科目	中学数学(七下)
课题	6.1

6.1 平方根

问题　学校要举行美术作品比赛，小鸥想裁出一块面积为 25 dm^2 的正方形画布，画上自己的得意之作参加比赛，这块正方形画布的边长应取多少?

你一定会算出边长应取 5 dm. 说一说，你是怎样算出来的?

因为 $5^2=25$，所以这个正方形画布的边长应取 5 dm.

填表：

正方形的面积/dm^2	1	9	16	36	$\frac{4}{25}$
正方形的边长/dm					

上面的问题，实际上是已知一个正数的平方，求这个正数的问题.

一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个正数 x 叫做 a 的**算术平方根**（arithmetic square root）. a 的算术平方根记为$\sqrt{a}$，读作“根号 a”，a 叫做**被开方数**（radicand).

规定：**0 的算术平方根是 0.**

例 1　求下列各数的算术平方根：

(1) 100；　　(2) $\frac{49}{64}$；　　(3) 0.000 1.

解：(1) 因为 $10^2=100$，所以 100 的算术平方根是 10，即$\sqrt{100}=10$；

(2) 因为$\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$，所以$\frac{49}{64}$的算术平方根是$\frac{7}{8}$，即$\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$；

(3) 因为 $0.01^2=0.000\,1$，所以 0.000 1 的算术平方根是 0.01，即$\sqrt{0.000\,1}=0.01$.

从例 1 可以看出：被开方数越大，对应的算术平方根也越大. 这个结论对所有正数都成立.

练习

1. 求下列各数的算术平方根：

(1) 0.002 5；　　(2) 81；　　(3) 3^2.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1}$；　　(2) $\sqrt{\frac{9}{25}}$；　　(3) $\sqrt{2^2}$.

探究

能否用两个面积为 1 dm^2 的小正方形拼成一个面积为 2 dm^2 的大正方形？

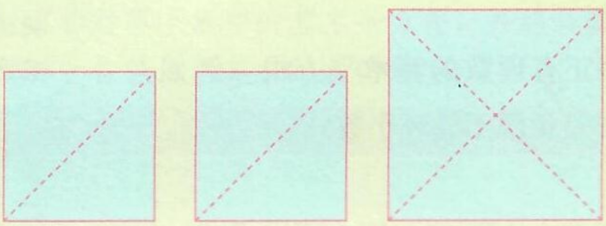


图 6.1-1

如图 6.1-1，把两个小正方形分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼在一起，就得到一个面积为 2 dm^2 的大正方形. 你知道这个大正方形的边长是多少吗？

设大正方形的边长为 x dm，则

$$x^2=2.$$

小正方形的对角线的长是多少呢？

由算术平方根的意义可知

$$x=\sqrt{2},$$

所以大正方形的边长是$\sqrt{2}$ dm.

探究

$\sqrt{2}$有多大呢？

因为 $1^2=1$，$2^2=4$，

所以 $1<\sqrt{2}<2$；

因为 $1.4^2=1.96$，$1.5^2=2.25$，

所以 $1.4<\sqrt{2}<1.5$；

因为 $1.41^2=1.988\ 1$，$1.42^2=2.016\ 4$，

所以 $1.41<\sqrt{2}<1.42$；

因为 $1.414^2=1.999\ 396$，$1.415^2=2.002\ 225$，

所以 $1.414<\sqrt{2}<1.415$；

……

如此进行下去，可以得到$\sqrt{2}$的更精确的近似值. 事实上，$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\cdots$，它是一个无限不循环小数.

实际上，许多正有理数的算术平方根（例如$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$等）都是无限不循环小数.

无限不循环小数是指小数位数无限，且小数部分不循环的小数. 你以前见过这种数吗？

大多数计算器都有 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 键，用它可以求出一个正有理数的算术平方根（或其近似值）.

例 2 用计算器求下列各式的值：

（1）$\sqrt{3\ 136}$；　　　　（2）$\sqrt{2}$（精确到 0.001）.

解：（1）依次按键 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 3136 $\boxed{=}$，

显示：56.

$\therefore\ \sqrt{3\ 136}=56$.

不同品牌的计算器，按键顺序有所不同.

（2）依次按键 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 2 $\boxed{=}$，

显示：1.414213562.

$\therefore\ \sqrt{2}\approx1.414$.

计算器上显示的 1.414 213 562 是$\sqrt{2}$的近似值.

下面我们来看引言中提出的问题：

由 $v_1^2=gR$，$v_2^2=2gR$，得 $v_1=\sqrt{gR}$，$v_2=\sqrt{2gR}$，其中 $g\approx 9.8$，$R\approx 6.4\times 10^6$.

用计算器求 v_1 和 v_2（用科学记数法把结果写成 $a\times 10^n$ 的形式，其中 a 保留小数点后一位），得

$$v_1\approx\sqrt{9.8\times 6.4\times 10^6}\approx 7.9\times 10^3,$$

$$v_2\approx\sqrt{2\times 9.8\times 6.4\times 10^6}\approx 1.1\times 10^4.$$

因此，第一宇宙速度 v_1 大约是 7.9×10^3 m/s，第二宇宙速度 v_2 大约是 1.1×10^4 m/s.

探究

（1）利用计算器计算下表中的算术平方根，并将计算结果填在表中，你发现了什么规律？你能说出其中的道理吗？

…	$\sqrt{0.0625}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6250}$	$\sqrt{62500}$	…
…								…

（2）用计算器计算 $\sqrt{3}$（精确到 0.001），并利用你在（1）中发现的规律说出 $\sqrt{0.03}$，$\sqrt{300}$，$\sqrt{30000}$ 的近似值，你能根据 $\sqrt{3}$ 的值说出 $\sqrt{30}$ 是多少吗？

在生活中，我们经常遇到估计一个数的大小的问题．请看下面的例子．

例 3 小丽想用一块面积为400 cm² 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 300 cm² 的长方形纸片，使它的长宽之比为 3∶2．她不知能否裁得出来，正在发愁．小明见了说：“别发愁，一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片．”你同意小明的说法吗？小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗？

解： 设长方形纸片的长为$3x$ cm，宽为 $2x$ cm.

根据边长与面积的关系得

$$3x\cdot 2x=300,$$
$$6x^2=300,$$
$$x^2=50,$$
$$x=\sqrt{50}.$$

$3\sqrt{50}$就是 $3\times\sqrt{50}$.

因此长方形纸片的长为 $3\sqrt{50}$ cm.

因为 $50>49$，所以$\sqrt{50}>7$.

由上可知 $3\sqrt{50}>21$，即长方形纸片的长应该大于21 cm.

因为$\sqrt{400}=20$，所以正方形纸片的边长只有 20 cm. 这样，长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长.

答： 不能同意小明的说法. 小丽不能用这块正方形纸片裁出符合要求的长方形纸片.

练习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1\ 369}$；　(2) $\sqrt{101.203\ 6}$；　(3) $\sqrt{5}$（精确到 0.01).

2. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{8}$与$\sqrt{10}$；　(2) $\sqrt{65}$与 8；

(3) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$与 0.5；　(4) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$与 1.

思考

如果一个数的平方等于 9，这个数是多少？

从前面我们知道，这个数可以是 3. 除了 3 以外，还有没有别的数的平方也等于 9 呢？

由于$(-3)^2=9$，这个数也可以是-3.

因此，如果一个数的平方等于 9，那么这个数是 3 或-3.

填表：

x^2	1	16	36	49	$\frac{4}{25}$
x					

一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的**平方根**(square root) 或**二次方根**. 这就是说，如果$x^2=a$，那么 x 叫做a 的平方根.

> 几千年前，古埃及人就已经知道了平方根.

例如，3 和-3 是 9 的平方根，简记为±3 是 9 的平方根.

求一个数 a 的平方根的运算，叫做**开平方** (extraction of square root).

我们看到，±3 的平方等于 9，9 的平方根是±3，所以平方与开平方互为逆运算（图 6.1-2）. 根据这种互逆关系，可以求一个数的平方根.

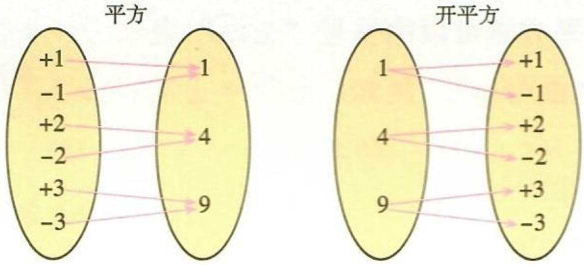


图 6.1-2

例 4 求下列各数的平方根：

(1) 100； (2) $\frac{9}{16}$； (3) 0.25.

解：(1) 因为$(\pm10)^2=100$，所以 100 的平方根是±10；

(2) 因为$\left(\pm\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，所以$\frac{9}{16}$的平方根是$\pm\frac{3}{4}$；

(3) 因为$(\pm0.5)^2=0.25$，所以 0.25 的平方根是±0.5.

思考

正数的平方根有什么特点？0 的平方根是多少？负数有平方根吗？

我们发现，正数的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根.

因为 $0^2=0$，并且任何一个不为 0 的数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根是 0.

正数的平方是正数，0 的平方是 0，负数的平方也是正数，即在我们所认识的数中，任何一个数的平方都不会是负数，所以负数没有平方根.

归纳

正数有两个平方根，它们互为相反数；
0 的平方根是 0；
负数没有平方根.

我们知道，正数 a 的算术平方根可以用 $\sqrt{a}$ 表示；正数 a 的负的平方根，可以用符号“$-\sqrt{a}$”表示，故正数 a 的平方根可以用符号“$\pm\sqrt{a}$”表示，读作“正、负根号 a”. 例如，$\pm\sqrt{9}=\pm3$，$\pm\sqrt{25}=\pm5$.

符号 $\sqrt{a}$ 只有当 $a\geqslant0$ 时有意义，$a<0$ 时无意义. 你知道为什么吗？

例 5 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{36}$；(2) $-\sqrt{0.81}$；(3) $\pm\sqrt{\dfrac{49}{9}}$.

解：(1) 因为 $6^2=36$，所以 $\sqrt{36}=6$；

(2) 因为 $0.9^2=0.81$，所以 $-\sqrt{0.81}=-0.9$；

(3) 因为 $\left(\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{49}{9}$，所以 $\pm\sqrt{\dfrac{49}{9}}=\pm\dfrac{7}{3}$.

知道一个数的算术平方根，就可以立即写出它的负的平方根. 为什么？

练习

1. 判断下列说法是否正确：
   (1) 0 的平方根是 0；
   (2) 1 的平方根是 1；
   (3) -1 的平方根是 -1；
   (4) 0.01 是 0.1 的一个平方根.

2. 填表：

x	8	-8	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$				
x^2					16		0.36	

3. 计算下列各式的值：

(1) $\sqrt{9}$；　　(2) $-\sqrt{0.49}$；　　(3) $\pm\sqrt{\frac{64}{81}}$.

4. 平方根概念的起源与几何中的正方形有关. 如果一个正方形的面积为 A，那么这个正方形的边长是多少？

习题 6.1

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根：

(1) 81；　　(2) $\frac{25}{64}$；　　(3) 0.04；　　(4) 10^2.

2. 下列各式是否有意义？为什么？

(1) $-\sqrt{3}$；　　(2) $\sqrt{-3}$；　　(3) $\sqrt{(-3)^2}$；　　(4) $\sqrt{\frac{1}{10^2}}$.

3. 求下列各数的平方根：

(1) 49；　　(2) $\frac{4}{25}$；　　(3) $\frac{1}{10^6}$；　　(4) 0.001 6.

4. 判断下列说法是否正确：

(1) 5 是 25 的算术平方根；

(2) $\frac{5}{6}$是$\frac{25}{36}$的一个平方根；

(3) $(-4)^2$ 的平方根是-4；

(4) 0 的平方根与算术平方根都是 0.

5. 用计算器计算下列各式的值（精确到 0.01）：

(1) $\sqrt{867}$；　　(2) $\sqrt{0.462\ 54}$；　　(3) $-\sqrt{\frac{8}{25}}$；　　(4) $\pm\sqrt{2\ 402}$.

6. 估计与$\sqrt{40}$最接近的两个整数是多少.

综合运用

7. 根据下表回答下列问题：

x	16	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.8	16.9	17
x^2	256	259.21	262.44	265.69	268.96	272.25	275.56	278.89	282.24	285.61	289

(1) 268.96 的平方根是多少？

(2) $\sqrt{285.6}\approx$________.

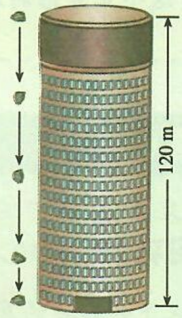
(3) $\sqrt{270}$在表中哪两个相邻的数之间？为什么？

8. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^2=25$；　　(2) $x^2-81=0$；

(3) $25x^2=36$.

9. 物体自由下落的高度 h（单位：m）与下落时间 t（单位：s)的关系是 $h=4.9t^2$. 如图，有一个物体从120 m高的建筑物上自由落下，到达地面需要多长时间（结果取整数)？



（第 9 题）

10. 一个正方形的面积扩大为原来的 4 倍，它的边长变为原来的多少倍？面积扩大为原来的 9 倍呢？n 倍呢？

拓广探索

11. (1) 求$\sqrt{2^2}$，$\sqrt{(-3)^2}$，$\sqrt{5^2}$，$\sqrt{(-6)^2}$，$\sqrt{7^2}$，$\sqrt{0^2}$的值. 对于任意数 a，$\sqrt{a^2}$等于多少？

(2) 求$(\sqrt{4})^2$，$(\sqrt{9})^2$，$(\sqrt{25})^2$，$(\sqrt{36})^2$，$(\sqrt{49})^2$，$(\sqrt{0})^2$ 的值. 对于任意非负数 a，$(\sqrt{a})^2$ 等于多少？

12. 任意找一个正数，比如 1 234，利用计算器对它开平方，再对得到的算术平方根开平方……如此进行下去，你有什么发现？