2020年教师招聘考试中学数学模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

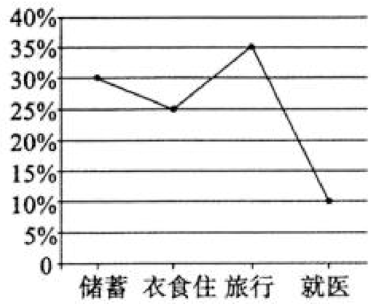
1.设全集 $U=\{x\in Z\mid -2<x<4\}$，$A=\{-1,0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　　）

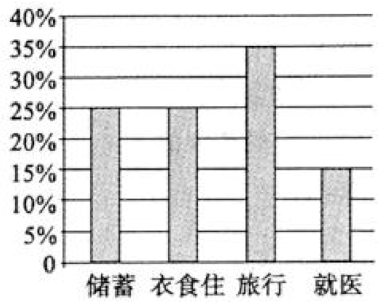
A. $\{0\}$　　B. $\{-2,-1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2.复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=\dfrac{2+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则复数 z 的共轭复数的虚部为（　　）

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. $-\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$

3.某位教师 2017 年的家庭总收入为 80000 元，各种用途占比统计如下面的折线图。2018 年家庭总收入的各种用途占比统计如下面的条形图，已知 2018 年的就医费用比 2017 年的就医费用增加了 4750 元，则该教师 2018 年的旅行费用为（　　）





A.21250 元　　B.28000 元　　C.29750 元　　D.85000 元

4.已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，其前 n 项和为 $S_n=3\cdot 2^n+a$，则实数为 a 的值为（　　）

A. -3　　B. -6　　C.2　　D.1

5.已知点 $A(0,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，若椭圆 $W:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 上存在点 C，使得△ABC 为等边三角形，则椭圆 W 的离心率是（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6.要得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，只需将函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象（　　）

A.向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位　　B.向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位

C.向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位　　　　D.向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位

7.一段 1 米长的绳子，将其截为 3 段，问这三段可以组成三角形的概率是（　　）

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{8}$　　D.$\frac{1}{3}$

8.当$x\to 0$时，$x\to \sin x$是x的（　　）

A.低阶无穷小　　　　B.高阶无穷小

C.等价无穷小　　　　D.同阶但非等价无穷小

9.《义务教育课程标准（2011 年版）》中的第三学段目标关于数学抽象的表述，正确的是（　　）

A.经历从日常生活中抽象出数的过程

B.探索具体问题中数量关系和变化规律

C.体验从具体情境中抽象出数的过程

D.体验从具体情境中抽象出数学符号的过程

10.新课标要求评价结果的呈现应采用定性和定量相结合的方式，第三学段的评价应当以下列评价为主的是（　　）

A.描述性评价　　　　B.描述性和等级（百分制）相结合评价

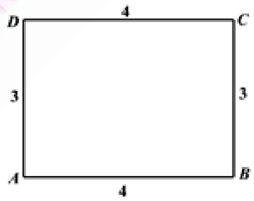
C.百分制评价　　　　D.等级评价

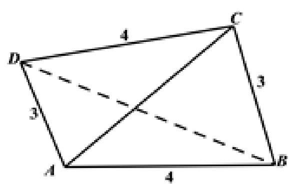
二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.已知$\boldsymbol{a}=(2,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$的投影是______。

12.已知函数$f(x)=\ln x$与直线$y=ax$相切，则a的取值是______。

13.已知矩形$ABCD$的$AB=4$，$AD=3$，将其沿对角线BD折起，得到四面体$A-BCD$，如图所示 则四面体$A-BCD$体积的最大值为______。





14.不定积分$\int \frac{1}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x=$______。

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+x\cos x\right)dx=$______。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16. 已知$\{a_n\}$是一个公差大于 0 的等差数列，且满足$a_4a_6=96$，$a_3+a_7=20$，数列$\{b_n\}$满足等式：$a_n=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\cdots+\frac{b_n}{2^n}\left(n\in \boldsymbol{N}^*\right)$。

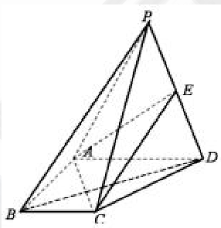
（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{b_n+\frac{n+1}{2}\right\}$的前$n$项和$S_n$。

17.如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AB=AD=2BC=2$，$BC// AD$，$AB\perp AD$，$\triangle PBD$为正三角形．且$PA=2\sqrt{3}$。

（1）证明：平面$PAB\perp$平面PBC；

（2）若点P到底面$ABCD$的距离为 2，E是线段PD上一点，且$PB//$平面ACE，求四面体$A-CDE$的体积。



18.已知函数$f(x)=ax^2-\ln(x-1)+1\left(a\in \boldsymbol{R}\right)$存在极值点。

（1）求a的取值范围；

（2）设$f(x)$的极值点为x_0，若$f(x_0)<x_0$，求a的取值范围。

19.已知点$P(2,2)$，圆$C:x^2+y^2-8y=0$，过点P的动直线l与圆C交于A，B两点，线段AB的中点为M，O为坐标原点。

（1）求M的轨迹方程；

（2）当$|OP|=|OM|$时，求l的方程及$\triangle POM$的面积。

四、案例分析（共 10 分）

20.某教师关于“反比例函数图象”教学过程中的三个步骤为：

第一步：复习回顾

提出问题：我们已经学过一次函数的哪些内容？是如何研究的？

第二步：引入新课

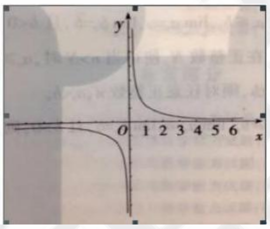
提出问题：反比例函数的图象是什么形状呢？

引导学生利用描点法画出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象。

列表：

x		6	5	4	3	2	1							
y							1							

描点连线：引导学生用光滑的曲线连接描点，并用计算机演示图象的生成过程。在此过程中启发学生思考，由于 x，y 都不能为 0，所以函数图象与 x 轴 y 轴不能有交点（如下图）



......（第三步过程省略）

（1）该教学过程的主要特点是什么？

（2）在第二步的连线过程中，如果你是该老师，如何引导学生思考所连的线不是直线，而是光滑曲线？

（3）对于第三步的③，如果你是该老师，如何引导学生思考函数图象在第一象限（或第三象限）的变化？

五、教案设计（共 20 分）

21.“基本不等式”是高中数学教学中的重要内容，请完成下列任务：

在“基本不等式”起始课的“教学重点”设计中，有两种方案：

①强调基本不等式在求数值中的应用，将基本不等式的应用作为重点。

②强调基本不等式的背景，过程与意义，将学生感受和体验“基本不等式”中“基本”的意义作为教学重点。

（1）你赞同哪种方案？简述理由。

（2）给出 $a^2+b^2\geq 2ab$ 及 $\frac{a+b}{2}\geq 2\sqrt{ab}\left(a>0，b>0\right)$ 的几何解释。

（3）为了让高中生充分认识“基本不等式”中“基本”的意义，作为教师应该对此有多个维度的理解，请至少从两个维度谈谈你对“基本”意义的认识。

2020 年教师招聘考试中学数学模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 C。

【解析】由题意知 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，$A=\{-1,0\}$，$\complement_U A=\{1,2,3\}$，$\because B=\{0,1,2\}$，$\therefore(\complement_U A)\cap B=\{1,2\}$。故本题选 C。

2.【答案】选 A。

【解析】$z(1+\mathrm{i})=\dfrac{2+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\Rightarrow z=\dfrac{2+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$ $\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$，因此复数 z 的共轭复数的虚部为 $\dfrac{7}{2}$。故本题选 A。

3.【答案】选 C。

【解析】设教师 2018 年家庭总收入为 n，$n\times15\%-80000\times10\%=4750\Rightarrow n=85000$，则该教师 2018 年是旅行费用为 $85000\times35\%=29750$。故本题选 C。

4.【答案】选 A。

【解析】由题意知 $a_1=3\times2+a$，$a_2=S_2-S_1=6$，$a_3=S_3-S_2=12$，由等比中项的性质可得 $36=(6+a)12\Rightarrow a=-3$。故本题选 A。

5.【答案】选 C。

【解析】由于 $A(0,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$\triangle ABC$ 为等边三角形，因此根据正三角形的性质可得点 C 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$ 或 $(1,\ -\sqrt{3})$，又因为点 C 在椭圆 W 上，所以 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{m}=1\Rightarrow m=6$，所以椭圆 W 的焦点在 y 轴上，则长半轴 $a=\sqrt{6}$，半焦距 $c=\sqrt{6-2}=2$，所以椭圆的离心率为 $\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。故本题选 C。

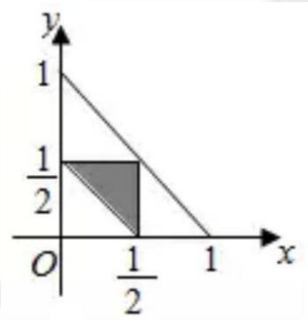
6.【答案】选 B。

【解析】 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\cos\left[\dfrac{\pi}{4}-2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\right]=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=\sin2x$，因此要得到函数 $y=\sin2x$ 的图象，只需将函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位。故

本题选 B。

7.【答案】选 A。

【解析】设三段分别为x，y,$1-x-y$,则总样本空间为$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\\0<x+y<1\end{cases}$，其面积为$\frac{1}{2}$，能构成三角形的事件的空间为$\begin{cases}x+y>1-x-y\\x+1-x-y>y\\y+1-x-y>x\end{cases}$，其面积为$\frac{1}{8}$，则这三段可以组成三角形的概率是$\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$。故本题选 A。



8.【答案】选 B。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1}=0$ 则 $x\to\sin x$ 是 x 的高阶无穷小。故本题选 B。

9.【答案】选 D。

【解析】数学新课程标准中，第三学段知识技能的第一方面，学生能够体验从具体情境中抽象出数学符号的过程。故本题选 D。

10.【答案】选 B。

【解析】数学新课程标准中，指出第一学段的评价应当以描述性评价为主，第二学段采用描述性评价和等级评价相结合的方式，第三学段可以采用描述性评价和等级（或百分制）评价相结合的方式。故本题选 B。

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】$-\frac{6\sqrt{5}}{5}$。

【解析】$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 的投影$=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2-8}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{-6}{\sqrt{5}}=-\frac{6\sqrt{5}}{5}$。

12.【答案】$\frac{1}{\mathrm{e}}$。

【解析】由题意知 $f'(x)=\frac{1}{x}$，设切点为 $(t,\ln t)$，则有 $\frac{1}{t}=a,\ln t=at=1$，$\therefore t=\mathrm{e}$，$\therefore a=\frac{1}{\mathrm{e}}$。

13.【答案】$\frac{24}{5}$。

【解析】由题意知，要使四面体 $A-BCD$ 体积的最大，则只需四面体的高最大即可，即面 ABD 与面 CBD 互相垂直时，此时由于△ABD≌△CBD，则四面体的高即为△CBD 中 BD 边上的高，由等面积公式知高为 $\frac{3\times4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}$，则四面体体积公式为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{12}{5}=\frac{24}{5}$。

14.【答案】$-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C$。

【解析】$\int\frac{1}{x^4\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-x^2}{x^4\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+$ $\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C$。

15.【答案】0。

【解析】令 $f(x)=x^3+x\cos x$，$f(x)=-f(-x)$，即 $f(x)$ 为奇函数，又由于积分区间关于原点对称，故该不定积分值为 0。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16.【答案】（1）$a_n=2n$；（2）$2^{n+2}-4+\frac{n(n+3)}{4}$。

【解析】（1）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_3+a_7=20$，得 $a_4+a_6=20$，又 $a_4a_6=96$，可得 $\begin{cases}a_4=8\\a_6=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=12\\a_6=8\end{cases}$. $\because d>0$，$\therefore\begin{cases}a_4=8\\a_6=12\end{cases}$，则 $d=\frac{a_6-a_4}{6-4}=2$，$\therefore a_n=a_4+2(n-4)=2n$.

（2）由 $a_n=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\cdots+\frac{b_n}{2^n}\left(n\in N^*\right)$，得 $a_{n-1}=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}(n\geq2)$，$\therefore a_n-a_{n-1}=2=\frac{b_n}{2^n}$，即 $b_n=2^{n+1}(n\geq2)$，$\because b_1=2a_1=4=2^2$ 满足上式，$\therefore b_n=2^{n+1}$. 则 $b_n+\frac{n+1}{2}=2^{n+1}+\frac{n+1}{2}$，$\therefore$ 数列 $\left\{b_n+\frac{n+1}{2}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)+$ $\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)+\frac{n}{2}=\frac{4\left(1-2^n\right)}{1-2}+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}=2^{n+2}-4+\frac{n(n+3)}{4}$。

17.【答案】（1）见解析；（2）$\frac{8}{9}$。

【解析】（1）$\because AB\perp AD$，且 $AB=AD=2$，$\therefore BD=2\sqrt{2}$，又△PBD 为正三角形，

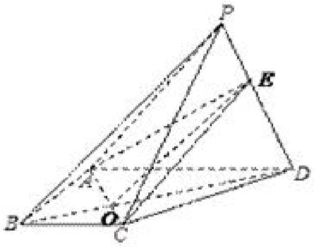
$\therefore PB=PD=BD=2\sqrt{2}$，又$\because AB=2$，$PA=2\sqrt{3}$，$\therefore \angle PBA=\frac{\pi}{2}$，$\therefore AB\perp PB$，又$\because AB\perp AD$，$BC/\!/AD$，$\therefore AB\perp BC$，$PB\cap BC=B$，$\therefore AB\perp$平面$PBC$，又$\because AB\subset$平面$PAB$，

$\therefore$平面$PAB\perp$平面PBC。

（2）如图，设BD，AC交于点O，$\because BC/\!/AD$，且$AD=2BC$，$\therefore OD=2OB$，连接OE，

$\because PB/\!/$平面ACE，$\therefore PB/\!/OE$，则$DE=2PE$，又点P到平面$ABCD$的距离为2，$\therefore$点E到平面$ABCD$的距离为$h=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$ $\therefore V_{A-CDE}=V_{E-CDA}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$，

即四面体$A-CDE$的体积为$\frac{8}{9}$。



18.【答案】（1）$a>0$；（2）$0<a<\frac{1}{4}$。

【解析】（1）函数$f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$，$f'(x)=2ax-\frac{1}{x-1}=\frac{2ax^2-2ax-1}{x-1}$，

当$a=0$时，$f'(x)<0$，即函数$f(x)$单调递减，无极值点；当$a\neq 0$时，由$\Delta>0\Rightarrow a>0$或$a<-2$，设$h(x)=2ax^2-2ax-1$，则$h(1)=-1<0$；

当$a>0$时，$h(x)=0$的两根一个小于1、一个大于1，故$f(x)$有一个极值点；

当$a<-2$时，由对称轴为$x=\frac{1}{2}$，知$h(x)=0$的两根均小于1，故$f(x)$无极值点；

综上所述，$a>0$。

（2）由（1）知$a>0$且$2ax_0^2-2ax_0-1=0$，$\therefore a=\frac{1}{2x_0(x_0-1)}$，$f(x_0)<x_0\Leftrightarrow$

$ax_0^2-\ln(x_0-1)+1<x_0\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{2x_0(x_0-1)}-\ln(x_0-1)+1<x_0$

$\Leftrightarrow x_0-1-\frac{1}{2(x_0-1)}+\ln(x_0-1)>\frac{1}{2}$。

令$g(x)=x-\frac{1}{2x}+\ln x$，显然$g(x)$在$(0,+\infty)$上单增，又$g(1)=\frac{1}{2}$，$\therefore x_0-1>1$即$x_0>2$，

$\therefore a=\frac{1}{2x_0(x_0-1)}<\frac{1}{4}$，$\therefore 0<a<\frac{1}{4}$。

19.【答案】（1）$(x-1)^2+(y-3)^2=2$；（2）$y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$；$\frac{16}{5}$。

【解析】（1）圆C的方程可化为$x^2+\left(y-4\right)^2=16$，所以圆心为$C\left(0,4\right)$，半径为4，设$M\left(x,y\right)$，则$\overrightarrow{CM}=\left(x,y-4\right)$，$\overrightarrow{MP}=\left(2-x,2-y\right)$，由题设知$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，故$x\left(2-x\right)+\left(y-4\right)\left(2-y\right)=0$，即$\left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2=2$，由于点$P$在圆$C$的内部，所以$M$的轨迹方程是$\left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2=2$。

（2）由（1）可知M的轨迹是以点$N\left(1,3\right)$为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆。由于$\left|OP\right|=\left|OM\right|$，故$O$在线段$PM$的垂直平分线上，又$P$在圆$N$上，从而$ON\perp PM$。因为$ON$的斜率为3，所以$l$的斜率为$-\frac{1}{3}$，代入$P$点得到$l$的方程为$y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$。又$\left|OP\right|=\left|OM\right|=2\sqrt{2}$，$O$到$l$的距离为$d=\frac{8}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，$\left|PM\right|=2\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，所以△$POM$的面积为$\frac{1}{2}\times PM\times\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{16}{5}$。

四、案例分析（共10分）

20.【参考答案】

（1）该教学过程中运用了温故导入的方式，优点：一是可以帮助学生复习旧知，从已学习过的知识中找到新知与旧知的联系，从而帮助学生快速地进入新知识的学习；二是在教学过程渗透了数形结合的数学思想，学生通过列表、描点、连线导学生发现问题、思考问题、解决问题。

（2）在第二步的连线过程中，我将让学生多取一些点，在描点过程中学生自然就会发现是所连成的线是光滑曲线而不是折线；或者让学生自行取点描线，然后教师收集学生取点少的描出的图象和取点较多的描出的图象，用投影展示，学生对比观察，自然而然知道反比例函数图象是光滑曲线。

（3）我将引导学生通过多选取特殊点进行比较，观察第一象限和第三象限y随x的变化规律，并鼓励学生多交流、多沟通，总结规律，进一步提高学生的观察能力和抽象概括能力。

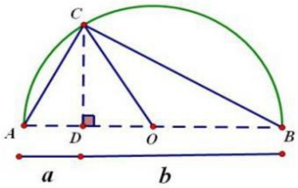
五、教案设计（共20分）

21.【参考答案】

（1）赞同第一种方案，“基本不等式”这一部分的知识点能够帮助理解其他章节的知识，同时也能解决其他章节的问题，所以“基本不等式”这一部分知识更加注重应用，所以

这个是重点。

（2）如图 1，$CD=\sqrt{ab}$，$CO=\frac{a+b}{2}$，在直角三角形中，斜边大于直角边，即 $CO>CD$，即 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$；如图 2，$\frac{1}{2}ab$ 为一个三角形的面积，a^2+b^2 为深蓝色部分正方形的面积，$a^2+b^2-2ab=(a+b)^2\geq 0$。



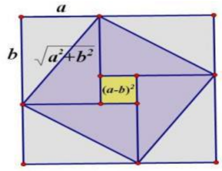


图 1　　　　　　　　图 2

（3）①基本不等式是证明其他不等式的基础，基本不等式 $a+b\geq 2\sqrt{ab}\,(a>0,\ b>0)$，例如已知 $a>0,\ b>0,\ a+b=1$，求证：$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9$。

求证：因为 $a>0,\ b>0,\ a+b=1$，所以 $1+\frac{1}{a}=1+\frac{a+b}{a}=2-\frac{b}{a}$。同理 $1+\frac{1}{a}=2+\frac{a}{b}$。所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)=5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq 9$ 所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9$（当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立）。

②基本不等式可以用于求函数最值问题，例如已知 $x>0,\ y>0$，则（1）如果积 xy 是定值 P，那么当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 有最小值是 $2\sqrt{p}$。（2）如果和 $x+y$ 是定值 s，那么当且仅当 $x=y$ 时，xy 有最大值是 $\frac{s^2}{4}$。

总之，基本不等式是许多其他知识点理解和求证等的基础，以上介绍的就是在求证不等式以及在函数求最值等问题中对于基本不等式的运用。