2020 年
全国教师资格证考试
考前 30 分内部资料

【初高中 数学学科】

重要考点

目 录

第一模块 高中基础知识

1.函数的单调性：

（1）确定单调区间的方法：（1）定义法；（2）导数法；（3）图象法。

（2）复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在公共定义域上的单调性：同增异减。

2.函数的奇偶性：（1）偶函数：$f(-x)=f(x)$，图象关于 y 轴对称；（2）奇函数：$f(-x)=-f(x)$，图象关于原点对称。

3.周期性：$f(x+T)=f(x)$，T 叫作这个函数的一个周期。

4.对称性：$f(x+a)=f(a-x)\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称。

5.函数图形的凹凸性

①凸弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$；②凹弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

6.合情推理：合情推理包括归纳推理和类比推理。

7.演绎推理："三段论"是演绎推理的一般形式，包括：大前提—已知的一般原理；小前提—所研究的特殊情况；结论—根据一般原理，对特殊情况做出的判断。

8.直接证明：常见的直接证明方法有综合法和分析法。

9.间接证明：常见的间接证明有：反证法。

第二模块 大学基础知识

一、极限与连续

1.直接代入法

代入法就是直接将要趋近的值代入函数表达式中，这种方法的前提条件是这个值能使函数有意义。

2.约公因子法

所趋近的值使得函数没有意义，因此需要进行约公因子，约公因子通常运用因式分解的方法。

3.最高次幂法

当函数是分式形式，且分子、分母都是多项式时，可以运用这种方法。主要是比较分子

与分母次数的高低：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当 n=m\\ 0, & 当 n>m\\ \infty, & 当 n<m\end{cases}$。

4.两个重要极限公式

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{v\to0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}$。

5.常用等价无穷小

当 $x\to0$ 时的常用的等价无穷小量有：$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$(1+x)^2-1\sim2x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$a^x-1\sim x\ln a$。

6.洛必达法则

（1）法则 1（$\dfrac{0}{0}$ 型）：设① $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$；② x 变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在；③ $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞），则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$（或 ∞）。

（2）法则 2（$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型）：设① $\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$；② x 变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在；③ $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞），则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$（或 ∞）。

7.函数在一点的连续：$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处既是左连续，又是右连续。

二、导数与积分

1.求导法则：$(C)'=0$；$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$，特别：$(x)'=1$，$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$；$(a^x)'=a^x\ln a$，特别：$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，特别：$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；$(\sin x)'=\cos x$；$(\cos x)'=-\sin x$；$(\tan x)'=\sec^2 x$；$(\cot x)'=-\csc^2 x$；$(\sec x)'=\tan x\sec x$；$(\csc x)'=-\cot x\csc x$；$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$。

2.罗尔定理（Rolle 定理）：若函数 $f(x)$ 满足：（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）在开

区间(a, b)内可导；(3) $f(a)=f(b)$，则在(a, b)内至少有一点$\xi\in(a, b)$，使得$f'(\xi)=0$。

3.拉格朗日中值定理（Lagrange 中值定理）：设函数$f(x)$满足：（1）在闭区间$[a, b]$上连续；（2）在开区间(a, b)内可导，则在(a, b)内至少有一点，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

4.柯西中值定理：设函数$f(x)$和$g(x)$满足：（1）在闭区间$[a, b]$上连续，（2）在开区间(a, b)内可导，（3）对任一$\xi\in(a, b)$，$g'(x)\neq 0$，则在开区间(a, b)内至少存在一点，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

5.导数的应用

（1）切线方程：$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线方程为$y-f(x_0)=f'x_0(x-x_0)$。

（2）法线方程：$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的法线方程$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

（3）求函数单调性：（1）$f'(x)>0$，单调递增；（2）$f'(x)<0$，单调递减。

（4）可导函数的极值的基本步骤

①确定函数$f(x)$的定义域；②求导数$f'(x)$；③求方程$f'(x)=0$的全部实根，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，顺次将定义域分成若干个小区间，并列表：x变化时，$f'(x)$和$f(x)$值的变化情况。④结合$f'(x)$的符号判断极值点以及极值。

（5）求函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值和最小值的步骤：①求$f(x)$在区间(a, b)上的极值；②将第一步中求得的极值与$f(a)$，$f(b)$比较，得到$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值与最小值。

6.积分公式：

（1）$\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k为常数）

（2）$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$（$\mu\neq -1$）

（3）$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

（4）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

（5）$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

（6）$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

（7）$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

（8）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$

（9）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$

（10）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

（11）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$　　（12）$\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

（13）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

7.积分方法

（1）第一类换元积分法（凑微分法）

定理 1：设 $F(u)$ 为 $f(u)$ 的原函数，$u=\varphi(x)$ 可微，则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = [\int f(u)\mathrm{d}u]_{u=\varphi(x)}$（第一类换元积分公式）。

（2）第二类换元积分法

定理 2：设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数，且在区间内部有 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x = [\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t]_{t=\psi^{-1}(x)}$。其中 $\psi^{-1}(x)$ 为 $x=\psi(t)$ 的反函数。上式称为第二类换元积分公式。

（3）分部积分法：假定 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 均具有连续的导函数，则 $\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x$，$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$。称为分部积分公式。

8.牛顿-莱布尼茨公式：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，那么 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$。

三、多元函数微分

1.空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi_1(t) \\ y=\varphi_2(t) \\ z=\varphi_3(t) \end{cases}$，$t\in[\alpha,\ \beta]$，设三个函数都在 $t\in[\alpha,\ \beta]$ 上可导，且三个导数不同时为零，与点 M 对应的参数为 t_0，则曲线 Γ 在点 M 处的切线方程为

$\frac{x-x_0}{\varphi_1'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\varphi_2'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\varphi_3'(t_0)}$；法平面的方程为 $\varphi_1'(t_0)(x-x_0)+\varphi_2'(t_0)(y-y_0)+\varphi_3'(t_0)(z-z_0)=0$。

2.空间曲面的切平面与法线

设曲面方程为 $F(x,\ y,\ z)=0$，点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为该曲面上的一点，则向量 $\boldsymbol{n}=\left(F_x(x_0,\ y_0,\ z_0),\ F_y(x_0,\ y_0,\ z_0),\ F_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\right)$ 就是曲面在点 M 处的一个法向量，则曲

面方程 $F(x, y, z)=0$ 在某一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程是

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0 ;$$

通过 M 点且垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线，法线方程是

$$\frac{(x-x_0)}{F_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}。$$

四、线性代数

1.对角线法（只适用于二阶、三阶行列式求解）

（1）二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

（2）三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

即：二阶和三阶行列式的值等于主对角线元素的乘积减去副对角线元素的乘积。

2.化三角法：将行列式转化为上三角形或者下三角形行列式，这样所得行列式的值等于主对角线元素的乘积。

3.代数余子式法：将行列式按某一行（或列）展开，达到降阶的目的。

4.求逆矩阵：若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

5.常见的三种矩阵方程：（1）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$；（2）$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$；（3）$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$。

6.齐次线性方程组的解有两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解。

7. n 元非齐次线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ 的秩。（1）当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时，方程组没有自由未知量，只有唯一解。（2）当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时，方程组有 $n-r$ 个自由未知量，有无穷多个解。

五、二次型矩阵正负定性的判定

1.正定的：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左上角各阶子式（称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式）恒大于零。

即 $a_{11}>0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$

2.负定的：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左上角各阶子式（称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式）负正相间。

即 $a_{11}<0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots$，$(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$

六、空间线面及其方程

1.几种特殊的二次曲面：①椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；②椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$；③双曲抛物面（鞍形曲面）：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$；④单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；⑤双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。

2.空间曲线方程：①一般方程：$\begin{cases} F(x,\ y,\ z)=0 \\ G(x,\ y,\ z)=0 \end{cases}$；②参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，$t$ 为参数。

3.空间平面及其方程：①点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$；②一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$。

4.空间直线及其方程：①点向式方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$；②参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$，$t$ 为参数；③一般式方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$。

第三模块 数学教学知识

1.数学学科核心素养包括：**数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析**。这些数学学科核心素养既相对独立、又相互交融，是一个有机的整体。

2.四基：基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验；四能：发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。

3.评价的原则：①重视学生数学学科核心素养的达成；②重视评价的整体性与阶段性；

③重视过程评价；④关注学生的学习态度。

4.中学数学教学过程要处理好以下几种关系：①间接经验和直接经验的关系；②数学知识技能的掌握与能力发展的关系；③数学知识技能的掌握和数学观形成的关系；④数学认知活动与非认知因素的关系；⑤教师主导作用与学生主体性的关系。

5.中小学数学教学的一些基本原则：①抽象与具体相结合的原则；②严谨性与量力性相结合的原则；③培养“双基”与策略创新相结合的原则；④精讲多练与自主建构相结合的原则。

6.常用的教学方法：①讲授法；②谈话法；③讲练结合法；④自学辅导法；⑤发现法；⑥小组教学法；⑦探究性数学教学；⑧情境教学法。

7.学习概念主要有**概念形成**与**概念同化**两种基本形式。

8.概念之间的关系分为：**相容关系**和**不相容关系**。其中相容关系包括同一关系，交叉关系，从属关系，不相容关系包括矛盾关系和对立关系。

9.常见数学定义的方法

（1）原始概念；（2）**属加种差定义**；**发生式定义**和**关系定义法**是比较特殊的两种定义方法；（3）外延定义法；（4）词语定义法；（5）递归定义法。

10.中学常见的数学思想主要归纳为以下几个方面内容：符号思想、集合思想、**数形结合思想**、**函数与方程思想**、**转化与化归思想**、分类与整合思想、特殊与一般思想、有限与无限思想、或然与必然思想、归纳思想、类比思想、演绎思想、模型思想等。

11.教学设计

（1）课题；（2）课时；（3）课型；（4）教材分析；（5）学情分析；（6）教学目标；（7）教学重难点；（8）教学方法；（9）课前准备；（10）教学过程：①导入；②新授；③巩固；④小结；⑤作业；（11）板书设计；（12）教学反思。