数量关系

- 第一章 解题方法
  - 第一节 代入排除法
    - 适用条件：选项信息充分，正面入手困难
    - 常用题型：多位数问题、不定方程问题、年龄问题等
    - 基础知识：
      - 将四个选项的最或小代回题干信息，与题干相矛盾的予以排除，与题干相符则为答案
      - 问：最大、至少、最多等，优先代入最大选项
      - 问：最小、至少、最多等，优先代入最小选项
  - 第二节 数字特性法
    - 适用条件：题干中出现分数、百分数、比例关系等
    - 常用题型：不定方程问题、余数问题、平均数问题、和差倍比问题等
    - 基础知识：
      - 整除特性
        - 能被2、5整除：末一位数字能被2、5整除
        - 能被4、25整除：末二位数字能被4、25整除
        - 能被8、125整除：末三位数字能被8、125整除
        - 能被3、9整除：各个数位数字和被3、9整除
        - 加减法：“奇改偶不改”
        - 例法：“同奇则奇，一偶则偶”
        - 和差共性：若两数之和为奇（偶）数，则两数之差为奇（偶）数
        - 倍数与位差三整数的和为偶数
        - 如果a：b=m：n（互质m、n互质）则和a是m的倍数，b是n的倍数，a+b是m+n的倍数
      - 奇偶特性
      - 倍数特性
  - 第三节 枚举法
    - 适用条件：
      - 选项数量较少或情况较简单
      - 选项数量较大
    - 常用题型：周期问题，余数类问题等
    - 基础知识：
      - 情况明确少时：将满足题目条件的情况逐项一定的分类有条理的进一列举出来
      - 情况明显多时：通过将满足条件的情况部分枚举，归纳出题目规律的总解
  - 第四节 方程法
    - 适用条件：题干条件中存在等量关系
    - 定方程
      - 特征：未知数个数等于方程个数
      - 常用题型：行程问题、经济利润问题、牛吃草问题等
      - 基础知识
        - 寻找等量关系
          - 不变量：总人数、总棵数等
          - 关键字：
            - 比：A “比” B多或少　加减法
            - 倍：A “倍” B的几倍或几分之几　乘除法
        - 设未知数
          - 设所求问题
          - 设中间变量
          - 设比例份数（存在分数、百分数、比例关系等）
          - 设有意义的比字（和公倍数同设倍数等）
        - 解方程
          - 一元一次方程
          - 多元一次方程组
            - 代入消元法
            - 加减消元法
            - 整体消元法
    - 不定方程
      - 特征：未知数个数大于方程个数，且未知数受到某些限制（如整数或正整数等）
      - 常用题型：行程问题、经济利润问题、几何问题、溶液问题等
      - 基础知识
        - 不定方程
          - 代入排除法
          - 奇偶特性法（尾数法、奇偶特性、倍数特性）
        - 不定方程组
          - 利用消元法转化为不定方程
          - 赋“0”法
  - 第五节 最值法
    - 适用条件：
      - 三个量存在比例形式（如A:B=C:或A+B=C:或A+B=C）
      - 只给定其中一个量或未给定任何一个量
    - 常用题型：工程问题、行程问题、经济利润问题、几何问题、溶液问题等
    - 基础知识：
      - 优先赋值不变量、工作总量、溶质等
      - 赋值公倍数，转为整数形式简化计算
      - 赋值为1、10、100等便于计算的数
- 第二章 工程问题
  - 基础公式：工作总量=工作效率×工作时间
  - 常见考点
    - 检查时间型
      - 题型识别：只给出各个主体的工作时间
      - 解题要点：赋值工作总量为各个主体工作时间的公倍数
    - 效率制约型
      - 题型识别：给出各个主体的工作效率的比例关系
      - 解题要点：赋值各个主体间效率比例关系，一般赋值为整数
    - 条件组合型
      - 题型识别：给出工作总量、工作效率与工作时间中至少两个量的具体信或大小关系
      - 解题要点：设未知数列解题基础公式，列方程求解
- 第三章 经济利润问题
  - 基本公式类
    - 基础公式
      - 利润=售价－进价
      - 利润率=利润÷进价×（售价－进价）÷进价×售价－进价－1
      - 售价=进价×（1+利润率）
      - 进价=售价÷（1+利润率）
      - 折扣=现价÷原价
      - 总利润=单个利润×数量
    - 题型识别：题干给定售价、进价、利润、利润率、折扣等具体数据
    - 解题要点：可采用赋值法或方程法，根据基础公式列式求解
  - 分段计费类
    - 题型识别：题干中给定一个范围，范围内与超出范围计费标准不一致
    - 解题要点
      - 主要涉及水电、资费、提成等
      - 根据题干条件确定分段节点的分段问题进行讨论
      - 可采用表格形式合法分析
- 第四章 行程问题
  - 基础公式
    - 路程一定，速度与时间成反比
    - 时间一定，路程与速度成正比
    - 速度一定，路程与时间成正比
  - 常见考点
    - 基本行程问题
      - 火车过桥模型：总路程=桥长+车身长；速度×时间
      - 平均速度
        - 平均速度 $\bar{v}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$
        - 等距离平均速度问题
      - 流水行船模型
        - 顺流行程：顺流路程=（船速+水速）×顺流时间
        - 逆流行程：逆流路程=（船速-水速）×逆流时间
        - 船速=（顺水速度+逆水速度）÷2
        - 水速=（顺水速度-逆水速度）÷2
    - 相遇追及问题
      - 线形
        - 一次相遇或追及
          - 相遇路程=路程和÷速度和=时间　相向而行
          - 追及路程=路程差÷速度和=时间　同向而行
        - 多次相遇
          - 等差过发　路程和=2N×两第一速度和×时间
          - 两端过发　路程和=（2N-1）×两第一速度和×时间
      - 环形
        - 一次相遇或追及
          - 相遇（背离）问题
            - 同点出发　相遇1次，路程和=1圈
            - 不同点出发　相遇1次，路程和=初始距离
          - 追及问题
            - 同点出发　追上1次，路程差=1圈
            - 不同点出发　追上1次，路程差=初始距离
        - 多次相遇或追及
          - 相遇（背离）问题
            - 同点出发　相遇N次，路程和=N圈
            - 不同点出发　相遇N次，路程和=（N-1）圈+初始距离
          - 追及问题
            - 同点出发　追上N次，路程差=N圈
            - 不同点出发　追上N次，路程差=（N-1）圈+初始距离
- 第五章 容斥问题
  - 两集合容斥问题
    - 题型识别：两个条件集合，且两个集合之间存在重叠部分
    - 解题要点
      - 解题方法
        - 公式法：基础公式　A+B-A∩B=A∪B=总数-都不满足的情况数
        - 交氏图法
      - 注意区分：满足A条件的情况与“只”、“仅”满足A条件的情况
  - 三集合容斥问题
    - 题型识别：三个条件集合，且三个集合之间存在重叠部分
    - 解题要点
      - 解题方法
        - 公式法
          - 基础公式　A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C=A∪B∪C=总数-都不满足的情况数
          - 变形公式
            - A+B+C=只满足两个条件+2×A∩B∪C=总数-都不满足的情况数
            - A+B+C=满足一个条件+满足两个条件+2×满足三个条件+3
        - 交氏图法　由内向外依次标数
      - 注意区分：满足A、B两个条件与“只”、“仅”满足A、B两个条件
- 第六章 排列组合问题
  - 基本原理
    - 排列　从n个不同元素中，任取m个进行排序，与顺序有关，记为 A_n^m　$A_n^m=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$（共m个）
    - 组合　从n个不同元素中任取m个，与顺序无关，记为 C_n^m　$C_n^m=C_n^{n-m}=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)}{m\times(m-1)\times\cdots\times1}$
    - 分类（加法）原理　完成一件事，可以用两种不同方法来完成，各种情况相互独立完成任务，每种方法都可以单独完成，彼此间互不干扰
    - 分步（乘法）原理　完成一件事，需要分步骤才能完成，每个步骤的任务之间没有交叉，各种每个步骤只要分别单独做，彼此间互不干扰
  - 特殊方法与技巧
    - 捆绑法
      - 题型识别：题干中出现元素之间“相邻”、“相连”、“在一起”等关键词
      - 解题要点
        - 先将必须相邻的元素捆绑看做一个整体后与其他元素进行排列
        - 再考虑捆绑元素内部存在的排列
    - 插空法
      - 题型识别：题干中出现元素之间“不相邻”、“不相连”、“间隔”等关键词
      - 解题要点
        - 先将没有特殊要求的元素进行排列
        - 再将不相邻的元素插入其他元素的间隔之中
        - 需要注意两端的位置也属于间隔
    - 插（隔）板法
      - 题型识别：将n个相同的元素分为m组，每组至少1个
      - 解题要点
        - n个元素形成（n-1）个可用于插入隔板的间隙
        - 从中选取（m-1）个间隔插入隔板即可将其分为m份
        - 隔板法公式：C_{n-1}^{m-1}
      - 题型拓展
        - 将n个相同的元素分为m组，每组至少k个
        - 先从总数n中给每组分去（k-1）个后再使用隔板法
    - 错位排列
      - 题型识别：题干要求某些n个元素移动后均不在各自原来的位置
      - 解题要点
        - n个元素错位排列的情况数　$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$
        - 考试中要会推算的情况：D1=0，D2=1，D3=2，D4=9，D5=44……
    - 平分分组
      - 题型识别：将不同的n个元素均分为m个元素相同有序的组，每组人数相同
      - 解题要点
        - 先保有区别的组进行各组人数排列
        - 把为无区别的组进行各组人数排列　A_m^m
    - 环形排列
      - 题型识别：将n个元素进行环形排列，没有首尾，相邻之分
      - 解题要点
        - 将n个元素的环形排列转换为n-1个元素的直线排列
        - 环形排列公式　A_{n-1}^{n-1}
- 第七章 几何问题
  - 平面几何
    - 角
      - （n-2）×180°　内角和
      - 每增加一个　外角和
    - 周长
      - 4a　正方形
      - 2（a+b）　长方形
      - 2πR　圆形
    - 面积
      - a²　正方形
      - ab　长方形
      - πR²　圆形
      - $\frac{1}{2}ah$　三角形
      - $\frac{n^\circ}{360}\pi R^2$　扇形
      - $\frac{1}{2}(a+b)h$　梯形
  - 立体几何
    - 表面积
      - 6a²　正方体
      - 2（ab+ac+bc）　长方体
      - 4πR²=πD²　球体
      - 2πRl+2πR²　圆柱体
    - 体积
      - a³　正方体
      - abc　长方体
      - $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3$　球体
      - πR²h　圆柱体
      - $\frac{1}{3}\pi R^2h$　圆锥体
  - 割补平移
    - 对于不规则图形，可通过割、补、平移等方式，将其转换为规则图形后再套用公式计算。
- 第八章 数图问题
  - 几何特性
    - 三角形
      - 任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边
      - 中线分成的两个三角形面积相等
    - 直角三角形
      - 勾股定理：$a^2+b^2=c^2$
      - 斜边的中线为斜边的一半
    - 等比例图形
      - 一个图形变为原来的n倍
        - 每个变
        - 周长和边长变为原来的n倍
        - 面积变为原来的n²倍
        - 体积变为原来的n³倍
    - 最值理论
      - 周长相等的平面图形中，圆的面积最大，越接近于圆面积最大
      - 表面积相等的立体图形中，球的体积最大，越接近于球体积最大
    - 面积公式
      - n个直线最多能将一个平面分为 $\frac{n(n+1)}{2}+1$
- 第九章 最值问题
  - 最不利问题
    - 题型识别：题干中出现“至少（最少）……保证……”类的描述
    - 解题要点
      - 不利值+保证-1
      - 所有不利情况+1
  - 构造数列问题
    - 题型识别
      - 将人数或物品按照一定原则进行分组
      - 问题中出现“最多（少），至少（多）”“排名第……最多（少）……”等描述
    - 解题要点
      - 明确所求的位置与其最大值或最小值，设未知数
      - 按照题干已知条件对于各组人数或物品数进行构造
      - 设最先组数最之和=总数列式求解
  - 多集合反向构造
    - 题型识别：题干中出现多个并列的条件，问题为“至少……都满足各个条件”
    - 解题要点
      - 先分别计算不满足各个条件的数量
      - 加和求得不都满足各个条件的总数
      - 总数-不都满足的总数=都满足的最小值
- 第十章 趣味杂题
  - 植树问题
    - 线性植树
      - 棵数＋总长=间隔＋1，总长＝（棵数－1）×间隔
    - 环形植树
      - 棵数＝总长÷间隔，总长＝棵数×间隔。
  - 鸡兔同笼问题
    - 总人数= $N^2=$（最外层人数+4+1）²
    - 最外层人数4N-4
    - 相邻两层相差8
  - 牛吃草问题
    - 草原原有草量＝（牛数－每天长草量）×天数，字母表示为y=（N-X）×T。
    - 牛吃草问题模型可以套用到题型中的变化相同，题眼是水、管口数量等各种形式。
  - 比赛问题
    - 单循环
      - n个队伍单循环场次为 C_n^2
      - 单循环
    - 淘汰赛
      - n个队伍淘汰赛场次为 A_n^2
      - 双循环（分正反场）
      - 每场比赛淘汰一人（一队），
    - 空瓶换酒问题
      - 把M个空瓶可以换N瓶酒，P个空瓶最多可以换 $\frac{PN}{M-N}$
- 第十一章 基础计算题
  - 简单计算
    - 基础公式
      - a²-b²=（a+b）（a-b）　平方差公式
      - （a±b）²=a²+b²±2ab　完全平方公式
  - 数列问题
    - 等差数列
      - 通项公式　$a_n=a_1+(n-1)d$
      - 前n项和公式　$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n$　=平均数×n=中位数×n
    - 等比数列
      - 通项公式　$a_n=a_1\times q^{n-1}(a_1\neq0,q\neq1)$
      - 前n项和公式　$S_n=a_1\times\frac{1-q^n}{1-q}(q\neq1)$
- 第十二章 解题方法补充
  - 十字交叉法
    - 适用条件
      - 两种或两以上的部分混合为一个整体
      - 混合平均量是目
      - $Aa+Bb=(A+B)r\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{r-b}{a-r}$
    - 常用题型
      - 溶液问题、平均数问题、鸡兔同笼问题等
    - 基础知识
      - A：a　r-b
      - B：b　a-r
      - $\frac{r-b}{a-r}=\frac{A}{B}$
  - 比例特性法
    - 适用条件
      - 题干中存在分数、百分数、比例关系等
      - 基础公式为比例形式
    - 常用题型
      - 工程问题、行程问题等
    - 基础知识
      - 两者间存在比例关系，他们的差或和对应一个数值，该处求得其他量
  - 数形结合法
    - 常用题型
      - 经济利润问题、行程问题、图形问题、几何问题等
    - 基础知识
      - 行程问题的运动过程，常常通过线段图示法来分析；
      - 图形类题，将文字题来分析合非常清晰；
      - 几何问题，通常可以画出图示，或者添加辅助线等；
      - 某些特殊题型，如有些趣味题可以借助图形方便理解分析。
  - 调和平均法
    - 适用条件
      - 满足A=a1+b1，A=a2+b2，两者有相同的情况或差A
    - 常用题型
      - 行程问题、溶液问题等
    - 基础知识
      - 等距离平均速度：$\bar{v}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$
      - 等价格平均价格：$\bar{p}=\frac{2p_1\cdot p_2}{p_1+p_2}$
      - 等发车间隔时间：$T=\frac{2t_1\cdot t_2}{t_1+t_2}$
      - 等密度情况密度：$r_2=\frac{2r_1\cdot r_2}{r_1+r_2}$
  - 鸡兔同笼法
    - 适用条件
      - 当题目条件和实际不相等时，就可以考虑使用鸡兔同笼法。
    - 基础知识
      - 题少实际多（差多-实际）÷鸡数差

XMind:ZEN 试用模式