几何概率

近几年概率问题考查的越来越多，其中几何概率也随之成为一个小的热点模型。几何概率的本质非常简单，考试题目难度一般不大，如果掌握了几何概率的本质则很容易拿到这部分题目的分数。

先来看定义：如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度、面积或体积成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型。

这个定义的本质其实就是在一个几何维度中，每一个点被取到的机会都一样。相对于基础的概率公式，把可以计数的“满足条件的情况数”变成了不可计数的“满足条件的长度/面积/体积”，将等可能事件的概念从有限向无限进行了延伸，也是初中学习的内容。那么几何概率的公式就变成了 $p=\frac{\text{满足条件的长度/面积/体积}}{\text{总的长度/面积/体积}}$。

【例 1】(2019 上海 A/B）射击用的靶子是由若干个同心圆组成，最中心的圆代表 10 环，而 10 环外圈的一个圆环代表 9 环。在随机射击时，若要使得击中 10 环和 9 环的概率相同，那么 10 环外圈半径与 9 环外圈半径的比值为：

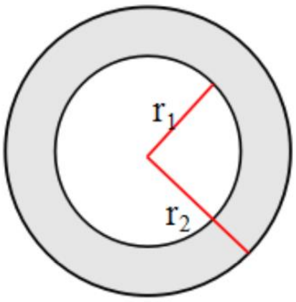
A.1　　B.$\sqrt{2}$

C.1/2　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】第一步，本题考查几何概率。

第二步，要使得击中 10 环和 9 环的概率相同，根据几何概率基本公式，则 10 环和 9 环的面积相同。如下图所示，设 10 环外圈的半径为 r_1，9 环外圈的半径为 r_2，根据面积相等有 $\pi r_1^2=\pi r_2^2-\pi r_1^2$，整理得 $r_1:r_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$。



因此，选择 D 选项。

在圆形区域内考查几何概率比较多见，需要根据圆内各个半径计算面积的比值从而计算概率。2018 年上半年多省市联考也考到了这样一道几何概率：

【例 2】（2018 联考上）小波通过往圆圈里投掷米粒（米粒本身长度不计，视为一个点）的方式决定自己的周末活动。经过试验，他将米粒投进圆圈内的成功率达到 100%，但投掷在圆内的位置随机。如果米粒到圆心的距离大于圆半径的一半，那么他周末去看电影；若米粒到圆心的距离小于半径的 1/4，他会去打篮球；否则，他将在家看书。据此可知小波周末不在家看书的概率为：

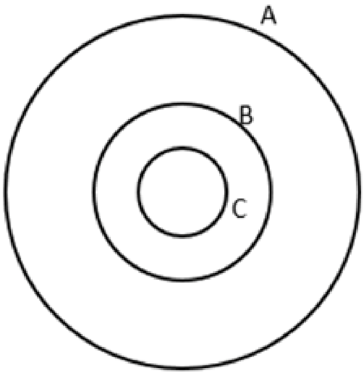
A.13/16　　B.2/5

C.3/5　　D.1/16

【答案】A

【解析】第一步，本题考查几何概率问题。

第二步，如下图所示，赋值圆圈 A 的半径为 4，则到圆心距离为圆 A 半径一半的圆 B 的半径为 2，到圆心距离为圆 A 半径的 1/4 的圆 C 半径为 1，根据面积的比等于半径之比的平方，可得圆 A、B、C 的面积之比为 16 : 4 : 1，那么留在家看书的概率为（4 - 1）÷16= $\frac{3}{16}$。



第三步，小波周末不在家看书的概率为 $1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$。

因此，选择 A 选项。

这两道题都是考查几何概率的考题中比较简单的题目。近几年也考查过一些比较难的题目，这一类题目需要考生理解模型，从而在建造几何模型的过程中胸有成竹。当然如果考场上第一次遇见，没思路也可以放弃。

【例 3】（2018 江西）将一长度为 L 的线段任意截成三段，设 P_1 为所截的三线段能构成三角形的概率，P_2 为所截的三线段不能构成三角形的概率，则下列选项正确的是：

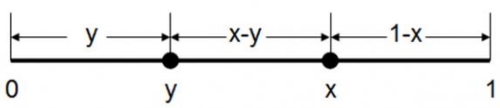
A.$P_1=P_2$　　B.$P_1>P_2$

C.$P_1<P_2$　　D.不能确定 P_1、P_2 的大小关系

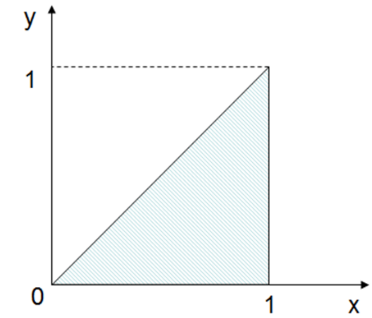
【答案】C

【解析】第一步，本题考查几何概率问题。

第二步，如图，设线段长度为 1，第一个点坐标为 y，第二个点坐标为 x，三条线段长度分别为 y、x - y、1 - x。



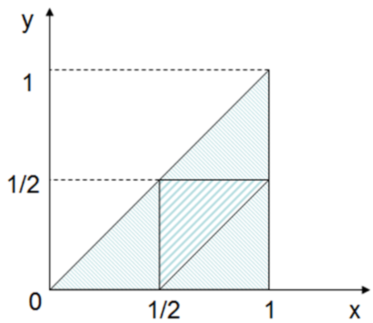
由于 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < x \end{cases}$，因此 x、y 的取值区间如图：



要让三条线段能够组成三角形，则需要两边之和大于第三边，用公式表达：

$$\begin{cases} y+(x-y)>1-x \\ (x-y)+(1-x)>y \\ y+(1-x)>x-y \end{cases}，化简得：\begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ y<\dfrac{1}{2} \\ y>x-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

用图形表示：



中间阴影部分即为可以构成三角形的 x、y 取值。

第三步，根据图形面积可知，能够构成三角形的概率 P_1 为 1/4，不能构成三角形的概率 P_2 为 3/4，则 $P_1 < P_2$。

因此，选择 C 选项。

本题难度十分大，但这道题在考场上也可以根据选项去选择：一根线段分成 3 截，两边之和与第三边的关系为：大于、等于或小于。三角形两边之和大于第

三边、两边之差小于第三边，所以能构成三角形的概率小于不能构成的概率。

这种在直角坐标系里寻找几何概率的题目在公考中并不少见。无独有偶，2019 年江苏考了一道与【例 3】几乎一模一样的题目，只是选项更不好猜测。

【例 4】将一根绳子任意分成三段,则此三段能构成一个三角形的概率是：

A.1/4　　B.1/3

C.1/2　　D.3/4

本题答案选择 A，做法跟例 3 一模一样。本题难度很大，华图在线题库后台显示本题正确率只有 18%。事实上可以根据选项相关，猜测答案为 A、D 中较小的那一个。

可以发现，几何概率如果给出了几何模型，就是简单的概率题目，必须拿分；如果需要在直角坐标系中自己构建模型，则可以根据选项猜测正确答案。在考场上不论什么方法，只要能选出正确答案，就是好方法。