行测数量关系：排列组合中的至少分配模型

“至少分配 1 个/n 个”是排列组合问题中的一种常见模型，解决这类问题的方法是隔板法。由于这种模型有固定的套路，考生应该优先掌握这种模型。

隔板法适用的特征是：有若干个相同的元素要分成若干组；最基本的问法是：将 M 个相同的元素分给 N 个对象，每个对象至少分得一个的方式有多少种？

处理这种形式，在 M 个元素形成的 M - 1 个空里，挑选 N - 1 个空各插入一个板，就可以将 M 个元素分成 N 组，且每组不少于一个；即有 C_{M-1}^{N-1} 种分法。

【例 1】(2014 河南) 将 7 个大小相同的桔子分给 4 个小朋友，要求每个小朋友至少得到 1 个桔子，一共有几种分配方法？

A. 14　　B.18

C.20　　D.22

【答案】C

【解析】要满足 7 个相同桔子分给 4 个小朋友，每人至少一个，可以将 7 个桔子摆一排，在中间的 6 个空中插 3 个板，则共有 $C_6^3 = 20$（种）。因此，选择 C 选项。

隔板法有很多种变形，目前常考的基本上是变形类考法，即“至少 1 个”变形为“至少 n 个”，这种情况要先转化为“至少 1 个”，再使用隔板法。

如上题可改为以下三种形式：

（1）将 7 个大小相同的桔子分给 3 个小朋友，要求每个小朋友至少得到 1 个桔子，一共有几种分配方法？

（2）将 7 个大小相同的桔子分给 3 个小朋友，要求每个小朋友至少得到 2

个桔子，一共有几种分配方法?

（3）将 7 个大小相同的桔子分给 3 个小朋友，一共有几种分配方法?

第（1）种形式，直接使用公式，即分法有 $C_6^2=15$（种）。

第（2）种形式，先给每个小朋友都分一个，转化为有 4 个桔子分给 3 个小朋友，每个小朋友至少 1 个，则可以直接使用公式，即分法有 $C_3^2=3$（种）。

第（3）种形式，先从每个小朋友那里“借”来一个，转化为有 10 个桔子分给 3 个小朋友，每个小朋友至少 1 个，则可以直接使用公式，即分法有 $C_9^2=36$（种）。

可以看出，这三种形式是有联系的，至少 0 个、至少 1 个、至少 2 个，空隙分别是 9、6、3。有了这种转化，就可以轻松应对变形类的隔板法题目。

【例 2】(2013 陕西）某领导要把 20 项任务分给三个下属，每个下属至少分得三项任务，则共有多少种不同的分配方式?

A.28　　B.36

C.54　　D.78

【答案】D

【解析】由每个下属至少分三项任务，可先给每个下属分 2 个任务，还剩余 $20-2\times3=14$（项）任务。再将 14 项任务分给三个下属，每人至少一个，就能保证每个下属至少三项任务，共有 $C_{13}^2=78$（种）分配方式。因此，选择 D 选项。

除了这种变形类的隔板法之外，隔板法在其他类型的数量题目中也有着奇妙的应用，以下列举两类应用题型。

第一类是特定形式的整数类不定方程的求解。可以把数值 n 想象成 n 个 1，

就可以在若干个 1 中插入板子。比如在不定方程 x+y+z=5 中，x、y、z 有多少组正整数解？可以把 5 想象成 5 个 1，那么相当于把 5 个元素分成 3 组，每组至少 1 个，那么根据公式有 C_4^2=6（种）分配方式，即该不定方程有 6 组正整数解。

【例 3】(2015 吉林甲）某人想要通过掷骰子的方法做一个决定，他同时掷 3 颗完全相同且均匀的骰子，如果向上的点数之和为 4，他就做此决定，那么，他能做这个决定的概率是：

A.1/36　　B.1/64

C.1/72　　D.1/81

【答案】C

【解析】(1）枚举解法：

第一步，本题考查概率问题，属于基本概率。

第二步，掷 3 颗骰子，满足向上的点数之和为 4，可分为 3 种情况：(1，1，2)、(1，2，1)、(2，1，1)。总的情况数为 6^3=216，故概率为 3÷216=$\frac{1}{72}$。因此，选择 C 选项。

(2）隔板解法：

三枚骰子点数之和是 4，相当于 x+y+z=4 有多少组正整数解，即将 4 个 1 分为 3 组，每组至少一个 1，那么有 C_3^2=3（种)，总的情况数为 6^3=216，故概率为 3÷216=$\frac{1}{72}$。因此，选择 C 选项。

第二类是考了十几年仍经久不衰的“答对、答错与不答”类题目。这类题目的分数可能，即 n 道题目分成 3 组，有多少种分法？此时需要先“借”3 道，再

进行插板应用。注意由于分值不同，需要去掉重复情况。

【例 4】(2008 深圳）某次数学竞赛共有 10 道选择题，评分办法是答对一道得 4 分，答错一道扣 1 分，不答得 0 分。设这次竞赛最多有 N 种可能的成绩，则 N 应等于多少?

A.45　　B.47

C.49　　D.51

【答案】A

【解析】(1）枚举解法:

第一步，本题考查其他杂题。

第二步，答对 10 题最高为 40 分，答错 10 题最低为-10 分，从-10 到 40 共 51 个分值，其中，39、38、37、34、33、29 共 6 个分值无法取得，N 应等于 51 - 6 = 45。因此，选择 A 选项。

(2）隔板解法:

本题可转化为 10 道题目分成“答对”、“答错”、“不答” 3 组，有多少种分法? 先“借” 3 道题目，代入隔板模型分数有 $C_{13-1}^{3-1}=C_{12}^{2}$ =66（种)。

注意到在分数上答对 1 道+答错 4 道=不答 5 道，因此这 5 道题的分数被重复计算了两次，比如 10 分可能是答对 3 道+答错 2 道+不答 5 道，也可能是答对 4 道答错 6 道; 去重复则先拿出不答的 5 道题，剩下的 5 道分成 3 组，有 $C_{8-1}^{3-1}=C_{7}^{2}$ =21（种)，去掉 21 种即为所求，66 - 21=45（种)。因此，选择 A 选项。

【例 5】(2018 浙江）某测验包含 10 道选择题，评分标准为答对得 3 分，答错扣 1 分，不答得 0 分，且分数可以为负数。如所有参加测验的人得分都不相

同，问最多有多少名测验对象？

A.38　　B.39

C.40　　D.41

【答案】A

【解析】（1）枚举解法：

第一步，本题考查其他杂题。

第二步，答对 10 题最高为 30 分，答错 10 题最低为-10 分，从-10 到 30 共 41 个分值，其中，29、28、25 共 3 个分值无法取得，分数的可能有 41 - 3=38（种），即测验对象最多 38 人。因此，选择 A 选项。

（2）隔板解法：

本题与上一题完全一致，先“借”3 道题目，代入隔板模型分数有 $C_{13-1}^{3-1}=C_{12}^{2}$ =66（种）。注意到答对 1 道+答错 3 道=不答 4 道，去重复则先拿出 4 道题，剩下的 6 道分成 3 组，有 $C_{9-1}^{3-1}=C_{8}^{2}$ =28（种），去掉 28 种即为所求，66 - 28=38（种），即测验对象最多 38 人。因此，选择 A 选项。

可以发现，即使是简单的数量关系题目，也有许多值得细细研究，领悟数学之美。当然在考场上考生切忌太过深入把玩题目，只要平时掌握隔板法的特征和具体套路，考试时做对“至少 n 个”的分配模型即可。华图教育衷心希望广大考生认真学习、金榜题名！