 + y) dx dy = \frac{4}{5}.$$

28. 求  $y' - \frac{1}{x} y = x^2$  的通解.

28. 【答案】 本题考查的知识点为求解一阶线性微分方程.

方程的通解为:

$$\begin{aligned}
 y &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[ \int x^2 e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = e^{\ln x} \left( \int x^2 e^{-\ln x} dx + C \right) \\
 &= x \left( \int x dx + C \right) = x \left( \frac{x^2}{2} + C \right) = \frac{x^3}{2} + Cx
 \end{aligned}$$

