华图教师
HTEACHER.NET
SINCE 2001

2021特岗教师招聘考试

易错考点100

SHU XUE

数学

目　录

第一模块　数与代数

第一章 数

【易错点 1】质数和合数

1.质数和合数：一个数，如果只有 1 和它本身两个约数，这样的数叫做质数（或素数）。如 2，3，5 等都是质数，其中 2 为最小的质数。

2.一个数，如果除了 1 和它本身还有别的约数，这样的数叫做合数。如 4，6，8 等都是合数，其中 4 是最小的合数。

3.0 和 1 既不是质数也不是合数；自然数中除了 0 和 1 外，其他的数不是质数就是合数。

4.每个合数都可以写成几个质数相乘的形式，这几个质数叫做这个合数的质因数。把一个合数用几个质因数相乘的形式表示出来，叫做分解质因数。通常情况下用短除法来分解质因数。

易错指数：★

【题目示例】

下面命题中，错误的是（　　）

A.0 既不是正数也不是负数

B.1 既不是素数也不是合数

C.角的两边越长，角就越大

D.假分数的倒数不一定是真分数

【答案】C

【解析】角的大小与边的长短无关与两边张开的大小有关。故本题选 C。

【易错点 2】公约数和公倍数

1.几个数公有的约数叫做这几个数的公约数，其中最大的一个叫做这几个数的最大公约数；公约数只有 1 的两个数，叫做互质数。如 4 和 7 是互质数。

2.几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数，其中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。

3.几个数的公约数个数是有限的，而几个数的公倍数个数是无限的。

易错指数：★★★

【题目示例】

求$12, 18, 24$三个数的最小公倍数是（　　）

A.36　　B.84　　C.72　　D.128

【答案】C

【解析】$12=2^2\times3$，$18=2\times3^2$，$24=2^3\times3$，$12, 18, 24$三个数的最小公倍数是$2^3\times3^2=72$。故本题选C。

【易错点3】平方根、算术平方根和立方根

1.平方根

如果一个数的平方等于a，那么这个数就叫做a的平方根（或二次方根）。一个正数有两个平方根，它们互为相反数；零的平方根是零；负数没有平方根。正数a的平方根记做“$\pm\sqrt{a}$”。

2.算术平方根

正数a的正的平方根叫做a的算术平方根，记作“$\sqrt{a}$”。正数和零的算术平方根都只有一个，零的算术平方根是零，$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\ge0)\\-a(a<0)\end{cases}$

注意：$\sqrt{a}$的双重非负性$\begin{cases}\sqrt{a}\ge0\\a\ge0\end{cases}$。

3.立方根

如果一个数的立方等于a，那么这个数就叫做a的立方根（或a的三次方根）。一个正数有一个正的立方根；一个负数有一个负的立方根；零的立方根是零。

注意：$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$，即三次根号内的负号可以移到根号外面。

易错指数：★★

【题目示例】

$\sqrt{81}$的算术平方根为（　　）

A.3　　B9　　C.± 3　　D.± 9

【答案】A

【解析】$\sqrt{81}=9$，9的算术平方根为3。故本题选A。

第二章 复数

【易错点4】复数的重要概念

1.i称为虚数单位，规定$i^2=-1$，形如$a+bi$的数称为复数，其中a，$b\in\mathbf{R}$。a，b分别叫做复数的实部与虚部。

$$复数a+bi\begin{cases}实数(b=0)\begin{cases}有理数—循环小数\\无理数—无限不循环小数\end{cases}\\虚数(b\neq 0)\begin{cases}纯虚数(a=0)\\非纯虚数(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

2.复数相等：设复数$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i(a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2\in\mathbf{R})$，那么$z_1=z_2$的充要条件是：$a_1=a_2且b_1=b_2$。特别地，$z=a+bi=0\Leftrightarrow a=b=0$。

3.共轭复数：实部相同，虚部相反的两个复数互为共轭复数，如果$z=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$的共轭复数为$a-bi(a,\ b\in\mathbf{R})$，记为$\bar{z}=a-bi(a,\ b\in\mathbf{R})$，那么$z$与$\bar{z}$对应复平面上的点关于实轴对称，且（1）$z+\bar{z}=2a$，$z-\bar{z}=2bi$，$z\bar{z}=a^2+b^2$；（2）$z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$。

易错指数：★★★

【题目示例】

若复数$z=\dfrac{2+i}{1+i}$，其中i为虚数单位，则复数z的虚部是（　　）

A.$\dfrac{3}{2}$　　B.$-\dfrac{1}{2}$　　C.$-\dfrac{3}{2}$　　D.$\dfrac{1}{2}i$

【答案】B

【解析】$z=\frac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})\cdot(\mathrm{i}-1)}{(1+\mathrm{i})\cdot(\mathrm{i}-1)}=\frac{3-\mathrm{i}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则复数 z 的虚部是 $-\frac{1}{2}$。故本题选B。

【易错点5】复数的表示形式

1.复数的几何形式：复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$ 可用平面直角坐标系内点 $Z(a,\ b)$ 来表示。这时称此平面为复平面，x 轴称为实轴，y 轴除去原点称为虚轴。这样，全体复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面上全体点集是一一对应的。

2.复数的向量表示：复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，在复平面内还可以用以原点 O 为起点，以点 $Z(a,\ b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 来表示，复数集 $\mathbf{C}$ 和复平面内所有以原点为起点的向量所成的集合也是一一对应的（复数0对应点 O，看成零向量）。

易错指数：★★★

【题目示例】

已知i为虚数单位，复数 $\frac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的共轭复数在复平面内对应的点位于（　　）

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

【答案】B

【解析】根据题意，$\frac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\frac{-1-3\mathrm{i}}{1+4}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$，其共轭复数为 $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$，则在复平面内对应的点位于第二象限。故本题选B。

【易错点6】复数的运算

1.加法：$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$。

2.减法：$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$。

3.乘法：$(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$。

4.除法：$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})\cdot(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})\cdot(c-d\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$。

5.幂运算：$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$n\in\mathbf{N}^{*}$。

易错指数：★★★

【题目示例】

已知复数 z 满足，$1+iz=z-2i$，则 $z=$（　）

A. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$　　B. $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$　　C. $-1+3i$　　D. $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

【答案】D

【解析】$1+2i=(1-i)z\Rightarrow z=\frac{1+2i}{1-i}=\frac{(1+2i)(1+i)}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$。故本题选 D。

第三章 代数式

【易错点 7】二次根式

1.二次根式

把形如 $\sqrt{a}\,(a\geq 0)$ 的式子叫做二次根式，二次根式必须满足：

（1）含有二次根号“$\sqrt{\ }$”；（2）被开方数 a 必须是非负数。

2.最简二次根式

若二次根式满足：

（1）被开方数的因数是整数，因式是整式；

（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式叫做最简二次根式。

3.同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式。

4.二次根式的性质

（1）$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\,(a\geq 0)$

（2）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\,(a\geq 0)\\-a\,(a<0)\end{cases}$

（3） $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\left(a\ge 0,\ b\ge 0\right)$

（4） $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left(a\ge 0,\ b>0\right)$

易错指数：★★★

【题目示例】

若 $\sqrt{(m-2)^2}+|m-3|$ 化简的结果为一个常数，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m>0$　　B. $m\ge 3$　　C. $m\le 2$　　D. $2\le m\le 3$

【答案】D

【解析】根据题意，$\sqrt{(m-2)^2}+|m-3|=|m-2|+|m-3|$，由 $\sqrt{(m-2)^2}+|m-3|$ 化简的结果为一个常数，则 $\begin{cases}m-2\ge 0\\ m-3\le 0\end{cases}$，解得 $2\le m\le 3$。故本题选 D。

第四章 集合与简易逻辑

【易错点 8】集合的运算

1.并集

由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$ （或 $B\cup A$），读作“A 并 B”（或“B 并 A”），即 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A,\ 或x\in B\}$。

2.交集

由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$（或 $B\cap A$），读作“A 交 B”（或“B 交 A”），即 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A,\ 且x\in B\}$。

3.补集

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\,|\,x\in U,\ 且x\notin A\}$。

易错指数：★★★

【题目示例】

设集合 $M=\{x|x^2+x-6<0\}$， $N=\{x|1\le x\le 3\}$，则 $M\cap N=$ （　　）

A. $[1,2)$　　　　B. $[1,2]$　　　　C. $(2,3]$　　　　D. $[2,3]$

【答案】A

【解析】由 $M=\{x|x^2+x-6<0\}$， 解得 $M=\{x|-3<x<2\}$， 且 $N=\{x|1\le x\le 3\}$， $M\cap N=\{x|1\le x<2\}$。故本题选 A。

【易错点 9】四种条件

1.如果已知 $P\Rightarrow Q$，那么就说， P 是 Q 的充分条件， Q 是 P 的必要条件；

2.如果既有 $P\Rightarrow Q$，又有 $Q\Rightarrow P$，就记作 $P\Leftrightarrow Q$，则 P 与 Q 互为充分必要条件，简称充要条件。

易错指数：★★★★★

【题目示例】

设 $a,\ b\in\mathbf{R}$，则“$a\ge 1$且$b\ge 1$”是“$a+b\ge 2$”的（　　）

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】若 $a\ge 1$ 且 $b\ge 1$，则 $a+b\ge 2$ 成立，当 $a=0$， $b=3$ 时，满足 $a+b\ge 2$，但 $a\ge 1$ 且 $b\ge 1$ 不成立，因此，“$a\ge 1$且$b\ge 1$”是“$a+b\ge 2$”的充分不必要条件。故本题选 A。

第五章　方程与不等式

【易错点 10】韦达定理

如果方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\ne 0\right)$ 的两个实数根是 x_1、x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$， $x_1x_2=\frac{c}{a}$。即对于任何一个有实数根的一元二次方程，两根之和等于方程的一次项系数除以二次项系数所得的商的相反数，两根之积等于常数项除以二次项系数所得的商。

易错指数：★★★

【题目示例】

关于 x 的方程 $x^2-ax+2a=0$ 的两根的平方和是 5，则 a 的值是（　　）

A. -1 或 5　　B.1　　C.5　　D. -1

【答案】A

【解析】根据韦达定理，$\begin{cases}x_1+x_2=a\\x_1\cdot x_2=2a\end{cases}$，$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=a^2-4a=5$，解方程 $a^2-4a=5$，得 $a=-1$ 或 $a=5$。故本题选 A。

【易错点 11】分式方程

1.分母里含有未知数的方程叫做分式方程。

2.解分式方程的思想是将“分式方程”转化为“整式方程”。它的一般解法是：

（1）去分母，方程两边都乘以最简公分母；

（2）解所得到的整式方程；

（3）验根：将所得的根代入最简公分母，若等于零，就是增根，应该舍去；若不等于零，就是原方程的根。

易错指数：★★★

【题目示例】

方程 $\dfrac{2x+1}{x-1}=3$ 的解是（　　）

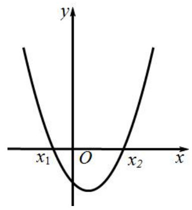
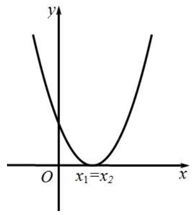
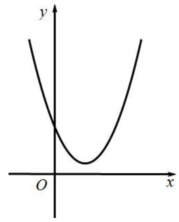
A. -2　　B. -1　　C.2　　D.4

【答案】D

【解析】$\dfrac{2x+1}{x-1}=3$，方程两边同时乘以 $x-1$ 得：$2x+1=3\left(x-1\right)$；去括号得 $2x+1=3x-3$，移项得 $2x-3x=-3-1$，合并同类项得 $-x=-4$，系数化为 1 得 $x=4$，检验：把 $x=4$ 代入 $x-1$ 得：$x-1=4-1=3\neq0$，所以 $x=4$ 是原方程的解。故本题选 D。

【易错点 12】一元二次不等式的解法

二次函数的图象、一元二次方程的根、一元二次不等式的解集间的关系

<table>
<tr><th colspan="2">判别式 $\Delta=b^2-4ac$</th><th>$\Delta>0$</th><th>$\Delta=0$</th><th>$\Delta<0$</th></tr>
<tr><td colspan="2">二次函数
$y=ax^2+bx+c\left(a>0\right)$
的图象</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">一元二次方程
$ax^2+bx+c=0\left(a>0\right)$
的根</td><td>有两个相异实数根
$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\left(x_1<x_2\right)$</td><td>有两个相等实数根
$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$</td><td>没有实数根</td></tr>
<tr><td rowspan="2">一元二次不等式的解集</td><td>$ax^2+bx+c>0$
$\left(a>0\right)$</td><td>$\left\{x\middle|x<x_1或x>x_2\right\}$</td><td>$\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$</td><td>R</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c<0$
$\left(a>0\right)$</td><td>$\left\{x\middle|x_1<x<x_2\right\}$</td><td>$\varnothing$</td><td>$\varnothing$</td></tr>
</table>

易错指数：★★★

【题目示例】

已知 $2a+1<0$，关于 x 的不等式 $x^2-4ax-5a^2>0$ 的解集是（　　）

A. $\left\{x\mid x<5a或x>-a\right\}$　　B. $\left\{x\mid x>5a或x<-a\right\}$

C. $\left\{x\mid -a<x<5a\right\}$　　D. $\left\{x\mid 5a<x<-a\right\}$

【答案】A

【解析】由题意可知 $a<-\dfrac{1}{2}$，原不等式可变形为 $\left(x+a\right)\left(x-5a\right)>0$ 推出 $x<5a或x>-a$。故本题选 A。

【易错点 13】线性规划

线性规划问题求解步骤：

（1）作出可行域：画出约束条件（不等式组）所确定的平面区域；

（2）平移：将目标函数对应的直线平移，最先通过或最后通过的顶点便是最优解的位置；

（3）求解：解有关的方程组，求出最优解的坐标，再代入目标函数，求出目标函数的最值。

易错指数：★★★★★

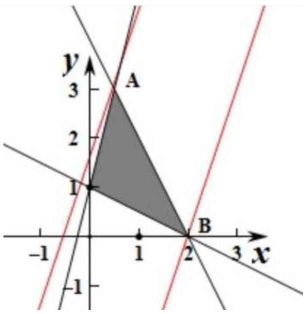
【题目示例】

变量x、y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\ge 2\\2x+y\le 4\\4x-y\ge -1\end{cases}$，则目标函数$z=3x-y+3$的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{3}{2},9\right]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},6\right]$　　C. $[-2,3]$　　D. $[1,6]$

【答案】A

【解析】根据求$z=3x-y+3$的取值范围，可将其转化为$y=3x+3-z$，求解此直线截距的范围。根据题目中所给条件，可将x、y所表示的线性区域表示出来，如图。则将直线$y=3x$在线性区域内移动，则在$\begin{cases}2x+y=4\\4x-y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=3\end{cases}$点处，$z_{\min}=3\times\frac{1}{2}-3+3=\frac{3}{2}$。经过$\begin{cases}x+2y=2\\2x+y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$点处，$z_{\max}=3\times 2-0+3=9$。则$z$的取值范围是$\left[\frac{3}{2},9\right]$。故本题选 A。



第六章 函数

【易错点 14】单调性

1.定义：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果对于定义域 I 内的某个区间 D 内的任意两个自变量 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增（减）函数。

2.确定单调区间的方法

（1）定义法；（2）导数法；（3）图象法；（4）复合函数 $y=f[g(x)]$ 在公共定义域上的单调性：同增异减。

易错指数：★★★

【题目示例】

已知在二次函数 $y=-x^2+2x+1$ 的图象中，若 y 随 x 的增大而增大，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x<1$　　B. $x>1$　　C. $x<-1$　　D. $x>-1$

【答案】A

【解析】由二次函数 $y=-x^2+2x+1$，$a=-1$，开口向下，对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times(-1)}=1$，当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大。故本题选 A。

【易错点 15】奇偶性

1.定义：一般地，对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x，若：

（1）有 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 就叫做偶函数；

（2）有 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 就叫做奇函数。

2.具有奇偶性的函数图象的特征

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点对称。

3.复杂函数的奇偶性

已知：$H(x)=f(x)\cdot g(x)$

（1）若非零函数 $f(x)$， $g(x)$ 的奇偶性相同，则在公共定义域内 $H(x)$ 为偶函数；

（2）若非零函数 $f(x)$， $g(x)$ 的奇偶性相反，则在公共定义域内 $H(x)$ 为奇函数。

4.常用的结论：若 $f(x)$ 是奇函数，且0， $a\in$ 定义域，则 $f(0)=0$ 或 $f(-a)=-f(a)$ 。

易错指数：★★★

【题目示例】

下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

A. $f(x)=\mathrm{e}^x-1$　　B. $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$　　C. $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$　　D. $f(x)=\lg|x|$

【答案】C

【解析】A 选项中函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1$ 既不是奇函数也不是偶函数，故 A 错误；B 选项中，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$ 是奇函数，故 B 错误；C 选项中，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ 是偶函数，$f'(x)=\dfrac{-4}{x^5}$，故当 $x>0$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数；当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，故 C 正确。D 选项中，函数 $f(x)=\lg|x|$ 是偶函数，由其函数图象可知在区间 $(0,+\infty)$ 上为单调递增，故 D 错误。故本题选 C。

【易错点 16】周期性

1.定义：若 T 为非零常数，对于定义域内的任意一个 x，使 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，T 叫做这个函数的一个周期。

2.判定

（1） $y=f(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 时， $f(x+a)=f(x-a)$ 或 $f(x-2a)=f(x)$ $(a>0)$ 恒成立，则 $y=f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数；

（2）若 $y=f(x)$ 是偶函数，其图象又关于直线 $x=a(a^{1}\ 0)$对称，则 $f(x)$ 是周期为 $2a$

的周期函数；

（3）若 $y=f(x)$ 是奇函数，其图象又关于直线 $x=a(a\neq 0)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期为 $4a$ 的周期函数；

（4）若 $f(x)=-f(x+a)\ (a\neq 0)$ 恒成立，则 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数；

（5）若 $f(x)=\dfrac{1}{f(x+a)}(a\neq 0)$ 恒成立，则 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数；

（6）若 $f(x+a)=f(x+b)\ (a,\ b\neq 0,\ b\neq a)$ 恒成立，则 $f(x)$ 是周期为 $b-a$ 的周期函数。

易错指数：★★★

【题目示例】

已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且 $f(x+1)=-f(x-1)$，$f(-2)=3$，则 $f(322)=$（　）

A. -1　　B.1　　C.2　　D.3

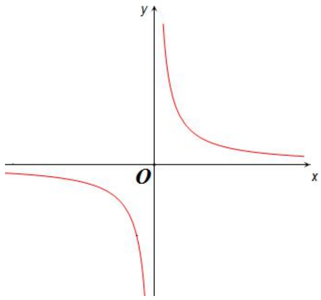
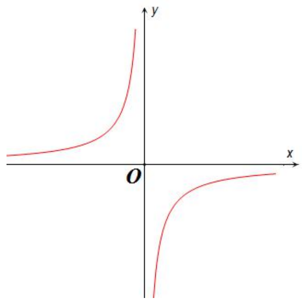
【答案】D

【解析】由 $f(x+1)=-f(x-1)$ 可知 $f(x+2)=-f(x)$，即周期 $T=4$，所以 $f(322)=f(2)$。又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(2)=f(-2)=3$。故本题选 D。

【易错点 17】反比例函数

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$

k 的符号	$k>0$	$k<0$

函数图象		
图象特点	经过第一、三象限	经过第二、四象限
定义域	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
单调性	$(-\infty,0)\downarrow$，$(0,+\infty)\downarrow$	$(-\infty,0)\uparrow$，$(0,+\infty)\uparrow$
奇偶性	奇函数	奇函数
周期性	无	无
对称轴	$y=\pm x$	$y=\pm x$
对称中心	$(0,\ 0)$	$(0,\ 0)$

易错指数：★★★

【题目示例】

已知反比例函数的图象经过$Q(a,\ a)$，则这个函数的图象位于（　　）

A.第一、三象限　　B.第二、三象限　　C.第二、四象限　　D.第三、四象限

【答案】A

【解析】设反比例函数解析式为$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，由反比例函数的图象经过$Q(a,\ a)$，将$Q(a,\ a)$代入解析式得$a=\frac{k}{a}$，即$k=a^2>0$，故函数的图象位于第一、三象限。故本题选A。

【易错点18】对数运算法则

设 $a>0$，且 $a\neq1$，M、$N>0$，则有

（1）$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$；

（2）$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

（3）$\log_{a^n}M^m=\dfrac{m}{n}\log_a M\ (m\in\mathbf{R},\ \ n\neq0)$；

（4）$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\ (c>0且c\neq1,\ \ b>0)$；

（5）$a^{\log_a M}=M$。

易错指数：★★★

【题目示例】

下列函数中既不是奇函数也不是偶函数的是（　　）

A. $y=2^{|x|}$　　B. $y=\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

C. $y=2^x+2^{-x}$　　D. $y=\lg\dfrac{1}{x+1}$

【答案】D

【解析】A 选项，定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=f(x)$，是偶函数，故错误；B 选项，定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\lg\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\lg\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$，$f(-x)+f(x)=\lg1=0$，是奇函数，故错误；C 选项，定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$，是偶函数，故错误；D 选项，定义域为 $x>-1$，关于原点不对称，因此既不是奇函数也不是偶函数，故正确。故本题选 D。

【易错点 19】幂函数

1.定义：

（1）幂函数的解析式必须是 $y=x^a$ 的形式，前面的系数必须是 1，没有其他项；

（2）定义域与 a 的值有关系；

（3）判断一个函数是幂函数还是指数函数切入点：看未知数 x 是指数（指数函数）

还是底数（幂函数）。

2.图象及性质：只需要关注 $a=1,2,3,-1,\frac{1}{2}$ 时的情形。

易错指数：★★★

【题目示例】

下列为幂函数的是（　　）

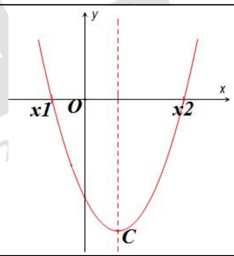
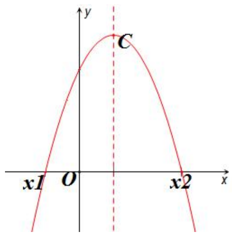
A. $y=x$　　　B. $y=2x$　　　C. $y=2x^2$　　　D. $y=x^{-2x}$

【答案】A

【解析】结合幂函数定义可知 $y=x$ 为幂函数。故本题选 A。

【易错点 20】二次函数的图象及性质

二次函数的图象及性质

函数解析式	$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$	
a 的符号	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$（最低点）	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$（最高点）
定义域	**R**	**R**
值域	$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$
单调性	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\downarrow$，$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)\uparrow$	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\uparrow$，$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)\downarrow$

奇偶性	当 $b=0$ 时，偶函数	当 $b=0$ 时，偶函数
周期性	无	无
对称轴	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$
对称中心	无	无

其中 a 、b 、c 的含义：

（1）a 表示开口方向：$a>0$ 时，抛物线开口向上；$a<0$ 时，抛物线开口向下；

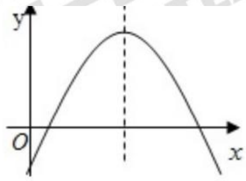
（2）b 与对称轴有关：对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$；

（3）c 表示抛物线与 y 轴的交点坐标：$(0,\ c)$。

易错指数：★★★

【题目示例】

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则直线 $y=ax+bc$ 不经过（　　）象限。



A.一　　　　B.二　　　　C.三　　　　D.四

【答案】A

【解析】由图可知 $a<0$，$c<0$ 及对称轴 $-\dfrac{b}{2a}>0$，则 $\dfrac{b}{2a}<0$，即 $b>0$，所以 $bc<0$，故直线 $y=ax+bc$ 必然经过二、三、四象限，即不经过第一象限。故本题选 A。

【易错点 21】不同象限中三角函数的符号

1. $\sin\alpha$ 在一二象限为正，三四象限为负；

2. $\cos\alpha$ 在一四象限为正，二三象限为负；

3. $\tan\alpha$ 、$\cot\alpha$ 在一三象限为正，二四象限为负。

符号口诀：“一全二正弦，三切四余弦”。

易错指数：★★★

【题目示例】

若 $\cos\theta > 0$，且 $\sin 2\theta < 0$，则角 θ 终边所在象限是（　　）

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

【答案】D

【解析】根据 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta < 0$，又 $\cos\theta > 0$，$\sin\theta < 0$，$\therefore \theta$ 在第四象限。故本题选 D。

【易错点 22】诱导公式

1. $\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2} \pm \alpha\right)\right| = \begin{cases} \sin\alpha\ (n\text{为偶数}) \\ \cos\alpha\ (n\text{为奇数}) \end{cases} \left(0 < \alpha < \frac{p}{2}\right)$

2. $\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2} \pm \alpha\right)\right| = \begin{cases} \cos\alpha\ (n\text{为偶数}) \\ \sin\alpha\ (n\text{为奇数}) \end{cases} \left(0 < \alpha < \frac{p}{2}\right)$

求任意角的三角函数时，可以转化为特殊角的三角函数：“奇变偶不变，符号看象限”。

易错指数：★★★★★

【题目示例】

下列不等式成立的是（　　）

A. $\tan\frac{9\pi}{8} > \tan\frac{\pi}{6}$　　B. $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

C. $\sin\frac{\pi}{18} > \sin\frac{\pi}{10}$　　D. $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) > \cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$

【答案】D

【解析】A 选项，由 $\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8}$，函数 $y = \tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 是增函数，则 $\tan\frac{\pi}{8} < \tan\frac{\pi}{6}$，即 $\tan\frac{9\pi}{8} < \tan\frac{\pi}{6}$，故不成立；B 选项，由函数 $y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上是增函数，$-\frac{3\pi}{10} < -\frac{\pi}{5}$，则 $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right) < \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$，故不成立；由函数 $y = \sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数，$\frac{\pi}{18} < \frac{\pi}{10}$，则 $\sin\frac{\pi}{18} < \sin\frac{\pi}{10}$，故不成立；D 选项，由 $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$，$\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) =$

$\cos\frac{3\pi}{5}$，函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\ \pi)$ 上是减函数，$\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{5}$，则 $\cos\frac{\pi}{4}>\cos\frac{3\pi}{5}$，即 $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)>\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$成立。故本题选 D。

【易错点 23】两角和与差公式

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

3. $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$。

易错指数：★★★

【题目示例】

已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，则 $\sin 2x=$ （　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【解析】由题意可知，$\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$，化简得 $(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，两边平方得 $1+2\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}$，$\therefore 2\sin x\cdot\cos x=-\frac{1}{2}$，即 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$。故本题选 A。

【易错点 24】三角函数的一般形式

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\ \ \omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$

（1）参数的意义：

振幅（A），函数的最小值为 $-A$，最大值为 A；

周期（T），函数的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$；

初相（φ，当 $x=0$ 时的相位），函数与 y 轴交点的纵坐标为 $y=A\sin\varphi$。

（2）定义域：$\mathbf{R}$；值域：$[-A,\ A]$。

当 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=A$；$\omega x+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-A$。

（3）单调性：$\omega x+\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 时单调递增；

$\omega x+\varphi\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 时单调递减。

（4）奇偶性与对称性：

A.奇偶性根据定义或图象判断；

B.对称中心：图象与 x 轴的交点；

C.对称轴：过最高点或最低点且垂直于 x 轴。

（5）周期性：最小正周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。

（6）辅助角公式：$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\arctan\frac{b}{a}\right),(a>0)$

易错指数：★★★★★

【题目示例】

函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}-x)$ 的一个单调递增区间为（　）

A. $(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4})$　　B. $(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$　　C. $(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$　　D. $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

【答案】B

【解析】由题意可知，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}-x\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，化简得 $k\pi-\frac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{4}$。故本题选 B。

【易错点 25】三角函数图象变换

1.先平移后伸缩

平移变换：函数 $y=\sin x$ 的图象纵坐标不变，横坐标向左 $(\varphi>0)$ 或向右 $(\varphi<0)$ 平移 $|\varphi|$ 个单位得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象；

周期变换：函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的纵坐标不变，横坐标缩短 $(\omega>1)$ 或伸长 $(0<\omega<1)$ 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象；

振幅变换：函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的横坐标不变，纵坐标伸长 $(A>1)$ 或缩短 $(0<A<1)$ 为原来的 A 倍，得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象。

2.先伸缩后平移

周期变换：函数 $y=\sin x$ 的图象的纵坐标不变，横坐标缩短 $(\omega>1)$ 或伸长 $(0<\omega<1)$ 为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，得到函数 $y=\sin\omega x$ 的图象；

平移变换：函数 $y=\sin\omega x$ 的图象纵坐标不变，横坐标向左 $(\varphi>0)$ 或向右 $(\varphi<0)$ 平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象；

振幅变换：函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的横坐标不变，纵坐标伸长 $(A>1)$ 或缩短 $(0<A<1)$ 为原来的 A 倍，得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象。

易错指数：★★★

【题目示例】

要得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，只要将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象（　　）

A.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 单位　　B.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 单位

C.向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 单位　　D.向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 单位

【答案】C

【解析】$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$，根据左加右减的原则，所以将其向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，原式可以变为 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sin 2x$。故本题选 C。

【易错点 26】解三角形

1.正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为外接圆半径）；

2.余弦定理：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$；$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$；$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$；

3.面积公式：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$；$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$。

易错指数：★★★

【题目示例】

在$\triangle ABC$，如果该三角形的三条边a，b，c，满足$(b+c-a)(a+b+c)=3bc$，则$\sin A$的值为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】$(b+c-a)(a+b+c)=b^2+c^2-a^2+2bc=3bc$，化简得$b^2+c^2-a^2=bc$；$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，$A\in(0,\ \pi)$，$\therefore\sin A=\sqrt{1-(\cos A)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。故本题选A。

第七章 数列

【易错点 27】等差数列

1.概念：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列。这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母d表示。

2.通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d\ \left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

由三个数a，A，b组成的等差数列可以看成最简单的等差数列。

3.前n项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=na_n-\frac{1}{2}n(n-1)d$

4.性质（解题时常用到的）

①$a_m-a_n=(m-n)d$，其中a_m，a_n为第m，n项；

②等差中项：a，b，c成等差数列，b叫做a与c的等差中项，则$2b=a+c$；

③若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$（m、n、p、q均为正整数）；

④$S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$，$S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$；

⑤S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$ 成等差数列。

易错指数：★★★

【题目示例】

设$\{a_n\}$是等差数列，$a_1+a_3+a_5=9$，$a_6=9$，则这个数列的前 6 项和等于（　　）

A.12　　　　B.24　　　　C.36　　　　D.48

【答案】B

【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由等差数列的等差中项的性质得$a_1+a_3+a_5=3a_3=9$，则$a_3=3$，又$a_6=9$，有$a_6-a_3=(6-3)d$，即$3d=9-3=6$，解得$d=2$。由$a_3=3$，则$a_3=a_1+2d=a_1+4=3$，解得$a_1=-1$，则这个数列的前 6 项和为$S_6=6\times(-1)+\frac{6\times(6-1)}{2}\times 2=24$。故本题选 B。

【易错点 28】等比数列

1.概念：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列。这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母q表示$(q\neq 0)$。

2.通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*,\ a_1\neq 0,\ q\neq 0\right)$

3.前n项和公式：$S_n=\begin{cases}\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{a_1-qa_n}{1-q}(q\neq 1)\\ na_1\left(q=1\right)\end{cases}$

4.性质（解题时常用到的）

①$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$，其中a_m，a_n为第m，n项；

②若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；

③若三个数等比，常设$\frac{a_1}{q}$，a_1，a_1q；

④等比中项：a，b，c成等比数列，b叫做a与c的等比中项，则$b^2=a\cdot c$；

⑤S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$成等比数列。

易错指数：★★★

【题目示例】

等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2+S_3=0$，则公比$q=$（　　）

A. -1　　B.1　　C. -2　　D.2

【答案】A

【解析】由题设得$a_1=\dfrac{a_2}{q}$，$a_3=a_2q$，$S_3=a_1+a_2+a_3=\dfrac{a_2}{q}+a_2+a_2q$，所以$a_2+S_3=a_2\left(\dfrac{1}{q}+2+q\right)$，由于等比数列各项均不为0，所以$\dfrac{1}{q}+2+q=0$，解得$q=-1$。故本题选A。

【易错点 29】特殊数列求通项

1.公式法：当已知$S_n=f(n)$时，直接运用公式$a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$求解。

2.累加法：当已知$a_{n+1}=a_n+f(n)(n\geq 1)$时，运用累加法。

3.累乘法：当已知$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$时，运用累乘法。

4.待定系数构造法：当已知$a_{n+1}=pa_n+f(n)$（p为常数）时，运用构造法，构造成等差数列或者等比数列来求解。

5.倒数法：当已知$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{Aa_n+B}$时，运用倒数法。

【易错点 30】特殊数列求前 *n* 项和

1.常用几个数列的求和公式

①$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

②$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

③$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

④$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$

2.裂项相消法

将数列的通项分成两个式子的代数和，即$a_n=f(n+1)-f(n)$，然后累加时抵消中间的若干项。此方法主要针对$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}$这样的求和，其中$\{a_n\}$是等差数列。

3.错项相减法

$c_n=a_n\cdot b_n$，$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列。S_n乘等比数列的公比后与原来的前n项和S_n相减，即S_n-qS_n，求S_n。但要注意讨论$q=1$和$q\neq1$两种情况。

4.分组求和法

将数列求和公式中的各项进行分类，合并“同类项”，构造为多个等差数列或等比数列求和。

5.倒序相加法

适用于求和公式中到首尾距离相等的两项和具有典型的规律的数列，采取把正着写与倒着写的两个和式相加，然后求和。如等差数列的求和公式推导过程就是用这种方法。

易错指数：★★★★★

【题目示例】

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$，数列$\{b_n\}$满足$a_n=4\log_2 b_n+3$，$n\in\mathbf{N}^*$。

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和T_n。

【答案】（1）$a_n=4n-1$；（2）$T_n=2^n(4n-5)+5$

【解析】（1）由 $S_n=2n^2+n$，可得 $S_{n-1}=2(n-1)^2+n-1$，联立两式 $\begin{cases} S_n=2n^2+n, & ① \\ S_{n-1}=2(n-1)^2+n-1, & ② \end{cases}$，①－②可得 $S_n-S_{n-1}=4n-1(n\geq 2)$，即 $a_n=4n-1(n\geq 2)$，

当 $n=1$ 时，可得 $S_1=3$，即 $a_1=3$，故 $n=1$ 时，$a_1=3$ 也满足条件，所以 $a_n=4n-1$。

（2）由 $a_n=4\log_2 b_n+3$，$a_n=4n-1$ 得 $4n-1=4\log_2 b_n+3$，$b_n=2^{n-1}$。设 $c_n=a_n\cdot b_n$，

即 $c_n=(4n-1)\cdot 2^{n-1}$。则有 $T_n=3\times 2^0+7\times 2^1+11\times 2^2+\cdots+(4n-5)\times 2^{n-2}+(4n-1)\times 2^{n-1}$①，

$2T_n=3\times 2^1+7\times 2^2+11\times 2^3+\cdots+(4n-5)\times 2^{n-1}+(4n-1)\times 2^n$②，由①－②得：

$-T_n=3+4\left(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\right)-(4n-1)\times 2^n\Rightarrow T_n=2^n(4n-5)+5$。

第八章 推理与证明

【易错点 31】合情推理与演绎推理

1.合情推理

①归纳推理：由部分到整体、特殊到一般的推理；

②类比推理：由特殊到特殊的推理。

2.演绎推理

从一般性原理出发，推出某个特殊情况下的结论，称为演绎推理。它是由一般到特殊的推理。“三段论”是演绎推理的一般形式，包括：大前提—已知的一般原理；小前提—所研究的特殊情况；结论—根据一般原理，对特殊情况做出的判断。

3.区别与联系

①区别：合情推理所得的结论不一定正确；演绎推理在大前提、小前提、推理形式都正确时，所得的结论一定正确。

②联系：数学结论、证明思路等的发现主要靠合情推理，证明数学结论主要是演绎推理的过程。

易错指数：★★★

【题目示例】

下列属于合情推理的是（　　）

A.类比推理　　B.演绎推理　　C.数学归纳法　　D.证明

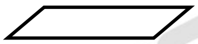
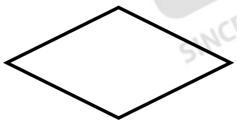
【答案】A

【解析】合情推理包含归纳推理和类比推理。故本题选 A。

第九章 算法初步

【易错点 32】程序框图

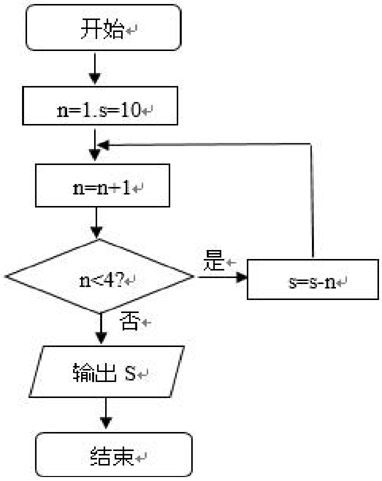
常用图形符号

图形符号	名称	符号表示的意义
	终端框（起止框）	算法的起始和结束
	输入、输出框	算法的输入、输出的信息
	处理框（执行框）	赋值、计算
	判断框	判断某一条件是否成立，成立时在出口处标明“是”或“Y”；不成立时标明“否”或“N”
	流程线	流程进行的方向

易错指数：★★★

【题目示例】

执行如图所示的框图，则输出的 $S=$________。



【答案】5

【解析】根据流程图，当 $n=2$ 时，$S=10-2=8$；当 $n=3$ 时，$S=8-3=5$；当 $n=4$ 时，直接输出 S，所以 $S=5$。

第十章 奥数

【易错点 33】烙饼问题

烙饼问题分为两大类：一类是烙饼正反面时间相同的情况，相关公式：总时间=要烙的面数*烙一次所需时间/可以同时烙的面数；另一类是烙饼正反面时间不同的情况。

当时间算出来不为整数时，采用进一法取近似数。

易错指数：★★★

【题目示例】

一口烙饼的锅，每次只能烙两张饼，每面都要烙，每面 3 分钟。烙 3 张饼需要多长时间？

【答案】9 分钟

【解析】开始时，可以先放 A、B 两个饼，3 分钟后可以翻转 B，拿出 A，放入 C，3 分钟以后可以拿出 B，再把 A 的反面放入，翻转 C，再过 3 分钟即可。故烙 3 张饼需要 $3+3+3=9$ 分钟。

【易错点 34】分数问题

在解分数应用题问题时，分析题中数量之间的关系，准确找出“量”与“率”之间的对应是解题的关键。

（1）部分数和总数

在同一整体中，部分数和总数作比较关系时，部分数通常作为比较量，而总数则作为标准量，那么总数就是单位“1”。

（2）两种数量比较

分数应用题中，两种数量相比的关键句非常多。有的是“比”字句，有的则没有“比”字，而是带有指向性特征的“占”、“是”、“相当于”。在含有“比”字的关键句中，比后面的那个数量通常就作为标准量，也就是单位“1”。

（3）原数量与现数量

有的关键句中不是很明显地带有一些指向性特征的词语，也不是部分数和总数的关系。这类分数应用题的单位“1”比较难找。需要将题目文字完善成我们熟悉的类似带“比”的文字，然后再分析。

易错指数：★★★

【题目示例】

某工厂实行责任制后，职工人数减少了$\frac{1}{10}$，而产量却增加了8%，现在职工的工作效率是原来的（　　）

A.120%　　B.108%　　C.92%　　D.110%

【答案】A

【解析】令原来的工作效率为“1”，根据题意，现在的工作效率为$\frac{1+8\%}{1-10\%}=1.2=120\%$。故本题选 A。

【易错点 35】经济问题

1.售价＝进价＋利润＝进价×（1+利润率）

2.利润＝售价－进价

3.利润率＝（售价－进价）/进价×100%

易错指数：★★★

【题目示例】

某服装厂把一种新款衣服在成本价基础上先增加 10%，再打九折出售，最后服装厂是（　）

A.赚了　　B.亏了　　C.不赚不亏　　D.不确定

【答案】B

【解析】设成本为 a， $a(1+10\%)\times 90\% = 0.99a < a$，即售价小于成本，所以服装厂是亏了。故本题选 B。

【易错点 36】浓度问题

浓度就是溶质质量与溶液质量的比值，通常用百分数表示：

$$浓度=\frac{溶质质量}{溶液质量}\times 100\%=\frac{溶质质量}{溶质质量+溶剂质量}\times 100\%$$

易错指数：★★★

【题目示例】

浓度为 15%的盐水，蒸发掉一部分后浓度为 20%，则再蒸发同样的水后，浓度为______。

【答案】30%

【解析】假设盐的比重为 1，则最开始一共盐和水为 $\frac{1}{0.15}=\frac{20}{3}$，蒸发掉一部分水后，盐和水一共为 $\frac{1}{0.2}=5$，所以蒸发掉的水为 $\frac{20}{3}-5=\frac{5}{3}$，再蒸发这么多的水，盐水一共 $5-\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$，所以浓度变为 $1\div\frac{10}{3}=0.3=30\%$。

【易错点 37】植树问题

1.在线段上的植树问题可以分为以下四种情形：

（1）两端都要植树，棵数＝间隔数＋1；

（2）只有一端要植树，棵数 = 间隔数；

（3）两端都不植树，棵数 = 间隔数 -1；

（4）路线的两边要植树，那么植树的棵数应乘以 2。

2.封闭线路上植树：棵数 = 间隔数。

易错指数：★★★

【题目示例】

一块长方形绿地，长 120 米，宽 15 米，要在它的四周和四个角种树，要求每相邻两棵树之间的距离相等，最少要种树（　　）

A.16 棵　　B.18 棵　　C.20 棵　　D.22 棵

【答案】B

【解析】由题意可得，两棵树之间的距离最大为 15 米，且 $\frac{120}{15}=8$，即该长方形的长所在的边需要植树 $8+1=9$ 棵，故两边需要植树 $2\times9=18$ 棵。故本题选 B。

【易错点 38】抽屉原理

1.基本抽屉原理：

（1）如果把 $x+k\left(k\geq1\right)$ 个元素放到 x 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里含有 2 个或 2 个以上的元素；

（2）如果把 $m\times x+k\left(x>k\geq1\right)$ 个元素放到 x 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里含有 $m+1$ 个或更多的元素。当元素总数达到抽屉数的若干倍后，可用抽屉数除元素总数，写成下面的等式：

元素总数 = 商 × 抽屉数 + 余数

如果余数不是 0，则最小数 = 商 + 1；如果余数正好是 0，则最小数 = 商。

2.解题策略：

一定注意题目中哪些是“抽屉”，哪些是“元素”。

易错指数：★★★

【题目示例】

有红、黄、白三种颜色的球各 4 个，放在一个盒子里，至少取出（　　）个球，可以保证取到 4 个颜色相同的球。

A.8　　　　B.9　　　　C.10　　　　D.11

【答案】C

【解析】抽屉原理，考虑最坏的情况，可知取 10 个保证取到 4 个颜色相同的球。故本题选 C。

第二模块　图形与几何

第一章 平面几何

【易错点 39】三角形的内心

1.三角形的三条角平分线交于一点，该点即为三角形的内心。

2.三角形的内心到三条边的距离相等，都等于内切圆半径 r 。

3.$r=\dfrac{2S}{a+b+c}$。

4.在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$r=\dfrac{a+b-c}{2}$。

易错指数：★★★

【题目示例】

已知一个直角三角形的的两条直角边为 3 和 4，求这个三角形的内切圆的直径为________。

【答案】2

【解析】由勾股定理可知，斜边为 5，有面积法可知，这个三角形的内切圆的半径为 $\dfrac{3´\ 4}{3+4+5}=1$，则直径为 2。

【易错点 40】四边形

1.对角线

（1）在四边形中，连接不相邻两个顶点的线段叫做四边形的对角线。

（2）设多边形的边数为n，则多边形的对角线条数为$\frac{n(n-3)}{2}$。

2.四边形的内角和定理及外角和定理

（1）四边形的内角和定理：四边形的内角和等于$360°$。

（2）四边形的外角和定理：四边形的外角和等于$360°$。

（3）推论：①多边形的内角和定理：n边形的内角和等于$(n-2)\cdot 180°$；②多边形的外角和定理：任意多边形的外角和等于$360°$。

易错指数：★★★

【题目示例】

在所有的正多边形中，只有正三角形、正四边形、正六边形可以密铺。（　）

【答案】√

【解析】正三角形、正四边形、正六边形的内角分别为$60°$、$90°$、$120°$，都能被$360°$整除，而其他正多边形不能被$360°$整除，所以在所有的正多边形中，只有正三角形、正四边形、正六边形能密铺。故本题正确。

【易错点 41】圆

1.垂径定理及其推论

（1）垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧。

（2）推论 1

①平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧。

②弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧。

③平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧。

（3）推论 2：圆的两条平行弦所夹的弧相等。

垂径定理及其推论可概括为：直径$\left\{\begin{array}{c}\text{过圆心}\\\text{垂直于弦}\\\text{平分弦}\\\text{平分弦所对的优弧}\\\text{平分弦所对的劣弧}\end{array}\right\}$知二推三

2.弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理及其推论

（1）定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

（2）推论：在同圆或等圆中，如果两个圆的圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等。

3.圆周角定理及其推论

定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等。

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；$90°$ 的圆周角所对的弦是直径。

4.弧长公式及圆周长

（1）弧长公式：$n°$ 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式为 $l=\dfrac{n\pi R}{180}$。

（2）圆周长：$C=2\pi R$。

5.面积公式

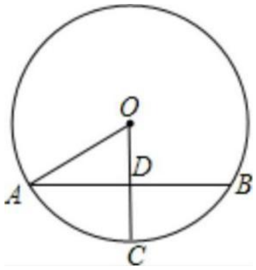
（1）扇形面积：$S_{\text{扇形}}=\dfrac{n}{360}\pi R^2=\dfrac{1}{2}lR$，其中 n 是扇形的圆心角度数，R 是扇形的半径，l 是扇形的弧长。

（2）圆面积：$S=\pi R^2$。

易错指数：★★★★

【题目示例】

已知在半径为 12cm 的圆中，垂直平分半径的弦长为（　　）



A. $\sqrt{3}$ cm　　B.27cm　　C.$12\sqrt{3}$ cm　　D.$6\sqrt{3}$ cm

【答案】C

【解析】设为圆O，弦为AB，半径OC被AB垂直平分于D，连接OA，如图所示，由题意可得：$OA=OC=12\text{cm}$，$\because$半径OC被AB垂直平分于D，$\therefore OD=DC=6\text{cm}$，$\because CO\perp AB$，$\therefore$由垂径定理可得：$AD=DB$，在$\text{Rt}\triangle ODA$中，由勾股定理可得：$AD^2=AO^2-OD^2$，$\therefore AD=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}\text{cm}$，$\therefore AB=12\sqrt{3}\text{cm}$，则垂直平分半径的弦长为$12\sqrt{3}$ cm。故本题选 C。

【易错点 42】投影与三视图

1.投影

（1）定义：用光线照射物体，在地面上或墙壁上得到的影子，叫做物体的投影。

（2）平行投影：由平行光线（如太阳光线）形成的投影称为平行投影。

（3）中心投影：由同一点（点光源）发出的光线所形成的投影称为中心投影。

2.视图

（1）主视图：在正面内得到的由前向后观察物体的视图，叫做主视图。

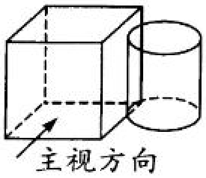
（2）俯视图：在水平面内得到的由上向下观察物体的视图，叫做俯视图。

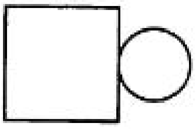
（3）左视图：在侧面内得到的由左向右观察物体的视图，叫做左视图，有时也叫做侧视图。

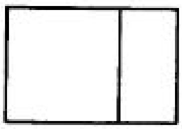
易错指数：★★★

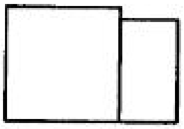
【题目示例】

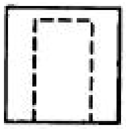
如图所示几何体是一个正方体和一个圆柱体紧靠在一起，其左视图是（　　）



A. 

B. 

C. 

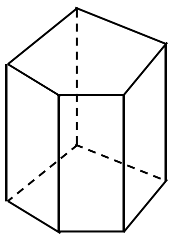
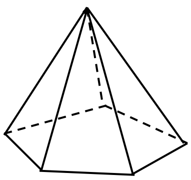
D. 

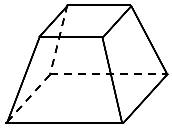
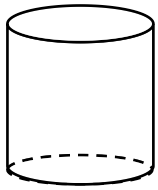
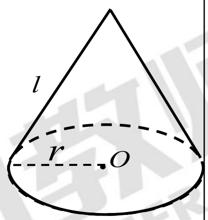
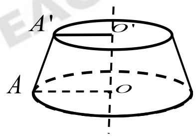
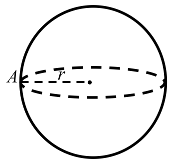
【答案】D

【解析】该几何体的左视图即从左面看，可得到一个正方形，里面有个圆柱的左视图是长方形为虚线。故本题选 D。

第二章 立体几何

【易错点 43】空间几何体的结构、表面积与体积

几何体		定义	图形	表面积和体积
多面体	棱柱	有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面围成的多面体叫做棱柱		$S_{直棱柱侧面积}=Ch$ ，$V_{柱}=S_{底}h$（C 为底面周长，$S_{底}$ 为底面面积， h 为高）
	棱锥	有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体叫做棱锥		$V_{锥}=\frac{1}{3}S_{底}h$（$S_{底}$ 为底面面积，h 为高）

	棱台	棱锥被平行于棱锥底面的平面所截后，截面和底面之间的部分叫做棱台		$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}})$($h$为高)
旋转体	圆柱	以矩形的一边所在的直线为轴旋转，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫圆柱		$S_{侧}=2\pi rh$， $S_{表}=2\pi r^2+2\pi rh$ $V_{柱}=S_{底}h$
	圆锥	以直角三角形的一条直角边所在的直线为轴旋转，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫圆锥		$S_{侧}=\pi rl$， $S_{表}=\pi r^2+\pi rl$ $V_{锥}=\frac{1}{3}S_{底}h$
	圆台	用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，截面和底面之间的部分叫做圆台		$V_{台体}=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+R\cdot r)$($h$为高)
	球	以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体，叫球体，简称球		$S=4\pi r^2$ $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

易错指数：★★★★

【题目示例】

半径为 R 的四分之一圆卷成一个圆锥，则它的体积为（　　）

A. $\frac{\sqrt{15}}{192}\pi R^3$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{64}\pi R^3$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{24}\pi R^3$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi R^3$

【答案】A

【解析】设圆锥的底面半径为 r，高为 h，根据题意有 $2\pi r=\frac{1}{4}\times 2\pi R$，即 $r=\frac{1}{4}R$，所

以圆锥的高 $h=\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{4}R\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}R$，则体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{1}{4}R\right)^2\times\frac{\sqrt{15}}{4}R=\frac{\sqrt{15}}{192}\pi R^3$。故本题选 A。

【易错点 44】线线位置关系

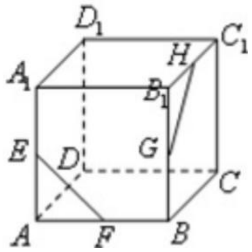
直线与直线的位置关系

位置关系	是否共面	公共点数量
相交	在同一平面内	有且只有一个
平行	在同一平面内	无公共点
异面	不同在任何一个平面内	无公共点

易错指数：★★★

【题目示例】

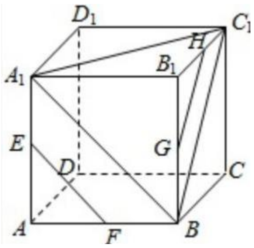
如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H 分别为 AA_1、AB、BB_1、B_1C_1 的中点，异面直线 EF 与 GH 所成的角是（　　）



A.45°　　B.60°　　C.90°　　D.120°

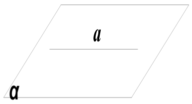
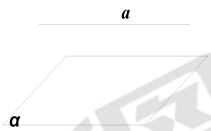
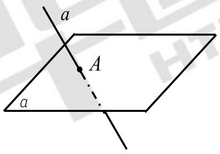
【答案】B

【解析】如图，连结 A_1B，BC_1，A_1C_1，则 $A_1B=BC_1=A_1C_1$，且 $EF\parallel A_1B$，$GH\parallel BC_1$，锐角 $\angle A_1BC_1$ 就是异面直线所成的角，所以异面直线 EF 与 GH 所成的角等于 60°。故本题选 B。



【易错点 45】线面位置关系

直线与平面的位置关系

位置关系		图示	表示方法	公共点个数
直线在平面内			$a \subset \alpha$	无数个
直线在平面外	平行		$a \parallel \alpha$	0 个
	相交		$a \cap \alpha = A$	1 个

1.直线与平面平行

判定定理 1：平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，则这条直线与这个平面平行。

判定定理 2：一条直线与一个平面垂直，则平面外与这条直线垂直的直线与该平面平行。

性质定理 1：一条直线和一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线和该直线平行。

2.直线与平面垂直

判定定理 1：如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。

判定定理 2：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。

性质定理 1：如果一条直线和一个平面垂直，则这条直线垂直于平面内任意一条直线。

性质定理 2：垂直于同一个平面的两条直线平行。

易错指数：★★★

【题目示例】

若 m，n 是两条不同的直线，α，β，γ 是三个不同的平面，则（　　）

A.若 $m\subset\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\alpha$

B.若 $m\perp\beta$，$m//\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$

C.若 $\alpha\perp\gamma$，$\alpha\perp\beta$，则 $\beta\perp\gamma$

D.若 $\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，$m//n$，则 $\alpha//\beta$

【答案】B

【解析】A 选项中直线 m，只有垂直于平面 α，β 的交线，才会垂直于平面 α，故错误。B 选项中由 $m//\alpha$，可知在平面 α 内一定有一条直线与 m 平行，又因为 m 垂直于平面 β，平面 α 内必有一条直线垂直于平面 β，因此两平面垂直，故正确；C 选项中平面 β 与 γ 有可能是平行关系，故错误；D 选项中平面 β 与 α 相交关系也可以，错误。故本题选 B。

【易错点 46】二面角

1.定义

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，以二面角的棱上任一点为端点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角。

2.平面角的三要素：顶点在棱上；角的两边分别在两个半平面内；角的两边与棱都垂直。

3.二面角的范围：$[0,\ \pi]$。

4.求法

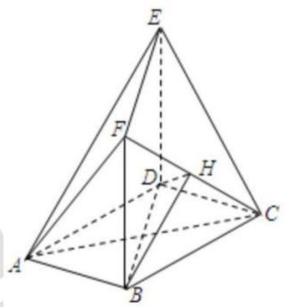
①定义法：直接在二面角的棱上取一点（特殊点），分别在两个半平面内作棱的垂线，得出平面角，用定义法时，要认真观察图形的特性。

②向量法：$\theta=\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$，其中 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 α、β 的法向量。（同进同出取补角，一进一出取同角）

易错指数：★★★★★

【题目示例】

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，四边形 $BDEF$ 是矩形，平面$BDEF\perp$平面$ABCD$，$BF=3$，H 是 CF 的中点。



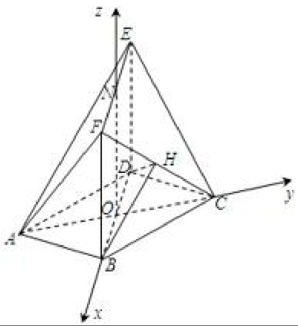
（1）求证：$AC\perp$平面$BDEF$；

（2）求二面角 $H-BD-C$ 的大小。

【答案】（1）见解析；（2）60°

【解析】（1）由题意可知，平面$BDEF\perp$平面$ABCD$，且底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$AC\perp BD$，其中 BD 为平面$BDEF$和平面$ABCD$的交线，$\therefore AC\perp$平面$BDEF$。（2）设 $AC\cap BD=O$，取 EF 的中点记为 N，连接 ON，故可得 ON、OB、OC 两两相互垂直，所以可以以 OB、OC、ON 分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，所以 $O(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$H\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，$N(0,0,3)$，即 $\overrightarrow{ON}=(0,0,3)$，$\overrightarrow{ON}$为底面$ABCD$的法向量，设平面 BDH 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BH}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=\left(-2,0,0\right)$，故 $\begin{cases}-2x=0\\ -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，$\therefore \boldsymbol{n}=\left(0,-\sqrt{3},1\right)$，所以 $\cos\left\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{ON}\right\rangle=\frac{1}{2}$，故其夹角为 60°。



第三章 解析几何

【易错点 47】向量的运算

1.向量的加法

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$。

2.向量的减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差。

3.数乘运算

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度和方向规定：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同 $(\lambda>0)$ 或相反 $(\lambda<0)$；$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

（1）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{a}$

（2）$(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

（3）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

4.数量积

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle$，$\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\ \pi]$。其中，$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\in\mathbf{R}$，称为$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上的投影。

易错指数：★★★

【题目示例】

若两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，则向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角是（　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

【答案】C

【解析】设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta(0\le\theta\le\pi)$，则有$\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2}{4\boldsymbol{a}^2}$。因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，两边同时平方得，$\boldsymbol{b}^2=3\boldsymbol{a}^2$，代入$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2}{4\boldsymbol{a}^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$。故本题选C。

【易错点 48】平面向量的坐标运算

1.若$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则有：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$；$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$

2.若$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则有：

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$；$A$、$B$两点间距离为$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

线段AB的中点坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

易错指数：★★★

【题目示例】

设$x,\ y\in\mathbf{R}$，向量$\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ y)$，$\boldsymbol{c}=(2,-4)$且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B.10　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

【答案】D

【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,-4)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $2x+1\times(-4)=0$，即 $x=2$。又因为 $\boldsymbol{b}=(1,\ y)$，$\boldsymbol{c}=(2,-4)$，且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\frac{1}{2}=\frac{y}{-4}$，即 $y=-2$，故 $a+b=(3,-1)$，则 $|a+b|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$。故本题选 D。

【易错点 49】向量的位置关系

1.向量共线定理

向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是：有且只有一个非零实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

2.平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$。

3.向量平行

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$。

4.向量相交

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，则：

（1）$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$；

（2）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

（3）当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$。特别的 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

（4）$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$；

（5）$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$。

易错指数：★★★

【题目示例】

设向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(x,6)$ 共线，则实数 $x=$（　）

A.5　　B.3　　C.6　　D.8

【答案】B

【解析】$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$ 共线，有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即 $(2,4)=\lambda(x,6)$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，$x=3$。故本题选 B。

【易错点 50】距离公式和夹角公式

1.点到直线的距离

已知点 $(x_0,\ y_0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$，则点到直线的距离为 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

2.平行线间距离

若 l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$，则 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

注意：x，y 对应项系数应相等。

3.两直线间位置关系

设直线 l_1：$y=k_1x+b_1$ 或 $A_1x+B_1y+C_1=0$，直线 l_2：$y=k_2x+b_2$ 或 $A_2x+B_2y+C_2=0$

（1）平行：$k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$，或者 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $A_1C_2-A_2C_1\neq 0$。

（2）重合：$k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$，或者 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $A_1C_2-A_2C_1=0$。

（3）相交：$k_1\neq k_2$，或者 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$。

（4）垂直：$k_1\cdot k_2=-1$，或者 $A_1A_2+B_1B_2=0$。

4.到角和夹角公式

（1）到角：直线 l_1 到 l_2 的到角是 l_1 绕着交点按逆时针方向旋转到和 l_2 重合所转的角 θ，

$\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\left(k_1k_2\neq-1\right)$，$\theta\in(0,\ \pi)$。

（2）夹角：直线 l_1 到 l_2 相交形成的两对对顶角中，不大于直角的角 θ，

$\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|\left(k_1k_2\neq-1\right)$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

易错指数：★★★

【题目示例】

两条平行线 $4x+3y+3=0$ 与 $8x+my-9=0$ 的距离是________。

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】根据题意可知 $4x+3y+3=0$ 与 $8x+my-9=0$ 平行，$\therefore\dfrac{8}{m}=\dfrac{4}{3}$，$\therefore m=6$，直线 $8x+my-9=0$ 即 $8x+6y-9=0$，$4x+3y+3=0$ 可整理为 $8x+6y+6=0$，根据两条平行线间的距离公式可得 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{|6-(-9)|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{3}{2}$。

【易错点 51】圆的方程

1.标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中，$(a,\ b)$——圆心，r——半径。

2.一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，$\left(D^2+E^2-4F>0\right)$

$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$——圆心，$r=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$——半径。

3.参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$，$(a,\ b)$——圆心，$r$——半径。

易错指数：★★★

【题目示例】

圆 $(x+3)^2+y^2=9$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 的位置关系为（　）

A.相交　　B.内切　　C.外切　　D.相离

【答案】A

【解析】圆 $(x+3)^2+y^2=9$ 的圆心坐标为 $(-3,0)$，半径为 3；圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心坐标为 $(1,2)$，半径为 2，则 $1=3-2<$ 圆心距 $=\sqrt{(-3-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}<2+3=5$，两圆的位置关系为相交。故本题选 A。

【易错点 52】直线与圆的位置关系

直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种：

若 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，则有：

（1） $d>r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \varDelta<0$；

（2） $d=r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \varDelta=0$；

（3） $d<r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \varDelta>0$。

易错指数：★★★

【题目示例】

已知过点 $P(2,2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 相切，且与直线 $ax-y+1=0$ 垂直，则 $a=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. $-\dfrac{1}{2}$

【答案】B

【解析】由题可知，圆心与切点所在直线与直线 $ax-y+1=0$ 平行，则有 $a=\dfrac{2-0}{2-1}=2$。故本题选 B。

【易错点 53】椭圆

1.定义

定义Ⅰ：在同一平面内，若 F_1，F_2 是两定点，P 为动点，且 $|PF_1|+|PF_2|=2a>|F_1F_2|$（$a$ 为常数），则 P 点的轨迹是椭圆。

定义Ⅱ：若F_1为定点，l为定直线，动点P到F_1的距离与到定直线l的距离之比为常数e（$0<e<1$），则P点的轨迹是椭圆。

2.标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$

（1）范围：$\left\{x\,|-a\le x\le a\right\}$；$\left\{y\,|-b\le y\le b\right\}$

（2）长轴长$2a$，短轴长$2b$，焦距$2c$，$a^2=b^2+c^2$

（3）准线方程：$x=\pm\frac{a^2}{c}$

易错指数：★★★

【题目示例】

椭圆$4x^2+y^2=k$上任意两点间最大距离是4，那么$k=$（　）

A.4　　B.16　　C.32　　D.64

【答案】A

【解析】椭圆方程为$\frac{x^2}{\frac{k}{4}}+\frac{y^2}{k}=1$，椭圆上两点间最大距离是长轴长，即$2a=4\Rightarrow a=2$，$\because k>0,\therefore\frac{k}{4}<k\Rightarrow k=a^2=4$。故本题选A。

【易错点54】双曲线

1.定义

定义Ⅰ：在同一平面内，若F_1、F_2是两定点，P为动点，$\left\|PF_1\right|-\left|PF_2\right\|=2a<\left|F_1F_2\right|$（$a$为常数），则动点$P$的轨迹是双曲线。

定义Ⅱ：若动点P到定点F与定直线l的距离之比是常数$e\left(e>1\right)$，则动点P的轨迹是双曲线。

2.标准方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,\ \ b>0\right)$

（1）范围：$\left\{x\,|\,x\ge a或x\le -a\right\}$；$\left\{y\,|\,y\in\mathbf{R}\right\}$

（2）实轴长 $2a$，虚轴长 $2b$，焦距 $2c$，$c^2=a^2+b^2$

（3）准线方程：$x=\pm\frac{a^2}{c}$

易错指数：★★★

【题目示例】

已知椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,\ b>0\right)$ 的焦点是椭圆的顶点，顶点是椭圆的焦点，则双曲线的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C.2　　D.3

【答案】C

【解析】由题意，椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标为 $(\pm1,0)$，所以双曲线的顶点坐标为 $(\pm1,0)$，即 $a=1$，椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的顶点坐标为 $(\pm2,0)$，所以双曲线的焦点为 $(\pm2,0)$，即 $c=2$，则双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2$。故本题选 C。

【易错点 55】抛物线

1.定义：到定点 F 与定直线 l 的距离相等的点的轨迹是抛物线。

即：到定点 F 的距离与到定直线 l 的距离之比是常数 $e(e=1)$。

2.标准方程：$y^2=2px$（$p>0$），p——焦参数；

（1）焦点：$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，通径 $=2p$（经过抛物线的焦点，作一条垂直于其对称轴的直线，该直线与抛物线有两个交点，这两个交点之间的线段叫做抛物线的通径）；

（2）准线：$x=-\frac{p}{2}$；

易错指数：★★★

【题目示例】

已知抛物线的方程为 $y^2=ax$ 且 $a\neq0$，点 F 是该抛物线的焦点，假设一斜率 $k=2$ 的

直线过点 F，且与 y 轴交于点 M，若三角形的面积 $S_{\triangle OMF}=4$（O 为坐标原点），则该抛物线的方程为（　）

A. $y^2=\pm 4x$　　B. $y^2=4x$　　C. $y^2=\pm 8x$　　D. $y^2=8x$

【答案】C

【解析】抛物线的焦点坐标 $F\left(\frac{a}{4},0\right)$，直线的方程为 $y=2x-\frac{a}{2}$；则 M 的坐标为 $\left(0,-\frac{a}{2}\right)$，即 $S_{\triangle OMF}=\frac{1}{2}\left|\frac{a}{4}\right|\left|-\frac{a}{2}\right|=4$，解得 $a=\pm 8$。故本题选 C。

【易错点 56】极坐标和直角坐标的互化

设 M 是坐标平面内任意一点，它的直角坐标是 $(x,\ y)$，极坐标是 $(\rho,\ \theta)$，$\rho\geq 0$，于是极坐标与直角坐标的互化公式如下表。

点 M	直角坐标 $(x,\ y)$	极坐标 $(\rho,\ \theta)$
互化公式	$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$	$\rho^2=x^2+y^2$ $\tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0)$

易错指数：★★★

【题目示例】

将极坐标 $\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$ 化为直角坐标是（　）

A. $\left(2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$　　B. $\left(2\sqrt{3},2\right)$　　C. $\left(2,\sqrt{3}\right)$　　D. $\left(\sqrt{3},2\right)$

【答案】B

【解析】设对应直角坐标是 $(x,\ y)$，则有 $x=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$，$y=4\sin\frac{\pi}{6}=2$，即对应直角坐标是 $\left(2\sqrt{3},2\right)$。故本题选 B。

第三模块　统计与概率

第一章 统计

【易错点 57】统计学中几个基本概念

1.总体：所有考查对象的全体叫做总体。

2.个体：总体中每一个考查对象叫做个体。

3.样本：从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本。

4.样本平均数：样本中所有个体 x_1，$x_2,\cdots$，x_n 的平均数叫做样本平均数，即 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$。

5.总体平均数：总体中所有个体的平均数叫做总体平均数。在统计中，通常用样本平均数估计总体平均数。

6.样本方差：样本中所有个体 x_1，x_2，...，x_n 与样本平均数 $\overline{x}$ 的差的平方的平均数叫做样本方差，用 s^2 表示。方差反映了一组数据的波动情况。

$$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$$

7.总体方差：总体中所有个体与总体平均数的差的平方的平均数叫做总体方差。在统计中，通常用样本方差估计总体方差。

易错指数：★★★

【题目示例】

某同学 5 次上学途中所花的时间（单位：分钟）分别为 x，y，10，11，9，已知这组数据的平均数为 10，方差为 2，则 $|x-y|$ 的值为（　　）

A.3　　B.2　　C.4　　D.1

【答案】C

【解析】这组数据的平均数为 10，即 $\frac{1}{5}(x+y+10+11+9)=10$，解得 $x+y=20$，这

组数据的方差为 2，即 $\frac{1}{5}\left[(x-10)^2+(y-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(9-10)^2\right]=2$，解得 $x^2+y^2=208$，根据完全平方公式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=208+2xy=400$，得 $2xy=192$，$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=208-192=16$，$|x-y|=\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{16}=4$。故本题选 C。

【易错点 58】统计图

1.条形统计图：可以清楚地表明各种数量的多少，是统计图资料分析中最常用的图形。

2.扇形统计图：可以比较清楚地反映出部分与部分、部分与总体之间的数量关系。

3.折线统计图：不仅可以表示数量的多少，而且可以反映同一事物在不同时间里的数量增减变化的情况。

4.茎叶统计图：原始数据信息无损失，方便记录与表示两位（或一位）有效数字的数据。

易错指数：★★★

【题目示例】

护士用统计图记录一位病人一天的体温变化情况，可以选择（　　）

A.条形统计图　　B.折线统计图　　C.扇形统计图　　D.以上都可以

【答案】B

【解析】要记录体温“变化”，折线统计图最合适。故本题选 B。

【易错点 59】样本频率分布

1.研究频率分布的一般步骤：（1）计算极差；（2）决定组距与组数；（3）决定分点；（4）列频率分布表；（5）画频率分布直方图。

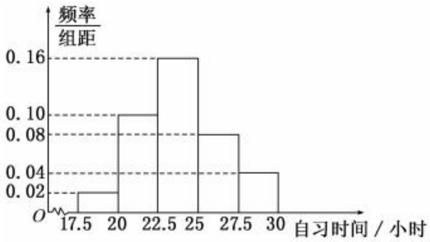
2.列表法求概率：当一次试验要设计两个因素，并且可能出现的结果数目较多时，为了不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用列表法。

3.树状图法求概率：当一次试验要设计三个或更多的因素时，用列表法就不方便了，为了不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用树状图法求概率。

易错指数：★★★

【题目示例】

某学校调查了200名学生每周的自习时间（单位：小时），制成了如下图所示的频率分布直方图，其中自习时间的范围是，样本数据分组为。根据直方图，这200名学生中每周的自习时间不少于5小时的人数是（　　）



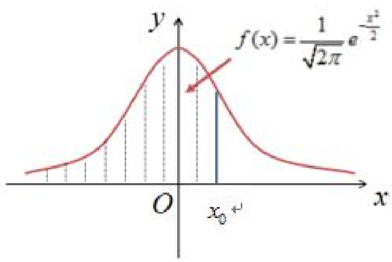
A.56　　B.60　　C.120　　D.140

【答案】D

【解析】由题意可得，这200名学生中每周的自习时间不少于5小时的人数频率为$(0.16+0.08+0.04)\times 2.5=0.7$，故这200名学生中每周的自习时间不少于5小时的人数为$200\times 0.7=140$人。故本题选D。

【易错点60】标准正态总体的概率问题

1.对于标准正态总体$N(0,1)$，$\Phi(x_0)$是总体取值小于x_0的概率，即$\Phi(x_0)=P(x<x_0)$。其中$x_0>0$，图中阴影部分的面积表示为概率$P(x<x_0)$。只要有标准正态分布表即可查表解决。从图中不难发现：当$x_0<0$时，$\Phi(x_0)=1-\Phi(-x_0)$；而当$x_0=0$时，$\Phi(0)=0.5$。



2.非标准正态总体在某区间内取值的概率

正态总体$N(\mu,\ \sigma^2)$可以通过$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$转化成标准正态总体，然后求解。

易错指数：★★★

【题目示例】

已知随机变量ξ服从正态分布$N\left(2,\ \sigma^2\right)$，$P(\xi\le 4)=0.85$，则$P(\xi\le 0)=$（　）

A.15　　B.3　　C.6　　D.85

【答案】A

【解析】由正态分布曲线的对称性，知$P(\xi\le 0)=P(\xi\ge 4)=1-P(\xi\le 4)=1-0.85=0.15$。故本题选 A。

【易错点 61】线性回归

1.回归直线：设所求的直线方程为$\hat{y}=a\hat{x}+b$，其中a、b是待定系数，

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ b=\overline{y}-a\overline{x} \end{cases}，其中\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i，\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i。$$

相应的直线叫做回归直线。

2.相关系数：相关系数是英国统计学家皮尔逊提出的，对于变量y与x的一组观测值，

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ b=\overline{y}-a\overline{x} \end{cases}$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$$

称为变量y与x之间的样本相关系数，简称相关系数。用它来衡量两个变量之间的线性相关程度。

3.性质

当$r>0$时，表明两个变量正相关；当$r<0$时，表明两个变量负相关。

$|r|\le 1$，且$|r|$越接近1，相关程度越大；且$|r|$越接近0，相关程度越小。

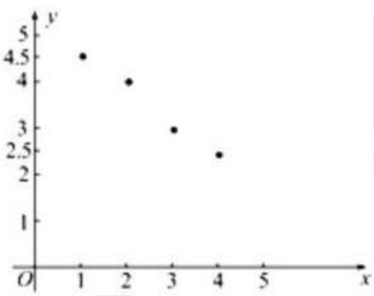
当$|r|=1$时，两个变量间成线性关系。

易错指数：★★★★★

【题目示例】下表是某厂1—4月份用水量（单位：百吨）的一组数据：

月份	1	2	3	4
用水量	5	4	3	5

由散点图可知，用水量y与月份x之间。有较好的线性相关关系，其线性回归方程是$\hat{y}=-0.7x+\hat{a}$。则$\hat{a}=$（　　）



A.5　　B.15　　C.2　　D.25

【答案】D

【解析】由表格得$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4}{4}=2.5,\bar{y}=\dfrac{4.5+4+3+2.5}{4}=3.5$，将$\bar{x}=2.5,\bar{y}=3.5$代入线性回归方程是$\hat{y}=-0.7x+\hat{a}$，可得$3.5=-1.75+\hat{a}$，故$\hat{a}=5.25$。故本题选D。

【易错点62】独立性检验

1.定义：利用随机变量来判断“两个分类变量有关”的方法称为两个分类变量的独立性检验。其中，变量的不同“值”表示个体所属的不同类别，这种变量称为分类变量。

2.方法：列联表（假设思想）。

3.列联表：列出两个分类变量频数表，称为列联表。

假设有两个分类变量X和Y，它们的可能取值分别为$\{x_1,\ x_2\}$和$\{y_1,\ y_2\}$，其样本频数列联表（称为2×2列联表）为：

2×2 列联表

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

构造随机变量 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$ 为样本容量。

4.列联表进行独立性检验基本步骤：

（1）确定分类变量及可能取值，作列联表；

（2）根据列联表确定随机变量 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 的值；

（3）利用随机变量 K^2 进行判断检验：先假设两个分类变量 X 与 Y 无关系，计算出 K^2 的观测值 k，并与临界值进行比较，判断可能性。

易错指数：★★★★

【题目示例】

共享单车的投放，方便了市民短途出行，被誉为中国“新四大发明”之一，某市为研究单车用户与年龄相关程度，随机调查了 100 位成人市民，统计数据如下：

	不小于 40 岁	小于 40 岁	合计
共享单车用户	12	18	30
非共享单车用户	38	32	70
合计	50	50	100

从独立性检验角度分析，能否有 90%以上的把握认为该市成人市民是否为单车用户与年龄是否小于 40 岁有关；

下面临界值表供参考：

$P\left(K^2 \geq k\right)$	15	10	05	25	010	005	001
k	072	706	841	024	635	879	828

（参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$）。

【答案】见解析

【解析】由题可得，$K^2=\dfrac{100\left(12\times32-38\times18\right)^2}{50\times50\times30\times70}\approx1.714<2.706$，所以有 90%以上的把握认为该市成人市民是否为单车用户与年龄是否小于 40 岁有关。

第二章 排列组合

【易错点 63】分步、分类计数原理

1.加法原理（分类计数原理）

做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有：$N=m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

2.乘法原理（分步计数原理）

做一件事，完成它有 n 个步骤，做第一步时有 m_1 种不同的方法，接着做第二步时有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有：$N=m_1\times m_2\times m_3\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法。

特别注意：分类是独立的、一次性的；分步是连续的、多次的。

易错指数：★★★

【题目示例】

桌子上有 0，3，5，7 及小数点共 5 张卡片，能够将其排列组合成为（　　）个末位不是零的两位数且带两位小数。

A.30　　B.24　　C.18　　D.12

【答案】D

【解析】首先分为两个宏观的情况，即第二个位置为 0 和第二个位置非 0，当第二个位置为 0 时，可以组成满足条件的个数为 $C_3^1 \times A_2^2 = 6$，当第二个位置为非 0 时，可以组成满足条件的个数为 $C_3^1 \times C_2^1 = 6$，故满足条件的个数为 12。故本题选 D。

【易错点 64】排列、组合的常用方法

“16 字方针”，即分类相加、分步相乘、有序排列、无序组合。

1.直接法：适用排列组合的简单情况，可以直接列举所有的情况或利用排列、组合公式。

2.排除法：适用于排列组合的复杂情况，从反面考虑。

3.元素优先法：对于问题中有特殊要求的元素应优先考虑，然后再考虑其他元素。

4.捆绑法：在特定要求下，将几个相关元素当作一个元素来考虑，待整体排好后再考虑他们“局部”的安排。它主要用于解决“元素相邻问题”。

5.插空法：先把其他元素安排好，然后将指定的不相邻的元素插入已排好元素的空隙或两端位置。它主要用于解决“元素不相邻问题”。

6.调序法：当某些元素的次序一定时，如 n 个元素中 m 个元素的次序一定时的排列数，应先将 n 个元素进行全排列为 A_n^n，而次序一定的 m 个元素的全排列为 A_m^m，由于 m 个元素次序一定，只能有一种排列，所以利用除法起到调序的作用，即排列数为 $\frac{A_n^n}{A_m^m}$。

易错指数：★★★

【题目示例】

某班级为学校文艺汇演选送节目，要从三个歌唱节目中选出 2 个，2 个舞蹈选出 1 个，一共有（　）种选送方案。

A.5　　B.6　　C.7　　D.12

【答案】B

【解析】根据排列组合，$C_3^2C_2^1=6$。故本题选 B。

【易错点 65】二项式定理

1.二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

二项展开式共有 $n+1$ 项，其中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r\left(r=0,1,\cdots,\ n\right)$，$C_n^r$ 为第 $r+1$ 项的二项式系数。

2.二项式系数的性质

（1）$(a+b)^n$ 的展开式的各项二项式系数和等于 2^n，即

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots C_n^r+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$。

（2）奇数项的二项式系数和等于偶数项的二项式系数和，即

$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$。

易错指数：★★★

【题目示例】

在 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^9$ 的展开式中，常数项是（　　）

A. C_9^3　　B. $-C_9^3$　　C. $8C_9^3$　　D. $-8C_9^3$

【答案】D

【解析】二项式展开式通项为 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r=C_9^r\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{9-r}\cdot(-2x)^r=(-2)^rC_9^rx^{\frac{3r-9}{2}}$，

令 $\frac{3r-9}{2}=0$，解得 $r=3$，所以在 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^9$ 的展开式中，常数项是 $T_4=(-2)^3C_9^3=-8C_9^3$。

故本题选 D。

第三章 概率

【易错点 66】概率概型

一、几何概型

1.概念：如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称几何概型。

2.特点：（1）所有可能出现的基本事件为无限个；（2）每个基本事件发生的可能性相等。

3.概率公式：$P(A)=\dfrac{\text{构成事件}A\text{的区域的几何度量（面积或体积）}}{\text{试验所有可能结果构成的区域的几何度量（面积或体积）}}$

二、古典概型

1.特点

（1）所有可能出现的基本事件为有限个；

（2）每个基本事件发生的可能性相等。

2.概率公式

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{所有基本事件的个数}}=\frac{m}{n}$$

易错指数：★★★

【题目示例】

将一枚质地均匀的骰子投掷两次，第一次朝上一面的点数记为 x，第二次朝上一面的点数记为 y，则点 $(x,\ y)$ 在双曲线 $y=\dfrac{12}{x}$ 上的概率为（　）

A. $\dfrac{1}{18}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

【答案】B

【解析】点在双曲线上，即满足 $xy=12$，因为 $3\times4=2\times6=12$，前后两次可以互换位置，所以满足题目要求的总共有 4 种，$P=\dfrac{4}{6\times6}=\dfrac{1}{9}$。故本题选 B。

【易错点 67】独立事件

1.相互独立事件

（1）概念：事件 A 的发生对事件 B 的发生没有影响，同样事件 B 的发生对事件 A 的发生也没有影响，则这两个事件称为相互独立事件。

（2）特征：如果事件 A 和 B 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$。

2.独立重复试验

（1）概念：一次试验中，事件 A 发生的概率为 p。相同条件下，独立、重复进行了 n 次试验，称作 n 次独立重复试验。

（2）概率公式：n 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数记为 $\xi\left(\xi=0,1,\cdots,\ n\right)$，则事件 A 恰好发生 k 次的概率为：$P(\xi=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (0\le k\le n)$。

易错指数：★★★

【题目示例】

将一枚质地均匀的硬币连掷 4 次，出现“至少一次正面向上”的概率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{15}{16}$

【答案】D

【解析】由题意得，可从该事件的对立事件考虑，4 次均正面向下的概率 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$，则至少一次正面向上的概率为 $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$。故本题选 D。

【易错点 68】离散型随机变量

1.概念：对于随机变量可能取的值，我们可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量。

2.离散型随机变量的分布列

设离散型随机变量 ξ 可能的取值为 $x_1,\ x_2,\cdots x_i,\cdots$，$\xi$ 取每一个值 $x_i\ (i=1,2,\cdots)$ 的概率为 $P(\xi=x_i)=p_i$，则随机变量 $0\le p_i\le 1,\ \ i=1,2,\cdots$ 的概率分布（简称 ξ 的分布列）为：

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	P_1	P_2	$\cdots$	P_i	$\cdots$

分布列具有如下性质：

（1） $0 \le p_i \le 1,\ \ i = 1,2,\cdots$； （2） $p_1 + p_2 + \cdots = 1$。

3.离散型随机变量的期望（均值）： $E(\xi) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_ix_i + \cdots$

4.离散型随机变量的方差：

$$D(\xi) = p_1(x_1 - E(\xi))^2 + p_2(x_2 - E(\xi))^2 + \cdots + p_i(x_i - E(\xi))^2$$

易错指数：★★★

【题目示例】

已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n,\ p)$，若 $E(x) = 35$，$D(x) = 20$，则 p 的值为（ ）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{4}{7}$

【答案】C

【解析】根据二项分布的性质 $E(x) = np = 35,\ \ D(x) = np(1-p) = 20$，所以 $1 - p = \frac{4}{7}$，故 $p = \frac{3}{7}$。故本题选 C。

第四模块　高等数学

第一章 极限与连续

【易错点 69】无穷大与无穷小

1.定义

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称在 $x \to x_0$ 过程中，$f(x)$ 是无穷小量；

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$，则称在 $x \to x_0$ 过程中，$f(x)$ 是无穷大量。

2.无穷小与无穷大的关系：在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大。

3.无穷小与极限的关系：$\lim f(x) = A \Leftrightarrow A + \alpha(x)$，其中 $\lim \alpha(x) = 0$。

4.两个无穷小的比较：在自变量同一变化过程（$x \to x_0$ 或 $x \to \infty$）中，设 $\lim f(x) = 0$，$\lim g(x) = 0$，且 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$，则

（1）$l = 0$，称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记作：$f(x) = o[g(x)]$；

（2）$l = \infty$，称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小；

（3）$l \neq 0$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小；

（4）$\lim \dfrac{f(x)}{g^k(x)} = l \neq 0$，$k > 0$，就说 $f(x)$ 是关于 $g(x)$ 的 k 阶无穷小；

（5）$l = 1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记作：$f(x) \sim g(x)$。

易错指数：★★★★

【题目示例】

当 $x \to 0$ 时，$x - \sin x$ 是 x 的（　）

A.低阶无穷小　　B.高阶无穷小

C.等价无穷小　　D.同阶但非等价无穷小

【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1} = 0$，则 $x - \sin x$ 是 x 的高阶无穷小。故本题选 B。

【易错点 70】极限的运算法则

1.有限个无穷小的和、乘积是无穷小。

2.有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

3.定理 设 $\lim u(x)=A$， $\lim v(x)=B$，则有

（1）加减法：$\lim\left[u(x)\pm v(x)\right]=\lim u(x)\pm\lim v(x)=A\pm B$；

（2）乘法：$\lim\left[u(x)\cdot v(x)\right]=\lim u(x)\cdot\lim v(x)=A\cdot B$；

（3）除法：当 $\lim v(x)=B\neq 0$ 时，$\lim\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)}=\dfrac{A}{B}$。

推论 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 存在，c 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[cu(x)\right]=c\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$。

推论 2 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 存在，$n\in\mathbf{N}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\right]^n$。

易错指数：★★★★

【题目示例】

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小。 （ ）

对【解析】假设函数 $f(x)$ 是有界的，则必存在一个数 A，使得 $-A\leq f(x)\leq A$；$g(x)=x$ 是无穷小，则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$。所以 $-Ax\leq f(x)g(x)\leq Ax$，而 $\lim\limits_{x\to 0}(-Ax)=\lim\limits_{x\to 0}Ax=0$，由夹逼准则可知，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$，即有界函数与无穷小的乘积是无穷小。故本题正确。

【易错点 71】极限的求法

一、最高次幂法求极限

当函数是分式形式，且分子、分母都是多项式时，可以使用这种方法。主要是比较分子与分母次数的高低：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当}n=m\\ 0, & \text{当}n>m\\ \infty, & \text{当}n>m\end{cases}$$

二、两个重要极限公式

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}$

3.方法：遇到1^{∞}形式的极限，通常都需要将其化为$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$的形式；或者利用对数恒等式，再利用洛必达法则；也可以先取对数，再利用洛必达法则（真数部分大于 0）。

三、等价无穷小代换

当$x\to 0$时的等价无穷小量，则有

$\sin x\sim x$； $\tan x\sim x$； $\arcsin x\sim x$； $\arctan x\sim x$；

$\mathrm{e}^{x}-1\sim x$； $\ln(1+x)\sim x$； $(1+x)^{2}-1\sim 2x$；

$1-\cos x\sim\dfrac{x^{2}}{2}$； $a^{x}-1\sim x\ln a$ 。

易错指数：★★★★★

【题目示例】

如果$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{2}+ax+b}{x^{2}-x-2}=2$，则$ab$的值是（ ）

A.2 B.-4 C.8 D.-16

【答案】D

【解析】根据题意得$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{2}+ax+b}{x^{2}-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(x-\frac{b}{2}\right)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\frac{b}{2}}{x+1}=\dfrac{2-\frac{b}{2}}{3}=2$，则$b=-8$，$\therefore x^{2}+ax+b=(x-2)(x+4)$，则$a=2$，$\therefore ab=-16$。故本题选 D。

【易错点 72】函数在一点处连续

1.定义 1：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$处连续（或$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$）。

2.定义 2：设函数$y=f(x)$，如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处左连续；如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处右连续。

3.函数在一点连续的充要条件

$y=f\left(x\right)$在点x_0处连续$\Leftrightarrow$ $f\left(x\right)$在x_0处既是左连续，又是右连续。

易错指数：★★★

【题目示例】

设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+\sin x, & x<0\\ a\cos x+2, & x\geq 0\end{cases}$在$x=0$处连续，那么实数$a$的值等于（　）

A.0　　B.1　　C.-1　　D.2

【答案】C

【解析】由题意可得$f\left(x\right)$在$x=0$处连续，故可得$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a\cos x+2\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\mathrm{e}^x+\sin x\right)$，进一步化简为$a+2=1$，$a=-1$。故本题选 C。

第二章　导数及微分

【易错点 73】导函数的定义

1.函数在开区间内可导

若$f\left(x\right)$在$\left(a,\ b\right)$内每一点可导，则称$f\left(x\right)$在$\left(a,\ b\right)$内可导。

2.函数在闭区间上可导

$f\left(x\right)$在$\left(a,\ b\right)$内可导，且$f_+'\left(a\right)$与$f_-'\left(b\right)$都存在，则称$f\left(x\right)$在$\left[a,\ b\right]$上可导。

3.导函数：若$f\left(x\right)$在区间I内每一点可导，则$f\left(x\right)$在I内任一点的导数是x的函数，称为$f\left(x\right)$的导函数，记为$f'\left(x\right)$或y'或$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\frac{\mathrm{d}f\left(x\right)}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}.$$

易错指数：★★★

【题目示例】

函数$f(x)=\mathrm{e}^{2x}+5x^3-\ln 2$的导函数是（　）

A. $e^{2x}+15x^2$　　B. $2e^{2x}+15x^2-\frac{1}{2}$

C. $2e^{2x}+15x^2$　　D. $e^{2x}+15x^2-\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】根据函数的求导公式可得，$f'(x)=2e^{2x}+15x^2$，故本题选 C。

【易错点 74】导数的应用

一、求曲线上一点处的切线方程与法线方程

1.切线斜率：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率，即 $f'(x_0)=k_{切}$。

2.切线方程：$y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

3.法线方程：$y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线方程为 $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

4.注意：（1）函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处具有不垂直于 x 轴的切线；

（2）若 $f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴。

二、函数的单调性

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。

（1）如果在 (a, b) 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加；

（2）如果在 (a, b) 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少。

如果把这个判定中的闭区间换成其他各种区间（包括无穷区间），那么结论成立。

三、函数的极值

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 及其附近有定义，如果对 x_0 附近的所有的点都有 $f(x)>f(x_0)$（或 $f(x)<f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值（或极大值）。

可导函数的极值，可通过研究函数的单调性求得，基本步骤是：

（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）求导数 $f'(x)$；

（3）求方程 $f'(x)=0$ 的全部实根，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，顺次将定义域分成若干个小区间，并列表：x 变化时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 值的变化情况：

x	$(-\infty,\ x_1)$	x_1	$(x_1,\ x_2)$	$\cdots$	x_n	$(x_n,+\infty)$
$f'(x)$	正负	0	正负	$\cdots$	0	正负
$f(x)$	单调性	极值	单调性	$\cdots$	极值	单调性

（4）检查的符号 $f'(x)$ 并由表格判断极值。

四、函数的最值

如果函数 $f(x)$ 在定义域 I 内存在 x_0，使得对任意的 $x\in I$，总有 $f(x)\le f(x_0)$（或 $f(x)\ge f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为函数在定义域上的最大值（或最小值）。函数在定义域内的极值不一定唯一，但在定义域内的最值是唯一的。

求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的最大值和最小值的步骤：

（1）求 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 上的极值；

（2）将第一步中求得的极值与 $f(a)$，$f(b)$ 比较，得到 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的最大值与最小值。

易错指数：★★★★

【题目示例】

幂函数 $y=x^a$ 在其图象上的点 $(2,16)$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=32x-48$　　　　B. $y=32x+48$

C. $y=-32x-48$　　D. $y=-32x+48$

【答案】A

【解析】由于点$(2,16)$在幂函数的图象上，有$16=2^a$，则$a=4$，即幂函数的解析式为$y=x^4$，$y'=4x^3$，因此在点$(2,16)$处的切线的斜率为$y'=4\times 2^3=32$，故其直线方程为$y-16=32(x-2)$，即$y=32x-48$。故本题选 A。

【易错点 75】一元函数可导、可微、连续之间的关系

1.可导一定连续，连续不一定可导；

2.可微一定连续，连续不一定可微；

3.可微与可导等价。

易错指数：★★★

【题目示例】

函数$y=f(x)$在x_0点可微是$y=f(x)$在x_0点连续的（　）

A.充分条件　　B.必要条件

C.充分必要条件　　D.既不是充分条件，也不是必要条件

【答案】A

【解析】一元函数可微与可导是等价的，且可导必连续，连续不一定可导，所以可微必连续，连续不一定可微，即“$y=f(x)$在x_0点可微”可以推出“$y=f(x)$在x_0点连续”；“$y=f(x)$在x_0点连续”推不出“$y=f(x)$在x_0点可微”，故$y=f(x)$在x_0点可微是$y=f(x)$在x_0点连续的充分非必要条件。故本题选 A。

第三章 积分

【易错点 76】不定积分的性质与公式

1.性质

性质 1：$\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$；

性质 2：$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ （k 为常数，$k\neq 0$）。

2.积分公式

（1）$\int k\mathrm{d}x=kx+C$ （k 为常数）

（2）$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq -1)$

（3）$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

（4）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

（5）$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$

（6）$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

（7）$\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$

（8）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\arctan x+C$

（9）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x}=\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$

（10）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

（11）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{2}x}=\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

（12）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

（13）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$

易错指数：★★★★

【题目示例】

$\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=$（　　）

A. $x\mathrm{e}^{x}+C$　　B. $x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+C$　　C. $x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}+C$　　D. $\mathrm{e}^{x}+C$

【答案】B

【解析】$\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})=x\mathrm{e}^{x}-\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+C$。故本题选 B。

【易错点 77】积分方法

1.第一类换元积分法（凑微分法）：设 $F(u)$ 为 $f(u)$ 的原函数，$u=\varphi(x)$ 可微，则

$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$ （第一类换元积分公式）

2.第二类换元积分法：设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数，且在区间内部有 $\psi'(t)\neq 0$，又

设 $f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)$ 具有原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$ 。其中 $\psi^{-1}(x)$ 为 $x=\psi(t)$ 的反函数。上式称为第二类换元积分公式。

3.分部积分法：假定 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 均具有连续的导函数，则 $\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int vu'\mathrm{d}x$ ，$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 。上述公式称为分部积分公式。

易错指数：★★★★

【题目示例】

函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上具有连续导数，且 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$\int_1^2 f(x)dx=-1$，则 $\int_1^2 xf'(x)dx$ 的结果是（　）

A.2　　B.4　　C. -1　　D. -2

【答案】B

【解析】$\int_1^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=4$ 。故本题选 B。

【易错点 78】定积分的性质

1.积分的运算性质

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

$\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

$\int_a^b c\mathrm{d}x=c(b-a)$ （c 为常数）

2.积分的保序性：如果在区间 $[a,\ b]$ 上，恒有 $f(x)\geq g(x)$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 。

3.积分估值定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上有最大值 M 和最小值 m ，则

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)。$$

4.积分中值定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，则在 $[a,\ b]$ 内至少有一点 ξ ，

使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$，$\xi\in[a,\ b]$。

5.对称区间上奇偶函数的积分性质：设$f(x)$在对称区间$[-a,\ a]$上连续，则有

如果$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$；

如果$f(x)$为偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$。

易错指数：★★★★

【题目示例】

$\int_{-2015}^{2015}\sin^5 x\mathrm{d}x=$________。

【答案】0

【解析】由$f(x)=\sin^5 x$为奇函数，则$\int_{-2015}^{2015}\sin^5 x\mathrm{d}x=0$。

【易错点 79】牛顿—莱布尼兹公式

如果函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上连续，且$F(x)$是$f(x)$的任意一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

上述公式称为牛顿—莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式，又称为微积分基本公式。

易错指数：★★★★

【题目示例】

设$f(x)$为连续函数，则$\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$等于（　　）

A. $f(2)-f(0)$

B. $\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$

C. $\frac{1}{2}[f(2)-f(0)]$

D. $f(1)-f(0)$

【答案】C

【解析】由题$\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(2x)\big|_0^1=\frac{1}{2}[f(2)-f(0)]$。故本题选 C。

【易错点 80】定积分的应用

1.求平面图形的面积

计算由区间 $[a,\ b]$ 上的两条连续曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$，以及两条直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的平面图形的面积，所求平面图形的面积 A 为 $A=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$。

2.求旋转体的体积

计算由区间 $[a,\ b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$、两直线 $x=a$ 与 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积，所求旋转体的体积为：$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$。

易错指数：★★★★★

【题目示例】

在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的曲线 $y=\sin x$ 绕 x 轴旋转一周所得图形的体积为（　　）

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$　　B. $\dfrac{\pi^2}{3}$　　C. $\dfrac{\pi^2}{2}$　　D. π^2

【答案】A

【解析】由题意得，所得旋转体的体积 $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^2x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos2x}{2}\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^2}{4}$。故本题选 A。

第四章 空间解析几何

【易错点 81】空间向量

1.直角坐标运算律

若 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，则

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z)$，

$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)(\lambda\in\mathbf{R})$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$。

2.空间向量的位置关系

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_x = \lambda b_x，\ a_y = \lambda b_y，\ a_z = \lambda b_z\left(\lambda \in \mathbf{R}\right)$；

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$。

3.模长公式

若 $\boldsymbol{a} = \left(a_x，\ a_y，\ a_z\right)$，$\boldsymbol{b} = \left(b_x，\ b_y，\ b_z\right)$，则

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$，$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$。

4.空间两点间的距离公式

若 $A\left(x_1，\ y_1，\ z_1\right)$，$B\left(x_2，\ y_2，\ z_2\right)$，则

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$，

或 $d_{AB} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$。

5.空间向量的数量积

（1）向量的数量积：已知向量 $\boldsymbol{a}，\ \boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}，\ \boldsymbol{b}\rangle$ 叫做 $\boldsymbol{a}，\ \boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}，\ \boldsymbol{b}\rangle$。

（2）空间向量数量积的性质：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} = |\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a}，\ \boldsymbol{e}\rangle$；$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$；$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$。

（3）夹角公式：$\cos\langle\boldsymbol{a}，\ \boldsymbol{b}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$。

6.空间向量的向量积

（1）两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积（外积）是一个向量 $\boldsymbol{c}$，记作 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角。

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$），$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定。

（2）向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，则

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\boldsymbol{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\boldsymbol{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$。

易错指数：★★★

【题目示例】

点 $M(-2,1,-3)$ 关于 xOy 平面对称点 N 的坐标为（　　）

A. $(2,-1,3)$　　B. $(2,1,-3)$　　C. $(-2,-1,3)$　　D. $(-2,1,3)$

【答案】D

【解析】点 $M(-2,1,-3)$ 关于 xOy 平面对称，横坐标和纵坐标相同，竖坐标相反，则点 N 为 $(-2,1,3)$。故本题选 D。

【易错点 82】空间平面及其方程

1.平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。

2.平面的一般方程为：$Ax+By+Cz+D=0$。

3.定义：两平面法线向量之间的夹角（通常指锐角）称为两平面的夹角。

4.设平面 Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，法线向量分别是：$\boldsymbol{n}_1=(A_1,\ B_1,\ C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,\ B_2,\ C_2)$。

按照两向量夹角余弦公式有：

$$\cos\theta=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

5.几个常用的结论：

设平面 1 和平面 2 的法向量依次为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,\ B_1,\ C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,\ B_2,\ C_2)$

①两平面垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$（法向量垂直）；

②两平面平行：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$（法向量平行）；

③两平面重合：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$；

④平面外一点到平面的距离公式：设平面外的一点 $P_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$，平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则点到平面的距离为 $d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

易错指数：★★★★

【题目示例】

若平面 $\lambda_1\left(2x-2y+z-1\right)+\lambda_2\left(x-3y-z\right)=0$ 与平面 $x+y+2z+1=0$ 平行，则 $\lambda_1:\lambda_2=$（　）

A. $1:2$　　B. $2:1$　　C. $-1:1$　　D. $1:-1$

【答案】D

【解析】根据题意，先对已知平面 $\lambda_1\left(2x-2y+z-1\right)+\lambda_2\left(x-3y-z\right)=0$ 进行整理得：$\left(2\lambda_1+\lambda_2\right)x-\left(2\lambda_1+3\lambda_2\right)y+\left(\lambda_1-\lambda_2\right)z-\lambda_1=0$。又两个平面平行满足 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$，即 $\dfrac{2\lambda_1+\lambda_2}{1}=\dfrac{-\left(2\lambda_1+3\lambda_2\right)}{1}=\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\neq\dfrac{-\lambda_1}{1}$，解得 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$，故 $\lambda_1:\lambda_2=1:-1$。故本题选 D。

【易错点 83】空间直线及其方程

1.直线的点向式方程：在空间直角坐标系中，若 $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ 是直线 l 上的一个点，$\mathbf{s}=\left(m,\ n,\ p\right)$ 为 l 的一个方向向量，则称 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 为直线 l 的**点向式方程**（也叫**标准式**或者**对称式**）。

2.直线的参数方程：设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，得方程组 $\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$，则称此方程组就是直线的**参数方程**。

3.直线的一般方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，其中 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例。

4.设两条直线 l_1 与 l_2 的方程为：l_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$，$l_2$：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$，由它们的方程构成的方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1} \\ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2} \end{cases} \qquad (1)$$

①若方程组（1）有无穷组解，则 l_1 与 l_2 重合；

②若方程组（1）只有一组解，则 l_1 与 l_2 相交，且方程组的解即为 l_1 与 l_2 的交点坐标；

③若方程组（1）无解，且 $\boldsymbol{s}_1 // \boldsymbol{s}_2$，即 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{0}$，则 l_1 与 l_2 平行；

④若方程组（1）无解，且 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\neq\boldsymbol{0}$，则 l_1 与 l_2 异面直线。

5.两相交直线 l_1 与 l_2 所形成的 4 个角中，把不大于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的那对对顶角 θ 叫做这两条直线的夹角。若 l_1 与 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，显然有：

$$\cos\theta=\left|\cos\langle \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}$$

（1）若 $l_1 // l_2$，规定 l_1 与 l_2 的夹角为 0；

（2）对于异面直线，可把这两条直线平移至相交状态，此时，它们的夹角称为异面直线的夹角；

（3）若 $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$。

易错指数：★★★★★

【题目示例】

把直线$\begin{cases}x-2y+3z-4=0\\x-2y-z=0\end{cases}$化为标准方程________。

【答案】$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{0}$

【解析】由题可得$\begin{cases}x-2y+3z-4=0 & ①\\x-2y-z=0 & ②\end{cases}$，①－②得$z=1$，$x-2y-1=0$，令$y=0$，则$x=1$，所以点$(1,0,1)$在直线上，又直线的方向向量为两平面法向量的向量积，即：

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -2 & 3\\1 & -2 & -1\end{vmatrix}=(8,\ 4,\ 0)$$，所以直线的方程为$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{0}$。

第五章 微分方程

【易错点 84】可分离变量的微分方程

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot g(y)$的方程，称为**可分离变量的微分方程**。

求解的具体步骤：（分离变量法）

（1）分离变量得：$\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$；

（2）两边同时求积分得：$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$；

（3）化简整理，从而求出方程的通解：$G(y)=F(x)+C$。

易错指数：★★★★★

【题目示例】

微分方程$y'=xy$的通解为________。

【答案】Ce^{x^2}

【解析】$y'=xy\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=x\mathrm{d}x\Rightarrow\ln|y|=x^2+C\Rightarrow y=Ce^{x^2}$。

第六章 多元函数微分

【易错点 85】偏导数的求法

求 z 对 x 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把变量 y 暂时看作常量而对 x 求导数；求 z 对 y 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时，则只要把 x 暂时看作常量而对 y 求导数。

注：偏导数的记号是一个整体记号，不能看作分子与分母之商。

易错指数：★★★★

【题目示例】

设 $z=\mathrm{e}^{x}\cos y$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ （ ）

A. $\mathrm{e}^{x}\sin y$　　B. $-\mathrm{e}^{x}\sin y$

C. $\mathrm{e}^{x}\cos y$　　D. $\mathrm{e}^{x}\cos y-\mathrm{e}^{x}\sin y$

【答案】B

【解析】$\frac{\partial z}{\partial y}$ 对 y 求偏导即可，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\mathrm{e}^{x}\sin y$。故本题选 B。

【易错点 86】可微分的条件

1.必要条件：若函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 处可微分，则该函数在点 $(x,\ y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$。

2.充分条件：如果函数 $z=f(x,\ y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(x,\ y)$ 连续，则称函数在该点可微分。

总结：由 1 和 2 可知二元函数的可导、可微、连续的关系如下图所示：

$f_x'(x,\ y)$
$f_y'(x,\ y)$ $\Longrightarrow$ $f(x,\ y)$ 可微 $\nearrow$ $f(x,\ y)$ 连续

$f(x,\ y)$ 可微 $\searrow$ $f_x'(x,\ y)$
$f_y'(x,\ y)$ 存在

易错指数：★★★★

【题目示例】

若函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 处可微分，下列说法错误的是（　　）

A.函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 处偏导存在

B.函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 处可导

C.函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 处连续

D.函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 处偏导连续

【答案】D

【解析】结合多元函数可微的必要条件可知 A、B、C 选项正确，而 D 是函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 处可微分的充分条件，不是必要条件。故本题选 D。

第七章 级数

【易错点 87】收敛级数

一、收敛级数的基本性质

性质 1：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于和 s，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，且其和为 ks。

性质 2：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于 s、σ，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $s+\sigma$。

性质 3：在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性。

性质 4：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数

$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$ 仍然收敛，且其和不变。

性质 5（级数收敛的必要条件）：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则它的一般项 u_n 趋于 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

二、绝对收敛和条件收敛

1.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

2.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

3.绝对收敛与收敛的关系

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛。

易错指数：★★★★

【题目示例】

若 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，则（　　）

A. $p<1$　　B. $p\le 1$　　C. $p>1$　　D. $p\ge 1$

【答案】C

【解析】由题，当 $p>1$ 时，p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，当 $p\le 1$ 时，p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的。故本题选 C。

【易错点 88】收敛半径

1.收敛半径

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的相邻两项的系数满足条件：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则称正数 $R=\frac{1}{\rho}$ 就是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径。

2.求解方法

幂级数的收敛半径可如下求得：设极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中 a_n，a_{n+1} 是幂级数相邻两项的系数，则：

（1）若 $\rho\ne 0$，则 $R=\frac{1}{\rho}$；

（2）若 $\rho=0$，则 $R=+\infty$；

（3）若 $\rho=+\infty$，则 $R=0$。

易错指数：★★★

【题目示例】

幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛半径为________。

【答案】1

【解析】由幂级数的收敛半径定理得，$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，$R=\dfrac{1}{\rho}=1$。

第五模块　线性代数

第一章 行列式

【易错点 89】行列式的性质

性质 1：行列式 $D=$ 它的转置行列式 D^{T} 或 D'，即有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 2：交换一个行列式的两行（或两列），行列式改变符号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3：如果一个行列式有两行（列）完全相同，那么这个行列式等于零。

性质 4：把一个行列式的某一行（列）的所有元素同乘以某一个数 k，等于以数 k 乘这个行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这就是说，一行的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行相当于用这个数乘此行列式。令 $k=0$，就有如果行列式中一行为零，那么行列式为零。

性质 5：若行列式的某一行（列）的元素都是两元素之和，则该行列式可分解成两个行列式的和，除了相应那行（列）分别各是一个加数外，其余的行（列）和原行列式一样。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6：把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变。

性质 7：如果行列式中两行成比例，那么行列式为零。

易错指数：★★

【题目示例】

如果行列式 D 中有两列（行）完全相同，那么（　　）

A. $D=1$　　B. $D^2=1$　　C. $D=0$　　D. $D=-1$

【答案】C

【解析】根据行列式的性质，行列式 D 中有两列（行）完全相同，行列式的值为零，则 $D=0$。故本题选 C。

【易错点 90】余子式与代数余子式

1.余子式：n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。

2.代数余子式：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式。

易错指数：★★★

【题目示例】

行列式 $\begin{vmatrix}1&3&4\\0&2&3\\-2&a&-4\end{vmatrix}$ 中元素 a 二阶代数余子式是（　）

A. $\begin{vmatrix}0&3\\-2&4\end{vmatrix}$　　B. $-\begin{vmatrix}0&3\\-2&4\end{vmatrix}$　　C. $-\begin{vmatrix}1&4\\0&3\end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix}1&4\\0&3\end{vmatrix}$

【答案】C

【解析】元素 a 的二阶余子式为 $\begin{vmatrix}1&4\\0&3\end{vmatrix}$，代数余子式为 $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&4\\0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&4\\0&3\end{vmatrix}$。故本题选C。

【易错点91】行列式的计算

1.对角线法

（1）二阶行列式：$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

（2）三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

即：二阶和三阶行列式的值等于主对角线元素的乘积减去副对角线元素的乘积。

2.化三角法：将行列式转化为上三角形或者下三角形行列式，这样所得行列式的值等于主对角线元素的乘积。

3.代数余子式法：将行列式按某一行（或列）展开，达到降阶的目的。

易错指数：★★

【题目示例】

行列式$\begin{vmatrix}1 & 0 & a \\ 0 & b & 2 \\ 3 & c & 0\end{vmatrix}=$（　　）

A.0　　B.1　　C.$6abc$　　D.$-3ab-2c$

【答案】D

【解析】根据行列式的计算$\begin{vmatrix}1 & 0 & a \\ 0 & b & 2 \\ 3 & c & 0\end{vmatrix}=1\times(0-2c)+a\times(0-3b)=-3ab-2c$。故本题选D。

第二章 矩阵

【易错点92】矩阵的运算

1.矩阵的加法：矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$和$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和记作$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，且

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}。$$

2.矩阵的数乘：常数λ与矩阵$\boldsymbol{A}$的乘积记作$\lambda\boldsymbol{A}$或$\boldsymbol{A}\lambda$，且

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}。$$

3.矩阵的乘法：设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$与$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$的乘积是$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，记作$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,\ m;\ j=1,2,\cdots,\ n)$。

4.矩阵的转置：将矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$中行与列的元素互换，得到$\boldsymbol{A}$的转置矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}'=(a_{ji})_{n\times m}$。

易错指数：★★★★

【题目示例】

若有矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times2}$，$\boldsymbol{B}_{2\times3}$，$\boldsymbol{C}_{3\times3}$，下列可运算的式子是（　）

A. $\boldsymbol{AC}$　　B. CB　　C. ABC　　D. $AB-AC$

【答案】C

【解析】A 选项，$\boldsymbol{A}$ 是一个 3×2 的矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是一个 3×3 的矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列与 $\boldsymbol{C}$ 的行不相同，不能进行乘法计算；B 选项，$\boldsymbol{B}$ 是一个 2×3 的矩阵，$\boldsymbol{C}$ 的列与 $\boldsymbol{B}$ 的行不相同，不能进行乘法计算；C 选项，$\boldsymbol{A}$ 的列与 $\boldsymbol{B}$ 的行相同，$\boldsymbol{B}$ 的列与 $\boldsymbol{C}$ 的行相同，能进行乘法计算；D 选项，$\boldsymbol{A}$ 的列与 $\boldsymbol{B}$ 的行相同，能进行乘法计算，而 $\boldsymbol{A}$ 的列与 $\boldsymbol{C}$ 的行不相同，不能进行乘法计算。故本题选 C。

【易错点 93】矩阵的秩

k 阶子式：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意 k 行和 k 列交叉点上的元素构成 k 阶子矩阵，此子矩阵的行列式即为 k 阶子式。

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个非零 r 阶子式，且所有 $r+1$ 阶子式全为零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，记为 $R(\boldsymbol{A})=r$。

求法：通过初等行变换将给定矩阵化为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即为给定矩阵的秩。

易错指数：★★★★

【题目示例】

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&\lambda+1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $\lambda=$（　）

A.1　　B.2　　C.0　　D. -1

【答案】A

【解析】$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&\lambda+1\end{pmatrix}\underset{r_3+(-2)r_1}{\overset{r_2+(-1)r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&\lambda-1\end{pmatrix}\overset{r_3+(-1)r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$，由 A 的秩为 2，则 $\lambda-1=0$，$\lambda=1$。故本题选 A。

第三章 线性方程组

【易错点 94】线性方程组的解

1.解的情况

设 n 元线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $R(\boldsymbol{A})$，其增广矩阵的秩为 $R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$，则

（1）若 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$，则该线性方程组无解；

（2）若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=n$，则该线性方程组有唯一解；

（3）若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})<n$，则该线性方程组有无穷多解。

2.齐次线性方程组的解

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 总是有解的，因为 $x_1=x_2=\cdots x_n=0$ 就是它的一个解。因此，齐次线性方程组的解有两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解。

定理：系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})<n\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组有非零解。

推理：若齐次线性方程组的方程个数小于未知数的个数，即 $m<n$，则它必有非零解。

3.非齐次线性方程组的解

对于非齐次线性方程组来说，只需要将其增广矩阵化为行阶梯形矩阵，以此来判断其是否有解。

定理：n 元非齐次线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ 的秩。

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时，方程组没有自由未知量，只有唯一解。

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时，方程组有 $n-r$ 个自由未知量，有无穷多个解。

易错指数：★★★

【题目示例】

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶单位矩阵等价，那么方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ （ ）

A.无解　　B.有唯一解

C.有无穷多解　　D.解情况不能确定

【答案】B

【解析】$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，那么 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\ b)=n$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩相等且等于未知数的个数 n，则方程就有唯一解。故本题选 B。

第六模块　课标与教学论

第一章 数学课程标准

【易错点 95】义务教育数学课程标准

一、前言

1.数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：**人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。**

2.课程内容要反映社会的需要、数学的特点，要符合学生的认知规律。它不仅包括数学的结果，也包括数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法。课程内容的选择要贴近学生的实际，有利于学生体验与理解、思考与探索。课程内容的组织要**重视过程**，处理好过程与结果的关系；要**重视直观**，处理好直观与抽象的关系；要**重视直接经验**，处理好直接经验与间接经验的关系。课程内容的呈现应注意层次性和多样性。

3.**教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。**

4.学习评价的主要目的是为了全面了解学生数学学习的过程和结果，激励学生学习和改进教师教学。应建立目标多元、方法多样的评价体系。**评价既要关注学生学习的结果，**

也要重视学习的过程；既要关注学生数学学习的水平，也要重视学生在数学活动中所表现出来的情感与态度，帮助学生认识自我、建立信心。

5.信息技术的发展对数学教育的价值、目标、内容以及教学方式产生了很大的影响。数学课程的设计与实施应**根据实际情况合理地运用现代信息技术**，要注意信息技术与课程内容的整合，注重实效。

6.学段划分

为了体现义务教育数学课程的整体性，本标准统筹考虑九年的课程内容。同时，根据学生发展的生理和心理特征，将九年的学习时间划分为三个学段：**第一学段（1—3 年级）、第二学段（4—6 年级）、第三学段（7—9 年级）。**

7.课程目标

义务教育阶段数学课程目标分为**总目标**和**学段目标**，从**知识技能、数学思考、问题解决、情感态度**四个方面加以阐述。

数学课程目标包括结果目标和过程目标。结果目标使用“了解、理解、掌握、运用”等行为动词表述，过程目标使用“经历、体验、探索”等行为动词表述。

8.课程内容

在各学段中，安排了四个部分的课程内容：**“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”。**其中，“综合与实践”内容设置的目的在于培养学生综合运用有关的知识与方法解决实际问题，培养学生的问题意识、应用意识和创新意识，积累学生的活动经验，提高学生解决现实问题的能力。

在数学课程中，应当注重发展学生的**数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想**。为了适应时代发展对人才培养的需要，数学课程还要特别注重发展学生的**应用意识和创新意识**。

二、总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生能：

1.获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的**基础知识、基本技能、基本思想、**

基本活动经验。

2.体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，**增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。**

3.了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和科学态度。

易错指数：★★★

【题目示例】

义务教育阶段的数学课程标准应用体现基础性、普及性、（ ），使数学教育面向全体学生，实现：人人学有价值的数学。人人都能获得必备的数学知识，不同的人在数学上得到不同的发展。

A.发展性　　B.全面性　　C.准确性　　D.稳定性

【答案】A

【解析】《义务教育数学课程标准（2011年版）》课程理念指出，义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程，具有基础性、普及性和发展性。数学课程能使学生掌握必备的基础知识和基本技能，培养学生的抽象思维和推理能力，培养学生的创新意识和实践能力，促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展。故本题选A。

【易错点96】高中数学课程标准

一、数学学科核心素养

数学学科核心素养包括：**数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。**这些数学学科核心素养既相对独立、又相互交融，是一个有机的整体。

1.数学抽象：数学抽象是指通过对数量关系与空间形式的抽象，得到数学研究对象的素养。主要包括：从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构，并用数学语言予以表征。

数学抽象主要表现为：获得数学概念和规则，提出数学命题和模型，形成数学方法与思想，认识数学结构与体系。

2.逻辑推理：逻辑推理是指从一些事实和命题出发，依据规则推出其他命题的素养。主要包括两类：一类是从特殊到一般的推理，推理形式主要有归纳、类比；一类是从一般到特殊的推理，推理形式主要有演绎。

逻辑推理主要表现为：掌握推理基本形式和规则，发现问题和提出命题，探索和表述论证过程，理解命题体系，有逻辑地表达与交流。

3.数学建模：数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养。数学建模过程主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、建立模型，确定参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终解决实际问题。

数学建模主要表现为：发现和提出问题，建立和求解模型，检验和完善模型，分析和解决问题。

4.直观想象：直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形，理解和解决数学问题的素养。主要包括：借助空间形式认识事物的位置关系、形态变化与运动规律；利用图形描述、分析数学问题；建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路。

直观想象主要表现为：建立形与数的联系，利用几何图形描述问题，借助几何直观理解问题，运用空间想象认识事物。

5.数学运算：数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等。

数学运算主要表现为：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果。

6.数据分析：数据分析是指针对研究对象获取数据，运用数学方法对数据进行整理、分析和推断，形成关于研究对象知识的素养。数据分析过程主要包括：收集数据，整理数据，提取信息，构建模型，进行推断，获得结论。

数据分析主要表现为：收集和整理数据，理解和处理数据，获得和解释结论，概括和

形成知识。

二、高中课程内容

1.必修课程

必修课程包括五个主题，分别是预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动。数学文化融入课程内容。必修课程共 8 学分 144 课时。

2.选择性必修课程

选择性必修课程包括四个主题，分别是函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动、数学文化融入课程内容。选择性必修课程共 6 学分 108 课时。

3.选修课程

选修课程是由学校根据自身情况选择设置的课程，供学生依据个人志趣自主选择，分为 A，B，C，D，E 五类。数学建模活动、数学探究活动、数学文化融入课程内容。

易错指数：★★★

【题目示例】

高中阶段数学核心素养包括：数学抽象，逻辑推理，数学建模，直观想象，（ ），数据分析。

A.运用能力　　B.创新意识　　C.思维品质　　D.数学运算

【答案】D

【解析】数学新课程标准中，高中阶段数学核心素养包括：数学抽象，逻辑推理，数学建模，直观想象，数学运算，数据分析。故本题选 D。

第二章 数学教学论

【易错点 97】数学概念

一、数学概念的内涵和外延

1.内涵：概念反映的所有对象的共同本质属性的总和，叫做这个概念的内涵，又称涵义。

2.外延：适合于概念所指的对象的全体，叫做这个概念的外延，又称范围。

3.概念的内涵和外延是相互依存、相互制约的，**概念的内涵越大，外延越小；概念的内涵越小，外延越大，呈反比关系。**例如：在“长方形”概念的内涵中增加“一组邻边相等”的属性时，就得到外延缩小了的“正方形”的概念；在“长方形”概念的内涵中去掉“有一个角是直角”的属性，就得到外延扩大了的“平行四边形”的概念。

二、概念间的关系

1.学习概念主要有**概念形成**与**概念同化**两种基本形式。

2.概念之间的关系分为：**相容关系和不相容关系。**

（1）相容关系

如果两个概念 A 和 B 的外延集合的交集非空，就称这两个概念的关系为相容关系。相容关系又可分为下面三种情形：①同一关系；②交叉关系；③从属关系（种属关系）。

（2）不相容关系

如果两个概念 A 和 B 是属于同一从属概念下的种属概念，并且它们的外延集合的交集为空集，那么称这两个概念间的关系是不相容关系或全异关系。不相容关系又分成下面两种：①反对关系（对立关系）；②矛盾关系。

三、常见的定义方法

1.原始概念

比如，代数中的集合、元素、对应等，几何中的点、线、面等。

2.属加种差定义法

这种定义法是中学数学中最常用的定义方法，该法即按公式“邻近的属+种差=被定义概念”下定义。例如，平行四边形给出如下的定义方式：“一组对边平行并且相等的四边形叫做平行四边形”。其中，平行四边形的概念邻近的属是四边形，平行四边形区别于四边形的其他种概念的属性即种差是“一组对边平行并且相等”。

属加种差的定义方法有两种特殊形式：①**发生式定义方法。**例如，“在平面内，一个动点与一个定点等距离运动所成的轨迹叫做圆”；②**关系定义法。**例如，“大于直角而小

于平角的叫做钝角”。

3.外延定义法

例如，整数和分数统称为有理数；正弦、余弦、正切和余切函数叫做三角函数；椭圆、双曲线和抛物线叫做圆锥曲线。

外延定义有一种特殊的形式：**约定式定义法。**例如，$a^0=1(a\neq 0)$。

4.词语定义法

用词语说明被定义项的含义的方式。例如：“∈”表示属于。

5.递归定义法

一般适用于自然数的性质有直接关系的对象。例如：用递推公式 $a_n=a_{n-1}+d$ 定义等差数列。

6.公理式定义法

选取不加定义的原始概念（基本概念）或无条件承认的规定（公理）作为出发点，再加以严格的逻辑推理得到的定义。

易错指数：★★★

【题目示例】

概念“梯形”和“平行四边形”之间的关系（　　）

A.对立关系　　B.矛盾关系　　C.同一关系　　D.交叉关系

【答案】A

【解析】根据对立关系的概念：在同一属概念之下的两个种概念，如果它们的外延的交集是空集，而外延的并集小于这个属概念的外延。四边形中除了平行四边形和梯形之外还有其他的图形，所以是对立关系。故本题选 A。

【易错点 98】数学思想方法

常见的数学思想方法有：符号思想、集合思想、数形结合思想、函数与方程思想、转化与化归思想、分类与整合思想、特殊与一般思想、有限与无限思想、或然与必然思想、归纳思想、类比思想、演绎思想、模型思想等。

易错指数：★★★

【题目示例】

应用列方程的方法求解应用题，渗透的主要数学思想是（　　）

A.分类与整合思想；或然与必然思想　　B.一般与特殊思想；符号化思想

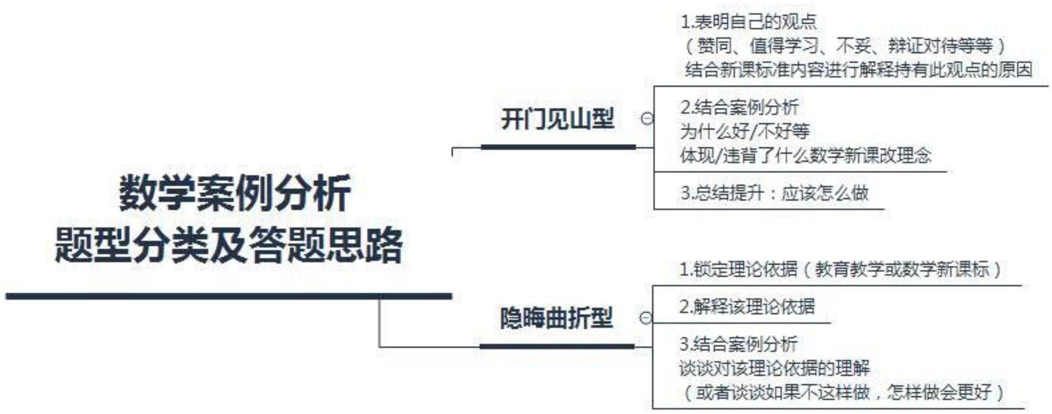
C.或然与必然思想；数学模型思想　　D.符号化思想；数学模型思想

【答案】D

【解析】方程求解，将文字语言转换为符号语言，方程本身也是一种数学建模。故本题选 D。

第三章 案例分析

【易错点 99】案例分析



易错指数：★★★

【题目示例】

杨老师在教学《平行四边形的面积》一课的最后环节，不仅让学生强化记忆了平行四边形的面积公式，还结合板书引导学生对公式的推导过程进行回顾反思。下面对杨老师的

教学与评析中，不恰当的一项是（　）

A.关注知识技能目标的实现

B.关注基本数学思考方法的渗透

C.注重体现评价方式的多样性

D.注重帮助学生形成回顾反思的学习习惯

【答案】C

【解析】该过程未体现评价环节。故本题选 C。

第四章 教学设计

【易错点 100】教学设计

1.课题：所讲的题目，一般要写在一页的首行中间，要醒目。

2.课时：一课时或两课时，一般都是一课时。

3.课型：新授课、复习课、测验讲评课或练习课等，一般为新授课。

4.教材分析：（1）教材的地理位置；（2）教材的主要内容；（3）教材的作用意义。

5.学情分析：（1）学生的认知水平；（2）学生的知识经验。

6.教学目标：（1）知识与技能目标；（2）过程与方法目标；（3）情感态度与价值观目标。

7.教学重难点

8.教学方法：

（1）数学学科常用教学方法：讲解法、练习法、谈话法、小组教学法、探究性数学教学法、情境教学法。

（2）数学学科常用的学习方法：自主学习、合作学习、探究学习（自主探究法，小组合作法）。

9.课前准备：教具、学具的准备。

10.教学过程：

（1）导入新课

常用的导入方法有：活动（游戏）导入、动手实践导入、诗歌导入、图片导入、实际问题导入、悬念导入、直观导入等。

可以采用的名称有：以旧拓新、承上启下、开门见山、设置疑问，引起悬念，直观演示等。

（2）讲授新课

要注意精选合作学习的内容；选准合作学习的时机；明确合作学习的步骤；必须保证合作学习的时间。

（3）巩固练习

要求练习设计精巧、有层次、有梯度、有密度，要考虑到进行的方式和所需时间。

（4）课堂小结

可以让学生自己总结，可以是知识方面，也可以是情感方面，也可以完成表格等等。

（5）布置作业

要考虑布置哪些内容，需不需要提示或解释等。多一些开放性作业和分层次作业。

11.板书设计：上课时准备写在黑板上的内容。板书要求具有科学性、整体性、条理性。