2020年教师招聘考试中学数学模拟题

总分：100分　　考试时间：120分钟

一、单项选择题（共10小题，每小题3分，共30分）

1.设集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{x\,|\,x^2-4x+m=0\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则 $B=$（　　）

A. $\{1,-3\}$　　B. $\{1,0\}$　　C. $\{1,3\}$　　D. $\{1,5\}$

2.已知复数 $z_1=3-bi$，$z_2=1-2i$，若 $\frac{z_1}{z_2}$ 是实数，则实数 b 的值为（　　）

A.0　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. -6　　D.6

3.设 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，是下列命题正确的是（　　）

A.若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$　　B.若 $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m//n$

C.若 $\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$，$n\perp m$，则 $n\perp\beta$　　D.若 $m\perp\alpha$，$m//n$，$n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

4.若直线 $y=-2x$ 的倾斜角为 α，则 $\sin 2\alpha$ 的值为（　　）

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\pm\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

5.已知 m，n 是空间中两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列说法正确的是（　　）

A.若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha//\beta$，则 $m//n$

B.若 $m\subset\alpha,\alpha//\beta$，则 $m//\beta$

C.若 $n\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $n//\alpha$

D.若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，且 $m\perp l$，$n\perp l$，则 $\alpha\perp\beta$

6.若 α，$\beta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，且 $\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$。则下列结论正确的是（　　）

A. $\alpha>\beta$　　B. $\alpha+\beta>0$　　C. $\alpha<\beta$　　D. $\alpha^2>\beta^2$

7.若函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+a\ln x$ 有两个不同的极值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a>1$　　B. $-1<a<0$　　C. $a<1$　　D. $0<a<1$

8.定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x-3)=-f(x)$，对 $\forall x_1$，$x_2\in[0,3]$ 且 $x_1\neq x_2$，都有

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则有（　　）

A. $f(49)<f(64)<f(81)$　　B. $f(49)<f(81)<f(64)$

C. $f(64)<f(49)<f(81)$　　D. $f(64)<f(81)<f(49)$

9.《义务教育数学课程标准（2011 年版）》强调，课程内容要反映社会的需要，数学的特点要符合学生的认知规律。课程内容的组织要重视直观，处理好（　　）的关系。

A.直观与抽象　　B.过程与结果　　C.直接与间接　　D.理论与实践

10.《普通高中数学课程标准》中提出了培养和提高学生基本能力的课程标准，这些基本能力包括空间想想，抽象概括，推理论证，运算求解和（　　）

A.逆向思维　　B.顺向思维　　C.逆转心理　　D.数据处理

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\cos A=\dfrac{4}{5},\cos B=\dfrac{5}{13}$，$a=1$，则 $b=$______。

12.已知向量 $\boldsymbol{a}=(3x,2)$，$\boldsymbol{b}=(6,x)$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，则 $x=$______。

13.在平面内，三角形的面积为 S，周长为 C，则它的内切圆的半径 $r=\dfrac{2S}{C}$．在空间中，三棱锥的体积为 V，表面积为 S，利用类比推理的方法，可得三棱锥的内切球（球面与三棱锥的各个面均相切）的半径 $R=$______。

14.已知四边形 $ABCD$ 为矩形，AB=2AD=4，M 为 AB 的中点，将△ADM 沿 DM 折起，得到四棱锥 A_1-DMBC，设 A_1C 的中点为 N，在翻折过程中，得到如下三个命题：

① BN// 面 A_1DM，且 BN 的长度为定值 $\sqrt{5}$；

②三棱锥 $N-DMC$ 的体积最大值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$；

③在翻折过程中，存在某个位置，使得 $DM\perp A_1C$，

其中正确命题的序号为______。

15.已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 是双曲线右支上的一点，若直线 AF_2 与直线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 平行且△AF_1F_2 的周长为 $9a$，则双曲线的离心率为______。

三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16. 设函数 $f\left(x\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}$，$x\in\boldsymbol{R}$。

（1）求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期和对称中心；

（2）若函数 $g\left(x\right)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，求函数 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最值。

17.设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $S_4=4S_2$，$a_9=17$。

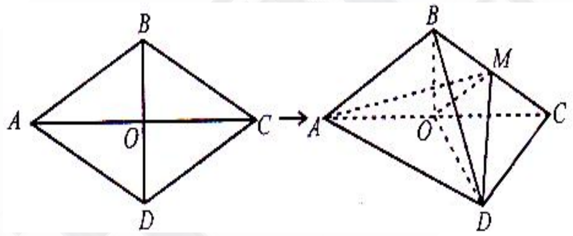
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=1-\frac{1}{2^n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

18. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 12，$\angle BAD=60^\circ$，AC 与 BD 交于 O 点。将菱形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，得到三棱锥 $B-ACD$，点 M 是棱 BC 的中点，$DM=6\sqrt{2}$。

（1）求证：平面 $ODM\perp$ 平面 ABC；

（2）求二面角 $M-AD-C$ 的余弦值。



19.已知函数 $f\left(x\right)=xe^x+a\left(x+1\right)^2\left(a\in\boldsymbol{R}\right)$。

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求 a 的取值范围。

四、案例分析（共 10 分）

下面是两位教师关于《等边三角形》的教学过程。

教师甲	数师乙
（1）复习等腰三角形的性质及判定方法 教师提问，学生思考：边怎样？角怎样？对称性呢？ （2）等边三角形性质的教学 教师提问，学生思考：	（1）复习引入 ①理解三角形的定义、性质 ②观察生活中的等边三角形，引出课题 （2）新课教学 ①等边三角形有什么性质？

①什么样的三角形叫等边三角形？ ②等边三角形的三个内角都相等吗？ ③等边三角形是轴对称图形吗？ （3）等边三角形判定的教学 师：哪位同学说说我们应从什么角度来考虑等边三角形的判定方法？ 生：从角和边来考虑（教师希望的答案是从边和角来考虑） 师:那你能说一下等边三角形有怎样的判定方法吗？ 生：从角度来说，我认为三个内角都是60°的，三角形是等边三角形。 （学生的回答出乎老师的预设，打乱了PPT的放映程序） 师：关于边的研究比较简单，我们还是从边开始探讨吧。 生：好。（学生没有异议，只能跟着老师的要求回答问题，继续学习）	（PPT显示）可以从边，角，对称性来考虑 活动1： 学生拿出课前准备的等边三角形纸片，认真折叠并观察，小组合作，互相探讨，一个小组代表发表自己组的观点，其他小组补充，最后一起归纳总结。 ②等边三角形的判定方法有哪些？设计开放性提问（PPT显示）你认为怎样才能说明三角形是等边三角形？等腰三角形怎样变化才能说明是等边三角形？ 设计活动2： 小组合作，相互探讨，教师操作几何画板，学生也上台操作几何画板，观察等腰三角形满足什么条件后成为等边三角形。学生积极主动的参与课堂学习，能够在折纸操作后很快说出等边三角形的性质和判定方法，通过操作几何画板形象地展现变化过程。新知识的获得和掌握很快且水到渠成，最后教师和学生一起归纳总结。

请从下列三个方面对甲乙两位教师的教学过程进行评价：

（1）引入的特点；

（2）教师教的方式；

（3）学生学的方式。

五、教案设计（共20分）

初中数学“分式”包括三方面教学任务：分式、分式的运算、分式方程。针对上述内容，请完成下列任务：

（1）分析“分数”在分式教学中的作用。

（2）设计三道分式方程题。（要求：①分式方程能转化成一元一次方程；②三道分式

方程题逻辑联系紧密；③三道分式方程题，由易到难，体现教学要求；④说明你的设计意图）

（3）指出解分式方程中所蕴含的数学思想方法。

2020 年教师招聘考试中学数学模拟题

总分：100 分　　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】选 C。

【解析】由于 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+m=0\}$，且 $A\cap B=\{1\}$，因此 $x=1$ 为 $x^2-4x+m=0$ 的解，即代入解得 $m=3$，即此时方程为 $x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1$ 或 $x=3$，则 $B=\{1,3\}$。故本题选 C。

2.【答案】选 D。

【解析】$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{3-bi}{1-2i}=\dfrac{(3-b\text{i})(1+2\text{i})}{5}=\dfrac{(3+2b)(6-b)\text{i}}{5}$，由于是实数，所以 $b=6$。故本题选 D。

3.【答案】选 D。

【解析】A 选项，同时和一个平面平行的两直线不一定平行，可能相交，可能异面，因此错误；B 选项，两平面平行，两平面内的直线不一定平行，可能异面，因此错误；C 选项，一个平面内垂直于两平面交线的直线，不一定和另一个平面垂直，可能斜交，因此错误；D 选项，$m\perp\alpha$，$m/\!/n\Rightarrow n\perp\alpha$，$\because n\subset\beta\therefore\beta\perp\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$，因此正确。故本题选 D。

4.【答案】选 A。

【解析】由题意知 $\tan\alpha=-2,\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{2\times(-2)}{(-2)^2+1}=-\dfrac{4}{5}$。故本题选 A。

5.【答案】选 B。

【解析】A 选项，若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则 m，n 相交、平行或异面，故 A 错误；B 选项，若 $m\subset\alpha,\alpha/\!/\beta$，则由面面平行的性质定理得 $m/\!/\beta$，故 B 正确；C 选项，若 $n\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，故 C 错误；D 选项，若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，且 $m\perp l$，$n\perp l$，则 α，β 不一定垂直。故本题选 B。

6.【答案】选 D。

【解析】设 $f(x)=x\sin x$，则 $f'(x)=\sin x+x\cos x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 单调递增；$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$f(x)=x\sin x$ 是偶函数，$\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$

$\Rightarrow\alpha\sin\alpha>\beta\sin\beta\Rightarrow|\alpha|>|\beta|\therefore\alpha^2>\beta^2$。故本题选 D。

7.【答案】选 D。

【解析】$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-2+\frac{a}{x}=\frac{x^2-2x+a}{x}$，若函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点，则 $g(x)=x^2-2x+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上由 2 个不同的实数根，故 $\begin{cases}\Delta=4-4a>0\\ x_1=\frac{2-\sqrt{4-4a}}{2}>0\end{cases}\Rightarrow 0<a<1$。故本题选 D。

8.【答案】选 A。

【解析】$f(x)$ 满足 $f(x-3)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 6，$f(49)=f(1+6\times 8)=f(1)$

$f(81)=f(-3+6\times 14)=f(-3)$，$f(64)=f(-2+6\times 11)=f(-2)$，由于是偶函数，则 $f(49)=f(1)$，$f(81)=f(3)$，$f(64)=f(2)$，由于 $\forall x_1$，$x_2\in[0,3]$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则函数在 $[0,3]$ 上为增函数，进而 $f(1)<f(2)<f(3)\Rightarrow f(49)<f(64)<f(81)$。故本题选 A。

9.【答案】选 A。

【解析】课程内容的组织要重视过程，处理好过程与结果的关系；要重视直观，处理好直观与抽象的关系；要重视直接经验，处理好直接经验与间接经验的关系。故本题选 A。

10.【答案】选 D。

【解析】《普通高中数学课程标准》在课程目标中指出提高空间想想，抽象概括，推理论证，运算求解，数据处理等基本能力。故本题选 D。

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

11.【答案】$\frac{20}{13}$。

【解析】由题意知 $\sin A=\frac{3}{5},\sin B=\frac{12}{13}$，则由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{b}{\frac{12}{13}}\Rightarrow b=\frac{20}{13}$。

12.【答案】-2。

【解析】由题意知两向量之间的夹角为$180°$，即为相反向量，因此有$\begin{cases}3x=-6\\x=-2\end{cases}\Rightarrow x=-2$。

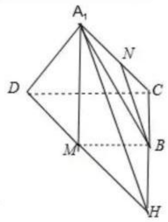
13.【答案】$\dfrac{3V}{S}$。

【解析】设三棱锥的四个面积分别为：S_1，S_2，S_3，S_4，由于内切球到各面的距离等于内切球的半径，所以有$V=\frac{1}{3}S_1r+\frac{1}{3}S_2r+\frac{1}{3}S_3r+\frac{1}{3}S_4r=\frac{1}{3}Sr\Rightarrow r=\frac{3V}{S}$。

14.【答案】①②。

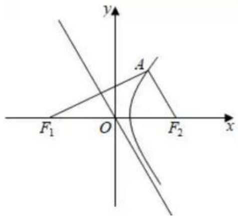
【解析】对于①分别延长DM，CB交于H，连接A_1H，如图所示；由M为中点，$BM=\frac{1}{2}CD$，可得B为CH的中点，可得BN为 A_1CH的中位线，可得$BN//A_1H$，$BN\not\subset$面A_1DM，且$BN=\frac{1}{2}A_1H$，在 A_1DH，$A_1M=2$，$MH=2\sqrt{2}$，$\angle A_1MH=135°$，$A_1H=$

$\sqrt{4+8-2\times2\times2\sqrt{2}\times\cos135°}=2\sqrt{5}=BN$，因此①正确；对于②，当平面$A_1DM\perp$面$DMBC$时。$A_1$到平面$DMBC$的距离最大，且为$\sqrt{2}$，此时$N$到平面$DMBC$的距离最大，且为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\triangle DMC$的面积为$\frac{1}{2}\times2\times4=4$，可得三棱锥$N-DMC$的最大体积为$\frac{1}{3}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，因此②正确；对于③，若$DM\perp A_1C$，$DM=CM=2\sqrt{2}$，$CD=4\Rightarrow DM\perp A_1M$，这与$DM$为斜边矛盾，因此③错误；综上，以上正确命题的序号为①②。



15.【答案】2。

【解析】设$|AF_1|=r_1$，$|AF_2|=r_2$，则$\begin{cases}r_1-r_2=2a\\r_1+r_2=9a-2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r_1=\frac{11}{2}a-c\\r_2=\frac{7}{2}a-c\end{cases}$，由于直线$AF_2$与直线$y=-\frac{b}{a}x$平行，则$\tan\angle F_1F_2A=\frac{b}{a}$，$\cos\angle F_1F_2A=\frac{a}{c}=\frac{4c^2+r_2^2-r_1^2}{2\cdot2c\cdot r_2}\Rightarrow 4c^2+r_2^2-r_1^2=4ar_2$，把$r_1$，$r_2$代入上式得$8a^2-2ac-c^2=0\Leftrightarrow(2a-c)(4a+c)=0\Rightarrow e=2$。



三、解答题（共 4 小题，16-17 题 7 分，18-19 题每小题 8 分，共 30 分）

16.【答案】（1）$T=\pi$；$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},0\right)$，$k\in\boldsymbol{Z}$；（2）$g(x)_{\max}=\frac{1}{2}$；$g(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$。

【解析】（1）$f(x)=\cos x\cdot\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$。因此最小正周期为$T=\pi$，对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},0\right)$，$k\in\boldsymbol{Z}$。

（2）$g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递减，$g(x)_{\max}=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}<g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$，$g(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$。

17.【答案】（1）$a_n=2n-1$；（2）$b_n=\frac{2n-1}{2^n}$。

【解析】（1）设等差数列$\{a_n\}$首项为a_1，公差为d，由已知得$\begin{cases}4a_1+6d=8a_1+4d\\a_9=a_1+8d=17\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，于是$a_n=1+2(n-1)=2n-1$。

（2）当$n=1$时，$\frac{b_1}{a_1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，当$n\geq 2$时，$\frac{b_n}{a_n}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^n}$，当$n=1$时上式也成立。于是$\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{2^n}$，故$b_n=\frac{1}{2^n}a_n=\frac{2n-1}{2^n}$。

18.【答案】（1）见解析；（2）$\frac{3\sqrt{93}}{31}$。

【解析】（1）证明：$\because ABCD$是菱形，$\therefore AD=DC$，$OD\perp AC$，$\triangle ADC$中，$AD=DC$=12，$\angle ADC=120^\circ$，$\therefore OD=6$，又M是BC的中点，$\therefore OM=\frac{1}{2}AB=6, MD=6\sqrt{2}$，$\because OD^2+OM^2=MD^2$，$\therefore DO\perp OM$，$OM$，$AC\subset$面$ABC$，$OM\cap AC=O$，$\therefore OD\perp$面$ABC$，$\because OD\subset$面$ODM$，$\therefore$平面$ODM\perp$平面$ABC$。

（2）由题意，$OD\perp OC$，$OB\perp OC$，又由（1）知$OB\perp OD$，建立如图所示空间直角

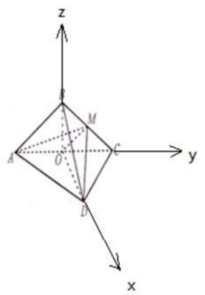
坐标系，由条件易知$D(6,0,0)$，$A\left(0,-6\sqrt{3},0\right)$，$M\left(0,3\sqrt{3},3\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,9\sqrt{3},3\right)$,$\overrightarrow{AD}=\left(6,6\sqrt{3},0\right)$，

设平面MAD的法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$即$\begin{cases}9\sqrt{3}y+3z=0\\6x+6\sqrt{3}y=0\end{cases}$，令$y=-\sqrt{3}$，则

$x=3,\ z=9$，所以，$\boldsymbol{m}=\left(3,-\sqrt{3},9\right)$由条件易证$OB\perp$平面$ACD$，故取其法向量为$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

所以$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{93}}{31}$，由图知二面角$M-AD-C$为锐二面角，故其余弦值为

$\dfrac{3\sqrt{93}}{31}$。



19.【答案】（1）见解析；（2）$(0,+\infty)$。

【解析】（1）$f'(x)=(x+1)e^x+2a(x+1)=(x+1)\left(e^x+2a\right)$

（ⅰ）$a\geq0$时，当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$单调递减，在$(-1,+\infty)$单调递增。

（ⅱ）$a<0$时，若$a=-\dfrac{1}{2e}$，则$f'(x)=(x+1)\left(e^x-e^{-x}\right)$，所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增；若$a>-\dfrac{1}{2e}$，则$\ln(-2a)<-1$，故当$x\in(-\infty,\ln(-2a))\cup(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$x\in(\ln(-2a),-1)$，$f'(x)<0$；所以$f(x)$在$(-\infty,\ln(-2a)),(-1,+\infty)$单调递增，在$(\ln(-2a),-1)$单调递减；若$a<-\dfrac{1}{2e}$，则$\ln(-2a)>-1$，故当$x\in(-\infty,-1)\cup(\ln(-2a),+\infty)$，$f'(x)>0$，$x\in(-1,\ln(-2a))$，$f'(x)<0$；所以$f(x)$在$(-\infty,-1),(\ln(-2a),+\infty)$单调递增，在$(-1,\ln(-2a))$单调递减。

（2）（ⅰ）当$a>0$，则由（1）知$f(x)$在$(-\infty,-1)$单调递减，在$(-1,+\infty)$单调递增，

又$f(-1)=-\dfrac{1}{e}<0$，$f(0)=a>0$，取b满足$b<-1$，且$b-2<\ln\dfrac{a}{2}$，则

$f(b-2)>\frac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a\left(b^2-\frac{3}{2}b\right)>0$，所以 $f(x)$ 有两个零点；

（ⅱ）当 $a=0$，则 $f(x)=xe^x$，所以 $f(x)$ 只有一个零点；

（ⅲ）当 $a<0$，若 $a\geq-\frac{1}{2e}$，则由（1）知，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增。又当 $x\leq-1$ 时，$f(x)<0$，故 $f(x)$ 不存在两个零点；$a<-\frac{1}{2e}$，则由（1）知，$f(x)$ 在 $(-1,\ln(-2a))$ 单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 单调递增，又当 $x\leq-1$，$f(x)<0$,故 $f(x)$ 不存在两个零点。综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$。

四、案例分析（共 10 分）

20.【参考答案】

（1）甲教师的引入存在优点也存在缺陷。优点是一开始复习了上节内容，巩固旧知，但是并没有进行新旧知识间的衔接过渡，并没有达到降低学生对新知识的认知难度的目的。

乙教师的引入存在优点也存在缺陷。优点是一开始复习了上节内容，巩固旧知，并联系生活实际让学生观察等边三角形的特点降低学生对新知识的认知难度。但是在巩固旧知时并没有合理的进行新旧知识之间的衔接过渡，使学生对等边三角形与等腰三角形之间的关系没有得到一个初步的感官认识。

（2）甲教师的教学方法存在优点也存在缺陷，在教学开始开门见山的介绍本课题，抛出问题：①什么样的三角形叫等边三角形？②等边三角形的三个内角都相等吗？③等边三角形是轴对称图形吗？引起学生的有意注意，使学生迅速进入学习状态，对本节内容的基本轮廓有了大致了解，但是没有进行合理的情景创设，将知识全盘塞给学生，剥夺了学生发现问题、提出问题进行解决问题的权利。无法激发学生学习新知识的兴趣，学生只能机械地配合教师教学。在进行等边三角形判定的教学过程中，教师没有做好充分的课前准备，预设学生在课堂中提出各种问题的突发情况，采取回避方式来应对学生提出“从角来说，我认为三个内角都是 60° 的三角形是等边三角形”这不符合新课程标准中对教师的要求。会限制学生思维，扼杀学生探求真理的欲望，不利于学生的成长。

乙教师的教学方法存在优点也存在缺陷。优点是充分发挥了学生地位，动手操作，小组合作探究，开放性问题等环节的设置，激发了学生开动脑筋自主探究的兴趣并能够调动学生参与到课堂教学活动的积极性。缺点在于教师对“等边三角形有什么性质？”这一开放性问题的提出并不能充分突出“等边三角形”这节的核心---通过对等腰三角形性质的探究过程

迁移到对等边三角形性质的探究，为第二个开放性问题的解决造成了一定的阻碍。

（3）甲教师的学生在学习过程中，只是在机械的配合教师的提问，完成本节课的教学。甲教师在日常教学过程中没有注意给学生培养善于思考、提出问题，发现问题、解决问题的良好习惯的机会。导致学生学习积极性不高，对学习内容存在疑问也不会及时提出。乙教师的学生在学习过程中，动手操作能力，合作探究意识均很强，学习积极性高，对学习过程中存在的疑问，能够提出并善于通过自主探究合作交流解决问题。

五、教案设计（共 20 分）

21.【参考答案】

（1）“分数”在分式教学中的作用：①增强教学导入环节的连贯性：分数与分式联系紧密，二者是具体与抽象、特殊与一般的关系。分数的有关结论与分式的相关结论具有一致性，即数式通性，在导入“分式”的教学环节时，可以通过类比分数的概念、性质和运算法则，引出分式的概念、性质和运算法则；②加强了教学效果：由学生认知结构中已有的分数的概念引入分式，既体现了数学学科内在的逻辑关系，帮助学生拓展了自身的数学认知结构，也是对类比这一数学思想方法和科学研究方法的渗透，更好的加强了教学效果。

（2）分式方程题目：

① $\dfrac{100}{20+x}=\dfrac{60}{20-x}$

② $\dfrac{x}{2x-5}+\dfrac{5}{5-2x}-1=0$

③ $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

设计意图：题目①较容易，帮助学生学会利用等式两边同时乘以最简公分母，化成整式方程的方法解分式方程，初步体会解分式方程的基本思想；题目②在①的基础上形式更为复杂，需要学生通过思考找到变换分式方程的形式，从而找到最适合的最简公分母，再利用解分式方程的基本思想解题；题目③与前两题相比，形式更为复杂，学生已经能够利用解分式方程的基本思想解答此题，但需要验证结果是否为原方程的根，学生往往容易忽视验证根的步骤，因此题目③不仅能够训练学生的解题思路，更培养了学生的认真严谨的学习态度，对提高学生的综合能力有很大的帮助。

（3）数学思想方法：转化思想：利用最简公分母将分式方程化成整式方程的方法解分式方程，是运用了“转化”思想，将没有学习过的分式方程转化成已经学过的整式方式。