华图教师
HTEACHER.NET
SINCE 2001

2021年特岗教师考试

考前30分

SHU XUE

数学

目录

第一模块 考情分析

一、考查内容分析

各省份的教师招聘数学笔试主要考查数学专业知识和数学教学知识。数学专业知识部分在试卷中占比较大，知识点涉及范围较广，主要包括两部分，第一部分为中小学所涉及到的数、复数、代数式、集合与简易逻辑、方程与不等式，函数，数列，推理与证明，算法初步，平面几何，立体几何，解析几何，统计与概率；第二部分为大学所涉及到的极限，导数，积分，线性代数。数学教学知识主要包括数学课程标准，数学教学论，数学思想，数学教学方法等。

二、备考须知

教师招聘数学笔试考查内容繁杂，题型多样，这些都给考生备考造成困难，因此，华图小编建议考生可按照以下四个阶段有序备考，从而达到事半功倍的效果。

（一）研究考纲阶段

考生需清楚报考省份的数学科目考试内容、范围，可根据考纲要求梳理出各部分知识在笔试中所占的比重，根据真题要求进行自我摸底测试，明确自身的实际情况与考试要求的差距。

（二）基础知识梳理阶段

考生应以梳理知识点为主，以做对应专题的习题为辅，这样可以建立起知识体系，认识知识间的联系，找到做题的感觉。建议在每一专题复习结束后，考生用思维导图更直观有效地建立知识间的联系，可对错题、难题进行分类整理并分析原因，以达到最佳复习效果。因为第二阶段在复习中最为关键，持续的时间也较长，为了更加高效地掌握知识，考生可以选择有系统教研的辅导班来帮助自己。

（三）综合练习阶段

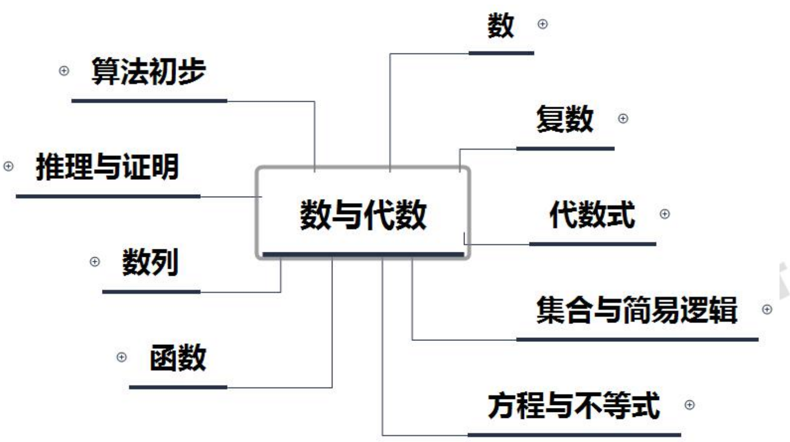
考生在该阶段应该综合所学知识，开始进行系统性、综合性地刷题，题型包含选择题、填空题、解答题，案例分析及教学设计等，需要着重复习函数，三角函数，数列，平面几何，立体几何，解析几何，概率等内容，另外，对于案例分析和教学设计也可以分类型进行练习，掌握常规考题类型。在该阶段，考生应该多分析，多总结解题思路和答题技巧。

（四）模拟考试阶段

基础复习之后，考生可以按照历年真题要求进行实战演练。华图小编建议考生最好能够模拟考试情境的各个方面，其中，包括考试过程中做题顺序和每种题型时间的安排等。在考试前一天，考生尽量调整作息时间以保证在考试中呈现最佳水平。

第二模块 常用知识点汇总

第一部分 数与代数



第一章 数

$$1.\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数}\ (0,1,2,3,\cdots)\\ \text{负整数}\ (-1,-2,-3,\cdots)\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\ (\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots)\\ \text{负分数}\ (-\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\cdots)\end{cases}\end{cases}\quad(\text{有限小数，无限循环小数})\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\quad(\text{无限不循环小数})\end{cases}$$

2.有效数字：从左边第一个不是零的数字起到右边精确的数位为止的所有数字，都叫做这个数的有效数字。

3.科学记数法：把一个数写做 $\pm a\times 10^{n}\ (1\le a<10)$ 的形式，其中 n 是整数，这种记数法叫做科学记数法。

4.实数的运算：相反数、绝对值、倒数、平方根、算术平方根和立方根。

5.比较大小：①数轴比较法；②求差比较法；③求商比较法；④绝对值比较法；⑤平方

法。

第二章 复数

$$1.\text{复数}a+bi\begin{cases}\text{实数}(b=0)\begin{cases}\text{有理数}—\text{循环小数}\\\text{无理数}—\text{无限不循环小数}\end{cases}\\\text{虚数}(b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\\text{非纯虚数}(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

2.复数相等：实部和虚部都相等的两个复数相等。

3.共轭复数：实部相同，虚部相反的两个复数互为共轭复数。

4.复数的运算：（1）加减法：$(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$。

（2）乘法：$(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$。

（3）除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})\cdot(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})\cdot(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$。

（4）乘方：$\mathrm{i}^{4n}=1,\ \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\ \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i},\ n\in\mathbf{N}^*$。

第三章 代数式

$$1.\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}(\text{二次根式})\end{cases}$$

2.整式的运算法则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（$m,\ n$都是正整数）；$(a^m)^n=a^{mn}$（$m,\ n$都是正整数）；$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$；$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；$(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

3.分式的运算法则

（1）分式的加减法：$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{b}=\dfrac{a\pm c}{b}$，$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad\pm bc}{bd}$；（2）分式的乘法：$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$；

（3）分式的乘方：$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$（$n$为整数）；（4）分式的除法：$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$。

4.二次根式的性质

（1）$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\left(a\geq 0\right)$；（2）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\left(a\geq 0\right)\\-a\left(a<0\right)\end{cases}$；（3）$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\left(a\geq 0,\ b\geq 0\right)$；

（4）$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left(a\geq 0,\ b>0\right)$。

第四章 集合与简易逻辑

1.集合的性质：确定性、互异性、无序性。

2.集合与集合的关系：（1）相等：若集合 A、B 中的元素完全相同，则 $A=B$；

（2）子集：若集合 A 中的元素都是 B 中的元素，则 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）；

（3）真子集：若集合 A 中的元素都是 B 中的元素，且 $A\neq B$，则 AÜB（或 BÝA）。

3.空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集。

4.集合的表示方法：（1）列举法；（2）描述法；（3）韦恩图（Venn 图）法。

5.集合的运算：（1）并集；（2）交集；（3）补集。

6.四种命题的相互关系：互为逆否命题为等价命题，同真同假。

7.如果已知 $P\Rightarrow Q$，那么，P 是 Q 的充分条件，Q 是 P 的必要条件；如果既有 $P\Rightarrow Q$，又有 $Q\Rightarrow P$，就记作 $P\Leftrightarrow Q$，则 P 与 Q 互为充分必要条件。

第五章 方程与不等式

1.一元一次方程的解法：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化 1，验根。

2.一元二次方程常用解法：（1）公式法：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 的求根公式：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；（2）因式分解法：若方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 的左边可以因式分解为 $a\left(x-m\right)\left(x-n\right)$，那么原方程转化为两个一元一次方程 $x-m=0$ 或 $x-n=0$。

3.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$。

4.韦达定理：方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 的两个实数根是 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$。

5.二元一次方程组的解法：（1）代入消元法；（2）加减消元法。

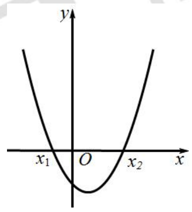
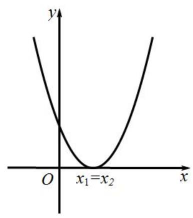
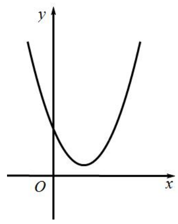
6.特殊方程一般解法：去特殊化，解整式方程，验根。

7.不等式的基本性质：（1）对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$；（2）传递性：$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$；（3）加法：①$a>b \Rightarrow a+c>b+c$；②$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$；（4）乘法：①$a>b,\ c>0 \Rightarrow ac>bc$；②$a>b,\ c<0 \Rightarrow ac<bc$；③$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$；（5）乘方：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n\left(n\in\mathbf{N},\ n>1\right)$；（6）开方：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\left(n\in\mathbf{N},\ n>1\right)$；（7）除法：①$a>b,\ c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；②$a>b,\ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$；③$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0$；（8）倒数：$a>b$，$ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

8.重要不等式：（1）设a、b是两个正数，则$\frac{a+b}{2}$称为正数a、b的算术平均数，$\sqrt{ab}$称为正数a、b的几何平均数；（2）均值不等式：若$a>0$，$b>0$，则$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，即$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时，“$=$”成立。

9.一元一次不等式解法：①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤将x的系数化为 1。

10.一元二次不等式解法

判别式$\varDelta=b^2-4ac$		$\varDelta>0$	$\varDelta=0$	$\varDelta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a>0\right)$ 的图象				
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a>0\right)$ 的根		有两个相异实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有两个相等实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
解集	$ax^2+bx+c>0\left(a>0\right)$	$\left\{x\middle\vert x<x_1\text{或}x>x_2\right\}$	$\left\{x\mid x\ne-\frac{b}{2a}\right\}$	**R**
	$ax^2+bx+c<0\left(a>0\right)$	$\left\{x\middle\vert x_1<x<x_2\right\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

11.分式不等式的解法：(1) $\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}>0 \Leftrightarrow f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)>0$；(2) $\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}<0 \Leftrightarrow f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)<0$；

(3) $\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\ge 0 \\ g\left(x\right)\ne 0 \end{cases}$；(4) $\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\le 0 \\ g\left(x\right)\ne 0 \end{cases}$。

12.绝对值不等式的解法：①标准化：$\left|f\left(x\right)\right|>\left(<,\ \ge,\ \le\right)c\left(c>0\right)$；②去绝对值：当$c>0$时，

$\begin{cases}|f(x)|>c \Leftrightarrow f^2(x)>c^2 \Leftrightarrow f(x)>c \text{ 或 } f(x)<-c \\ |f(x)|<c \Leftrightarrow f^2(x)<c^2 \Leftrightarrow -c<f(x)<c\end{cases}$；③解不等式。

13.线性规划问题求解步骤：①作出可行域：画出约束条件（不等式组）所确定的平面区域；②平移：将目标函数对应的直线平移，最先通过或最后通过的顶点便是最优解的位置；③求解：解有关的方程组，求出最优解的坐标，再代入目标函数，求出目标函数的最值。

第六章 函数

1.映射的性质：任意性，有序性，存在性，唯一性，封闭性。

2.函数三要素：定义域，值域，解析式。

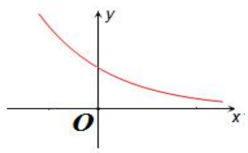
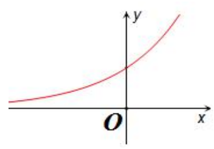
3.单调性：确定单调区间的方法有：（1）定义法；（2）导数法；（3）图象法；（4）复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在公共定义域上的单调性：同增异减。

4.奇偶性：（1）有 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 就叫做偶函数，偶函数的图象关于 y 轴对称；（2）有 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 就叫做奇函数，奇函数的图象关于原点对称。

5.周期性：$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，T 叫做这个函数的一个周期。

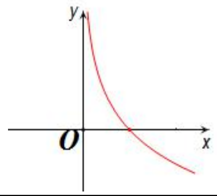
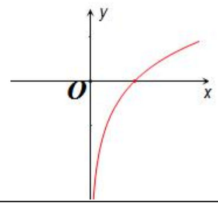
6.对称性：$f(a+x)=f(a-x) \Leftrightarrow f(2a-x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称。

7.指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）

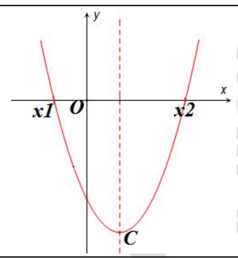
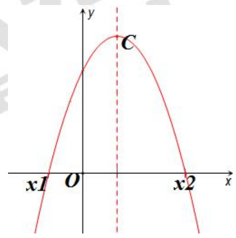
a 的范围	$0<a<1$	$a>1$
图象		
恒过点	$(0,1)$	$(0,1)$
定义域	**R**	**R**
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
单调性	↓	↑

8.对数函数 $y=\log_a x\left(a>0 \text{且} a\neq 1,\ x>0\right)$

a 的范围	$0<a<1$	$a>1$

图象		
恒过点	$(1,0)$	$(1,0)$
定义域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	**R**	**R**
单调性	$\downarrow$	$\uparrow$

9.二次函数

函数解析式	$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$	
a的符号	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$（最低点）	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$（最高点）
定义域	**R**	**R**
值域	$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$
单调性	$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)\downarrow$，$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)\uparrow$	$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)\uparrow$，$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)\downarrow$
奇偶性	当$b=0$时，偶函数	当$b=0$时，偶函数
周期性	无	无
对称轴	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$

10.平移变换：左加右减，上加下减。

11.对称变换：（1）$y=f\left(x\right)\xrightarrow{y轴}y=f\left(-x\right)$；（2）$y=f\left(x\right)\xrightarrow{x=a}y=f\left(2a-x\right)$；

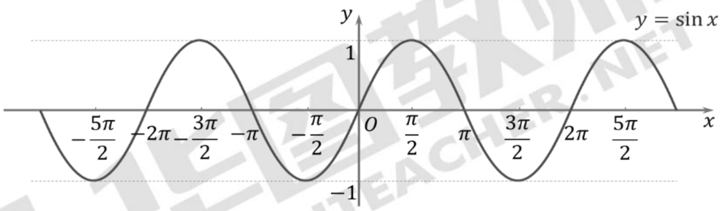
（3） $y=f(x)\xrightarrow{x轴}y=-f(x)$；（4） $y=f(x)\xrightarrow{y=b}y=2b-f(x)$；（5） $y=f(x)\xrightarrow{(a,\ b)点对称}y=2b-f(2a-x)$。

12.弧度制与角度制之间的换算公式： $\alpha=\dfrac{n\pi}{180°}$ （α 为弧度制， n 为角度制）。

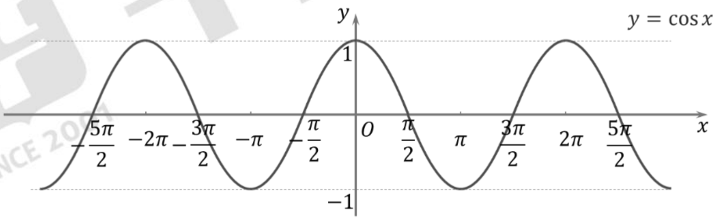
13.常用公式：（1）诱导公式口诀：“奇变偶不变，符号看象限”；（2）三角恒等变换：①$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$；②$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；③ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$， $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$， $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$；（3）辅助角公式：$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\arctan\dfrac{b}{a}\right),(a>0)$；(4) 倍角公式：①$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，②$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$，③$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$。

14.三角函数的图象与性质

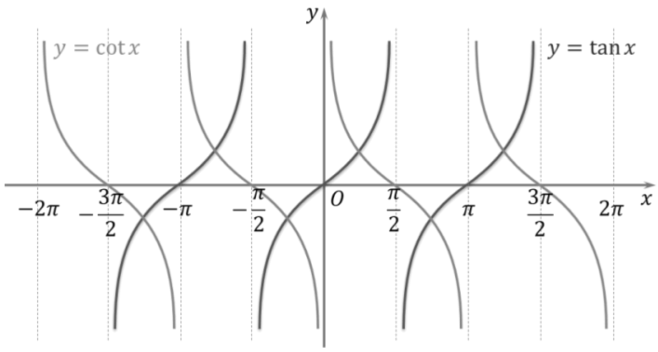
（1）正弦函数：



（2）余弦函数：



（3）正切、余弦函数：



15.函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\quad \omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

①定义域：$\mathbf{R}$；②值域：$[-A,\ A]$。当 $\omega x+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=A$；当 $\omega x+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-A$；③单调性：$\omega x+\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 时

单调递增；$\omega x+\varphi\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$时单调递减；④奇偶性与对称性：奇偶性：根据定义或图象判断；对称中心：图象与x轴的交点；对称轴：过最高点或最低点且垂直于x轴；⑤最小正周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$；⑥图象变换：a.先平移后伸缩；b.先伸缩后平移。

16.正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$为外接圆半径），变形：①$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$，$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$；②$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$。

17.余弦定理：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$；$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$；$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

18.面积公式：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$；$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$。

第七章 数列

1.等差数列通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d\ (n\in\mathbf{N}^*)$。

2.等差数列前n项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=na_n-\frac{1}{2}n(n-1)d$。

3.等差数列性质：①$a_m-a_n=(m-n)d$；②a，b，c成等差数列，b叫做a与c的等差中项，则$2b=a+c$；③若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$；④$S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$，$S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$；⑤S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$成等差数列。

4.等比数列通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*,\ a_1\neq 0,\ q\neq 0)$。

5.等比数列前n项和公式：$S_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-qa_n}{1-q}(q\neq 1)\\ na_1(q=1)\end{cases}$。

6.等比数列性质：①$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$，其中a_m，a_n为第m，n项；②若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；③若三个数等比，常设$\frac{a_1}{q}$，$a_1$，$a_1q$；④等比中项：$a$，$b$，$c$成等比数列，$b$叫做$a$与$c$的等比中项，则$b^2=a\cdot c$；⑤$S_n$，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$成等比数列。

7.特殊数列求通项公式的方法：（1）公式法：当已知$S_n=f(n)$时，直接运用公式$a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$求解；（2）累加法：当$a_{n+1}=a_n+f(n)(n\geq 1)$时，运用累加法；（3）

累乘法：当$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f\left(n\right)$时，运用累乘法；（4）构造法：当$a_{n+1}=pa_n+f\left(n\right)$（$p$为常数）时，构造成等差数列或者等比数列来求解；（5）倒数法：当已知$a_{n+1}=\frac{a_n}{Aa_n+B}$时运用倒数法；（6）迭代法（线性）：若数列$\{a_n\}$满足$a_n=f\left(a_{n-1}\right)$，则可通过迭代的方法求得通项公式。

8.特殊数列求前n项和的方法：（1）裂项相消法：①$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$；②$\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)$；③$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；（2）错项相减法：$c_n=a_n\cdot b_n$，$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列。$S_n$乘等比数列的公比后与原来的前$n$项和$S_n$相减，即$S_n-qS_n$，求$S_n$。但要注意讨论$q=1$和$q\neq 1$两种情况；（3）分组求和法：将数列求和公式中的各项进行分类，合并“同类项”，构造为多个等差数列或等比数列求和；（4）倒序相加法：适用于求和公式中到首尾距离相等的两项和具有典型的规律的数列。

第八章 推理与证明

- 推理与证明
  - 推理
    - 合情推理
      - 归纳推理
      - 类比推理
    - 演绎推理：三段论
  - 证明
    - 直接证明
      - 综合法
      - 分析法
    - 间接证明

第九章 算法初步

算法语言：（1）赋值语句：在程序运行时给变量赋值的语句，一般格式：变量＝表达式；（2）条件语句：计算机按照条件进行分析、比较、判断，并且按照判断后的不同情况进行不同的操作处理；（3）循环语句：变量一般需要进行一定的初始化操作，并且循环语句在循环过程中需要有“结束”的机会，循环过程中循环条件成立对应的变量值需要有改变；（4）输入语句：实现算法的输入信息功能；（5）输出语句：实现算法的输出结果功能。

第二部分 图形与几何

第一章 平面几何

1.直线：①公理：经过两个点有一条直线，并且只有一条直线。它可以简单地说成：两点确定一条直线；②过一点的直线有无数条。

2.线段：①公理：所有连接两点的线中，线段最短。也可简单说成：两点之间，线段最短；②线段的中点到两端点的距离相等；③线段的大小关系和它们长度的大小关系是一致的。

3.线段垂直平分线的性质定理及逆定理：①垂直平分线：经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线；②性质定理：线段垂直平分线上的点到这条线段的两个端点的距离相等；③逆定理：到一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上。

4.同角或等角的余角相等。同角或等角的补角相等。对顶角一定相等。

5.角的平分线性质：①角平分线上的点到这个角的两边的距离相等；②到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上。

6.平行公理及其推论：①公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行；②推论：如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。

7.平行的判定：①同位角相等，两直线平行；②内错角相等，两直线平行；③同旁内角互补，两直线平行；④垂直于同一条直线的两直线平行。

8.平行的性质：①两直线平行，同位角相等；②两直线平行，内错角相等；③两直线平行，同旁内角互补。

9.垂线的性质：性质 1：过一点有且只有一条直线与已知直线垂直；性质 2：直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短。简称：垂线段最短。

10.三角形的内角和定理：三角形的内角和等于180°。

11.三角形中的主要线段：中线，垂线，角平分线，中位线。（1）三角形重心性质：重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 $2:1$；（2）三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半。

12.如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简称：等角对等边）。推论 1：三个角都相等的三角形是等边三角形；推论 2：有一个角是 $60°$ 的等腰三角形是等边三角形。

13.直角三角形性质：①$\angle C=90°\Rightarrow\angle A+\angle B=90°$；②在直角三角形中，$30°$ 角所对的直角边等于斜边的一半；③直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；④勾股定理：直角三角形两直角边 a，b 的平方和等于斜边 c 的平方，即 $a^2+b^2=c^2$；⑤射影定理：在直角三角形中，斜边上的高线是两直角边在斜边上的射影的比例中项，每条直角边是它们在斜边上的射影和斜边的比例中项。

14.四边形的内角和定理：四边形的内角和等于 $360°$。四边形的外角和定理：四边形的外角和等于 $360°$。推论：①多边形的内角和定理：n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot180°$；②多边形的外角和定理：任意多边形的外角和等于 $360°$。

15.平行四边形判定：①定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形；②判定定理 1：两组对角分别相等的四边形是平行四边形；③判定定理 2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；④判定定理 3：对角线互相平分的四边形是平行四边形；⑤判定定理 4：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形。

16.矩形判定：①定义：有一个角是直角的平行四边形是矩形；②判定定理 1：有三个角是直角的四边形是矩形；③判定定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形。

17.菱形判定：①定义：有一组邻边相等的平行四边形是菱形；②判定定理 1：四边都相等的四边形是菱形；③判定定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

18.正方形判定：先证明它是平行四边形，再证明它是菱形（或矩形），最后证明它是正方形。

19.梯形梯形的判定：①定义：一组对边平行而另一组对边不平行的四边形是梯形；②判定定理：一组对边平行且不相等的四边形是梯形。

20.圆周角定理及其推论：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等。

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；$90°$ 的圆周角所对的弦是直径。

21.垂径定理及其推论可概括为：直径$\left\{\begin{matrix}\text{过圆心}\\\text{垂直于弦}\\\text{平分弦}\\\text{平分弦所对的优弧}\\\text{平分弦所对的劣弧}\end{matrix}\right\}$知二推三。

22.直线与圆的位置关系：如果$\odot O$的半径为r，圆心O到直线l的距离为d，那么：①直线l与$\odot O$相交$\Leftrightarrow d<r$；②直线l与$\odot O$相切$\Leftrightarrow d=r$；③直线l与$\odot O$相离$\Leftrightarrow d>r$。

23.切线的判定和性质：（1）切线的判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线；（2）切线的性质定理：圆的切线垂直于经过切点的半径。

24.圆和圆的位置关系：设两圆的半径分别为R和r，圆心距为d，那么，①两圆外离$\Leftrightarrow d>R+r$；②两圆外切$\Leftrightarrow d=R+r$；③两圆相交$\Leftrightarrow |R-r|<d<R+r$；④两圆内切$\Leftrightarrow d=|R-r|$；⑤两圆内含$\Leftrightarrow 0<d<|R-r|$。

25.弧长公式：$n°$的圆心角所对的弧长l的计算公式为$l=\frac{n\pi R}{180}$。圆周长：$C=2\pi R$。

26.扇形面积：$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}lR$，其中$n$是扇形的圆心角度数，$R$是扇形的半径，$l$是扇形的弧长。圆面积：$S=\pi R^2$。

27.弦切角定理：弦切角的度数等于它所夹的弧所对的圆心角度数的一半，等于它所夹的弧所对的圆周角度数。

28.四边形与圆（四点共圆的性质）：圆内接四边形对角互补。

29.平移性质：①平移不改变图形的大小和形状，但图形上的每个点都沿同一方向进行了移动；②连接各组对应点的线段平行（或在同一直线上）且相等。

30.旋转性质：①对应点到旋转中心的距离相等；②对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角。

31.轴对称判定：如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称。

32.中心对称判定：如果两个图形的对应点连线都经过某一点，并且被这一点平分，那么这两个图形关于这一点对称。

33.相似变换性质：①图形中每个角的大小不变，对应线段都扩大（或缩小）相同的倍数；②图形的形状不变，大小、方向、位置可能改变。

34.比例的性质：（1）基本性质：$a:b=c:d\Leftrightarrow ad=bc$；$a:b=b:c\Leftrightarrow b^2=ac$。

（2）合比性质：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}$。

（3）等比性质：$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\cdots=\dfrac{m}{n}\\ b+d+f+\cdots+n\neq 0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a+c+e+\cdots+m}{b+d+f+\cdots+n}=\dfrac{a}{b}$。

35.相似三角形的判定方法：①定义法：对应角相等，对应边成比例的两个三角形相似；②平行法：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似；③判定定理 1：两角对应相等，两三角形相似；④判定定理 2：两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似；⑤判定定理 3：三边对应成比例，两三角形相似。

36.全等三角形判定：“SAS”，“ASA”，“AAS”，“SSS”，“HL”（用于直角三角形）。

37.物体的三视图：主视图、俯视图、左视图。①主视图：在正面内得到的由前向后观察物体的视图；②俯视图：在水平面内得到的由上向下观察物体的视图；③左视图：在侧面内得到的由左向右观察物体的视图，也叫做侧视图。

第二章 立体几何

1.表面积：（1）直棱柱：$S_{侧}=$底面周长×高；$S=S_{侧}+2\times S_{底}$；（2）圆柱：母线长为l，底面半径为r，$S_{侧}=2\pi rl$，$S_{底}=\pi r^2$，$S=2\pi rl+2\pi r^2$；（3）圆锥：母线长为l，底面半径为r，$S_{侧}=\pi rl$，$S_{底}=\pi r^2$，$S=\pi rl+\pi r^2$；（4）正棱锥：底面周长c，斜高h'，$S_{侧}=\frac{1}{2}ch'$；（5）正棱台：上、下底面周长为c、c'，斜高h'，$S_{侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'$；（6）圆台：上、下底面半径为$r$、$r'$，母线长为$l$，$S_{侧}=\pi(r+r')l$，$S=\pi(r+r')l+\pi r^2+\pi r'^2$；（7）球：半径为$R$，$S=4\pi R^2$。

2.体积：（1）柱体：$V=S_{底}\times$高；（2）锥体：$V=\frac{1}{3}S_{底}\times$高；（3）台体：$V=\frac{1}{3}\left(S_{上底}+S_{下底}+\sqrt{S_{上底}\cdot S_{下底}}\right)\times$高；（4）球体：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$。

3.平面的基本性质：公理 1：如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有的点都在这个平面内；公理 2：过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面；公理 3：

如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。

4.平行于同一直线的两直线互相平行，即 $a \parallel b$，$b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$。

5.如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补。

6.直线与平面的位置关系

（1）直线与平面平行：①判定定理 1：平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，则这条直线与这个平面平行；②判定定理 2：一条直线与一个平面垂直，则平面外与这条直线垂直的直线与该平面平行；③性质定理 1：一条直线和一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线和该直线平行。

（2）直线与平面垂直：①判定定理 1：如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面；②判定定理 2：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面；③性质定理 1：如果一条直线和一个平面垂直，则这条直线垂直于平面内任意一条直线；④性质定理 2：垂直于同一个平面的两条直线平行。

7.三垂线定理：在平面内的一条直线，如果它和穿过这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

三垂线逆定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直。

8.平面与平面的位置关系

（1）平面与平面平行：①判定定理 1：如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行；②判定定理 2：如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条相交直线，那么这两个平面平行；③判定定理 3：垂直于同一条直线的两个平面平行；④判定定理 4：平行于同一条平面的两个平面平行；⑤性质定理 1：如果两个平面平行，则其中一个平面内的任意一条直线都平行于另一个平面；⑥性质定理 2：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行；⑦性质定理 3：如果两个平行平面有一个垂直于一条直线，那么另一个平面也垂直于这条直线。

（2）平面与平面垂直：①判定定理：如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直；②性质定理 1：如果两个平面垂直，则其中一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面；③性质定理 2：如果两个相交平面同时垂直于第三个平面，那么它们的交线垂直于第三个平面。

9.异面直线的夹角求法：①几何法：平移转化为两相交直线的夹角；②向量法

$\theta=\arccos\dfrac{|\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2|}{|\boldsymbol{m}_1|\cdot|\boldsymbol{m}_2|}$，其中 $\boldsymbol{m}_1$、$\boldsymbol{m}_2$ 分别为异面直线 a、b 的方向向量，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

10.直线与平面的夹角求法：①定义法：作出直线在平面上的射影，找到线面角；②射影法：设斜线段 AB 在平面 α 内的射影为 $A'B'$，则 AB 与 α 所成的角 θ，$\cos\theta=\dfrac{|A'B'|}{|AB|}$；③向量法：$\theta=\arcsin\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 内的法向量，$\overrightarrow{AB}$ 为斜线的共线向量。

11.二面角求法：①定义法；②三垂线法；③垂面法；④射影法：利用面积射影公式 $S_{射影}=S_{原}\cdot\cos\theta$；⑤向量法：$\theta=\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$，其中 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 α、β 的法向量。（同进同出取补角，一进一出取同角）

12.点 P 到直线 l 的距离：$d=\dfrac{\sqrt{(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|)^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{|\boldsymbol{a}|}$，其中 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{QA}$ 为直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OP}$，点 Q 为直线 l 上的一点。（向量法）

13.点到平面的距离：（1）垂面法；（2）体积法；（3）等价转移法；（4）向量法：点 P 到平面 α 的距离：$d=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$，其中点 A 为平面 α 上的一点，PA 为经过平面 α 的一条斜线，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量。

14.异面直线距离的向量法：异面直线 l_1、l_2 的距离：$d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为公垂向量，点 A、B 分别为直线 l_1、l_2 上的一点。

第三章 解析几何

1.向量的加法（三角形法则，平行四边形法则）

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

2.向量的减法：向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差。

3.数乘运算：长度：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同 $(\lambda>0)$ 或相反 $(\lambda<0)$；$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

（1） $\lambda(\mu \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{a}$；（2） $(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；（3） $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

4.数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle$，$\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\ \pi]$。其中，$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\in\mathbf{R}$，称为$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上的投影。几何意义：数量积是$\boldsymbol{a}$的长度与$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上的投影的乘积。

5.平面向量的坐标运算：(1)若$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则有：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$；(2) 若$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则有：$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$；$A$、$B$两点间距离为$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；线段$AB$的中点坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。

6.向量共线定理：向量$\boldsymbol{b}$与非零向量$\boldsymbol{a}$共线的充要条件：有且只有一个非零实数λ，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$的充要条件是$x_1y_2-x_2y_1=0$。

7.向量垂直：设$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则有：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$。

8.斜率：$\tan\theta=k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，这时是斜率存在的时候，当斜率不存在时，倾斜角是90°，直线是$x=x_0$。

9.已知点$(x_0,\ y_0)$与直线$Ax+By+C=0$，则点到直线的距离为$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

10.平行线距离公式：若l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$，则$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

11.两直线间位置的关系：设直线l_1：$y=k_1x+b_1$或$A_1x+B_1y+C_1=0$，直线l_2：$y=k_2x+b_2$或$A_2x+B_2y+C_2=0$。（1）平行：$k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$，或者$A_1B_2-A_2B_1=0$且$A_1C_2-A_2C_1\neq0$；（2）重合：$k_1=k_2$且$b_1=b_2$，或者$A_1B_2-A_2B_1=0$且$A_1C_2-A_2C_1=0$；（3）相交：$k_1\neq k_2$，或者$A_1B_2-A_2B_1\neq0$；（4）垂直：$k_1\cdot k_2=-1$，或者$A_1A_2+B_1B_2=0$。

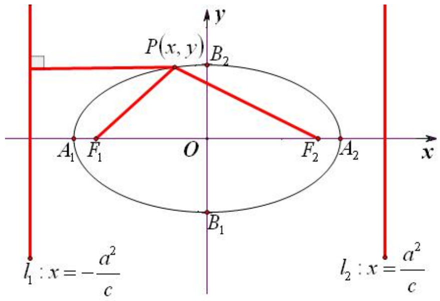
12.圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中，$(a,\ b)$——圆心，r——半径。

13.两圆位置关系的判定方法：设两圆圆心分别为O_1，O_2，半径分别为r_1，r_2，$|O_1O_2|=d$，则有：（1）$d>r_1+r_2\Leftrightarrow$外离$\Leftrightarrow$4条公切线；（2）$d=r_1+r_2\Leftrightarrow$外切$\Leftrightarrow$3条公切线；（3）

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2 条公切线；（4）$d=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1 条公切线；（5）$0<d<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线。

14.直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种：（1）$d>r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \varDelta<0$；（2）$d=r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \varDelta=0$；（3）$d<r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \varDelta>0$。

15.椭圆标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$



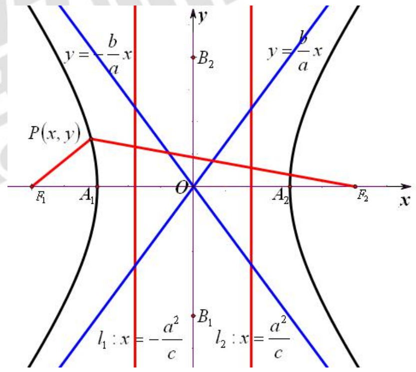
（1）范围：$\{x\,|\,-a\le x\le a\}$；$\{y\,|\,-b\le y\le b\}$；

(2) 长轴长 $2a$，短轴长 $2b$，焦距 $2c$，$a^2=b^2+c^2$；

(3）准线方程：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$；

(4）焦半径：$|PF_1|=ex+a$，$|PF_2|=a-ex$。

16.双曲线标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,\ \ b>0)$



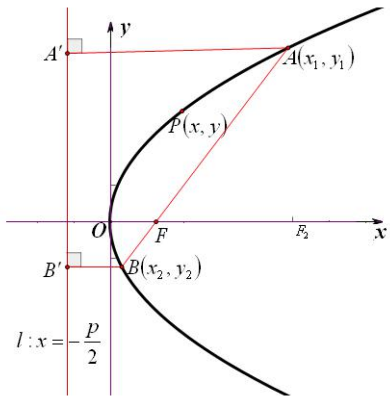
（1）范围：$\{x\,|\,x\ge a或x\le -a\}$；$\{y\,|\,y\in \mathbf{R}\}$；

(2）实轴长 $2a$，虚轴长 $2b$，焦距 $2c$，$c^2=a^2+b^2$；

(3）准线方程：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$；

(4）焦半径：$|PF_1|=-ex-a$，$|PF_2|=a-ex$。

17.抛物线标准方程：$y^2=2px$（$p>0$）



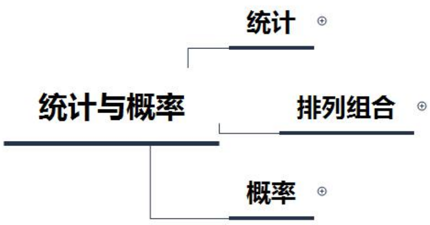
（1）焦点：$\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$；

（2）通径 $=2p$

(3）准线：$x=-\dfrac{p}{2}$；

（4）焦半径：$|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}$，过焦点弦长 $|AB|=x_1+x_2+p$。

第三部分 统计与概率



第一章 统计

1.平均数：$\overline{x}=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)$；加权平均数：$\overline{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$。

2.众数的算法：定义法。

3.中位数的算法：设样本有 n 个数据，按大小顺序依次排列后，（1）n 为奇数，第 $\frac{n+1}{2}$ 个数据为中位数；（2）n 为偶数，第 $\frac{n}{2}$ 与 $\frac{n}{2}+1$ 个数据的平均数为中位数。

4.极差：一组数据中最大数据与最小数据的差叫做极差。

5.方差：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$

6.简单随机抽样方法：（1）抽签法；（2）随机数表法。

7.系统抽样步骤：（1）编号；（2）分段；（3）确定起始个体编号；（4）按规则抽取。

8.分层抽样步骤：（1）确定样本容量与总体个数的比例；（2）确定各层抽取的个体数；（3）各层抽样；（4）合并。

9.各类统计图的优点：①条形统计图可以清楚地表明各种数量的多少，是统计图资料分析中最常用的图形；②扇形统计图可以比较清楚地反映出部分与部分、部分与总体之间的数量关系；③折线统计图可以反映同一事物在不同时间里的数量增减变化的情况；④茎叶统计图上原始数据信息无损失；⑤象形统计图形象具体、生动，一目了然的反映数字的大小；⑥频数分布直方图能清楚地显示各组频数分布情况和各组之间频数的差别；⑦频率分布折线图能反映数据频率的变化趋势。

第二章 排列组合

1.加法原理（分类计数原理）：$N=m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n$。

2.乘法原理（分步计数原理）：$N = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n$。

3.排列与组合的关系：从n个不同元素中取m个元素的无重排列是从n个不同元素中取m个元素的无重组合后，对取出的m个不同元素进行全排列得到的。即$\mathrm{A}_n^m = \mathrm{C}_n^m \cdot \mathrm{A}_m^m$。

4.排列、组合的常用方法：（1）元素优先法：对于问题中有特殊要求的元素应优先考虑，然后再考虑其他元素；（2）捆绑法：在特定要求下，将几个相关元素当作一个元素来考虑，待整体排好后再考虑他们“局部”的安排。它主要用于解决“元素相邻问题”；（3）插空法：先把其他元素安排好，然后将指定的不相邻的元素插入已排好元素的空隙或两端位置。它主要用于解决“元素不相邻问题”。（“16 字方针”是解决排列、组合问题的基本规律，即分类相加、分步相乘、有序排列、无序组合。）

5.二项式定理：$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \mathrm{C}_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + \mathrm{C}_n^n b^n \left(n \in \mathbf{N}^*\right)$，二项展开式共有$n+1$项，其中第$r+1$项为$T_{r+1} = \mathrm{C}_n^r a^{n-r} b^r \left(r = 0, 1, \cdots, n\right)$，$\mathrm{C}_n^r$为第$r+1$项的二项式系数。

6.二项式系数的性质：$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots \mathrm{C}_n^r + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = 2^n$。

第三章 概率

1.几何概型概率公式：$P(A) = \dfrac{\text{构成事件}A\text{的区域的几何度量（面积或体积）}}{\text{试验所有可能结果构成的区域的几何度量（面积或体积）}}$。

2.古典概型概率公式：$P(A) = \dfrac{\text{事件}A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{所有基本事件的个数}} = \dfrac{m}{n}$。

3.对立事件一定是互斥事件，但是互斥事件不一定是对立事件。

4.独立重复试验概率公式：n次独立重复试验中，事件A发生的次数记为$\xi\left(\xi = 0,1,\cdots, n\right)$，则事件$A$恰好发生$k$次的概率为：$P(\xi = k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \left(0 \le k \le n\right)$。

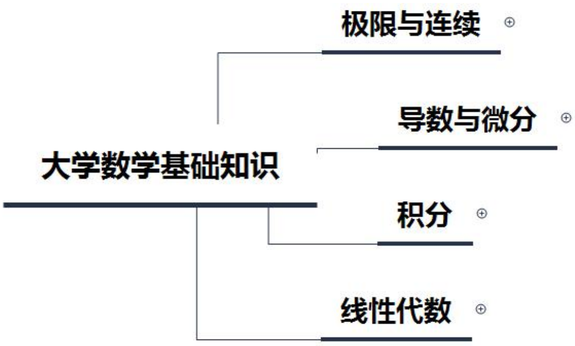
5.分布列具有如下性质：（1）$0 \le p_i \le 1$，$i = 1,2,\cdots$；（2）$p_1 + p_2 + \cdots = 1$。

6.离散型随机变量的期望（均值）：$E(\xi) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_i x_i + \cdots$，随机变量$\eta = a\xi + b$（其中$a$、$b$是常数）的数学期望为$E(a\xi + b) = aE(\xi) + b$。

7.离散型随机变量的方差：$D(\xi) = p_1\left(x_1 - E(\xi)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(\xi)\right)^2 + \cdots + p_i\left(x_i - E(\xi)\right)^2$，随机变量$\eta = a\xi + b$（其中$a$、$b$是常数）的方差为$D(a\xi + b) = a^2 D(\xi)$。

8.二项分布：n 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数记为 $\xi\left(\xi=0,1,\cdots,\ n\right)$，则事件 A 恰好发生 k 次的概率为：$P\left(\xi=k\right)=\mathrm{C}_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}\left(0\le k\le n\right)$。此时称随机变量 ξ 服从二项分布，记作 $\xi\sim B\left(n,\ p\right)$，其中 $E\left(\xi\right)=np$，$D\left(\xi\right)=np\left(1-p\right)$。

第四部分 大学数学基础知识



第一章 极限与连续

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$。

2.无穷小与极限的关系：$\lim f(x)=A \Leftrightarrow A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$。

3.两个无穷小的比较：在自变量同一变化过程（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$）中，设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，且 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，则 $l=1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记作：$f(x)\sim g(x)$。

4.极限的运算法则：（1）定理 1：有限个无穷小的和也是无穷小；（2）定理 2：有界函数与无穷小的乘积是无穷小；（3）推论 1：常数与无穷小的乘积是无穷小；（4）推论 2：有限个无穷小的乘积也是无穷小；（5）定理 3：设 $\lim u(x)=A$，$\lim v(x)=B$，则有①$\lim[u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm\lim v(x)=A\pm B$；②$\lim[u(x)\cdot v(x)]=\lim u(x)\cdot\lim v(x)=A\cdot B$；③当 $\lim v(x)=B\neq 0$ 时，$\lim\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)}=\dfrac{A}{B}$；④推论：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ 存在，c 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[cu(x)]=c\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$；$n\in\mathbf{N}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right]^n$。

5.极限的常用求法：（1）直接代入法；（2）约公因子法；（3）最高次幂法：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当 n=m\\ 0, & 当 n>m\\ \infty, & 当 n<m\end{cases}$$

；（4）两个重要极限公式：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}$； （5）等价无穷小代换：当 $x\to 0$ 时的等价无穷小量，则有 $\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$\mathrm{e}^{x}-1\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$(1+x)^{2}-1\sim 2x$；$1-\cos x\sim\frac{x^{2}}{2}$；$a^{x}-1\sim x\ln a$；（6）洛必达法则：法则 1$\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$；法则 2$\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在，$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ （或∞），则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$ （或∞）。

6. $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处既是左连续，又是右连续。

7.函数间断点的类型：（1）第一类间断点：①可去间断点：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而 $f(x)$ 在点 x_0 无定义，或有定义但 $f(x_0)\neq A$；②跳跃间断点：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$；（2）第二类间断点：第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点。常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点。

第二章 导数与微分

1. $f(x)$ 在 x_0 处可导（$f'(x_0)$ 存在）$\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等。

2.导数的几何意义：切线斜率 $k_{\text{切}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

3.基本初等函数求导：$(C)'=0$；$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，特别：$(x)'=1$，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^{2}}$；$(a^{x})'=a^{x}\ln a$，特别：$(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$；$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，特别：$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；$(\sin x)'=\cos x$；$(\cos x)'=-\sin x$；$(\tan x)'=\sec^{2}x$；$(\cot x)'=-\csc^{2}x$；$(\sec x)'=\tan x\sec x$；$(\csc x)'=-\cot x\csc x$；$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$；$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$；$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^{2}}$；$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^{2}}$。

4.复杂函数求导：①$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

②$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，特别地，$[Cu(x)]'=Cu'(x)$；

③$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$。

5.复合函数的求导法则：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$，或 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$。

6.定理：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处必连续。

7.切线方程：$y=f(x)$ 在点 $(x_0,\ f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

8.法线方程：$y=f(x)$ 在点 $(x_0,\ f(x_0))$ 处的法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

9.求函数单调性：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内可导。(1) 如果在 $(a,\ b)$ 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上单调增加；（2）如果在 $(a,\ b)$ 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上单调减少。

10.函数的极值：可导函数的极值，可通过研究函数的单调性求得，基本步骤是：（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域；(2) 求导数 $f'(x)$；(3) 求方程 $f'(x)=0$ 的全部实根，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，顺次将定义域分成若干个小区间，并列表：x 变化时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 值的变化情况如下表；（4）检查的符号 $f'(x)$ 并由表格判断极值。

x	$(-\infty,\ x_1)$	x_1	$(x_1,\ x_2)$	$\cdots$	x_n	$(x_n,+\infty)$
$f'(x)$	正负	0	正负	$\cdots$	0	正负
$f(x)$	单调性	极值	单调性	$\cdots$	极值	单调性

11.函数最值步骤：（1）求 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 上的极值；（2）将第一步中求得的极值与 $f(a)$，$f(b)$ 比较，得到 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的最大值与最小值。

12.微分与导数的关系：$dy=f'(x)dx$，可微与可导等价。

13.拉格朗日中值定理：设函数 $f(x)$ 满足：（1）在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续；（2）在开区间 $(a,\ b)$ 内可导；则在 $(a,\ b)$ 内至少有一点 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

14.可导与连续的关系：可导一定连续，连续不一定可导。

第三章 积分

1.性质：①性质 1：$\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$；

②性质 2：$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ （k 为常数，$k\neq 0$）。

2.积分公式：$\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k 为常数）；$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq -1)$；$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$；$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$；$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$；$\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$；$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；$\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$。

3.第一类换元积分法（凑微分法）：$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$。

4.第二类换元积分法：$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$。

5.分部积分法：$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int vu'\mathrm{d}x$，$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$。

6.积分的运算性质：$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；$\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$；$\int_a^b c\mathrm{d}x=c(b-a)$（$c$ 为常数）。

7.积分的保序性：如果在区间$[a,\ b]$上，恒有$f(x)\geq g(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

8.积分估值定理：如果函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上有最大值M和最小值m，则

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)。$$

9.积分中值定理：如果函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上连续，则在$[a,\ b]$内至少有一点ξ，使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$，$\xi\in[a,\ b]$。

10.对称区间上奇偶函数的积分性质：设$f(x)$在对称区间$[-a,\ a]$上连续，则有：如果$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$；如果$f(x)$为偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$。

11.牛顿—莱布尼兹公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

12.求平面图形的面积（直角坐标情形）：计算由区间$[a,\ b]$上的两条连续曲线$y=f(x)$

与 $y=g(x)$，以及两条直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的平面图形的面积：$A=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$。

13.求旋转体的体积：由区间 $[a,\ b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$、两直线 $x=a$ 与 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积：$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$。

第四章 线性代数

1.行列式的性质：①行列式 $D=$ 它的转置行列式 D^{T} 或 D'；②交换一个行列式的两行（或两列），行列式改变符号；③如果一个行列式有两行（列）完全相同，那么这个行列式等于零；④把一个行列式的某一行（列）的所有元素同乘以某一个数 k，等于以数 k 乘这个行列式；⑤若行列式的某一行（列）的元素都是两元素之和，则该行列式可分解成两个行列式的和，除了相应那行（列）分别各是一个加数外，其余的行（列）和原行列式一样；⑥把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变；⑦如果行列式中两行成比例，那么行列式为零。

2.余子式：n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。

3.代数余子式：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式。

4.引理：一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除元素 a_{ij} 外都为零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$。

定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。这个定理叫做行列式按行（列）展开法则。

5.对角线法：（1）$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$；

（2）$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$。

6.化三角法：将行列式转化为上三角形或者下三角形行列式，这样所得行列式的值等于主对角线元素的乘积。

7.代数余子式法：将行列式按某一行（或列）展开，达到降阶的目的。

8.单位矩阵（单位阵）：形如$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$的方阵。

9.矩阵相等：对应元素都相等的同型矩阵称为矩阵相等。

10.伴随矩阵：行列式$|\boldsymbol{A}|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的如下的矩阵$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$，称为矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵。

11.矩阵的加法：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$。

12.矩阵的数乘：$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\cdots&\lambda a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda a_{m1}&\lambda a_{m2}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}$。

13.矩阵的乘法：设矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$与$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$的乘积是$\boldsymbol{C}=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$，记作$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\left(i=1,2,\cdots,\ m;\ j=1,2,\cdots,\ n\right)$。

14.矩阵的转置：$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$的转置矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}'=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$。

15.如果矩阵$\boldsymbol{A}$经有限次初等变换变成矩阵$\boldsymbol{B}$，就称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，记作$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

16.若矩阵$\boldsymbol{A}$有一个非零r阶子式，且所有$r+1$阶子式全为零，则矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为r，记为$R\left(\boldsymbol{A}\right)=r$。矩阵的秩求法：通过初等行变换将给定矩阵化为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即为给定矩阵的秩。

17.若$|\boldsymbol{A}|\neq0$，则矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，其中$\boldsymbol{A}^*$为矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵。

18.逆矩阵运算规律：若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{-1}$亦可逆，且$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$；若数$\lambda\neq0$，则$\lambda\boldsymbol{A}$可逆，且$\left(\lambda\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；若$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶矩阵且均可逆，则$\boldsymbol{AB}$亦可逆，且$\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

第五部分 数学教学知识

1.数学是研究**数量关系**和**空间形式**的科学。

2.数学作为对于客观现象抽象概括而逐渐形成的**科学语言与工具**，不仅是自然科学和技术科学的基础，而且在人文科学与社会科学中发挥着越来越大的作用。

3.义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程，具有**基础性、普及性和发展性。**

4.数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：**人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。**

5.教学活动是师生**积极参与、交往互动、共同发展**的过程。教师是学习的**组织者、引导者与合作者**。学生学习应当是一个**生动活泼的、主动的和富有个性**的过程。

6.教师教学应该以学生的**认知发展水平和已有的经验**为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。

7.学习评价的主要目的是为了全面了解**学生数学学习的过程和结果**，**激励学生学习**和**改进教师教学**。

8.义务教育阶段数学课程的设计，充分考虑本阶段学生数学学习的特点，符合学生的认知规律和心理特征，有利于激发学生的学习兴趣，引发数学思考；充分考虑数学本身的特点，体现数学的实质；在呈现作为知识与技能的数学结果的同时，重视学生已有的经验，使学生体验从实际背景中**抽象出数学问题、构建数学模型、寻求结果、解决问题**的过程。

9.义务教育阶段数学课程目标分为总目标和学段目标，从**知识技能、数学思考、问题解决、情感态度**等四个方面加以阐述。

10.数学课程目标包括结果目标和过程目标。结果目标使用“**了解、理解、掌握、运用**”等术语表述，过程目标使用“**经历、体验、探索**”等术语表述。

11.在数学课程中，应当注重发展学生的**数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想。**

12.“综合与实践”是一类**以问题为载体**、以**学生自主参与**为主的学习活动。在学习活动中，学生将综合运用“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”等知识和方法解决问题。

13.**数感**主要是指关于**数与数量、数量关系、运算结果估计**等方面的感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系。

14.建立**符号意识**有助于学生理解符号的使用，是**数学表达和进行数学思考**的重要形式。

15.**运算能力**主要是指能够根据**法则和运算律**正确地进行运算的能力。

16.推理是数学的基本思维方式，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式。推理一般包括**合情推理和演绎推理**。

17.**模型思想**的建立是学生体会和理解**数学与外部世界**联系的**基本途径**。

18.**创新意识**的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。**学生自己发现和提出问题**是创新的基础；**独立思考、学会思考是**创新的核心；**归纳概括得到猜想和规律，并加以验证，**是创新的重要方法。

19.在数学教学活动中，教师要把基本理念转化为自己的教学行为，处理好**教师讲授与学生自主学习**的关系，注重启发学生积极思考。

20.数学教学应根据具体的教学内容，注意使学生在获得**间接经验**的同时也能够有机会获得**直接经验**，即从学生实际出发，创设有助于学生自主学习的问题情境，引导学生通过实践、思考、探索、交流等，获得数学的**基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验**，促使学生主动地、富有个性地学习，不断提高**发现问题和提出问题的能力、分析问题和解决问题的能力**。

21.无论是设计、实施课堂教学方案，还是组织各类教学活动，不仅要重视学生获得知识技能，而且要激发学生的学习兴趣，通过独立思考或者合作交流感悟数学的基本思想，引导学生在参与数学活动的过程中积累基本经验，帮助学生形成**认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑**等良好的学习习惯。

22.在基本技能的教学中，不仅要使学生掌握技能操作的程序和步骤，还要使学生理解程序和步骤的**道理。**

23.“知识技能”既是学生发展的**基础性目标**，又是落实“数学思考”“问题解决”“情感态度”目标的**载体**。

24.数学思想蕴涵在数学知识形成、发展和应用的过程中，是数学知识和方法在更高层次上的抽象与概括，如抽象、分类、归纳、演绎、模型等。学生在积极参与教学活动的过程中，通过**独立思考、合作交流**，逐步感悟数学思想。

25.教师在教学设计和实施时应特别关注的几个环节是：问题的选择，问题的展开过程，学生参与的方式，学生的合作交流，活动过程和结果的展示与评价等。

26.评价结果的呈现应采用定性与定量相结合的方式。第一学段的评价应当以**描述性评价**为主，第二学段采用**描述性评价和等级评价相结合**的方式，第三学段可以采用**描述性评价和等级（或百分制）评价相结合**的方式。

27.在对学生学习过程进行评价时，应依据“经历、体验、探索”不同层次的要求，采取灵活多样的方法，定性与定量相结合、以**定性评价**为主。

28.**数学教材**为学生的数学学习活动提供了学习主题、基本线索和知识结构，是实现数学课程目标、实施数学教学的**重要资源**。

29.教材在呈现相应的数学内容与思想方法时，应根据学生的年龄特征与知识积累，在遵循科学性的前提下，采用**逐级递进、螺旋上升**的原则。

30.学习概念主要有**概念形成**与**概念同化**两种基本形式。

31.概念之间的关系分为：**相容关系**和**不相容关系**。其中相容关系包括同一关系，交叉关系，从属关系，不相容关系包括矛盾关系和对立关系。

32.常见的数学思想方法有：符号思想、集合思想、数形结合思想、函数与方程思想、转化与化归思想、分类与整合思想、特殊与一般思想、有限与无限思想、或然与必然思想、归纳思想、类比思想、演绎思想、模型思想等。

33.数学教学中常用的教学方法：讲授法、谈话法、讲练结合法、自学辅导法、发现法、小组教学法、探究性数学教学、情境教学法。

第三模块 经典例题

一、数与代数部分

1.生物学家发现了一种病毒，其长度约为 0.00000032 mm，数据 0.00000032 用科学记数法表示是（　　）

A. 3.2×10^{7}　　B. 3.2×10^{8}　　C. 3.2×10^{-7}　　D. 3.2×10^{-8}

【答案】选 C。

【解析】因为科学记数法是将一个数写成 $\pm a\times10^{n}(1\le a<10)$ 的形式，其中 n 是整数，所以 $0.00000032=3.2\times10^{-7}$，故本题选 C。

2.设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A.0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C.1　　D. $\sqrt{2}$

【答案】选 C。

【解析】 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+2\mathrm{i}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{2}+2\mathrm{i}=\mathrm{i}$，因此 $|z|=1$。故本题选 C。

3.下列各式正确的是（　　）

A. $-4x^2+\dfrac{1}{2}xy=-\dfrac{1}{2}x(2x-y)$

B. $(m+n)^2-n^2=m(m-2n)$

C. $(x+y+3)^2=x^2+y^2+2xy+6x+6y+9$

D. $(1+y)^2-6(x+y)+9=(x+y+3)^2$

【答案】选 C。

【解析】 $-4x^2+\dfrac{1}{2}xy=-\dfrac{1}{2}x(8x-y)$，故 A 错；$(m+n)^2-n^2=m(m+2n)$，故 B 错；$(x+y+3)^2=x^2+y^2+2xy+6x+6y+9$，故 C 正确；$(1+y)^2-6(x+y)+9=y^2-4y-6x+10$，故 D 错。故本题选 C。

4.若 $M=\{x|\lg x>0\}$，$N=\{x|x^2\le4\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $(1,2]$　　B. $[1,2)$　　C. $(1,2)$　　D. $[1,2]$

【答案】选 A。

【解析】由题得 $M=\{x|x>1\}$，$N=\{x|-2\le x\le 2\}$，$M\cap N=\{x|1<x\le 2\}$。故本题选 A。

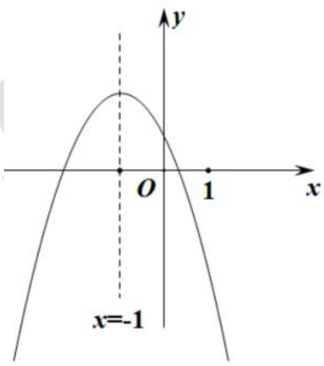
5.若关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是（　）

A. $k>-1$　　B. $k<-1$ 或 $k=0$　　C. $k<-1$　　D. $k>-1$ 且 $k\ne 0$

【答案】选 D。

【解析】$\because$ 该方程为一元二次方程，则 $k\ne 0$，又 $\because$ 有两个不相等的实数根，故 $\varDelta>0$，即 $4+4k>0$，$\therefore k>-1$，所以实数 k 的取值范围为 $k>-1$ 且 $k\ne 0$。故本题选 D。

6.二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\ne 0\right)$ 的图象如图，给出下列四个结论：① $4ac-b^2<0$；② $4a+c<2b$；③ $3b+2c<0$；④ $m\left(am+b\right)+b<a\left(m\ne -1\right)$，其中正确结论的个数是（　）



A.4 个　　B.3 个　　C.2 个　　D.1 个

【答案】选 B。

【解析】由图象可得二次函数图象与 x 轴有两个交点，故 $b^2-4ac>0$，即 $4ac-b^2<0$，所以①正确；当 $x=-2$ 时，$y>0$，可得 $4a-2b+c>0$，即 $4a+c>2b$，所以②不正确；当 $x=1$ 时，$y<0$，即 $a+b+c<0$，又因为对称轴 $x=-1$，可得 $2a=b$，代入可得 $\frac{3}{2}b+c<0$，即 $3b+2c<0$，所以③正确；当 $x=-1$ 时，有最大值 $y=a-b+c$，所以当 $x=m\left(m\ne -1\right)$ 时，有 $am^2+bm+c<a-b+c$，即 $m\left(am+b\right)+b<a\left(m\ne -1\right)$，所以④正确。故本题应选 B。

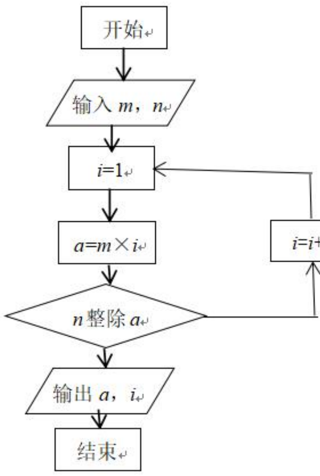
7.数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_2=6$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n+3n}\right\}$ 的前 n 项和为（　）

A. $\dfrac{1}{2n+2}$　　B. $\dfrac{n}{2n+4}$　　C. $\dfrac{1}{n^2+2}$　　D. $\dfrac{n}{n^2+2}$

【答案】选 B。

【解析】$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=a_{n+2}-a_{n+1}-\left(a_{n+1}-a_n\right)=2$，则$\{a_{n+1}-a_n\}$是首相为$a_2-a_1=3$，公差为 2 的等差数列，于是有$a_{n+1}-a_n=3+2\left(n-1\right)=2n+1$，再利用累和法求得$a_n=n^2+2$，所以$\dfrac{1}{a_n+3n}=\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\dfrac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，故$S_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n}{2n+4}$，故本题选 B。

8.阅读如图的程序框图，若输入$m=4$，$n=6$则输出的a，i分别等于（　　）



A.12，2　　B.12，3　　C.24，2　　D.24，3

【答案】选 B。

【解析】当$i=1$时，$a=4$，6 不能整除 4，继续执行；当$i=2$时，$a=8$，6 不能整除 8，继续执行；当$i=3$时，$a=12$，6 能整除 12，结束，此时$a=12$，$i=3$。故本题选 B。

9.一名法官在审理一起珍宝盗窃案时，此案有四名罪犯：甲、乙、丙、丁。甲：罪犯在乙、丙、丁三人之中；乙：我没有作案，是丙偷的；丙：甲、乙两人中有一人是小偷；丁：乙说的是事实。四人中有两人说的是真话，两人说的是假话，只有一人是罪犯。那这四人谁是罪犯（　　）

A.甲　　B.乙　　C.丙　　D.丁

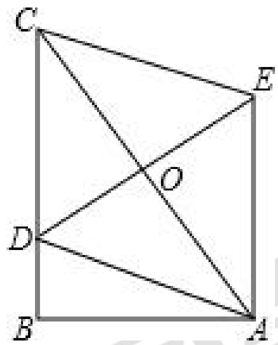
【答案】选 B。

【解析】在甲、乙、丙、丁四人的供词中，可以看出乙、丁两人的观点是一致的，因此乙、丁两人的供词应该是同真或同假(即都是真话或者都是假话，不会出现一真一假的情况)；假设乙、丁两人说的是真话，那么甲、丙两人说的是假话，由乙说真话推出丙是罪犯的结论；

由甲说假话，推出乙、丙、丁三人不是罪犯的结论；显然这两个结论是相互矛盾的；所以乙、丁两人说的是假话，而甲、丙两人说的是真话；由甲、丙的供述内容可以断定乙是罪犯，乙、丙、丁中有一人是罪犯，由丁说假话，丙说真话，推出乙是罪犯。故本题选 B。

二、图形与几何部分

1.如图，在直角$\triangle ABC$中，$\angle B=90^\circ$，$AB=3$，$BC=4$，点D在BC上，以AC为对角线的所有平行四边形$ADCE$中，DE的最小值是（　　）



A.2　　　　B.3　　　　C.4　　　　D.5

【答案】B。

【解析】在直角$\triangle ABC$中，$\angle B=90^\circ$，所以$BC\perp AB$，因为四边形$ADCE$为平行四边形，所以$OD=OE$，$OA=OC$。当OD取最小值时，DE最短，此时$OD\perp BC$，所以$DE=AB=3$，故本题选 B。

2.设l，m为两条不同的直线，α，β为两个不同的平面，下列命题正确的是__________。（填序号）

①若$l\perp\alpha$，$m/\!/\beta$，$\alpha\perp\beta$，则$l\perp m$

②若$l/\!/m$，$m\perp\alpha$，$l\perp\beta$，则$\alpha/\!/\beta$

③若$l/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则$l/\!/m$

④若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$l\subset\beta$，$l\perp m$，则$l\perp\alpha$

【答案】②④。

【解析】①中通过判断可知l与m的位置关系可能是垂直，平行或者异面，所以①错误；②通过判断正确；③中由$m/\!/\beta$，可得l与m平行，相交或异面，所以③错误；④两平面垂直，垂直交线的直线与另一平面垂直，可知④正确。故命题正确的是②④。

3.在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点为$A$，上顶点为$B$，

M 为线段 AB 的中点，若 $\angle MOA=30°$，则该椭圆的离心率为__________。

【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

【解析】$M\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$，且 $\angle MOA=30°$，所以 $\tan 30°=\dfrac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}=\dfrac{b}{a}$，所以 $a^2=3b^2$，且 $b^2=a^2-c^2$，所以 $2a^2=3c^2$，所以 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

三、统计与概率部分

1.某公司生产在 A，B，C 三种不同型号的汽车，产量之比依次为 $3:5:4$，为检验该公司的产品质量，用分层抽样的方法抽取一个容量为 n 的样本，若样本中 A 种型号的轿车比 B 种型号的轿车少 6 辆，则 $n=$（　　）

A.56　　　　B.48　　　　C.42　　　　D.36

【答案】选 D。

【解析】设样本中 A 种型号车 x 辆，则 B 型号为 $x+6$ 辆，则 $\dfrac{x}{x+6}=\dfrac{3}{5}$，解得 $x=9$，即 A 种型号的轿车有 6 辆，则 $\dfrac{3}{3+5+4}=\dfrac{9}{n}$，解得 $n=36$。故本题选 D。

2.从甲、乙、丙、丁 4 名学生中随机选取 2 人参加文体活动，则甲、乙两人中至少有一人被选取的概率是（　　）

A.$\dfrac{1}{3}$　　　　B.$\dfrac{2}{3}$　　　　C.$\dfrac{1}{6}$　　　　D.$\dfrac{5}{6}$

【答案】选 D。

【解析】甲、乙两人中至少有一人被选取的对立事件是甲乙两人都不被选，因此可以从对立事件来考虑。4 人中间任意选 2 人又 $C_4^2=6$ 种选法，只选丙丁只有 1 种选法，因此选到丙丁的概率为 $\dfrac{1}{6}$，因此甲、乙两人中至少有一人被选取的概率为 $1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$。故本题选 D。

四、大学数学部分

1.计算：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$。

【答案】$\dfrac{3}{4}$。

【解析】将 $x=1$ 代入原式 $\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$ 得"$\frac{0}{0}$"型，用洛必达法则进行求解，$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\times3}{1}=\frac{3}{2}\times4^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$。

2.设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$，若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为（　）

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$　　C. $y=2x$　　D. $y=x$

【答案】选 D。

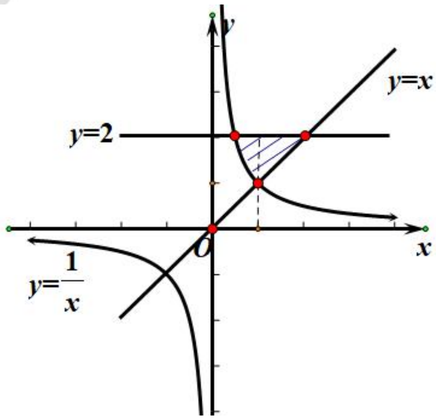
【解析】$f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，因此 $a-1=0$，$a=1$，函数解析式为 $f(x)=x^3+x$，$f'(x)=3x^2+1$，$f'(0)=1$，因此切线方程为 $y=x$。故本题选 D。

3.曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=2$ 所围成的图形的面积为（　）

A.1　　B.$\frac{2}{3}$　　C.$1-\ln2$　　D.$\frac{3}{2}-\ln2$

【答案】选 D。

【解析】$\because$ 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与曲线 $y=x$ 的交点为 $(1,1)$，与 $y=2$ 的交点为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$，直线 $y=x$ 与 $y=2$ 的交点为 $(2,2)$，$\therefore$ 所求面积为 $S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{1}^{2}(2-x)dx=\frac{3}{2}-\ln2$。故本题选 D。



4.行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-1&0\\1&3&-1\end{vmatrix}$ 的值为（　）

A.12　　B.18　　C.26　　D.25

【答案】选 C。

【解析】$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-1&0\\1&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-5&-6\\0&1&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&-5&-6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-26\end{vmatrix}=26$，也可以用对角线法求得结果为26。故本题选 C。

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为二阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$。则 $|\boldsymbol{B}|=$（　）

A.4　　B.2　　C.0　　D.1

【答案】选 B。

【解析】由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，移项得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$ 两边取行列式，得 $|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{E}|=2^2|\boldsymbol{E}|=4$，又计算出 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，得出 $|\boldsymbol{B}|=2$。故本题选 B。

五、数学教学知识部分

1.义务教育数学课程是培养公民素质的基础课程，具有基础性、普及性和（　）

A.提高性　　B.科学性　　C.发展性　　D.应用性

【答案】选 C。

【解析】《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出义务教育数学课程具有基础性、普及性和发展性。故本题选 C。

2.新授课《一元二次方程根与系数的关系》，陈老师的教学过程如下：

（1）给出三个简单方程，让学生写出方程说明，并计算两根的和与两根的积。（5 分钟）

（2）小组讨论：引导学生归纳，发现一元二次方程根与系数的关系。（5 分钟）

（3）教师板书：利用求根公式证明结论成立。（2 分钟）

（4）板书定理，学生熟记。（1 分钟）

（5）出示一组方程，学生口答两根之和、两根之积。（2 分钟）

（6）应用所学定理解题（例题和变式练习）。（20 分钟）

（7）小结随堂检测。（10 分钟）

请对上述教学过程作简要评析。

【参考答案】

（1）该教学过程可取的地方有教师引导学生归纳问题，数学情境要从教学的需要出发，创设与教学内容相适应，含有以相关数学知识和数学思维价值取向的刺激性的数据材料或背景信息。学生熟悉的、简明的、有利于引向数学实质的、真实或合理的情境是“好情境”。教学过程中引导学生发现结论，帮助学生有效解决问题，创设情境，沟通知识点之间的联系，沟通数学与生活的联系，科学的思考问题，寻求解决问题的途径。

（2）不可取的地方有新授课时间安排不合理、缺少师生互动。①《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中总目标指出学生获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，增强发现和提出问题、分析和解决问题的能力。了解数学的价值，激发好奇心，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和实事求是的科学态度。数学知识的教学，应注重学生对所学知识的理解，体会数学知识之间的关联。在基本技能的教学中，不仅要使学生掌握技能操作的程序和步骤，还要使学生理解程序和步骤的道理。教学中教师引导学生两根的和与两根的积与系数的关系，通过小组交流的方式，引导学生发现结论。本教学过程中新授部分只用了 5 分钟，学生对这部分很难理解，进入下一步骤会让学生感到困惑，应注重对基础知识和基本技能的理解和掌握。建议增加对第二环节时间的增加，例题和变式练习部分缩短时间，随堂测验放在别的时间进行。②教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。适当增加师生互动，营造好的课堂氛围。

3.教学设计：五年级下册《分数的基本性质》。

【参考答案】

教学目标：

1.知识与技能目标：理解分数基本性质的含义，会运用分数的基本性质把一个分数化成指定分母（或分子）而大小不变的分数。

2.过程与方法目标：在动手、观察、比较中学生的抽象、概括的逻辑思维能力得以提升，能够正确认识、处理变与不变的辩证关系。

3.情感态度与价值观目标：学生在学习过程中养成互相帮助、团结协作的良好习惯。

教学重点：分数的基本性质。

教学难点：学生对于分数基本性质的掌握和运用。

教学过程：

一、创设情景，引入概念

三个和尚的故事导入：从前有座山，山里住着几个和尚，一天老和尚拿来了几个形状大小一样的饼，矮和尚看到了说：“我要一块”，高和尚接着说：“我要两块”，胖和尚连忙说：“我要四块”。于是，老和尚就把一块饼平均切成四块，把其中一块给了矮和尚；把一块饼平均切成八块，把其中两块给了高和尚；再把一块饼平均切成十六块，把其中四块给了胖和尚。矮和尚和高和尚看到胖和尚拿了四块那么多，气得眼睛都快凸出来了，吵着说：“这样分不公平。”（教师边说边演示课件）

师：“三个和尚分别分了这块饼的多少？他们到底说得对不对？只有经过验证才能得到科学的结论。今天我们就来当回小数学家，请同学们小组合作，用你们喜欢的方法分一分。”

【设计意图】根据小学生的心理特点，用生动形象的故事引入，激发学生的学习兴趣与主动参与的意识，抓住学生的好奇心理，激发了探究欲望，为全课的学习创造了良好的开端。

二、自主参与，探索新知

1.学生分组讨论、动手操作。

2.学生汇报、交流。

师：“通过实验，你们发现什么？”课件演示分的过程。

师：“观察这组分数，你有什么疑问？想不想揭开谜底？”

【设计意图】这里安排了一个动手探究活动。用对折纸的办法体会创造出与$\frac{1}{2}$相等的分数，并通过操作、观察、思考，体会这几个分数的相等关系。这样学生在动手操作、动脑思考的过程中不断发现，让学生充分参与经历知识的形成过程，保持学生的探索兴趣，为发现和归纳分数的基本性质奠定基础。

3.板书课题。

三、比较归纳，揭示规律

1.“仔细观察这组分数，和小组同学议议，你们发现了什么规律？”

2.学生汇报、反馈：相等，分子分母虽然不相等，但是分数大小一样……

师：“能不能用一句话概括你刚才的发现？”

课件示出：分数的分子和分母同时乘上或除以一个相同的数，分数大小不变。

师：“还有补充吗？科学家要求严格，小小科学家可不能放过任何一个特殊数。”

生：必须0除外。

师："为什么？"

生：分母不能为0。（对于学生回答给予肯定。）

课件示出：分数的分子和分母同时乘上或除以一个相同的数（0除外），分数大小不变。

师："在这个性质中，哪些词比较关键？"

思考：根据分数与除法的关系，以及整数除法中商不变的性质，你能说说它与分数的基本性质之间的联系吗？

【设计意图】在学习过程中教师向学生提出了有思考价值、有挑战性的问题，让学生各抒己见，一方面培养学生自主探究精神，充分体现学生的主体地位，另一方面通过旧知来解释新知的活动，既沟通了新旧知识之间的联系，又加深学生对分数基本性质的理解。

四、尝试练习，强化新知

师："同学们能通过实验得出这些分数相等，还能透过现象看本质，说明为什么相等，进而概括出分数的基本性质，太了不起了，如果你们能用学到的知识解决新问题，老师会更高兴的！"

1.根据分数的基本性质，把下列的等式补充完整。

（1）$\frac{2}{3}=\frac{2\times(\ )}{3\times 6}=\frac{(\ )}{18}$；（2）$\frac{6}{21}=\frac{6\div 3}{21\div(\ )}=\frac{2}{(\ )}$；（3）$\frac{3}{5}=\frac{3\times(\ )}{5\times(\ )}=\frac{21}{(\ )}$

2.数字游戏：对对碰。说出相等的分数。

【设计意图】在练习的设计上，力求紧扣重点，做到针对性、层次性、新颖性，坡度性，使学生通过练习深化对分数基本性质的认识。安排游戏，一方面是为了让学生在实际运用过程中进一步巩固分数的基本性质，提高综合运用知识的能力，另一方面是为了培养学生团结协作的集体主义精神。

师："这节课我们通过操作、观察等一系列实践活动，概括出了分数的基本性质。请同学们谈谈你有哪些收获，还有什么问题？"

五、布置作业，巩固提高

1.练习册前三题，可选择继续做后边的两题。

2.列举五个相等的分数。

六、板书设计

分数的基本性质

$$\frac{1}{2} \underset{\div 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{2}{4} \underset{\div 2}{\overset{\times 2}{=}}$$

分数的分子与分母同时乘以或除以一个相同的数（0 除外），分数的大小不变。