

2020 考研数学

高分突破与答题技巧

金程考研·产品研发中心
数学教研室

一、客观题解题技巧

(一) 选择题解题技巧

1. 推演法

推演法是指从题设条件出发,按照习惯性思维方式,运用有关概念、性质和定理等,按部就班,经过直接推理演算得出正确结论.推演法是解答选择题的最基本的方法,从理论上讲,所有的选择题均可由推演法求解.

对于围绕基本概念设置的选择题或题中备选项为数值”形式结果或某种运算律,或题干条件给出的是某种运算形式时,常用推演法.

【例 1】【08 年数三】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的 ().

(A) 跳跃间断点. (B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点. (D) 振荡间断点.

【例 2】【11 年数二、三】 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)=3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则 ().

(A) $k=1, c=4$. (B) $k=1, c=-4$. (C) $k=3, c=4$. (D) $k=3, c=-4$.

【例 3】【09 年数一、二、三】 设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵,且 $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为 ().

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

【例 4】【09 年数一、三】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$

为标准正态分布的分布函数,则 $E(X) = ()$

(A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

2. 图示法

图示法是只根据题设条件作出所研究问题的几何图形,然后借助几何图形的直观性,经过分析得出正确的结论.

对于题设条件有明显的几何意义,如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性、渐近性等,或平面

图形面积、空间立体体积；概率论中有关两事件间的关系或概率关系的命题，以及数理统计中关于 α 分位点的问题等，常用图示法。

【例 5】【08 年数二】曲线方程为 $y = f(x)$ 函数在区间 $[0, a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ () .

- (A) 曲边梯形 $ABCD$ 面积. (B) 梯形 $ABCD$ 面积.
 (C) 曲边三角形 ACD 面积. (D) 三角形 ACD 面积.

【例 6】【97 年数一】设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$. 即 $S_1 = \int_a^b f(x)dx, S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$, 则 () .

- (A) $S_1 < S_2 < S_3$ (B) $S_2 < S_1 < S_3$ (C) $S_3 < S_1 < S_2$ (D) $S_2 < S_3 < S_1$

【例 7】【13 年数一】设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足

$P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$ () .

- (A) α (B) $1-\alpha$ (C) 2α (D) $1-2\alpha$

3. 赋值法

赋值法是指用满足题设条件的“特殊值”，包括数值、矩阵、函数或图形等，通过推理演算，要么直接得出正确结论；要么全部否定错误的选项，得到正确的结论。

对于题干中有“……对任意……必……”特征的题目，可先用赋值法，取复合条件的“特殊值”试一试。另外，对备选项为抽象函数形式结果的，赋值法往往也能凑效。

注意：运用赋值法解答选择题时，选取的“特殊值”必须符合题中限定的条件，而且形式越简单越好。

【例 8】【11 年数二】已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ () .

- (A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

【例 9】【05 年数二】设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，

a, b 为常数，则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$ () .

- (A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

【例 10】【04 年数一】设 A, B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有 () .

- (A) A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关.
 (B) A 的列向量组线性相关， B 的列向量组线性相关.
 (C) A 的行向量组线性相关， B 的行向量组线性相关.
 (D) A 的行向量组线性相关， B 的列向量组线性相关.

4.排除法

排除法是指从题设条件出发,利用推演法把备选项中不符合条件的干扰项逐个排除(此时的推演不能直接得出正确的结论,但能得到哪些选项是错误的);或利用赋值法排除错误的选项(此时的赋值得出的“正确”结论不止一个或看不到正确的结论,但能得到某些选项明显错误),赋值排除既是人们通常所说的反例法.概括地讲,排除法就是想方设法说明四个选项中某三个均不正确,那么剩下的一个必然正确,所运用的方法即上述的推演排除和反例排除(即赋值排除),具体应用时,这些方法往往交替使用,从而提高解题速度.

排除法通常适用于理论性较强、备选项形式较为抽象的题目.但对某些“数值”型的题目,若基本理论熟练,能“窥出”其中的“奥秘”,排除法也能收到意想不到的效果.

【例 11】【03 年数一】设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 ().

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立 (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

【例 12】【94 年数三】设 A, B 都是 n 阶非零矩阵,且 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩 ().

- (A) 必有一个等于 0 (B) 都小于 n
(C) 一个小于 n , 一个等于 n (D) 都等于 n

【例 13】设随机变量 X, Y 相互独立,且 X 服从正态分布 $N(0, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(0, \sigma_2^2)$, 则概率 $P\{|X - Y| < 1\}$ ().

- (A) 随 σ_1 与 σ_2 的减少而减少.
(B) 随 σ_1 与 σ_2 的增加而增加.
(C) 随 σ_1 的增加而减少, 随 σ_2 的减少而增加.
(D) 随 σ_1 的增加而增加, 随 σ_2 的减少而减少.

5.逆推法

逆推法又称代入法,是指备选项逐一代入题设条件进行验证决定取舍.与题设条件相符的,肯定之;与题设条件不符或明显违反客观事实的,否定之.由于逆推法需要逐一验证四个选项,所以验证前应先观察分析,适当排序,否则将费时费力.

逆推法通常适用于备选项为具体“数值”结果形式,而且题干中明显含有合适的验证条件,并且验证计算又比较简单的题目.

【例 14】【92 年数二】若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数是 ().

- (A) $1 + \sin x$ (B) $1 - \sin x$ (C) $1 + \cos x$ (D) $1 - \cos x$

【例 15】【95 年数一】设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix}$,

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则必有 ().

- (A) $AP_1P_2 = B$ (B) $AP_2P_1 = B$ (C) $P_1P_2A = B$ (D) $P_2P_1A = B$

(二) 填空题解题技巧

填空题大部分是计算题,但填空题不像一般计算题,它只看结果,不过程。所以,若做计算题的准确率不高,填空题很容易失分。虽然填空题是计算题,但是它和大题里面的计算题不一样,它的侧重点是很基本的计算,所以它涉及到的方法都是很基础的,大部分都是平时训练过的一些基本方法,特别是利用基本性质进行化简。有部分选择题还会涉及到一些技巧性的方法,如果掌握好了这些方法,可以让考生节约很多时间以便做后面的计算题。下面介绍考研中经常用到的几个技巧。

1. 利用几何意义

【例 16】【00 年数一】 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 17】【12 年数一】 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 18】【91 年数一】若随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P(2 < X < 4) = 0.3$, 则 $P(X < 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 19】【07 年数一】在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. 利用物理意义(重心, 形心)

【例 20】【94 年数三】设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x + y + 1\}$, 则 $\iint_D (x+y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 利用对称性和奇偶性

【例 21】【07 年数一】设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x+|y|) dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 赋值法

【例 22】【89 年数一】已知 $f'(3) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 23】【12 年数一】设 X 为三维单位列向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - XX^T$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、考题预测

(一) 高等数学部分

【例 1】设 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \int_0^1 f(x^2 t) dt]^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}}$.

【解析】令 $x^2 t = u$, 则 $\int_0^1 f(x^2 t) dt = \frac{\int_0^{x^2} f(u) du}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(x^2 t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x^2)}{2x} = f(0).$$

又由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 及 $f(x)$ 的连续性知 $f(0) = 0$. 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(x^2 t) dt = 0$,

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\ln(1+x)} = \infty$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\ln(1+x)} \int_0^1 f(x^2 t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x \int_0^{x^2} f(u) du}{x^2 \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(u) du}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) \cdot 2x}{4x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \int_0^1 f(x^2 t) dt]^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}} = e^{\frac{1}{2}}$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一阶可导, 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0$,

证明: (I) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$;

(II) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f''(\eta) = f'(\eta)$;

(III) 存在 $\zeta \in (a, b)$, 使得 $f''(\zeta) = f(\zeta)$.

【解析】(I) 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) > 0$, 即

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0,$$

由极限的局部保号性, $\exists x_1 \in (a, a + \delta)$, 使得 $f(x_1) > 0$, $\exists x_2 \in (b - \delta, b)$, 使得 $f(x_2) < 0$, 且 $x_1 < x_2$.

由题设, 在 $[x_1, x_2]$ 应用零点定理, 得

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b), \text{ 使得 } f(\xi) = 0.$$

(II) 由 (I) 及题设条件, 在 $[a, \xi], [\xi, b]$ 上分别应用罗尔定理, 得

$\exists \xi_1 \in (a, \xi)$, 使得 $f'(\xi_1) = 0$, $\exists x_2 \in (\xi, b)$, 使得 $f'(\xi_2) = 0$.

构造辅助函数 $F(x) = f'(x)e^{-x}$, 则 $F(\xi_1) = 0, F(\xi_2) = 0$, 由题设及罗尔定理, 得

$\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使得 $F'(\eta) = f''(\eta)e^{-\eta} - f'(\eta)e^{-\eta} = 0$, 即 $f''(\eta) = f'(\eta)$.

(III) 令 $h(x) = e^x f(x)$, 由 (I) 知函数 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少有三个零点 a, ξ, b , 于是

$h'(x) = e^x [f(x) + f'(x)]$ 在 (a, b) 上有两个零点, 因此 $f(x) + f'(x)$ 在 (a, b) 上有两个零点.

再令 $g(x) = e^{-x} [f(x) + f'(x)]$, 则 $g(x)$ 在 (a, b) 上有两个零点, 故存在 $\zeta \in (a, b)$, 使得

$g'(\zeta) = e^{-\zeta} [f''(\zeta) - f(\zeta)] = 0$, 即 $f''(\zeta) = f(\zeta)$.

【例 3】 求二重积分: $I = \iint_D (x^2 + xy)^2 dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

【解析】

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D (x^2 + xy)^2 dx dy \\
 &= \iint_D (x^4 + 2x^3y + x^2y^2) dx dy \\
 &= \iint_D (x^4 + x^2y^2) dx dy \quad (\text{对称区域, 偶倍奇零}) \\
 &= 2 \iint_{D_1} x^2(x^2 + y^2) dx dy \quad (D_1 \text{ 是 } D \text{ 的上半部分, 即上半个圆}) \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^5 \cos^2 \theta dr \\
 &= \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \theta d\theta = \frac{64}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{12}.
 \end{aligned}$$

【例 4】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的收敛域及和函数, 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

【解析】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n} \right| = |x|,$$

当 $|x| < 1$, 即 $-1 < x < 1$ 时, 幂级数收敛, 且为绝对收敛, 而当 $x = \pm 1$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 1^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-1)^n$ 均发散, 故幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x S_1(x).$$

逐项积分,得

$$\int_0^x S_1(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = xS_2(x),$$

逐项积分,得

$$\int_0^x S_2(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \text{ (此处才得到 } q \text{ 级数)}$$

$$\text{即有 } \int_0^x S_2(t)dt = \frac{x}{1-x},$$

$$\left(\int_0^x S_2(t)dt \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)',$$

$$\text{得, } S_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\text{于是 } \int_0^x S_1(t)dt = xS_2(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

$$\text{于是 } \left(\int_0^x S_1(t)dt \right)' = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]', \quad S_1(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

$$\text{于是 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = xS_1(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

$$\text{而当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 6.$$

【例 5】 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^3 + z^2) dydz + (y^3 + x^2) dzdx + (z^3 + y^2) dxdy$, 其中 Σ 为上半球面

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 取上侧.

【解析】 记 Σ_1 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ z = 0 \end{cases}$, 取下侧, 这样 $\Sigma + \Sigma_1$ 构成空间封闭区域 Ω 的外表面, 记 Σ_1 在 xoy 面

上的投影区域为 D_{xy} . 根据积分性质和高斯公式, 得

$$I = \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} (x^3 + z^2) dydz + (y^3 + x^2) dzdx + (z^3 + y^2) dxdy - \iint_{\Sigma_1} (x^3 + z^2) dydz + (y^3 + x^2) dzdx + (z^3 + y^2) dxdy$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz - (-1) \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy \\
&= \frac{6}{5} \pi R^5 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{6}{5} \pi R^5 + \frac{1}{4} \pi R^4
\end{aligned}$$

(二) 线性代数部分

【例 6】设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, β 是 4 维向量, 若 $Ax=\beta$ 的通解是 $(1, 2, 3, 4)^T + k(0, 2, 1, 1)^T$, 其中 k 为任意常数, $B=(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \beta - \alpha_1)$.

(I) 证明 $r(B)=2$;

(II) 求方程组 $Bx=\alpha_2+\alpha_3$ 的通解.

【解析】(I) 由于 $Ax=\beta$ 的通解是 $(1, 2, 3, 4)^T + k(0, 2, 1, 1)^T$, 所以

$$A(1, 2, 3, 4)^T = \beta, A(0, 2, 1, 1)^T = 0, r(A) = 4 - 1 = 3,$$

即

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = \beta, 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \quad \textcircled{1}$$

所以 $B=(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \beta - \alpha_1) = (\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4) \rightarrow (\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, 0)$, 由于进行初等变换不改变矩阵的秩, 所以 $r(B) = r(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, 0) = r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

根据①式可知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 所以 $r(B) = r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \leq 2$. 又由于 $r(A) = 3$, 所以

$$r(B) = r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2.$$

(II) 由于 $r(B) = 2$, 所以 $Bx=0$ 中含有 $n - r(B) = 4 - 2 = 2$ 个线性无关的解向量.

根据①式中 $2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, 可得 $(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \beta - \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

根据①式中 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = \beta$, 即 $2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 - (\beta - \alpha_1) = 0$, 可得

$$(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \beta - \alpha_1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

令 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 则 $B\xi_1 = 0, B\xi_2 = 0$, 且 ξ_1, ξ_2 线性无关, 所以可以作为 $Bx = 0$ 的基础解系.

由于 $(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \beta - \alpha_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_2 + \alpha_3$, 令 $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $B\eta = \alpha_2 + \alpha_3$, 所以 η 可作为 $Bx = \alpha_2 + \alpha_3$ 的

特解.

根据非齐次线性方程组解的结构知, $Bx = \alpha_2 + \alpha_3$ 的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$, 其中

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

【例 7】 已知矩阵 A 和 B 相似, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. 求 a, b, c 的值.

【解析】

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & 1 \\ -1 & \lambda - 5 & -1 \\ -4 & -12 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -a & 1 \\ 0 & \lambda - 5 & -1 \\ 2 - \lambda & -12 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -a & 1 \\ 0 & \lambda - 5 & -1 \\ 0 & -12 - a & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -1 \\ -12 - a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 13 - a) \end{aligned}$$

由于 A 和 B 相似, 所以具有相同的特征值. B 为对角矩阵, 特征值为: b, b, c , 故 A 的特征值也为: b, b, c , 有一个二重根 b .

当 $b = 2$ 时, $4 - 20 + 13 - a = 0 \Rightarrow a = -3$. 且 $2b + c = 1 + 5 + 6 \Rightarrow c = 8$.

此时, A 的特征值为: $2, 2, 8$.

由于 $r(2E - A) = r \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -4 & -12 & -4 \end{pmatrix} = 1 = n - k_i = 3 - 2$, 所以 A 可以相似对角化, 即 A 与 B 相似.

当 $c = 2$ 时, $\lambda^2 - 10\lambda + 13 - a$ 为平方和的形式, $13 - a = 25 \Rightarrow a = -12$, 且 $b = 5$.

此时, A 的特征值为: $5, 5, 2$.

由于 $r(5E - A) = r \begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -12 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq n - k_i = 3 - 2$, 所以 A 不可以相似对角化, 即 A 不能与对角阵

相似, 应排除.

因此, $a = -3, b = 2, c = 8$.

(三) 概率部分

【例 8】设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = Ae^{-2(x^2 - \sqrt{3}xy + y^2)}$, $x, y \in R$.

(I) 求常数 A 和 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$;

(II) 求 $f_{Y|X}(y|x)$;

(III) 求概率 $P\{Y < \sqrt{3}|X = 2\}$.

【解析】 $f(x, y) = Ae^{-2(x^2 - \sqrt{3}xy + y^2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} Ae^{\frac{-1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{1}{2}} e^{-\frac{(y - \frac{\sqrt{3}x}{2})^2}{2 \cdot (\frac{1}{2})^2}}$

(I) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} Ae^{\frac{-1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{1}{2}} e^{-\frac{(y - \frac{\sqrt{3}x}{2})^2}{2 \cdot (\frac{1}{2})^2}} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} Ae^{\frac{-1}{2}x^2}$

利用概率密度的性质得到

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} A \sqrt{2\pi} = \pi A,$$

所以 $A = \frac{1}{\pi}$.

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \frac{1}{\pi} e^{\frac{-1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}x^2}, \quad x \in R.$$

(II) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2(x^2 - \sqrt{3}xy + y^2)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\left(y - \frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2}} e^{-\frac{\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}}, y \in R$$

(III) 在 $X = 2$ 的条件下, $Y \sim N\left(\sqrt{3}, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$, 则

$$P\{Y < \sqrt{3} | X = 2\} = \frac{1}{2}$$

【例 9】 设随机变量 X, Y 相互独立, 它们的分布函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x. \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1+y}{2}, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & 1 \leq y. \end{cases}$$

求函数 $Z = e^{X+Y}$ 的分布函数.

【解析】 由 X 的分布函数 $F_X(x)$ 可知, X 是离散型随机变量.

X 的概率分布为

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

设 $Z = e^{X+Y}$ 的分布函数为 $F_Z(z)$, 则

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{e^{X+Y} \leq z\}.$$

若 $z \leq 0$ 时, 则 $F_Z(z) = P(\emptyset) = 0$;

若 $z > 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X+Y \leq \ln z\} \\ &= P\{X=0\}P\{X+Y \leq \ln z | X=0\} + P\{X=1\}P\{X+Y \leq \ln z | X=1\} \\ &= \frac{1}{4}P\{Y \leq \ln z\} + \frac{3}{4}P\{Y \leq \ln z - 1\} \\ &= \frac{1}{4}F_Y(\ln z) + \frac{3}{4}F_Y(\ln z - 1). \end{aligned}$$

当 $0 < z < 1$ 时, $\ln z < 0$, 则 $F_Z(z) = 0$;

当 $1 \leq z < e$ 时, $0 \leq \ln z < 1$, $\ln z - 1 < 0$, 则

$$F_Z(z) = \frac{1}{4} \times \frac{1 + \ln z}{2} + \frac{3}{4} \times 0 = \frac{1}{8}(1 + \ln z);$$

当 $e \leq z < e^2$ 时, $1 \leq \ln z < 2$, $0 \leq \ln z - 1 < 1$, 则

$$F_Z(z) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times \frac{1 + \ln z - 1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \ln z;$$

当 $z \geq e^2$ 时, $\ln z \geq 2$, $\ln z - 1 \geq 1$, 则

$$F_Z(z) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times 1 = 1.$$

综上所述, Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ \frac{1}{8}(1 + \ln z), & 1 \leq z < e, \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \ln z, & e \leq z < e^2, \\ 1, & e^2 \leq z. \end{cases}$$