行测数量关系：排列组合去重复

众所周知，重复计数是排列组合问题的主要错误之一，而此类问题具有隐蔽性，不易被发现。本文就排列组合中几种常见的重复性错误加以剖析，以期来提升大家解决问题的能力。

排列组合问题中一个最核心的要素是不重不漏，那如何才能避免重复计数呢，这就需要我们了解重复产生的原因。常见的容易产生重复的情况主要有三类：第一，分步引起重复计算；第二，平均分组易重复计算；第三，环形排列易重复计算，这里我们先介绍前两类：

一.分步引起重复计算

【例】从 5 名男生 5 名女生中选出 4 人，去参加培训，在选出的 4 人中至少有 1 名男生 1 名女生的情况数有多少种?

【错解】先在 5 名男生中选择 1 名，有C_5^1种，再在 5 名女生中选择 1 名，有C_5^1种，然后在剩余的 8 人中再选出 2 人，有C_8^2种，根据分步计数原理共有$C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_8^2 = 700$种。

剖析：假设甲、乙为 2 名男生，丙、丁为 2 名女生，根据上述选法，其中有一种取法可以是“先选甲，再选丙，再选乙和丁”，另外一种取法是“先选乙，再选丁，再选甲和丙”。显然这两种取法是同一种结果，但上述解法却将其当成两种情况，导致重复。

究其原因是本题使用了分步计数原理，而分步本身就包含顺序（有先有后），与排列相关。但是本题中无论是选择两名男生还是两名女生，只是一个组合，跟顺序没有关系，因此出现了重复计数。

【正解】分成三类：

（1）1 男 3 女，有 $C_5^1 \cdot C_5^3 = 50$ 种

（2）2 男 2 女，有 $C_5^2 \cdot C_5^2 = 100$ 种

（3）3 男 1 女，有 $C_5^1 \cdot C_5^3 = 50$ 种

共 50 + 100 + 50 = 200 种。

类似的题目在公考中屡见不鲜，下面就通过两道题目对比理解：

【例 1】（2016 联考）在九宫格内依次填入数字 1—9，现从中任取两个数，要求取出的两个数既不在同一行也不在同一列，共有多少种不同取法?

A.9 B.18

C.36 D.45

【答案】B

【解析】第一步，本题考查排列组合问题，属于基础排列组合。

第二步，先从 9 个数字中任选 1 个数，有 C_9^1 种情况，去掉一行一列后，再选第二个数有 C_4^1 种情况。而本题要求任意取出两个数，属于随机取数（即取出的两个数没有先后顺序），故共有 $\frac{C_9^1 C_4^1}{A_2^2} = 18$（种）不同取法。

因此，选择 B 选项。

【例 2】（2016 河南）在 7×7 的队列中，先随机给一个队员戴上红绶带，再给另一个队员戴上蓝绶带，要求戴两种颜色绶带的这两位队员不在同一行也不在同一列。问有多少种戴法?

A.1048 B.1374

C.1764 D.1858

【答案】C

【解析】第一步，本题考查排列组合，属于基础排列组合。

第二步，根据 7×7 的队列知，共有 7×7＝49（人），则选出一人戴红绶带有 C_{49}^{1} ＝49（种）情况。

第三步，要使所选出 1 人不在同一行也不在同一列，可知戴蓝绶带人选有 6×6＝36（人），故从中选出一人戴蓝绶带共有 C_{36}^{1} ＝36（种）情况。总的戴法为 49×36＝1764（种）情况。

因此，选择 C 选项。

观察例 1 和例 2，我们会发现，例 1 要求“任取两个数”，所以采用分步计算后需要剔除重复；而例 2 要求“先给一个队员戴上红绶带，再给另一个队员戴上蓝绶带”有先后顺序，直接相乘即可。通过两道例题，我们可以总结如下：①如果按照顺序选取（或有先后顺序），则无重复；②如果随机选取（即无顺序），则有重复，需要剔除重复，剔除的方式是如果选取 M 个数，就除以 A_{M}^{M} 。

二.平均分组易重复计算

【例】将 6 个人平均分成 3 组，每组 2 人，有多少种分组方式?

【错解】分 3 步：首先在 6 人中任取 2 人，作为一组有 C_{6}^{2} 种；之后在余下 4 人中再取 2 人，有 C_{4}^{2} 种；最后剩下 2 人作为一组，据分步计数原理知共有 $C_{6}^{2}\bullet C_{4}^{2}\bullet C_{2}^{2}=90$ 种。

剖析：将 6 人分别看为甲、乙、丙、丁、戊、己，假设第 1 种取法是“先取甲乙，再取丙丁，最后取戊己，分成 3 组”，第 2 种取法是“先取丙丁，再取甲乙，最后取戊己，分成 3 组”，可见 2 种取法是同一种分组方式，出现了重复计数。

【正解】首先在 6 人中任取 2 人，作为一组有C_6^2种；之后在余下 4 人中再取 2 人，有C_4^2种；最后剩下 2 人作为一组，再除以平均分组的重复次数A_3^3，所以共有$\frac{C_6^2 \bullet C_4^2 \bullet C_2^2}{A_3^3}=15$种。

下面通过几道公考题目加深理解：

【例 3】（2015 四川）将 10 名运动员平均分成两组进行对抗赛，问有多少种不同的分法?

A.120　　B.126

C.240　　D.252

【答案】B

【解析】第一步，本题考查排列组合问题，属于基础排列组合。

第二步，由平均分成两组知，第一组先选出 5 人有C_{10}^5 = 252（种）种分法，剩下 5 人自动成为第二组。由于没有先后顺序区别，所以有$\frac{252}{A_2^2}$ = 126（种）。

因此，选择 B 选项。

在解决平均分组类问题时，如果分成 N 组，需要除以A_N^N来剔除重复。

【例 4】（2018 浙江）某班共有 8 名战士，现在从中挑出 4 人平均分成两个战斗小组分别参加射击和格斗考核，问共有多少种不同的方案?

A.210　　B.420

C.630　　D.840

【答案】B

【解析】第一步，本题考查排列组合问题，属于基础排列组合。

第二步，先从 8 名战士中挑出 4 人，有$C_8^4=70$（种）；再从这 4 名战士中选择 2 人参加射击考核，有$C_4^2=6$（种）；最后剩余的两名战士参加格斗考核，有$C_2^2=1$（种）；分步用乘法，共有 70×6×1＝420（种）。

因此，选择 B 选项。

究其实质本题有两个过程，第一，先分成 2 个 2 人小组，第二，分组之后去参加两个不同的小组，故需再乘以A_2^2，即$\frac{C_8^2 \cdot C_6^2}{A_2^2} \cdot A_2^2$。

【例 5】（2017 江苏）某单位组织志愿者参加公益活动，有 8 名员工报名，其中 2 名超过 50 岁。现将他们分成 3 组，人数为 3、3、2，要求 2 名超过 50 岁的员工不在同组，则不同分组的方案共有：

A.120 种　　B.150 种

C.160 种　　D.210 种

【答案】D

【解析】第一步，本题考查排列组合问题，属于基础排列组合。

第二步，根据要求 2 名超过 50 岁的员工不在同组，有以下 2 种情况：

①分别在 2 个三人组，有$C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2=90$（种）情况；

②分别在 1 个三人组，1 个二人组，有$C_2^1 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1=120$（种）情况。

第三步，不同分组的方案共有 90＋120＝210（种）。

因此，选择 D 选项。

例 5 是平均分组中较难的综合题目，但你只要明白了平均分组本质及原理，本题也会迎刃而解。