2020年浙江省教师招聘
寒假作业
数学一答案

答案解析

一、单项选择题。

1.【答案】选 A。

【解析】由题可得整数部分为 1，2，4，7，11，后项比前一项依次多 1，2，3，4，因此下一项比前一项多 5，应为 16；小数部分为 1，2，3，4，5，下一项为 6。因此后一项为 16.6。

故本题选 A。

2.【答案】选 D。

【解析】由题可得，除数最小为 8+1=9，又因为除数是一位数，那么除数一定是 9，因为是两位数除以一位数，商仍是两位数，假设商是 10，则$10\times9+8=98$，符合题意；假设商是 11，则$11\times9+8=107$，不符合题意；所以被除数为 98，商为 10，除数为 9，余数为 8。被除数、除数、商以及余数之和为$98+10+9+8=125$。

故本题选 D。

3.【答案】选 B。

【解析】由题可知，10 月有 31 天，而$31=4\times7+3$，所以这个月 4 个星期零 3 天，可用假设法来推算这个月的第一个星期六是几日：

（1）如果 10 月 1 日是星期六，那么 10 月 2 日、9 日、16 日、23 日、30 日都是星期日，出现了 5 个星期日，与题意不符；用同样的方法，可以推算出 10 月 2 日也不是星期六；

（2）如果 10 月 3 日是星期六，那么 10 月 4 日、11 日、18 日、25 日都是星期日，10 月 31 日星期六，所以十月恰好 5 个星期六，4 个星期日，符合题目条件，倒推回去可以知道 10 月 1 日是星期四。

故本题选 B。

4.【答案】选 B。

【解析】由题可得，将这个数看成$A+B$，A为可以被 12 整除的部分，B则为除以 12 的余数。A可以被 12 整除，则也可以被 3 或 4 整除。因为这个数“除以 3 余数是 2，除以 4 余数是 1”，所以B也是“除以 3 余数是 2，除以 4 余数是 1”，又因为$1\le B\le11$，在这个区间内，只有 5 是符合的。

故本题选 B。

5.【答案】选 B。

【解析】若 1 或 2，3 在首位，将其他 4 个数字全排列即可，有$3A_4^4$=72 项；若 3 在首位，4 在千位，则在 34215 之后的项为 3 项；若 3 在首位，5 在千位，则有 A_3^3=6 项。所以 34215 是该数列的第$72-6-3=63$项。

故本题选 B。

6.【答案】选 D。

【解析】含盐 10%的 90 克盐水中含盐量为$90\times10\%=9$克，再分别加入 5 克盐和 5 克水后，盐水为 100 克，总的含盐量为 14 克，水为$100-14=86$克，所以盐与水的比是 7:43。

故本题选 D。

7.【答案】选 D。

【解析】A 选项如果$a^2=b^2$，那么$a=\pm b$，故错误；B 选项对角线相互垂直且平分的四边形是菱形，故错误；C 选项旋转前后的两个图形，对应点所连线段不一定相等，故错误；D 选项线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等，即垂直平分线的性质，正确。

故本题选 D。

8.【答案】选 B。

【解析】从俯视图可以看出直观图的各部分的个数，可得出左视图的前面有 2 个，中间有 3 个，后面有 1 个，即可得出左视图的形状。

故本题选 B。

9.【答案】选 D。

【解析】由题可知上坡、平路、下坡走各段路程所用时间分别为$\frac{10}{3}$、$\frac{25}{6}$、5 小时，又由题可设上坡、平路、下坡速度分别为x、$1.6x$、$2x$，可得$\frac{10}{3}x+\frac{25}{6}\times1.6x+5\times2x=60$，解得$x=3$，所以平路时速度为$1.6\times3=4.8$。

故本题选 D。

10.【答案】选 B。

【解析】设A管每分钟进水x立方米，B管每分钟进水y立方米，根据题意，得$\begin{cases}(1\times60+15)(x+y)=(2\times60+15)x\\(1\times60+15)(x-y)=150\end{cases}$，解这个方程组得$\begin{cases}x=10\\y=8\end{cases}$，所以$B$管每分钟进水 8 立方米。

故本题选 B。

11.【答案】选 C。

【解析】设这三个质数为a、b、c，由题可得$abc=23\left(a+b+c\right)$，又因为 23 是质数，所以a、b、c中必有一个数是 23，设$a=23$，即$23bc=23\left(23+b+c\right)$，$bc=23+b+c$，由 3 个质数中最小的数为 5，设$b=5$，则$5c=23+5+c$，得$c=7$，那么这三个质数是 5、7、23，最大的数为 23。

故本题选 C。

12.【答案】选 D

【解析】选项 A：三角形的面积$S=\dfrac{1}{2}ah$，所以底一定时，高与面积成正比例关系。

选项 B：长方形的周长$C=2\left(a+b\right)$，所以周长一定时，长与宽既不成正比例关系，也不成反比例关系。

选项 C：圆的面积为$S=\pi r^2$，因为圆周率为定值，所以圆的面积一定时，圆的半径也一定。

选项 D：平行四边形的面积$S=ah$，所以面积一定时，底和高成反比例关系。

综合可知：正确答案为 D。

13.【答案】选 B

【解析】循环小数$0.\dot{2}88156\dot{9}$和$0.\dot{5}367\dot{9}$的循环节分别有7位、5位，且数字9第一次分别出现在小数点后第7位、第5位。所以第一次都出现数字9的数位在小数点后第35位，即选 B。

14.【答案】选 D

【解析】根据题意可知：数字与手指之间的对应关系是以10为周期，又因为$2016\div10=201\cdots6$，所以数到2016时落在的手指与数到6落在的手指相同，即为小指，故选 D。

15.【答案】选 A。

【解析】因为 2016÷4=504，所以 2016 是 4 的倍数，所以蚂蚁从点A_{2016}到A_{2017}的移动方向与从点 O 到A_1的方向一致，为向上，故答案选 A。

16.【答案】选 A。

【解析】首先，我们来分析一下这 10 组日期，经观察不难发现，只有 6 月 7 日和 12 月 2 日这两组日期的日数是唯一的。由此可以看出，假如小红知道的 N 是 7 或者 2，那么她肯定知道老师的生日时哪一天。

再次，我们来分析一下小刘说的话，小刘说："如果我不知道的话，小红肯定也不知道"，而该 10 组日期的月数分别为 3，6，9，12，而且相应月的日期都有两组以上，所以小刘得知 M 后是不可能知道老师生日的。

进一步分析，小刘说："如果我不知道的话，小红肯定也不知道"，通过结论 2 我们可知小红得知 N 后也绝不可能知道。

然后。结合 1 和 3 的分析，可以推断：所有 6 月和 12 月的日期都不是老师的生日，因为如果小刘得知的 M 是 6，而若小红的 N=7，则小红就知道了老师的生日。

同样的道理，如果小刘的 M=12，若小红的 N=2，则小红同样可以知道老师的生日。即：M 不等于 6 和 9。现在只剩下"3 月 4 日、3 月 5 日、3 月 8 日、9 月 1 日、9 月 5 日"五组日期。而小红知道了所以 N 不等于 5（有 3 月 5 日和 3 月 5 日），此时，小红的 N=（1.4.8）注：此时 N 虽然有三种可能，但对于小红只要知道其中的一种，就得出结论。所以有"小红说：本来我也不知道，但是现在我知道了"，通过这样的推理，最后就剩下"3 月 4 日、3 月 8 日、9 月 1 日"三个生日。分析"小刘说：哦，那我就知道了"，说明，M=9，N=1（N=5 已经被排除，3 月份的有两组）。因此正确答案应该是 9 月 1 日。

17.【答案】选 C。

【解析】由题意知，这辆公交车从起始站到终点站一共有 10 个站，在这里用 1 站 10 站表示。那么起始站（1 站）应该至少上来 9 个人，才能保证以后的每一站都有人下车；2 站应该下 1 人，上 8 人；后面的以此类推：

1 站：9 人

2 站：（9-1）+8=16 人

3 站：（9-1）+（8-1）+7=21 人

...

9 站：（9-8）+（8-7）+（7-6）+（6-5）+（5-4）+（4-3）+（3-2）+（2-1）+1=9

10 站：全下了。

即：

1 站：1×9=9 人

2 站：2×8=16 人

3 站：3×7=21 人

...

9 站：9×1=9

10 站：0。

那么公交车最少要有 25 个座位。

18.【答案】选 D。

【解析】如果 1 个西瓜 $\frac{10}{3}$ 元和 $\frac{10}{2}$ 元，那么放一起后，1 个西瓜就是 $\frac{25}{6}$ 元，但由于是以 5 个西瓜 20 元得价格出售的，也就是说 1 个西瓜 4 元，所以，每个西瓜损失了 $\frac{1}{6}$ 元，现在损失了 20 元，所以一共有 $\frac{20}{\frac{1}{6}}=120$ 个西瓜，每个有 120 个。

二、填空题。

1.【答案】298

【解析】设这199个连续的自然数从小到大依次为n、$n+1$、…、$n+198$，所以最小数和最大数的平均数为$\frac{n+n+198}{2}=n+99$。因为最小数和最大数的平均数是199，所以有$n+99=199$，即$n=100$，所以最大数是$n+198=298$。

2.【答案】$n+2$

【解析】因为每个小三角形的边长都是1，所以观察图形可知：第1个图形的周长为$3=1+2$，第2个图形的周长为$4=2+2$，第3个图形的周长为$5=3+2$，第4个图形的周长为$6=4+2$，所以第n个图形的周长为$n+2$。

3.【答案】20分钟

【解析】洗衣机洗衣服，电水壶烧水，擦家具共三件事同时进行，家具擦完，拖地，这样共用了 16 分钟，最后晾衣服，这样安排时间最少，故至少需要 20 分钟。

4.【答案】2π+8

【解析】：绳子围起来的长度等于两个半圆，四个直径的长度，总长度为 2π+8。

5.【答案】选 C。

【解析】设小龙和小虎共同走的路程为 1，由题意可知小龙和小虎速度相同，所以小虎的

路程为$\frac{1}{65\%}=\frac{20}{13}$，小虎剩下的路成为$\frac{20}{13}-1=\frac{7}{13}$;小龙的路程为$\frac{1}{75\%}=\frac{4}{3}$，小龙剩下的路程为$\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$，$\frac{7}{13}>\frac{1}{3}$，所以小龙先到家。

6.【答案】$\frac{4}{9}$、$\frac{7}{9}$、$\frac{8}{9}$。

【解析】$\frac{1}{9}=0.\dot{1}$;$\frac{2}{9}=0.\dot{2}$;$\frac{4}{9}=0.\dot{4}$;$\frac{5}{9}=0.\dot{5}$;$\frac{7}{9}=0.7$;$\frac{8}{9}=0.\dot{8}$，2010 可以整除 1，2，5；2010 不能整除 4，7，8。因此这样的分数的个数共有 3 个。

7.【答案】106。

【解析】设$3n+5$和$5n+4$的大于 1 的公约数为 d，即$\frac{3n+5}{d}$为整数，$\frac{5n+4}{d}$为整数，为了作差后消去n，则$\frac{5\ 3n+5}{d}-\frac{3\ 5n+4}{d}=\frac{13}{d},\frac{13}{d}$为整数，即 d=13，

同理$\frac{2\ 3n+5}{13}-\frac{5n+4}{13}=\frac{n+6}{13},\frac{n+6}{13}$为整数，所以 n 得取值分别为 7，20，33，46

即其和为$7+20+33+46=106$。

8.【答案】86400。

【解析】设这段时间的时针转了 x 圈，则分针转了$12x$ 圈，秒针转了 $720x$ 圈，则有：$x+12x+720x=1466$，解得$x=2$，那么时针转了两圈，即 24 小时，则有$24\times3600=86400$（秒）。

9.【答案】$\frac{2}{3}$；$\frac{1}{3}$。

【解析】喝的果汁：$\frac{1}{3}+(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$；喝的水：$(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$。

10.【答案】12。

【解析】由题意可知：民=0、富=3、国=2、强=7，所以 4 个数字和是 12。

11.【答案】6927。

【解析】根据小红问：“是 8340 吗？”小方说：“一个数字也没猜对”和小红问：“是 8649 吗？”小方说：“猜对了 2 个数字，但位置都不正确”，可得：猜对的两个数字是 6 和 9。再由小红问：“是 2370 吗？”小方说：“猜对了 2 个数字，但位置都不正确”可知猜对的数字是 2 和 7，那么这个四位数上的数字是 6、9、2、7，最后由小红问：“是 4917 吗？”小方说：“猜对了 2 个数字，且位置都正确”可知，9 在百位，7 在个位，又 2 不在千位，因此 6 在千位，2 在十位，所以这个四位数是 6927。

12.【答案】52 岁。

【解析】设今年师傅年龄为b，徒弟年龄为a，设x年前师傅的年龄为$b-x$和徒弟现在的年龄a相等，那时徒弟的年龄为$a-x$，再过$b-a$年徒弟和现在师傅年龄一样大，此时师傅的年龄为$2b-a=75$，依据题意列三个方程为$b-x=a$①；$a-x=6$②；$2b-a=75$，解得$x=23$，$a=29$，$b=52$。所以师傅的年龄为 52 岁。

13.【答案】17.

【解析】假设小华全部答对：该得 4×20=80（分），现在实际只得了 56 分，相差 80-56=24（分），因为答对一题得 4 分，答错一题扣 4 分，这样，一对一错相比，一题就差 8 分（4+4=8），根据总共相差的分数以及做错一题相差的分数，就可以求出做错的题数：24÷8=3（题），一共做 20 题，答错 3 题，答对的应该是：20-3=17（题）4×17=68（分）（答对的应得分）4×3=12（分）（答错的应扣分）68-12=56（分）（实际得分）

14.【答案】12.

【解析】 解这道题的一般思路是先算出这个连乘式的结果，再把它各位上的数字相加。但这是一道“华杯”赛决赛的一道口试题，要求在 1 分钟内报出答案。在口试中，规定时间内答不出题是不能得分的。怎么办呢？

办法是有的。只要把算式中的每个数都仔细观察一番，抓住这些数字特点，可以绕开“把 7 个数连乘”这段弯路。

你看，式中有 2，又有 5， 2×5=10，10 与其它 5 个数的积相乘，只要在末尾添个 0，不影响各位上的数字和。

再看看，式中有 7，11，13。你如果记得：7×11×13=1001，而 1001 与位数比它少的自然数相乘，积的各位上除 0 以外，就是这个数重复一遍，如 51×1001=51051。题中 7 个数除 2，5，7，11，13 外，还有 3×17=51。所以，本题的答案为（5＋1）×2=12。

15.【答案】168.

【解析】 7×18-6×19=126-114=12

6×19-5×20=114-100=14

去掉的两个数是 12 和 14 它们的乘积是 12×14=168。

16.【答案】1.

【解析】第三、四次的成绩和比前两次的成绩和多 4 分，比后两次的成绩和少 4 分，推知后两次的成绩和比前两次的成绩和多 8 分。因为后三次的成绩和比前三次的成绩和多 9 分，所以第四次比第三次多 9－8=1（分）。

17.【答案】94.

【解析】当把糊了 88 个纸盒的同学计算在内时，因为他比其余同学的平均数多 88-74＝14（个），而使大家的平均数增加了 76－74=2（个），说明总人数是 14÷2＝7（人）。因此糊得最快的同学最多糊了 74×6-70×5＝94（个）。

18.【答案】9∶24。

【解析】甲车到达 C 站时，乙车还需 16-5＝11（时）才能到达 C 站。乙车行 11 时的路程，两车相遇需 11÷（1＋1.5）＝4.4（时）＝4 时 24 分，所以相遇时刻是 9∶24。

19.【答案】8 分钟。

【解析】设车速为a，小光的速度为b，则小明骑车的速度为$3b$。根据追及问题“追及时间×速度差＝追及距离”，可列方程

$$10(a-b)=20(a-3b),$$

解得$a=5b$，即车速是小光速度的 5 倍。小光走 10 分相当于车行 2 分，由每隔 10 分有一辆车超过小光知，每隔 8 分发一辆车。

20.【答案】75

【解析】最小的两个约数是 1 和 3，最大的两个约数一个是这个自然数本身，另一个是这个自然数除以 3 的商。最大的约数与第二大的约数之比是 3：1，由此得出这个自然数是 100÷（1+3）×3=75.

三、简答题。

1.【答案】（1）1313；（2）1313，2626，3939，5252，6565，7878，9191，10504，11817，42016。

【解析】因为$101101=7\times11\times13\times101$，又 10 个不同自然数的和最小为$1+2+3+\cdots+10=55$，所以至少要 55 才能分解成 10 个不同自然数的和。设最大公约数为x，则$x(a_0+a_1+\cdots+a_{10})=101101$，根据$101101=7\times11\times13\times101$，所以最大公约数的最大值为$13\times101=1313$。那么$a_0+a_1+\cdots+a_{10}=7\times11=77$，找 10 个不同自然数之和为 77 即可，再乘以 1313，即为最后答案。

2.【答案】（1）5；（2）$\frac{1}{6}$。

【解析】（1）设这 11 个数字之和是 20 的倍数，根据题意，除x、y，得$1+3+9+4+5+1+3+8+1=35$，能被 20 整除的数有 40，60，80 等，又x、y是 0 到 9 的整数，得$x+y=5$。

（2）由（1）得$x+y=5$，有 5 种情况：$(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)$，甲一次

就能拨对乙手机号码的概率为$\frac{1}{6}$。

3.【答案】$\frac{v_{甲}}{v_{乙}}=\frac{5}{3}$

【解析】设环形跑道一圈的长度为s，甲、乙两人跑步的速度分别为$v_{甲}$、$v_{乙}$。

因为两人同时同底同向出发，24 分钟后甲首次追上乙，则$v_{甲}>v_{乙}$，

所以$24\left(v_{甲}-v_{乙}\right)=s\cdots\cdots①$。

因为追上后甲转身与乙反向而行，又经过6 分钟后两人再次相遇，

所以$6\left(v_{甲}+v_{乙}\right)=s\cdots\cdots②$。

综合①②解得：$v_{甲}=\frac{5}{42}s$，$v_{乙}=\frac{3}{42}s$。

所以$\frac{v_{甲}}{v_{乙}}=v_{甲}:v_{乙}=\frac{5s}{42}:\frac{3s}{42}=5:3=\frac{5}{3}$。

答：甲与乙跑步的速度之比为$\frac{5}{3}$。

4.【答案】（1）70, 50；（2）840万元

【解析】（1）设乙工程队每天铺设x米，则甲工程队每天铺设$x+20$米，设乙工程队每天需要的费用为y，则甲工程队每天需要的费用为$(1+40\%)y$。可得$\frac{4200}{x}y=\frac{4200}{x+20}\times 1.4y$，解得$x=50$米，所以甲、乙两工程队每天分别各铺设 70 米、50 米。

（2）$\frac{4200}{70+50}\times(10+10\times 1.4)=840$万元。

5.【解析】：设有鸽子x只，鸽笼y只

$$\begin{cases}6y+3=x\\x+5=8y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=27\\y=4\end{cases}$$

6.【答案】白棋子的个数为 24 个；黑棋子的个数为 48 个

【解析】假设每次取出的黑子不是 4 个，而是 6 个（6=3×2），也就是说每次取出的黑子个数也是白子的 2 倍。由于这堆棋子中黑子个数是白子的 2 倍，所以，待取到若干次后，黑子、白子应该都取尽。但是实际上当白子取尽时，（留下）黑子还有 16 个，这是因为实际每次取黑子是 4 个，和假定每次取黑子 6 个相比，相差（留下的是）2 个。由此可知，一共取的次数是：16÷2=8（次）。白棋子的个数为：3×8=24（个）。黑棋子的个数为 24×2=48（个）。

7.【答案】整顿前产的化肥 1800 吨；整顿后产的化肥 2200 吨。

【解析】我们容易算出整顿后生产的天数是：49-24-3=22（天）。由于整顿后每天比整顿前多生产化肥 25 吨，所以，一共多生产化肥 22×25=550（吨）。可题目中却说整顿后比整顿前一共多生产化肥 400 吨，这岂不是“自相矛盾”吗？

究竟“矛盾”出在哪里呢？原来，我们刚才算出的“550 吨”是整顿后 22 天比整顿前 22 天多生产的化肥；而题目中告诉我们的“400 吨”是整顿后 22 天比整顿前 24 天多生产的化肥。这完全是两码事，所以“550 吨”与“400 吨”并不矛盾。从上面的比较中，我们看出：“550 吨”与“400 吨”的差 150 吨正好是整顿前 2 天的产量，因此，整顿前每天生产化肥 150÷2=75（吨）。从而，75×24=1800（吨）就是整顿前产的化肥；1800+400=2200（吨）就是整顿后产的化肥。

8.【答案】（1）11；（2）675.

【解析】（1）设火车速度为 a 米／秒，行人速度为 b 米／秒，则由火车的长度可列出方程 $18(a-b)=15(a-b)$，求出 $\frac{a}{b}=11$，即火车的速度是行人速度的 11 倍；

（2）从车尾经过甲到车尾经过乙，火车走了 135 秒，此段路程一人走需 135×11=1485（秒），因为甲已经走了 135 秒，所以剩下的路程两人走还需（1485－135）÷2＝675（秒）。

9.【答案】见解析。

【解析】 63=7×1×9 所以丙拿的 1，7，9

48=2×3×8 所以甲拿的 2，3，8

4+5+6=15 因此乙拿的是 4，5，6。

四、案例分析题。

1. 见解析

【解析】（1）从数学教学中师生角色的角度看，以上探究教学过程主要存在的问题是忽视了学生的主体性地位。

数学教学中师生关系在《义务教育数学课程标注（2011年版）》中有明确指出：学生是数学学习的主体，在积极参与学习活动的过程中不断得到发展，学生获得知识必须建立在自己思考的基础上，在亲身参与教学活动中实现知识技能、数学思考、问题解决和情感态度方面的发展。教师是学生学习活动的组织者、引导者、合作者，为学生的发展提供良好的环境和条件。好的教学活动应是学生主体地位和教师主导作用的和谐统一。

在上述探究教学过程中，“提出问题”环节是教师直接给出四个算式。在学生计算和观察后，教师又直接将学生的猜想统一罗列。对于猜想的结果仅仅通过“有无不同意见”草草结束，缺乏学生实际的验证。所以在整个过程中，教师剥夺了学生思考和开口说话的权利，没有让学生真正意义的参与到教学活动中。

在教学中，利用创设情境、设计问题，引导学生自主探索、合作交流；组织学生操作实验、观察现象、提出猜想、推理论证等，真正有效地启发学生思考，才能使学生成为学习的主体，逐步学会学习。

（2）为了体现学生的主体性地位，教师在上课之初可以通过具体的生活情境鼓励学生自主进行列式计算，得到四个算式$40+56$，$56+40$，$78+35$，$35+78$。

在学生自主计算和观察后，教师可以引导学生在全班范围内交流自己的发现：在得出“$40+56$和$56+40$的计算结果都是96，$78+35$和$35+78$的计算结果都是113”后，引导学生发现“$40+56$和$56+40$以及$78+35$和$35+78$这两对算式中加数的位置交换。”并且请学生尝试着再写几组加法算式，验证所得规律。

在给出加法交换律的定义后，教师可以鼓励学生尝试用自己的方法描述加法交换律，并且请几位同学上台板演后，师生共同总结归纳出$a+b=b+a$。

2.【参考答案】见解析

【解析】（1）在教学过程中需要渗透转化思想、极限思想。将圆转化为长方形、转化为圆内接正多边形都体现了转化思想。随着圆被分的份数越多，每一份越小，则拼成的图形就会越接近于一个长方形；随着圆内接正多边形的边数越多，圆内正多边形就越接近圆，都可以体现极限思想。

（2）本节课的数学史是关于刘徽及其割圆术，可以帮助学生初步了解中国数学的发展过程，提高学习数学的兴趣，加深对转化思想、极限思想的理解，实现数学思考、问题解决等方面的发展。同时在了解中国数学的发展历史的过程中，增强学生的民族自豪感，实现情感态度方面的发展。

（3）教学过程

一、创设情境，导入新课

（多媒体呈现圆形草坪图片）

教师创设问题情境：学校想给圆形草坪重新植草皮，大家知道草皮需要多少吗？

学生自由发言，确定草皮面积即为圆的面积，引出问题：“圆的面积如何确定呢？”，教师板书课题。

二、动手操作，探究新知

1.确定“转化”策略。

教师引导学生自主回忆已经学习的几何图形面积公式的推导过程及方法，学生举手发言。

明确：平行四边形、三角形等图形“转化”为其他图形的方法来推导出它们的面积计算公式。

2.动手转化

（1）教师提问：怎样才能把圆形转化为我们已经学过的其它图形呢？

师：（教师配合课件演示适当说明）如果我们把一个圆形平均分成16分，其中的每一份像我们已经学过的什么图形呢？

学生观察后可以确定：每一份都是一个近似三角形。

师：那么这个近似三角形的一条边跟圆形有什么关系呢？（教师指示）

引导学生观察，明确这个近似三角形的两条边都是圆的半径。

（2）学生四人为一小组，教师给每组分发已经等分好成16份的圆形，鼓励学生小组内动手操作，尝试把圆形“转化”为已经学过的其它图形。

在学生动手操作的过程中，教师要加强巡视和针对性指导，鼓励学生拼出最简单、最容易计算面积的图形。并将“转化”后的图形分组展示。

3.探究联系

学生分组展示后，将其中“转化”为长方形的一组作品贴在黑板上。

教师提问：在这种转化过程中，它们的面积有没有改变？

学生小组内讨论，确定近似的长方形面积与圆的面积相等。

教师：如果将圆等分成32份、64份、128份、......一直这样下去分成很多份，拼成的图形就变成真正的长方形。（课件演示）

教师追问：在圆形与长方形之间，它们除了面积相等以外，还有哪些相等关系呢？

学生小组讨论，代表发言，明确：圆的半径为长方形的宽，圆的周长的一半为长方形的长，并用字母表示为 r 、$\frac{C}{2}$ （$=\pi r$ ）。

教师鼓励学生尝试写一写圆的面积、长方形的面积，并根据学生的回答进行板书，得出圆的面积公式。

4.回忆历史

教师引导学生自主阅读素材二，了解刘徽及圆的面积的推导，并全班同学交流体会。

三、运用公式，解决问题

给出圆形草坪的半径，学生自主完成上课之初的问题。

四、课堂小结，反省归纳

教师提问：通过本节课的学习，大家都有什么收获？

学生自由发言，师生共同归纳。

五、课后作业，深化提高

全体学生完成必做题，学有余力的学生完成选做题。

1.必做题：自编习题2道，并尝试用今天所学的知识解决。

2.选做题：收集圆的面积计算公式的相关资料，与同学进行交流。

3.【参考答案】（1）值得肯定的是教师通过让学生自己动手去涂色，引导学生自己去获取新知，启迪了学生的思维。充分体现了现代课堂教师是主导，学生是主体的理念。

（2)教学过程中存在的问题是,在教师提出第一个问题:“为什么A盒中球全涂红色？”，学生回答后，对学生的回答没有给予明确的评价。在做总结时，没有引导学生自己总结，在此环节，应该给出具体的思路，引导学生自己总结，也能够让学生自己去体会什么是规范的语言。在第二个环节中，引导不明确，导致学生出现了茫然的表情。

4.【参考答案】

一、创设情境，导入新课

教师通过给学生讲小熊和狐狸的故事，创设问题情境：狐狸眼珠子一转，说“熊老弟，反正我俩的篱笆一样长，不管怎么围菜地的大小都是一样的”，大家认为狐狸说的对吗？

通过学生有趣的故事情境引入课题，让学生自由去讨论。

二、动手操作，探究新知

1.教师给每位学生发放一根固定长度的绳子，让学生自己动手去围一围，让学生举手回答。

明确：对于固定长度的篱笆，不同的围法，菜地的大小是不一样的。

2.教师提问：那怎么样围才能使菜地的面积最大呢？此时将学生分组进行讨论。

在学生讨论的过程中，适时地引导学生用数字2来表示篱笆的周长。

教师提问：那么菜地的面积应该怎么表示呢？

让学生带着问题，主动探索，在学生探索过程中，教师巡视课堂，观察学生解决问题的情况，适时引导学生。

3.学生反馈探索结果

提问学生回答思维的过程和结果，教师一边听学生回答，一边在黑板演示思维过程。

用字母 a 来表示围成的菜地的长，则菜地的宽是 $1-a$，则菜地的面积为 $S=a(1-a)$，根据二次函数的性质得到当 $a=\frac{1}{2}$ 时，菜地的面积最大。

三、巩固练习

以生活中的小数学家练习题“现有长度为 10cm 的彩带，用彩带包装长方形礼品盒，那么可以包装的最大礼品盒的面积是多少平方厘米呢？”提高学生对本节课知识的梳理和巩固。

四、课堂小结

教师引导学生，让学生谈谈自己本节课的收获和心得体会，总结出周长固定，正方形的面积最大。使学生进一步巩固本节课所学知识，从而提高学生的语言表达能力和信息交流能力。

五、课后作业

让学生回家用固定个数的小长方体盖房子，怎么样设计才能使房屋面积最大。

5.【参考答案】：(1)相关数学知识：比的意义，商不变的性质和分数的基本性质。相关数学活动经验：这是一堂概念课，它的学习与之前学生学习分数的基本性质，商不变的性质过程实际上是同一个道理。

（2）比的前项和后项同时乘以或者除以相同的数（0 除外），比值不变。

（3）应用比的基本性质化简比。

（4）教学过程简案：

（一）复习旧知

（1）尝试比较 $\frac{3}{4},\frac{6}{8},\frac{12}{16}$ 的大小？

（2）有什么办法可以判断他们的大小？

通过提问引出本节课的内容：比的基本性质

（二）讲授新课

让学生观察 3:4、6:8 和 12:16。向学生提问，找出两个比的相同点。安排学生先独立思考，然后同桌之间相互讨论。（学生回答他们的相同点是比值相等）

进而再次抛出问题，我们是否可以写成 3:4=6:8=12:16？

根据问题，让学生根据比和除法的关系研究

6÷8＝(6×2)÷(8×2)＝12÷16

↓　　　　↓　　　　　↓

6 ： 8=(6×2) ： (8×2)=12:18

规律：比的前项和后项同时乘相同的数(0 除外)，比值不变。

6∶8＝(6÷2)∶(8÷2)＝ 3∶ 4

↓　　　　↓　　　　↓

6 ÷ 8＝(6÷2) ÷ (8÷2)＝3 ÷ 4

规律：比的前项和后项同时除以相同的数(0除外)，比值不变。

最后引导学生尝试概括出比的基本性质。

（三）巩固练习

化简下列比值：

（1）15:20　　（2）0.3:0.8　　（3）0.4:1.6

（四）小结

提问学生，让学生说说自己本节课收获了什么？进而再一次回忆本节课学习的重点：比的基本性质。同时还可以锻炼学生的言语表达能力

（五）课后作业

完成本节课课后练习中化简的题目。

初中答案解析

一、单项选择题。

1.D

【解析】A 应为 $2a$，B 为 a^2，C.当 a 为 0 时不成立，D 正确，故选 D。

2.C

【解析】俯视图为从上方的平行光线照射物体，在下方的投影，故选 C。

3.C

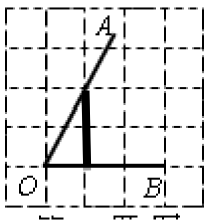
【解析】无限不循环小数时无理数，A 错；B 是无理数，B 错；C 正确；D 为 $\frac{2}{a}$；故选 C。

4.C

【解析】反比例函数 $y=\frac{a-2}{x}$ 的图象在第二、四象限，a-2＜0，a＜2；故选 C。

5.A

【解析】如图，做垂直，则 cos∠AOB=$\frac{\sqrt{5}}{5}$ 故选 A。

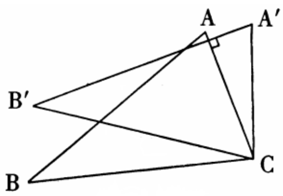


6.C

【解析】将△ABC 绕着点 C 按顺时针方向旋转 20°，

B 点落在 B' 位置，A 点落在 A' 位置，则∠ACA'=20°

则∠BAC=∠A'=90°-20°=70°；故选 C。



7.B

【解析】由图可知，∠AOB=90°，OA=$2\sqrt{2}$，则圆锥的底面周长为 $\frac{90\pi\times2\sqrt{2}}{180}=\sqrt{2}\pi$，

所以圆锥底面半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$；故选 C。

8. A

【解析】只有当温度大于 25 时，硝酸钾的溶解度比氯化铵的溶解度大；故选 A。

9. B

【解析】当点 P 在 AD 上时，△ABP 的底边 AB 不变，高增大，所以△ABP 的面积 S 随着时间 t 的增大而增大；当点 P 在 DE 上时，△ABP 的底边 AB 不变，高不变，所以△ABP 的面积 S 不变；当点 P 在 EF 上时，△ABP 的底边 AB 不变，高减小，所以△ABP 的面积 S 随着时间 t 的增大而减小；当点 P 在 FG 上时，△ABP 的底边 AB 不变，高不变，所以△ABP 的面积 S 不变；当点 P 在 GB 上时，△ABP 的底边 AB 不变，高减小，所以△ABP 的面积 S 随着时间 t 的增大而减小．故选 B.

10. B

【解析】对于每个图中的白色纸片的个数，依次是 4，7＝4＋3，10＝4＋3×2，…，那么，第 n 个图中的白色纸片的个数为 $4+3\times(n-1)=3n+1$，令 $3n+1=2017$，解得 $n=672$。

11. B

【解析】在 Rt△ABC 中，∵$AC=BC=\sqrt{2}$，∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2$，∴$S_{阴影}=S_{扇形DAB}=\dfrac{30\pi\times2^2}{360}=\dfrac{\pi}{3}$。

12. B

【解析】∵菱形 $OABC$ 的顶点坐标为 $O(0,0)$，点 B 的坐标是(2，2)，∴BO 与 x 轴的夹角为 45°，∵菱形的对角线互相垂直平分，∴点 D 是线段 OB 的中点，∴点 D 的坐标是(1，1)，∵菱形绕点 O 逆时针旋转，每秒旋转 45°，360°÷45°＝8，∴每旋转 8 秒，菱形的对角线交点 D 就回到原来的位置(1，1)，∵60÷8＝7……4，∴第 60 秒时是把菱形绕点 O 逆时针旋转了 7 周回到原来位置后，又旋转了 4 秒，即又旋转了 4×45°＝180°，∴点 D 的对应点落在第三象限，且对应点与点 D 关于原点 O 成中心对称，∴第 60 秒时，菱形的对角线交点 D 的坐标为(－1，－1).

13. C

【解析】在∵△ABA_1 中，$AB=A_1B$，∴∠A=∠BA_1A，∵$A_1A_2=A_1B_1$，∴$\angle B_1A_2A_1=\dfrac{1}{2}\angle BA_1A$，

同理，$\angle B_2A_3A_2=\frac{1}{2}\angle B_1A_2A_1=\frac{1}{4}\angle BA_1A$，$\therefore \angle A_n=\frac{1}{2^{n-1}}\angle BA_1A=\frac{70°}{2^{n-1}}$.

二、填空题。

1．$\frac{50}{101}$

【解析】原式$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{99}-\frac{1}{101})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{101})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{101})=\frac{50}{101}$.

2．$(3^{2016}-2)\times 3^{2016}+1=(3^{2016}-1)^2$

【解析】第①个式子转化为：$(3^1-2)\times 3^1+1=(3^1-1)^2$，第②个式子转化为：$(3^2-2)\times 3^2+1=(3^2-1)^2$，第③个式子转化为：$(3^3-2)\times 3^3+1=(3^3-1)^2$，第④个式子转化为：$(3^4-2)\times 3^4+1=(3^4-1)^2$，…，由以上规律可得，第 n 个式子为：$(3^n-2)\times 3^n+1=(3^n-1)^2$，当 $n=2016$ 时，第 2016 个式子为：$(3^{2016}-2)\times 3^{2016}+1=(3^{2016}-1)^2$.

3．$\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$

【解析】

n	1	2	3	4	…	n
钢管数	3	9	18	30	…	…
规律	$\frac{3\times 1\times 2}{2}$	$\frac{3\times 2\times 3}{2}$	$\frac{3\times 3\times 4}{2}$	$\frac{3\times 4\times 5}{2}$	…	$\frac{3n(n+1)}{2}$

由表可知，第 n 个图的钢管数是$\frac{3n(n+1)}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$.

4．(20，0)

【解析】将点 P 的横纵坐标分开来看，P_n 的横坐标始终在变化且逐渐增大，而 P_n 的纵坐标变化呈周期变化，即 1，1，0，－1，－1，0，所以每 6 个点 P 的纵坐标为一个循环，显然 $60\div 6=10$，恰好能够整除，所以点 P_{60} 的纵坐标为 0，即在 x 轴上，显然 P_6，P_{12}，P_{18}，…，这些点的横坐标为：2，4，6，…，所以点 P_{6k} 的纵坐标为 $2k$，$\therefore$点 P_{60} 的横坐标为 20，$\therefore$

点 P_{60} 的坐标为(20，0).

5．(2^{1008}，0)

【解析】∵点 B 的位置依次落在第一象限、y 轴正半轴、第二象限、x 轴负半轴、第三象限、y 轴负半轴、第四象限、x 轴正半轴，…，每 8 次一循环，2016÷8＝252，∴点 B_{2016} 落在 x 轴正半轴，故 B_{2016} 的纵坐标是 0；OB_n 是正方形的对角线，$OB_1=\sqrt{2}$，$OB_2=2=(\sqrt{2})^2$，$OB_3=2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^3$，…，∴$OB_{2016}=(\sqrt{2})^{2016}=2^{1008}$，∴点 B_{2016} 的坐标为(2^{1008}，0).

6．$BO_1=2=\frac{3^{1-1}}{2^{2-3}}$；$BO_n=\frac{3^{n-1}}{2^{2n-3}}$

【解析】矩形纸片 ABCD 中，$AB=\sqrt{6},BC=\sqrt{10}$，BD=4，

（1）当 n=1 时，

第一次将纸片折叠，使点 B 与点 D 重合，折痕与 BD 交于点 O_1，

$O_1D=O_1B=2$，

$BO_1=2=\frac{3^{1-1}}{2^{2-3}}$

（2）当 n=2 时，

第二次将纸片折叠使点 B 与点 D_1 重合，折痕与 BD 交于点 O_2，O_1D 的中点为 D_1，

$O_2D_1=BO_2=\frac{3^{2-1}}{2^{4-3}}$，

设 O_2D_1 的中点为 D_2，第三次将纸片折叠使点 B 与点 D_2 重合，折痕与 BD 交于点 O_3，

$O_3D_2=O_3B=\frac{3^{3-1}}{2^{6-3}}$，以此类推，当 n 次折叠后，$BO_n=\frac{3^{n-1}}{2^{2n-3}}$。

7．抛物线 C_2 的顶点坐标为<u>（3，2）</u>；抛物线 C_8 的顶点坐标为 $\underline{\left(55,\frac{58}{3}\right)}$

【解析】解：设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$

则$\begin{cases}-3k+b=0\\ b=1\end{cases}$

解得 $k=\frac{1}{3}$，$b=1$

直线 AB 的解析式为 $y=\frac{1}{3}x+1$

抛物线 C_2 的顶点坐标的横坐标为 3，且顶点在直线 AB 上

抛物线 C_2 的顶点坐标为（3，2）

对称轴与 x 轴的交点的横坐标依次为 2，3，5，8，13，...

每个数都是前两个数的和

抛物线 C_8 的顶点坐标的横坐标为 55

抛物线 C_8 的顶点坐标为（55，$\frac{58}{3}$）

三、简答题。

1．解：(1)点 $A(1，2)$是一次函数 $y=kx+1$ 与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$的公共点，$k+1=2$，$\frac{m}{1}=2$，$k=1$，$m=2$；

(2)直线 l 交 x 轴于点 $N(3，0)$，且与一次函数的图象交于点 B，所以点 B 的横坐标为 3，将 $x=3$ 代入 $y=x+1$，得 $y=3+1=4$，所以点 B 的坐标为(3，4)；

(3)如解图，过点 A 作 $AD\perp$直线 l，垂足为点 D，

由题意得，点 C 的横坐标为 3，

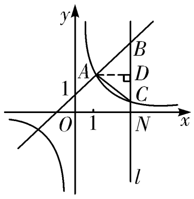
因为点 C 在反比例函数图象上，

所以 $y=\frac{2}{x}=\frac{2}{3}$，所以 C 点坐标为$(3，\frac{2}{3})$，

$BC=BN-CN=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$，

又 $AD=3-1=2$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times2=\frac{10}{3}$。



2.解：(1)设 D 点坐标为$(a，0)$，

因为 $AB\perp y$ 轴，点 A 在直线 $y=x$ 上，B 为双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$上一点，

所以 A 点坐标为$(a，a)$，B 点坐标为$(a，\frac{k}{a})$，

故 $AB=a-\frac{k}{a}$，$BD=\frac{k}{a}$，

在 Rt△OBD 中，$OB^2=BD^2+OD^2=(\frac{k}{a})^2+a^2$，

因为 $OB^2-AB^2=4$，

即$(\frac{k}{a})^2+a^2-(a-\frac{k}{a})^2=4$，

所以 $k=2$；

(2)如解图，过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M，

联立$\begin{cases} y=x \\ y=\frac{2}{x} \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$或$\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$（舍去），

所以 C 点坐标为$(\sqrt{2}，\sqrt{2})$，

又点 B 的横坐标为 4，

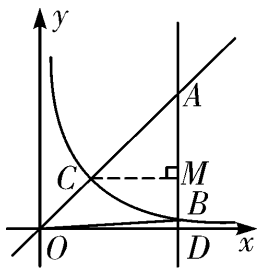
所以 A 点坐标为$(4，4)$，B 点坐标为$(4，\frac{1}{2})$，

所以 $AB=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$，$CM=4-\sqrt{2}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CM\cdot AB$

$=\frac{1}{2}\times(4-\sqrt{2})\times\frac{7}{2}$

$=7-\frac{7\sqrt{2}}{4}$；



第 2 题解图

(3)不存在，理由如下：

因为 $APC\backsim\triangle AOD$，

$\triangle AOD$ 为等腰直角三角形，

所以$\triangle APC$ 为等腰直角三角形，$\angle ACP=90°$，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AP$，

设 P 点坐标为$(a，\frac{2}{a})$，则 A 点坐标为$(a，a)$，

$AP=|a-\frac{2}{a}|$，

因为 C 点坐标为$(\sqrt{2}，\sqrt{2})$，

所以 $CM=|a-\sqrt{2}|$，

所以$|a-\sqrt{2}|=\frac{1}{2}|a-\frac{2}{a}|$，

即$(a-\sqrt{2})^2=\frac{1}{4}\times\frac{(a^2-2)^2}{a^2}$，

即$(a-\sqrt{2})^2=\frac{1}{4}\times\frac{(a+\sqrt{2})^2\times(a-\sqrt{2})^2}{a^2}$，

$\left(a-\sqrt{2}\right)^2\cdot\left[4a^2-\left(a+\sqrt{2}\right)^2\right]=0$，解得 $a=\sqrt{2}$或 $a=-\frac{\sqrt{2}}{3}$(舍去)，

因为 P 点坐标为$(\sqrt{2}，\sqrt{2})$，则此时点 C 与点 P 重合，所以不能构成三角形，故不存在．

3.解：（1）由 $kx=x+2$，

得（$k-1$）$x=2$．

依题意 $k-1\neq0$．

得 $x=\frac{2}{k-1}$．

因为方程的根为正整数，k 为整数，

所以 $k-1=1$ 或 $k-1=2$．

故 $k_1=2$，$k_2=3$．

（2）依题意，二次函数 $y=ax^2-bx+kc$ 的图象经过点（1，0），

所以 $0=a-b+kc$，$kc=b-a$，

$$\frac{(kc)^2-b^2+ab}{akc}=\frac{(b-a)^2-b^2+ab}{a(b-a)}=\frac{b^2-2ab+a^2-b^2+ab}{ab-a^2}=\frac{a^2-ab}{ab-a^2}=-1。$$

（3）证明：方程②的判别式为$\Delta=(-b)^2-4ac=b^2-4ac$．

由 $a\neq0$，$c\neq0$，得 $ac\neq0$．

（i）若 $ac<0$，则 $-4ac>0$．故$\Delta=b^2-4ac>0$．

此时方程②有两个不相等的实数根．

（ii）证法一：若 $ac>0$，由（2）知 $a-b+kc=0$，

故 $b=a+kc$．

$\Delta=b^2-4ac=(a+kc)^2-4ac$

$=a^2+2kac+(kc)^2-4ac$

$=a^2-2kac+(kc)^2+4kac-4ac$

$=(a-kc)^2+4ac(k-1)$

因为方程 $kx=x+2$ 的根为正实数，

所以方程（$k-1$）$x=2$ 的根为正实数.

由 $x>0$，$2>0$，得 $k-1>0$.

所以 $4ac(k-1)>0$.

因为（$a-kc$）$^2\geq 0$，

所以 $\Delta=(a-kc)^2+4ac(k-1)>0$.

此时方程②有两个不相等的实数根.

证法二：若 $ac>0$，

因为抛物线 $y=ax^2-bx+kc$ 与 x 轴有交点，

所以 $\Delta_1=(-b)^2-4akc=b^2-4akc\geq 0$.

$(b^2-4ac)-(b^2-4akc)=4ac(k-1)$.

由证法一知 $k-1>0$，

所以 $b^2-4ac>b^2-4akc\geqslant 0$.

所以 $\Delta=b^2-4ac>0$. 此时方程②有两个不相等的实数根.

综上，方程②有两个不相等的实数根。

4.解：（1）当 $m=2$ 时，$y=(x-2)^2$，

则 G（2，0），

点 P 的横坐标为 4，且 P 在抛物线上，

将 x=4 代入抛物线解析式得：y=（4－2）^{2}=4，

所以 P（4，4），（1 分）

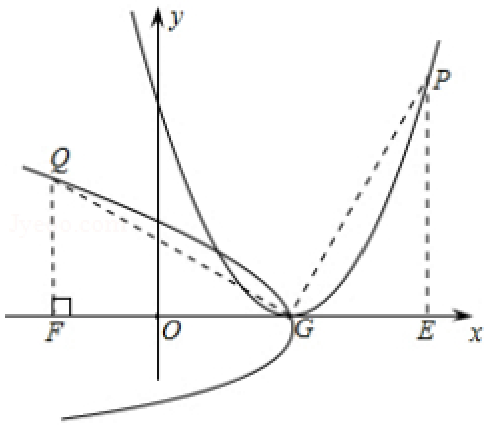
如图，连接 QG、PG，过点 Q 作 QF⊥x 轴于 F，过点 P 作 PE⊥x 轴于 E，

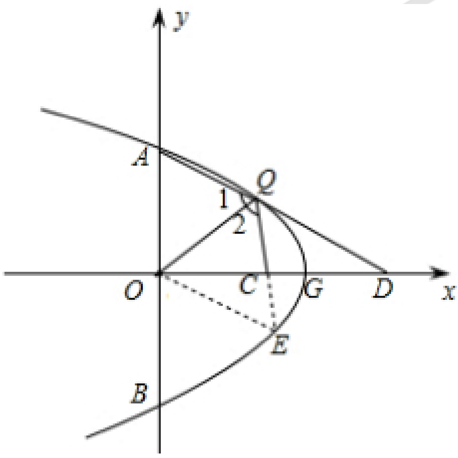
依题意，可得△CQF≌PGE；

则 FQ=EG=2，FG=EP=4，

所以 FO=2．

所以 Q（－2，2）．（2 分）





（2）已知 Q（a，b），则 GE=QF=b，FG=m－a；

由（1）知：PE=FG=m－a，GE=QF=a，即 P（$m+b$，m－a），

代入原抛物线的解析式中，得：$m-a=(m+b)^2-2m(m+b)+m^2$

$m-a=m^2+b^2+2mb-2m^2-2mb+m^2$

$a=m-b^2$，

故用含 m，b 的代数式表示 a：$a=m-b^2$．（4 分）

（3）如图，延长 QC 到点 E，使 CE=CQ，连接 OE；

∵C 为 OD 中点，

∴OC=CD，

∵∠ECO=∠QCD，

∴△ECO≌△QCD，

∴OE=DQ=m；（5 分）

∵AQ=2QC，

∴AQ=QE，

∵QO 平分∠AQC，

∴∠1=∠2，

∴△AQO≌△EQO，（6 分）

∴AO=EO=m，

∴A（0，m），（7 分）

∵A（0，m）在新的函数图象上，

∴$0=m-m^2$

∴$m_1=1$，$m_2=0$（舍），

∴ m=1（8 分）

5.证明：连接 AF，

∵AD 是角平分线，

∴∠BAD=∠CAD，

又 EF 为 AD 的垂直平分线，∴AF=FD，∠DAF=∠ADF，

∵∠DAC+∠CAF=∠B+∠BAD，

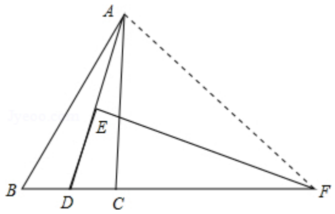
∴∠CAF=∠B，

∵∠AFC=∠AFC，

∴△ACF∽△BAF，即$\frac{CF}{AF}=\frac{AF}{BF}$，

∴AF^2=CF•BF，

即 $FD^2=CF\bullet BF$.



6.解：（1）45；

（2）如图 2，以 A 为顶点 AB 为边在△ABC 外作∠BAE=60°，并在 AE 上取 AE=AB，连接 BE 和 CE.

∵△ACD 是等边三角形，

∴AD=AC，∠DAC=60°.

∵∠BAE=60°，

∴∠DAC+∠BAC=∠BAE+∠BAC.

即∠EAC=∠BAD.

∴△EAC≌△BAD.

∴EC=BD.

∵∠BAE=60°，AE=AB=3，

∴△AEB 是等边三角形，

∴∠EBA=60°，EB=3，

∵∠ABC=30°，

∴∠EBC=90°.

∵∠EBC=90°，EB=3，BC=4，

∴EC=5.

∴BD=5.

（3）∠DAC=2∠ABC 成立，

以下证明：

如图3，过点B作BE∥AH，并在BE上取BE=2AH，连接EA，EC．并取BE的中点K，连接AK．

∵AH⊥BC于H，

∴∠AHC=90°．

∵BE∥AH，

∴∠EBC=90°．

∵∠EBC=90°，BE=2AH，

∴$EC^2=EB^2+BC^2=4AH^2+BC^2$．

∵$BD^2=4AH^2+BC^2$，

∴EC=BD．

∵K为BE的中点，BE=2AH，

∴BK=AH．

∵BK∥AH，

∴四边形AKBH为平行四边形．

又因为∠EBC=90°，

∴四边形AKBH为矩形．

∴∠AKB=90°．

∴AK是BE的垂直平分线．

∴AB=AE．

∵AB=AE，EC=BD，AC=AD，

∴△EAC≌△BAD．

∴∠EAC=∠BAD．

∴∠EAC﹣∠EAD=∠BAD﹣∠EAD.

即∠EAB=∠DAC.

∵∠EBC=90°，∠ABC 为锐角，

∴∠ABC=90°﹣∠EBA.

∵AB=AE，

∴∠EBA=∠BEA.

∴∠EAB=180°﹣2∠EBA.

∴∠EAB=2∠ABC.

∴∠DAC=2∠ABC.

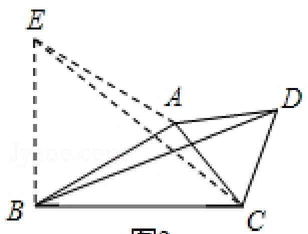


图2

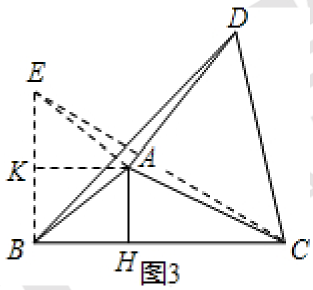
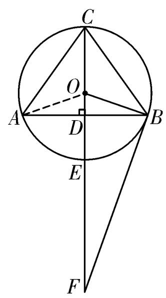


图3

7. (1)证明：如解图，连接 OA，



第 7 题解图

∵$CE\perp AB$,

∴$AD=BD=2$， $AE=BE$ ，

∴$\angle ACE=\angle BCE$， $\angle AOE=\angle BOE$,

又∵$\angle AOB=2\angle ACB$,

∴$\angle BOE=\angle ACB$;

(2)解：∵$\cos\angle ACB=\frac{1}{3}$,

∴$\cos\angle BOD=\frac{1}{3}$,

在Rt△BOD中，设 $OD=x$，则 $OB=3x$，

∵ $OD^2+BD^2=OB^2$，

∴$x^2+2^2=(3x)^2$，解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴$OB=3x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

即⊙O的半径为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

(3)证明：∵$FE=2OE$,

∴$OF=3OE=\frac{9\sqrt{2}}{2}$,

∴$\frac{OB}{OF}=\frac{1}{3}$,

∴$\frac{OD}{OB}=\frac{1}{3}$,

∴$\frac{OB}{OF}=\frac{OD}{OB}$,

∵$\angle BOF=\angle DOB$,

∴$\triangle OBF\backsim\triangle ODB$,

∴$\angle OBF=\angle ODB=90°$，即 $OB\perp BF$,

∵OB是⊙O的半径，

∴BF是⊙O的切线.

8.(1)解：∵点 P为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，PG为⊙O的直径，

∴$BP=PC$，$PG\perp BC$，$CD=BD$,

$\therefore \angle ODB=90°$，

$\because D$为OP的中点，

$\therefore OD=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}OB$,

$\therefore \angle OBD=30°$，

$\because AB$为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle BAC=60°$；……………………………………………………(3 分)

(2)证明：由(1)知，$CD=BD$,

在$\triangle PDB$和$\triangle KDC$中，

$$\begin{cases} BD=CD \\ \angle BDP=\angle CDK, \\ DP=DK \end{cases}$$

$\therefore \triangle PDB\cong\triangle KDC$(SAS)，

$\therefore BP=CK$，$\angle BPO=\angle CKD$,

$\because \angle AOG=\angle BOP$,

$\therefore AG=BP$,

$\therefore AG=CK$,

$\because OP=OB$,

$\therefore \angle OBP=\angle BPO$,

又$\because \angle G=\angle OBP$,

$\therefore \angle G=\angle BPO=\angle CKD$,

$\therefore AG\parallel CK$,

$\therefore$四边形$AGKC$是平行四边形；………………………………(6 分)

(3)证明：∵$CE=PE$，$CD=BD$，

∴$DE // PB$，即 $DH // PB$，

∵$\angle G=\angle BPO$，

∴$PB // AG$，∴$DH // AG$，

∴$\angle OAG=\angle OHD$，$\angle G=\angle ODH$.

∵$OA=OG$，∴$\angle OAG=\angle G$，

∴$\angle ODH=\angle OHD$，∴$OD=OH$，

在△OBD和△OPH中，

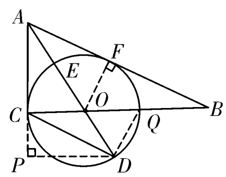
$$\begin{cases} OD=OH \\ \angle DOB=\angle HOP, \\ OB=OP \end{cases}$$

∴△OBD≌△OPH(SAS)，

∴$\angle OHP=\angle ODB=90°$，

∴$PH\perp AB$. ……………………………………………………(9 分)

9.(1)证明：如解图，过点 O 作 $OF\perp AB$ 于点 F，



第 9 题解图

∵AO 平分$\angle CAB$，$OC\perp AC$，垂足为点 F，

∴$OF=OC$，即 OF 为圆 O 的半径，

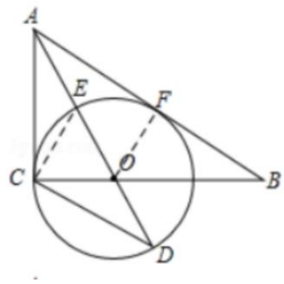
∴AB 是圆 O 的切线；…………………………………………(3 分)

（2）解：如解图，连接 CE，

∵∠ACE 所对的弧与∠CDE 所对的弧是同弧，∴∠ACE=∠CDE。

∵∠CAE=∠CAD，∴△ACE∽△ADC

∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{CE}{CD}=\tan D=\frac{1}{2}$。……………………………………………(7 分)



(3)解：由(2)知$\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$,

设 $AE=c$，则 $AC=2c$，

在 Rt△ACO 中，$(2c)^2+3^2=(c+3)^2$，

解得 $c=2$，

∴$AF=AC=2c=4$，

在△BFO 和△BCA 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle B\\ \angle BFO=\angle BCA\end{cases}$$

∴△BFO∽△BCA,

∴$\frac{BF}{BC}=\frac{FO}{CA}=\frac{BO}{AB}$,

设 $BF=x$，$BO=y$，

$\frac{x}{3+y}=\frac{3}{4}=\frac{y}{4+x}$，解得：$x=\frac{72}{7}$，$y=\frac{75}{7}$，

∴$AB=AF+BF=4+\frac{72}{7}=\frac{100}{7}$. ……………………………(10 分)

10.（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$QE\perp AP$,

∴$\angle QEA=\angle B=90°$.

∵$AD// BC$,

$\therefore \angle QAE = \angle APB$,

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle QEA$; ……………………………………………(3 分)

(2)解：由题意得：$BP = t$ cm，$AQ = 2t$ cm，

要使$\triangle ABP \cong \triangle QEA$，则 $AQ = AP = 2t$ cm，

在 $Rt\triangle ABP$ 中，由勾股定理得：$3^2 + t^2 = (2t)^2$，

解得 $t = \pm\sqrt{3}$(负值舍去)，

即当 $t = \sqrt{3}$时，$\triangle ABP \cong \triangle QEA$; ……………………………(7 分)

(3)解：在 $Rt\triangle ABP$ 中，由勾股定理得：$AP = \sqrt{3^2 + t^2}$，

$\because \triangle ABP \backsim \triangle QEA$,

$\therefore \frac{AB}{QE} = \frac{BP}{AE} = \frac{AP}{AQ}$,

$\therefore \frac{3}{QE} = \frac{t}{AE} = \frac{\sqrt{3^2 + t^2}}{2t}$,

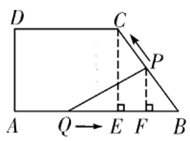
$\therefore QE = \frac{6t}{\sqrt{3^2 + t^2}}$，$AE = \frac{2t^2}{\sqrt{3^2 + t^2}}$,

$\therefore y = \frac{1}{2} QE \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{6t}{\sqrt{3^2 + t^2}} \cdot \frac{2t^2}{\sqrt{3^2 + t^2}} = \frac{6t^3}{t^2 + 9}$. ……………(12 分)

11.解：(1)如解图，过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E，

$\because DC \parallel AB$，$DA \perp AB$，$CE \perp AB$，

$\therefore$四边形 $AECD$ 是矩形，



第 11 题解图

故 $AE = DC = 5$，$CE = AD = 4$，

$\therefore BE = AB - AE = 8 - 5 = 3$，

由勾股定理得：$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{32 + 42} = 5$，

$\because BC < AB$，

$\therefore$当点 P 运动到点 C 时，P、Q 同时停止运动，

∴t＝$\frac{5}{1}$＝5s，

即 t＝5s 时，*P*、*Q* 两点同时停止运动；

(2)由题意知，*AQ*＝*BP*＝t，

∴*QB*＝8－t.

如解图，过点 *P* 作 *PF*⊥*QB* 于点 *F*，有（1）知$\sin B=\frac{CE}{BC}=\frac{4}{5}$，所以在 Rt△PBF 中，$PF=PB\cdot\sin B=\frac{4}{5}t$，所以$S=\frac{1}{2}BQ\cdot PF=\frac{1}{2}\times(8-t)\times\frac{4}{5}t=-\frac{2}{5}t^2+\frac{16}{5}t=-\frac{2}{5}(t-4)^2+\frac{32}{5}$，故当 t=4 时，S 取得最大值$\frac{32}{5}$。

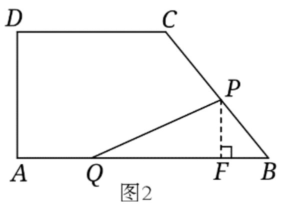


图2

(3)∵△*PQB* 为等腰三角形时，分以下三种情况：

①当 *PQ*＝*PB* 时，，过 P 作 AB 的垂线交 AB 于点 M，因为 PB=PQ,PM⊥BQ，所以$BQ=2BM=2\times\frac{3}{5}t=\frac{6}{5}t$，又因为$BQ=8-t$，所以$\frac{6}{5}t=8-t$，解得：$t=\frac{40}{11}$。

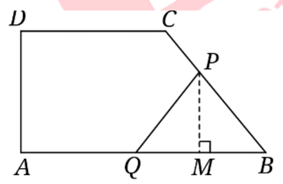


图3

②当 *QB*＝*BP* 时，即 8－t＝t，

解得 t＝4；

③当 *QB*＝*QP* 时，过点 P 作 AB 的垂线交 AB 于点 N，在 Rt△PBN 中，$BN=PB\cdot\cos B=\frac{3}{5}t$，所以$QN=QB-BN=8-t-\frac{3}{5}t=8-\frac{8}{5}t$，又因为$QP=QB=8-t$，$PQ^2=PN^2+QN^2$，所以$(8-t)^2=\left(\frac{4}{5}t\right)^2+\left(8-\frac{8}{5}t\right)^2$，即$11t^2-48t=0$，解得$t$=0 或$t=\frac{48}{11}$，因为$0<t\le5$，所以$t=\frac{48}{11}$。

综上所述，当△PQB 为等腰三角形时，则 t 的值为$\frac{40}{11}$或$\frac{48}{11}$或 4。

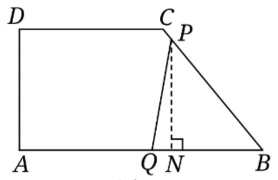


图4

12.解：(1)如解图①，过点 P 作 $PQ\perp BC$ 于点 Q，

∵在矩形 $ABCD$ 中，$\angle B=90°$，

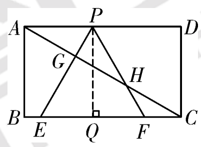
∴$AB\perp BC$，

又∵$AD\parallel BC$，

∴$PQ=AB=\sqrt{3}$，

∵△PEF 是等边三角形，

∴$\angle PFQ=60°$，



第 12 题解图①

在 Rt△PQF 中，$\sin\angle PFQ=\frac{PQ}{PF}$，

∴$PF=\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=2$，

∴△PEF 的边长为 2；

(2)①在 Rt△ABC 中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3$，

由勾股定理得，$AC=2\sqrt{3}$，

∴$\angle ACB=30°$，

又∵△PEF 是等边三角形，

∴$\angle PFE=60°$，

∴$\angle FHC=30°$，

∴$FH=FC$，

∵$HF=2-PH=2-y$，

$\therefore FC=2-y$，

又$\because BE+EF+FC=BC$，

$\therefore x+2+2-y=3$，

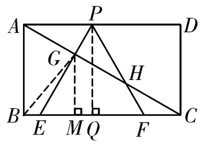
即 $y=x+1(0<x<3)$；

②如解图②，过点 G 作 $GM\perp BC$ 于点 M，

$\because \triangle PEF$ 为等边三角形，

$\therefore \angle PEF=60°$，

$\because Rt\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3$，



第 12 题解图②

$\therefore \angle ACB=30°$，

$\therefore \angle EGC=180°-30°-60°=90°$，

$\because BE=x$，

$\therefore EC=3-x$，

$\therefore EG=\dfrac{3-x}{2}$，

$\because \angle GEM=60°$，$\sin\angle GEM=\dfrac{GM}{GE}$，

$\therefore GM=EG\cdot\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3-x}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}x}{4}$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}x\times\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}x}{4}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}(x-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{9\sqrt{3}}{32}$，

$\because -\dfrac{\sqrt{3}}{8}<0$，

$\therefore$当 $x=\dfrac{3}{2}$时，$S_{最大}=\dfrac{9\sqrt{3}}{32}$.

13.(1)证明：$\because \angle ECF=\angle BCD=\alpha$，

$\therefore \angle ECF-\angle ECD=\angle BCD-\angle ECD$，

即$\angle DCF=\angle BCE$.

∴四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$DC=BC$，

在△DCF 与△BCE 中，

$$\begin{cases} CF=CE \\ \angle DCF=\angle BCE \\ DC=BC \end{cases}，$$

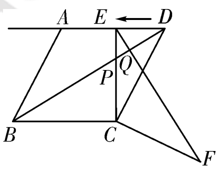
∴△DCF≌△BCE(SAS)，

∴$BE=DF$；

(2)解：∵$CE=CF$，

∴$\angle CEQ<90°$.

①当$\angle EQP=90°$时，如解图①，



第 13 题解图①

∵$\angle ECF=\angle BCD$，$BC=DC$，$EC=FC$，

∴$\angle CBD=\angle CEF$.

∵$\angle BPC=\angle EPQ$，

∴$\angle BCP=\angle EQP=90°$，

∴$\angle CED=90°$，

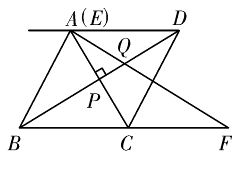
在 Rt△CDE 中，$\angle CED=90°$，

∵$CD=AB=6\sqrt{5}$，$\tan\angle ABC=\tan\angle ADC=2$，

∴$DE=\dfrac{CD}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=6$，

∴t＝6；

②当$\angle EPQ=90°$时，如解图②，



∵菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC\perp BD$，

∴EC 和 AC 重合，　　　　　　　　第 13 题解图②

∴$DE=6\sqrt{5}$，

∴$t=6\sqrt{5}$.

综上所述，当 $t=6$ 秒或 $6\sqrt{5}$秒时，△EPQ 为直角三角形；

(3)解：$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}t-12-\frac{24\sqrt{5}}{5}$.

【解法提示】点 G 即为 $t=0$ 时点 E 的对应点.

当点 F 在直线 AD 上方时，如解图③，连接 GF，分别交直线 AD、BC 的延长线于点 M、N，过 F 点作 $FH\perp AD$，垂足为 H，

由(1)得∠1=∠2.

易证△DCE≌△GCF(SAS)，

∴∠3=∠4，

∵$DE\parallel BC$，

∴∠1=∠3，

∴∠2=∠4，

∴$GF\parallel CD$，

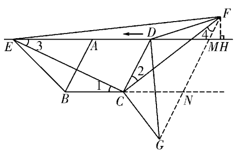
∴四边形 $DCNM$ 为平行四边形，

易得 $MN=6\sqrt{5}$.

∵∠BCD=∠DCG，∴∠DCN+∠BCD=∠DCG+∠CGN=180°，

∴∠CGN=∠DCN=∠CNG，

∴$CN=CG=CD=6\sqrt{5}$.



∵$\tan\angle ABC=2=\tan\angle CGN$，　　　　第 13 题解图③

$\therefore GN=12$，

$\therefore GM=6\sqrt{5}+12$.

$\because GF=DE=t\times1=t$，$FM=t-6\sqrt{5}-12$.

$\because \tan\angle FMH=\tan\angle ABC=2$，

$\therefore FH=\frac{2\sqrt{5}}{5}(t-6\sqrt{5}-12)$，

即 $y=\frac{2\sqrt{5}}{5}t-12-\frac{24\sqrt{5}}{5}$.

14.(1)证明：∵四边形 $EFPQ$ 是矩形，

$\therefore EF\parallel BC$，

$\therefore \triangle AHF\backsim\triangle ADC$，

$\therefore \frac{AH}{AD}=\frac{AF}{AC}$，

$\because EF\parallel BC$，

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$，

$\therefore \frac{AH}{AD}=\frac{EF}{BC}$。

(2)解：$\because \frac{AH}{AD}=\frac{EF}{BC}$，$EF=x$，$AD=4$，$BC=5$，

$\therefore \frac{AH}{4}=\frac{x}{5}$，

$\therefore AH=\frac{4x}{5}$，

$\therefore HD=4-\frac{4x}{5}$，

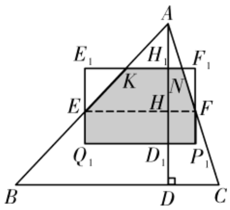
$\therefore S_{\text{矩形}EFPQ}=EF\cdot HD=x(4-\frac{4x}{5})=-\frac{4}{5}x^2+4x=-\frac{4}{5}(x-\frac{5}{2})^2+5$.

$\because -\frac{4}{5}<0$，

$\therefore$当 $x=\frac{5}{2}$时，矩形 $EFPQ$ 的面积最大，最大面积为 5；

(3)解：由(2)可知，当矩形 $EFPQ$ 的面积最大时，矩形的长 EF 为$\frac{5}{2}$，宽 $HD=4-\frac{4}{5}x=2$，在矩形 $EFPQ$ 沿射线 AD 的运动过程中：

(i)当 $0\le t\le 2$ 时，如解图①所示.



第 14 题解图①

设矩形与 AB、AC 分别交于点 K、N，与 AD 分别交于点 H_1、D_1.此时 $DD_1=t$，$H_1D_1=2$，$HD_1=HD-DD_1=2-t$，$HH_1=H_1D_1-HD_1=t$，$AH_1=AH-HH_1=2-t$，

$\because KN\parallel EF$，

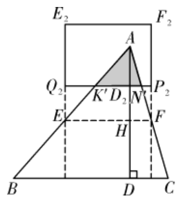
$\therefore \frac{KN}{EF}=\frac{AH_1}{AH}$，即$\frac{KN}{\frac{5}{2}}=\frac{2-t}{2}$，

解得 $KN=\frac{5}{4}(2-t)$，

$\therefore S=S_{梯形KNFE}+S_{矩形EFP_1Q_1}$

$=\frac{1}{2}(KN+EF)\cdot HH_1+EF\cdot EQ_1=\frac{1}{2}[\frac{5}{4}(2-t)+\frac{5}{2}]\times t+\frac{5}{2}(2-t)=-\frac{5}{8}t^2+5$；

(ii)当 $2<t\le 4$ 时，如解图②所示.



第 14 题解图②

设矩形与 AB、AC 分别交于点 K、N，与 AD 交于点 D_2，此时

$DD_2=t$，$AD_2=AD-DD_2=4-t$，

$\because K'N' \parallel EF$，

$\therefore \frac{K'N'}{EF}=\frac{\mathrm{AD_2}}{\mathrm{AH}}$，即$\frac{K'N'}{\frac{5}{2}}=\frac{4-t}{2}$，

解得 $K'N'=5-\frac{5}{4}t$，

$\therefore S=S_{\triangle \mathrm{AKN}}=\frac{1}{2}K'N'\cdot AD_2=\frac{1}{2}\times(5-\frac{5}{4}t)\times(4-t)=\frac{5}{8}t^2-5t+10$.

综上所述，S 与 t 的函数关系式为：

$$S=\begin{cases}-\frac{5}{8}t^2+5(0\leqslant t\leqslant 2)\\ \frac{5}{8}t^2-5t+10(2<t\leqslant 4)\end{cases}.$$

高中答案解析

一、单项选择题。

1．选 D。

【解析】$M=\left\{y\left|y=(x-2)^2-1,x\in R\right.\right\}=\left\{y\left|y\geq -1\right.\right\}$，而 $N=R$，$\therefore M\cap N=\left\{y\left|y\geq -1\right.\right\}$。故本题选 D。

2．选 B。

【解析】$\because A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5,6,7\}$，全集$U=A\cup B$，$\therefore U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A\cap B=\{2,3,4\}$，$\therefore$集合$C_U(A\cap B)=\{1,5,6,7\}$，即集合$C_U(A\cap B)$中有 4 个元素。故本题选 B。

3.选 B。

【解析】令 $g(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$；$h(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，则 $g(-x)=\ln\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$，因为 $g(x)+g(-x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)+\ln\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=0$，所以 $g(-x)=-g(x)$，又因为 $h(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^x+1}=-h(x)$；所以 $f(-a)=g(-a)+h(-a)=-\left[g(a)+h(a)\right]=-f(a)=-1$。故本题选 B。

4.选 C。

【解析】$y=\log_2\dfrac{x+2}{4}=\log_2(x+2)-\log_2 4=\log_2(x+2)-2$，平移中，$x$ 变化时，左加右减，y 变化时，上加下减。那么由 $y=\log_2 x$ 向左移动 2 个单位，变为 $y=\log_2(x+2)$，再向下移动移动 2 个单位，变为 $y==\log_2(x+2)-2$，故本题选 C。

5.选 B。

【解析】由图像可知，$\dfrac{1}{4}T=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，那么一个周期$T=\dfrac{4}{3}\pi$，而$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{3}{2}$.故本题选 B。

6．选 D。

【解析】由题意可知，点 P 的横坐标为 c，代入椭圆方程得纵坐标为$\pm\dfrac{b^2}{a}$，所以

$\left|PF_2\right|=\dfrac{b^2}{a}$，又椭圆 $\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，$\left|PF_1\right|=2\left|PF_2\right|$，解得 $\left|PF_2\right|=\dfrac{2}{3}a$，而椭圆中 $a^2=b^2+c^2$，代入求得离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.故本题选 D。

7．选 A。

【解析】x 取值需要满足以下条件 $\begin{cases}x-4\ge 0\\ x-1>0\\ \lg(x-1)\ne 0\end{cases}$，因此函数的定义域为 $[4,+\infty)$.故本题选 A。

8．选 B。

【解析】根据题意可得 $a=1-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$，$E(X)=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{6}\times 0+1\times\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}$，

$\therefore E(Y)=6E(X)+1=(-\dfrac{1}{6})\times 6+1=0$。故本题选 B。

9．选 B。

【解析】根据椭圆的定义可得命题“平面内一动点 P 到两个定点的距离的和为常数”推不出定点的轨迹为椭圆，但是命题“平面内一动点 P 的轨迹为椭圆”是可以得到平面内一动点 P 到两个定点的距离的和为常数，因此为必要不充分条件。故本题选 B。

10．选 A。

【解析】$\because f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ 且当 $0\le x\le\pi$ 时，$f(x)=0$

$\therefore f(\dfrac{23\pi}{6})=f(\dfrac{5}{6}\pi)+\sin\dfrac{17}{6}\pi+\sin\dfrac{11}{6}\pi+\sin\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{2}$。故本题选 A。

11．选 A。

【解析】常见的全程量词有：任意一个，每一个，任给，所有的等，含有全称量词的命题叫全称命题，只有 A 选项符合题意。故本题选 A。

12．选 B。

【解析】由 $a_7=a_6+2a_5$ 得公比 $q=2$；由 $\sqrt{a_m a_n}=4a_1$ 即 $a_1{}^2q^{m+n-2}=16a_1{}^2$ 得 $m+n=6$，即 $\dfrac{m+n}{6}=1$；$\dfrac{1}{m}+\dfrac{9}{n}=\dfrac{m+n}{6m}+\dfrac{9(m+n)}{6n}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{n}{6m}+\dfrac{9m}{6n}\ge\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{2}+2\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{8}{3}$，当且仅当 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{9}{n}$ 时取等号。故本题选 B。

13．选 A。

【解析】由 $e=\dfrac{c}{a}=2$ 得 $c=2a$ 即 $\left|F_1F_2\right|=2c=4a$，由 $C_{\triangle AF_1F_2}=\left|AF_2\right|+\left|AF_1\right|+\left|F_1F_2\right|=10a$ 解得

$|AF_2|+|AF_1|=6a$；假设点 A 在双曲线的左支上，由双曲线第一定义得$|AF|_2-|AF_1|=2a$，联立解得$|AF_2|=4a;|AF_1|=2a$，ΔAF_1F_2 为等腰三角形其高为$\sqrt{15}a$，ΔAF_1F_2 的面积 $S=\frac{2a\cdot\sqrt{15}a}{2}=\sqrt{15}a^2$。故本题选 A。

14．选 A。

【解析】由三角函数的诱导公式得$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha$，$\sin 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$，由倍角公式可得$\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$，故本题选 A。

15．选 C。

【解析】由题意可知，该几何体是由圆柱和圆锥组合而成：其表面积等于圆锥侧面积+圆柱侧面积+圆柱底面积。圆锥 $S_{侧}=\pi rl=8\pi$，圆柱侧面+圆柱底面积$=4\times2\pi r+\pi r^2=16\pi+4\pi=20\pi$，所以几何体的表面积为$28\pi$。故本题选 C。

16．选 B。

【解析】设应当从高三年级的学生中抽取的人数是x，则由分层抽样的定义可得$\frac{400}{1600}=\frac{x}{80}$解得$x=20$。故本题选 B。

17．选 D。

【解析】条件概率，$P=\frac{0.6}{0.75}=0.8$。故本题选 D。

18．选 C。

【解析】由正态分布可知，$P(\varepsilon<0)=P(\varepsilon>4)=1-P(\varepsilon<4)=0.2$，$\therefore P(0<\varepsilon<2)=\frac{1}{2}P(0<\varepsilon<4)=\frac{1}{2}(0.8-0.2)=0.3$。故本题选 C。

19．选 D。

【解析】依题意，$\frac{a+0+1+2+3}{5}=1$，解得$a=-1$，所以方差为$S^2=\frac{1}{5}\left[(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2\right]=2$，故本题选 D。

20．选 A。

【解析】本题考查抛物线的标准方程及其性质。$\frac{S_{\Delta BCF}}{S_{\Delta ACF}}=\frac{BC}{AC}=\frac{x_B}{x_A}=\frac{BF-1}{AF-1}$，故本题选 A。

二、填空题。

1. $\frac{1}{2}$

【解析】$M=-1+1+2+\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{2}$

2. $x+y-2=0$

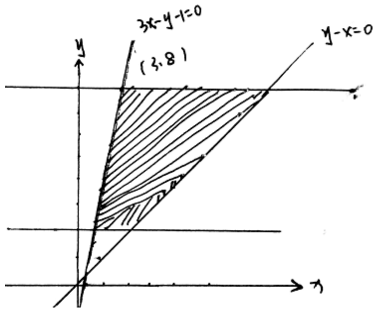
【解析】曲线 $y=\frac{x}{2x-1}$ 的导函数为 $y'=\frac{x'(2x-1)-x(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{-1}{(2x-1)^2}$，将 $x=1$ 代入导函数求得切线斜率为：-1，故在点 $(1,1)$ 处的切线方程为：$y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$。

3.9

【解析】因为 $0<a<1$，所以 $0<1-a<1$，而 $a+1-a=1$，那么 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}=(a+1-a)(\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a})=1+\frac{1-a}{a}+\frac{4a}{1-a}+4\geq 5+2\sqrt{\frac{1-a}{a}\bullet\frac{4a}{1-a}}=9$，即最小值为 9。

4.-5

【解析】根据题意画出所在区域的范围



函数 $Z=x-y$ 可看作是 $y=x-Z$，当取点 $(3,8)$ 时，Z 值最小。

5. $-160x^3$

【解析】$\because$ 偶数项二项式系数和为 32，$\therefore \frac{1}{2}\cdot 2^n=32$，$n=6$。$\therefore$ 中间项为 $T_4=C_6^3(-2x)^{6-3}=-160x^3$。

6. $y=-x+3$

【解析】圆的标准方程可写为 $(x-4)^2+(y-1)^2=5$，所以圆心 $O(4,1)$，PO 所在直线可以

通过 P,O 两点坐标来确定为：$y=x-3$，那么最短弦所在直线即为：与 PO 垂直的直线：$y=-x+3$。

7.2

【解析】$\because l:kx-y+2\sqrt{2}k=0$，$\therefore d_{O\to l}=\dfrac{2\sqrt{2}|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，$\therefore |AB|=2\sqrt{4-\left(\dfrac{2\sqrt{2}|k|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2}=4\sqrt{\dfrac{1-k^2}{1+k^2}}$

$\therefore S=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d_{O\to l}=\dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{k^2\left(1-k^2\right)}}{1+k^2}$，定义域：$-1<k<1$且$k\neq 0$。设 $k^2+1=t\left(t>1\right)$，则

$\sqrt{k^2\left(1-k^2\right)}=\sqrt{(t-1)(2-t)}=\sqrt{-t^2+3t-2}$ $\therefore S=4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{-t^2+3t-2}}{t}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1+\dfrac{3}{t}-\dfrac{2}{t^2}}=$

$4\sqrt{2}\cdot\sqrt{-2\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}}$，$\therefore$当$\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{4}$,即$t=\dfrac{4}{3}$时，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore S_{\max}=4\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=2$，$\therefore S$ 的最大值是 2。

8.14π

【解析】$\because P,A,B,C$ 是球 O 表面上的四个点，PA,PB,PC 两两垂直，则球的直径就是以 PA，PB，PC 为棱长的长方体的体对角线长，已知 $PA=1,PB=2,PC=3$，则 $2R=\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}=\sqrt{14}$，球的表面积 $S=4\pi R^2=14\pi$。

9. $m\geq 1$

【解析】已知在 $x\in[0,2]$ 上，恒有 $f\left(x\right)>g\left(x\right)$，那么，只需 $f\left(x\right)$ 的最小值大于等于 $g\left(x\right)$ 的最大值即可。根据题意，$0\leq f\left(x\right)\leq 4,\dfrac{1}{4}-m\leq g\left(x\right)\leq 1-m$，要保证 $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ 在 $x\in[0,2]$ 上恒成立，则有 $1-m\leq 0$，即 $m\geq 1$。

10.2017

【解析】因为 $4S_n=\left(a_n-1\right)\left(a_n+3\right)$，所以 $4S_{n-1}=\left(a_{n-1}-1\right)\left(a_{n-1}+3\right)$，两式相减整理得：$2a_n+2a_{n-1}={a_n}^2-{a_{n-1}}^2$，又因为数列 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $a_n-a_{n-1}=2$，因为 $4S_n=\left(a_n-1\right)\left(a_n+3\right)$，令 $n=1$，则 $a_1=3$，所以$\{a_n\}$是首项为 3，公差为 2 的等差数列，其通项公式为 $a_n=a_1+\left(n-1\right)d=3+2\left(n-1\right)=2n+1$，所以 $a_{1008}=2\times 1008+1=2017$

三、简答题。

1.（I）$a=1$；（II）$f(x)$ 的单增区间为 $(-\infty,-1)$、$(3,+\infty)$；$f(x)$ 的单减区间为 $(-1,3)$

【解析】（I）导函数 $f'(x)=\frac{1}{3}\times 3\cdot x^2-2x-3a$，函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，所以 $f'(-1)=\frac{1}{3}\times 3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)-3a=0$，即得 $a=1$。

（II） $f'(x)=\frac{1}{3}\times 3\cdot x^2-2x-3=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，

在定义域范围内， $f'(x)$、 $f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$f(x)$ 的单增区间为 $(-\infty,-1)$、$(3,+\infty)$； $f(x)$ 的单减区间为 $(-1,3)$

2. $E(\xi)=5$

【解析】ξ 的分布列为：

ξ	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

数学期望 $E(\xi)=3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{3}{9}+6\times\frac{2}{9}+7\times\frac{1}{9}=5$

3.（I）见解析；（II） $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】(I)证明：在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面$A_1B_1C_1$，而 $DE\subset$ 面$A_1B_1C_1$，

$\therefore DE\perp AA_1$，已知 $DE\perp AE$， $AA_1\cap AE=A$ 点，又 DE 在面 ADE 内，

$\therefore$ 平面ADE $\perp$ 平面$\mathrm{ACC_1A_1}$。

(II)过点 D 作 $DO\perp$ 面ABC_1，故直线 AD 和平面 ABC_1 所成角的正弦值为 $\sin\theta=\frac{DO}{AD}$

正三角形 $A_1B_1C_1$ 中，点 D 是 A_1B_1 的中点，所以 $C_1D\perp A_1B_1$，又 $AA_1\perp$ 平面$A_1B_1C_1$，

$\therefore DC_1\perp AA_1,\because AA_1\cap A_1D=A_1$点,$\therefore DC_1\perp$平面$AA_1BB_1$， $DC_1\perp$ 平面 ABD，四面体 $DABC_1$ 的体积 $V_{D-ABC_1}=V_{C_1-ABD}$，即 $\frac{1}{3}\cdot S_{ABC_1}\cdot DO=\frac{1}{3}\cdot S_{ABD}\cdot C_1O$ $\because AB=\sqrt{2}AA_1$，

$\therefore AC_1=BC_1=\sqrt{3}AA_1$， $C_1D=\frac{\sqrt{6}}{2}AA_1$， 而 $AD=\sqrt{(AA_1)^2+(A_1D)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}AA_1$，

$\therefore \frac{1}{2}\cdot AB\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}AA_1\cdot DO=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AA_1\cdot DC_1$，解得 $DO=\frac{\sqrt{60}}{10}AA_1$，$\therefore \sin\theta=\frac{DO}{AD}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

故直线 AD 和平面 ABC_1 所成角为 $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$。

4.（I）$a_n=3^n-1$；（II）见解析

【解析】（I）$\because a_{n+1}=3a_n+2\left(n\in N^*\right),\therefore a_{n+1}+1=3(a_n+1)\left(n\in N^*\right)$，即 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$。所以 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=3$ 为首项，公比为 3 的等比数列。

$\therefore a_n+1=(a_1+1)\cdot 3^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}\left(n\in N^*\right)$，$a_n=3^n-1$

（II）$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3^n-1}{3^{n+1}-1}<\frac{3^n-1}{3^{n+1}-3}=\frac{3^n-1}{3(3^n-1)}=\frac{1}{3}\ \therefore \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$

因为 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3^n-1}{3^{n+1}-1}>\frac{3^n-1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}$，所以 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{n}{3}-\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n+1}}\right)=\frac{n}{3}-$ $\frac{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^{n+2}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{n}{3}-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)>\frac{n}{3}-\frac{1}{6}$。综上所得 $\frac{n}{3}-\frac{1}{6}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{3}$。

5.（1）见解析；（2）$a_n=3^n-(-2)^n$

【解析】（1）根据题意 $a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}$ 可得 $a_{n+1}+2a_n=3(a_n+3a_{n-1})$ $n\geq 2$ $\because a_1=5,a_2=5$

$\therefore a_2+2a_1=15$，故数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$是以 15 为首项，3 为公比的等比数列。

（2）由（1）$a_{n+1}+2a_n=5\times 3^n$ 由待定系数法可得 $a_{n+1}-3^{n+1}=-2(a_n-3^n)$，即 $a_n-3^n=2(-2)^{n-1}$

故 $a_n=3^n-(-2)^n$。

6.10.5

【解析】在ΔABC中，$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$所以$\angle B=45°$。过$A$作$AD\perp BC$于$D$，则$\sin C=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{3}{5}$

因为$AC=5$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore BD=AD=3$，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=4$ $\therefore BC=BD+DC=7$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AD=\dfrac{1}{2}\times 7\times 3=10.5$。

7.（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；（2）见解析

【解析】(1) 根据题意可知点 C,点 D，点 P 坐标表示且$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$，可得$\begin{cases}1-b^2=-1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$

解得$a=2$，$b=\sqrt{2}$，因此椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）当动直线斜率存在的时候，设直线的方程为$y=kx+1$，分别设交点的坐标为(x_1,y_1)，

(x_2,y_2)，联立方程$\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$可得$(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$ $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=-\dfrac{-2}{2k^2+1}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1+\lambda)(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\dfrac{(-2\lambda-4)k^2+(-2\lambda-1)}{2k^2+1}$

$=-\dfrac{\lambda-1}{2k^2+1}-\lambda-2$所以当$\lambda=1$时，$-\dfrac{\lambda-1}{2k^2+1}-\lambda-2=-3$此时$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$为定值。

当直线 AB 斜率不存在时，直线 AB 即为直线 CD，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$。故存在常数$\lambda=1$，

使得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$。

8.（1）$-\dfrac{1}{4}$；（2）$2\sqrt{3}$

【解析】(1) $\because$ a，b，c依次成等差数列，$\therefore$ $2b=a+c$，$\because$ 向量$\vec{m}=(3,\sin B)$与$\vec{n}=(2,\sin C)$

共线，$\therefore$ 两向量成比例，即$2\sin B=3\sin C$，由正弦定理可得$2b=3c$，$\therefore$ $a=2c$，$b=\dfrac{3}{2}c$，由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{4}$；

（2）$\because$ a，b，c依次成等差数列，即$2b=a+c$，$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{3a^2+3c^2-2ac}{8ac}\geq$

$\dfrac{3\times 2\sqrt{a^2c^2}-2ac}{8ac}=\dfrac{1}{2}$，$\because$ $B\in(0,\ \pi]$，$\therefore$ $0<\sin B\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore S=\dfrac{1}{2}ac\sin B\leq\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，即

ΔABC的面积S的最大值为$2\sqrt{3}$。

9.（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ （2）$x=\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}y+4$

【解析】（1）$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a=2$，可得 $c=1,b^2=a^2-c^2=4-1=3$，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。

（2）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $P'(x_1,-y_1)$

$S_{\triangle QTP}=S_{\triangle QST}-S_{\triangle PST}=\frac{1}{2}|ST||y_1-y_2|=\frac{1}{2}|ST|\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$。设直线 QP 的方程为 $x=my+4$

联立 $\begin{cases}x=my+4\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\to y^2(3m^2+4)+24my+36=0$，即有 $y_1y_2=\frac{36}{3m^2+4}$；$y_1+y_2=\frac{-24m}{3m^2+4}$，且直线

QP' 的方程为 $y+y_1=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，当 $y=0$ 时，可得 $x_T=\frac{4(y_1+y_2)+2my_1y_2}{y_1+y_2}=1$，故 $|ST|=3$，

$S_{\triangle QTP}=\frac{1}{2}|ST|\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{18\sqrt{m^2-4}}{4+3m^2}$，令 $t=\sqrt{m^2-4},t\geq 0$

$S_{\triangle QTP}=\frac{18t}{3t^2+16}=\frac{18}{3t+\frac{16}{t}}\leq\frac{18}{2\sqrt{3t\cdot\frac{16}{t}}}$，当且仅当 $t^2=\frac{16}{3}$,即 $m^2=\frac{28}{3}$。取“=”，故直线方程为 $x=\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}y+4$。

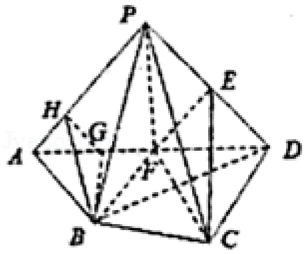
10.见解析

【解析】证明：(I) 取 AD 中点 F，连接 EF，则 $EF//PA$，又 $EF\not\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $EF//$ 平面 PAB．连接 CF，由 $\angle ADB=30°$，$\angle CDB=60°$，可知 $\angle ADC=90°$，且 $CD=BD=\sqrt{3}DF$，则 $\angle DFC=60°$，所以 $AB//CF$，又 $CF\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $CF//$ 平面 PAB，而 $EF\cap CF=F$，所以平面 $PAB//$ 平面 CEF．又因为 $CE\subset$ 平面 CEF，所以 $CE//$ 平面 PAB．

解：(II) 连接 BF，因为 ΔPAD 为等腰直角三角形，则 $PF=\frac{1}{2}AD$．而 $BF=\frac{1}{2}AD$，且 $AD=\sqrt{2}PB$，所以 $PF\perp BF$．又 $PF\perp AD$，$AD\cap BF=F$，所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$，而 $PF\subset$ 平面 PAD，所以平面 $APD\perp$ 平面 $ABCD$，作 $BG\perp AD$ 于 G 点，作 $GH\perp AP$ 于 H 点，连接 BH，因平面 $APD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$BG\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BG\perp$ 平面 APD．又 $AP\subset$ 平面 APD，所以 $BG\perp AP$，因为 $BG\cap GH=G$，则 $AP\perp$ 平面 BGH，$BH\subset$ 平面 BGH，所以 $BH\perp AP$．

所以 $\angle BHG$ 为二面角 $B-AP-D$ 的平面角．不妨设 $AD=2a$，则在 RtΔBGH 中，$HG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，

$BG=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $HB=\frac{\sqrt{14}}{4}a$，所以 $\cos\angle BHG=\frac{HG}{HB}=\frac{\sqrt{7}}{7}$．所以二面角 $B-PA-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$．



11.见解析

【解析】解：（Ⅰ）设动点 P 的坐标为 (x,y)，根据题意得 $\frac{|x-\frac{4\sqrt{3}}{3}|}{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，化简得曲线 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）$\because P$ 不在 x 轴上，故直线 AP 的斜率不为 0，设直线 AP 的方程为 $y=k(x-2)$，则直线 DE 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$．由联立 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$．设 $P(x_0$，$y_0)$，则 $2+x_0=\frac{16k^2}{1+4k^2}$，即 $x_0=\frac{8k^2-2}{1+4k^2}$．$|AP|=\sqrt{(x_0-2)^2+y_0{}^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_0-2)^2}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$．

设 $D(x_1$，$y_1)$，由椭圆对称性可知 $|DE|=2|OD|$．由 $\begin{cases} y=-\frac{1}{k}x \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，解得 $x_1{}^2=\frac{4k^2}{4+k^2}$，$y_1{}^2=\frac{4}{4+k^2}$，

$|OD|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}=2\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2+4}}$，$\therefore |DE|=4\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2+4}}$．$\therefore \frac{|DE|}{|AP|}=\frac{4\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2+4}}}{\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}}=\frac{4k^2+1}{\sqrt{k^2+4}}$．设 $t=\sqrt{k^2+4}$，则 $k^2=t^2-4$，$t>2$．$\frac{|DE|}{|AP|}=\frac{4(t^2-4)+1}{t}=\frac{4t^2-15}{t}(t>2)$．令 $g(t)=\frac{4t^2-15}{t}(t>2)$，则 $g'(t)=\frac{4t^2+15}{t^2}>0$．$\therefore g(t)$ 是一个增函数，$\therefore \frac{|DE|}{|AP|}=\frac{4t^2-15}{t}>\frac{4\times4-15}{2}=\frac{1}{2}$．综上，$\frac{|DE|}{|AP|}$ 的取值范围是 $(\frac{1}{2}$，$+\infty)$．

12.见解析

【解析】解：(I) 由条件可知 $\begin{cases} f(1)=e \\ f'(1)=2e \end{cases}$，对函数 $f(x)=axe^{bx}$ 求导得 $f'(x)=a(1+bx)e^{bx}$，

于是 $\begin{cases} ae^{b}=e \\ a(1+b)e^{b}=2e \end{cases}$，解得 $a=b=1$．所以 $f(x)=xe^{x}$，$f'(x)=(1+x)e^{x}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$，于是当 $(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增．故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$，单调递增区间为 $(-1,+\infty)$

(II) 由 (I) 知 $g(x)=xe^{2x}-mx-lnx$，

解法 1：要使 $g(x)\geqslant 1$ 在 $\in(0,+\infty)$ 上恒成立，等价于 $m\leqslant e^{2x}-\dfrac{1+lnx}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立．令 $h(x)=e^{2x}-\dfrac{lnx+1}{x}$，则只需 $m\leqslant h(x)_{min}$ 即可．$h'(x)=\dfrac{2x^{2}e^{2x}+lnx}{x^{2}}$．令 $H(x)=2x^{2}e^{2x}+lnx$，$(x>0)$，则 $H'(x)=4(x^{2}+x)e^{2x}+\dfrac{1}{x}>0$，所以 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $H(\dfrac{1}{4})=\dfrac{\sqrt{e}}{8}-2ln2<0$，$H$（1）$=2e^{2}>0$，所以 $H(x)$ 有唯一的零点 x_{0}，且 $\dfrac{1}{4}x_{0}<1$，$H(x$ 在 $(0,x_{0})$ 上单调递减，在 $(x_{0}$，$+\infty)$ 上单调递增，因 $2{x_{0}}^{2}e^{2x_{0}}+lnx_{0}=0$，两边同时取自然对数，则有 $2x_{0}+ln(2x_{0})+lnx_{0}=ln(-lnx_{0})$，即 $2x_{0}+ln(2x_{0})=ln(-lnx_{0})+(-lx_{0})$，构造函数 $m(x)=x+lnx$，$x>0$，则 $m'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，所以函数 $m(x)$ 在 $\in(0,+\infty)$ 上单调递增，因 $m(2x_{0})=m(-lnx_{0})$，所以 $2x_{0}=-lnx_{0}$，即 $e^{2x_{0}}=\dfrac{1}{x_{0}}$，所以 $h(x)\geqslant h(x_{0})=e^{2x_{0}}-\dfrac{1+lnx_{0}}{x_{0}}=\dfrac{1}{x_{0}}-\dfrac{1-2x_{0}}{x_{0}}=2$，即 $h(x)_{min}=2$，于是实数 m 的取值范围是 $(-\infty$，$2]$．

解法 2：要使 $g(x)\geqslant 1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，等价于 $m\leqslant e^{2x}-\dfrac{lnx+1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立．先证明 $t\geqslant lnt+1$，令 $Q(t)=t-lnt-1$，$t>0$，则 $Q'(t)=\dfrac{t-1}{t}$．于是当 $t\in(0,1)$ 时，$Q'(t)<0$，$Q(t)$ 单调递减；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$Q'(t)>0$，$Q(t)$ 单调递增，所以 $Q(t)\geqslant Q$（1）$=0$，故 $t\geqslant lnt+1$（当且仅当 $t=1$ 时取等号）．所以当 $x>0$ 时，有 $xe^{2x}\geqslant ln(xe^{2x})+1=lnx+2x+1$，所以，$xe^{2x}\geqslant\dfrac{lnx}{x}+2+\dfrac{1}{x}$，即 $e^{2x}-\dfrac{lnx+1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $xe^{2x}=1$ 时取等号，于是实数 m 的取值范围是 $(-\infty$，$2]$。

13.见解析

【解析】解：（1）从箱中取两个球的情形有以下 6 种：

{2 个白球}，{1 个白球，1 个黄球}，{1 个白球，1 个黑球}，{2 个黄球}，{1 个黑球，1 个黄

球}，{2 个黑球}.

当取到 2 个白球时，随机变量 $X=-2$；

当取到 1 个白球，1 个黄球时，随机变量 $X=-1$；

当取到 1 个白球，1 个黑球时，随机变量 $X=1$；

当取到 2 个黄球时，随机变量 $X=0$；

当取到 1 个黑球，1 个黄球时，随机变量 $X=2$；

当取到 2 个黑球时，随机变量 $X=4$；

所以随机变量 X 的可能取值为 -2，-1，0，1，2，4…

$$P(X=-2)=\frac{C_6^2}{C_{12}^2}=\frac{5}{22}，\quad P(X=-1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{2}{11}，$$

$$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{66}，\quad P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{11}，$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{33}，\quad P(X=4)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{11}\ldots$$

$\therefore X$ 的概率分布列如下：

X	-2	-1	0	1	2	4
P	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$

（2）$P(X>0)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=4)=\frac{4}{11}+\frac{4}{33}+\frac{1}{11}=\frac{19}{33}$.

四、案例分析

【参考答案】

（1）教师的可取之处：在教学过程中，教师以学生为主体，师生积极参与，交往互动，共同探索，共同归纳总结出同底数幂的乘法法则。

学生的可取之处：教学过程中，学生积极主动的参与到学习中去，敢想敢说敢于表达自己的见解。

（2）存在的问题：《义务教育新课程标准》中指出：“教师对学生的评价应采用鼓励性语言，发挥评价的激励作用，在评价时要保护学生的自尊心和自信心。”而本教学片断中，当学生提出了不同的解题思路时，老师不仅没有采用鼓励性的语言表扬学生，竟然用轻视的语言评价学生的解题思路，话语之间流露出对学生批评。

教学对策：鼓励该生大胆的说出自己的解题思路，并用鼓励性的语言表扬该学生创新的思维方式。同时，引导全班同学讨论两种解题方法，比较得出两种解题方法的优劣。

五、教学设计

【参考答案】

教学设计：

（一）创设情境，引入新知

教学楼前有一个旗杆，老师让小明去测量旗杆高度．（演示学校教学楼前的国旗图片）小明站在离旗杆底部 10 米远处，目测旗杆的顶部，视线与水平线的夹角为34°，并已知目高为 1 米．然后他很快就算出旗杆的高度了。

你想知道小明怎样算出的吗？

师：通过前面的学习我们知道，利用相似三角形的方法可以测算出旗杆的大致高度；

实际上我们还可以像小明那样通过测量一些角的度数和一些线段的长度，来测算出旗杆的高度。

这就是我们本章即将探讨和学习的利用锐角三角函数来测算物体长度或高度的方法。

下面我们大家一起来学习锐角三角函数中的第一种：锐角的正弦

（二）探究新知、发现规律

教师活动：多媒体展示教材 76 页引例.

问题为了绿化荒山，市绿化办打算从位于山脚下的机井房沿着山坡铺设水管，对坡面的绿地进行喷灌。现测得斜坡与水平面所成角的度数是30°，为使出水口的高度为 35m，那么需要准备多长的水管？

提出问题：你能将实际问题归结为数学问题吗？

学生活动：熟悉背景，从中发现数学问题.同时思考、探求解决问题的途径和方法。

【设计意图：结合实际情况为背景创设情境，引发学生兴趣.培养学生发现数学并将实际问题转化为数学问题的能力】

1.解决问题

（1）想一想：你能用数学语言来表述这个实际问题吗？与同伴交流。

教师活动：多媒体出示问题；了解学生语言组织情况并适时引导；

学生活动：组织语言与同伴交流.

【设计意图：培养学生用数学语言表达的意识，提高数学语言表达能力】

（2）出示学生总结的数学问题：

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，$\angle A=30^{\circ}$，$BC=35$，求 AB。

（3）议一议（出示教材 76 页的思考）：在上面的问题中，如果使出水口的高度为 50m，那么需要准备多长的水管？

教师活动

1：出示问题.

2：观察学生解决问题的表现，适时引导。

学生活动：应用旧知解决问题。

（4）结论：在一个直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么不管三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比值都等于 $\frac{1}{2}$。

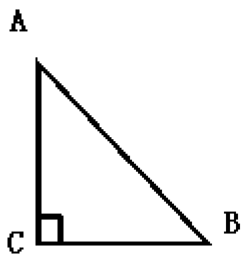
教师活动：引导学生用准确的语言组织。

学生活动：独立思考，得出结论。

【设计意图：使学生体会到“无论直角三角形的大小如何，30° 角所对的直角边与斜边的比总是一个常数”。让“比值”的研究逐渐进入学生的视野，建立了数学模型，为后继学习奠定基础。】

2.类比思考

议一议：（出示教材 77 页的思考）如图，任意画一个 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使 $\angle C=90^{\circ}$，$\angle A=45^{\circ}$，计算 $\angle A$ 的对边与斜边的比 $\frac{BC}{AB}$。由此你能得出什么结论？



教师活动：出示问题；观察基础薄弱的学生的反应或与他们共同讨论。

学生活动：思考、解决问题。

【设计意图：由特殊到一般的过渡，强化了学生对“比值”的关注，突出重点。】

3.归纳猜想

（1）归纳：在一个直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么不管三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比值都等于$\frac{1}{2}$。

在一个直角三角形中，如果一个锐角等于45°，那么不管这个直角三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

（2）猜想：在直角三角形中，当锐角A的度数一定时，不管三角形的大小如何，它的对边与斜边的比也是一个固定值。

教师活动：引导学生用准确的语言归纳猜想。

学生活动：思考、交流、语言表达。

【设计意图：从特殊到一般，培养学生的演绎推理能力，并为学生提供自主探究的空间，锻炼语言表达能力。】

（三）证明猜想，形成概念

1.利用多媒体课件演示、验证猜想。

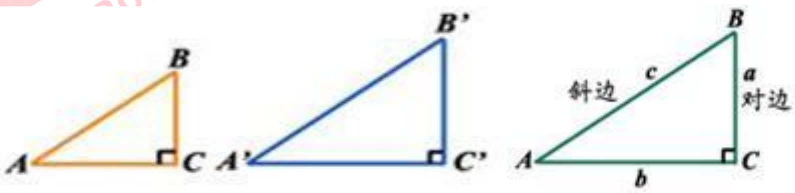
教师活动：多媒体演示。

学生活动：体验成功的快乐。

【设计意图：运用现代教育手段，让学生多方面感受验证猜想的必要性，同时体验成功的快乐。激发学生学习的兴趣。】

2.证明猜想

教师活动：出示猜想，观察学生的思考方向，引导学生找到证明猜想的方法。



（展示教材78页探究）任意画$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle A'B'C'$，使得$\angle C=\angle C'=90^{\circ}$，$\angle A=\angle A'=\alpha$那么$\frac{BC}{AB}$与$\frac{B'C'}{A'B'}$有什么关系。你的依据是什么？

学生活动：思考、寻找验证方法

【设计意图：培养学生的论证意识，提高学生自己设计探究活动的能力.通过证明认识到“在直角三角形中，当锐角A的度数一定时，不管三角形的大小如何，$\angle A$的对边与斜边的比也是一个固定值”的结论，从而引出“正弦”的概念，突出重点。】

3.形成概念如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 sin$A$，即 sin$A$=$\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$

注意：正弦的三种表示 sin$A$ 省去角的符号）、$\sin 52^{\circ}$、$\sin\angle MON$ 。

教师活动：多媒体展示出概念，解释并强调正弦的符号、符号所表示的意义、正弦的表示方法.

学生活动：理解正弦的概念以及正弦的表示。

【设计意图：让学生在一系列的问题解决中，经历一个数学概念形成的一般研究过程突破难点。】

（四）巩固新知、拓展提升

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=2$，$\sin A=\dfrac{1}{3}$，求 AB，AC 的长。

教师活动：展示练习

学生活动：分析、独立思考，

【设计意图：关注学生独立思考、相互合作的同时，更注重学生解决问题能力得到提升使学生得以重新构建自己的知识体系。

体现了“实际——理论——实际”的过程，帮助学生形成从实际问题中抽象出数学问题，得出结论，再用来解决实际问题的学习数学的思路，符合新课程标准要求的“实际问题——建立模型——解释、应用与拓展”的思路。】

（五）自我评价、总结反思

问题 1：本节课你有哪些收获？

教师活动：引导学生思考回答。

学生活动：回顾、思考、组织语言回答。

【设计意图：引导学生回顾自己的学习过程，畅所欲言，加强反思，提炼以及将知识纳入自己的知识结构。】

问题 2：本节课你认为自己解决的最好的问题是什么？

教师活动：一边口述、一边课件出示问题。

学生活动：回顾、思考、与同伴交流、组织语言回答。

【设计意图：有目的的引导学生发现自己在合作学习、解决问题的过程中能否提出有价值的解决方案，能否与他人沟通合作等等.培养学生自我认同，自我发现、自我反思的意识让学生感受成功，感受到被同学肯定的快乐。】

问题 3：你还有什么困惑吗？

教师活动：出示问题。

学生活动：思考、组织语言说感受、困惑。

【设计意图：引发学生进一步的思考。】

（六）布置作业

1、对于自己还存在的疑惑利用业余时间查阅书籍或者上网查寻。

2、教材 85 页习题 28.1 第一、四题（仅求正弦值）。

大学答案解析

一、选择题。

1．选 A。

2．选 B。

【解析】这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式 $\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{1}{x}=\frac{1}{e}$，故选 B.

3．选 D。

【解析】这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x\cos x}=-1$$，故选 D.

4．选 B。

【解析】$b=\sqrt[n]{b^n}\le\sqrt[n]{a^n+b^n}\le\sqrt[n]{b^n+b^n}=b\sqrt[n]{2}=b$，选 B

5．选 A。

【解析】$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=1$，选 A

6．选 D。

【解析】因为 $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)=0$，$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\sin x+1)=1$，所以 $\lim_{x\to 0}f(x)$ 不存在，故选 D

7．选 D。

【解析】$\lim_{x\to 0}(1+\frac{x}{4})^{\frac{1}{x}}=[\lim_{x\to 0}(1+\frac{x}{4})^{\frac{4}{x}}]^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{4}}$,选 D

8．选 C。

【解析】极限 $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\tan x\ln\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\cot x}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}}=\mathrm{e}^0=1$，选 A

9．选 B。

【解析】$\lim_{x\to 1}x^2+ax+6=0, a=-7$,选 B

10．选 C。

【解析】$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan ax}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+2), a=2$，选 C

11．选 C。

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x^2}{x}=2$，故选 C

12．选 C。

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1-x}{2(1+x)}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt{x}}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$，故选 C

13．选 C。
【解析】由定理知选 C
14．选 C。

【解析】因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}=0$，故选 C

15．选 B。
【解析】根据连续的定义知选 B
16．选 C。
17．选 B。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{\pi}{2}\neq f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}=f(0)$,选 B

18．选 A。

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to^{+}}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to^{-}}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-2$，选 A

19．选 B。

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\neq f(0)$，又$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1\neq f(0)$，所以$f(x)$在$x=0$点不连续，从而在$x=0$处不可导，但当$x\to 0$时,极限存在，选 B

20．选 A。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}\neq f(0)$，选 A

21．选 C。

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}y=\infty,\lim\limits_{x\to\infty}y=-2$，曲线既有水平渐近线$y=-2$,又有垂直渐近线$x=0$，选 C

22．选 A。

【解析】因为$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$，所以有水平渐近线$y=1$，但无铅直渐近线，选 A

23．选 B。
24．选 C。
25．选 C。

26．选 D。

【解析】由函数取得极值的必要条件（书中定理）知选 D

27．选 B。

【解析】 $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$， $y''=\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$，

$y'''=\dfrac{-4x(1+x^2)^2-(2-2x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^3}=\dfrac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$，令 $y''=0$，得

$x=-1,1$， $y'''(\pm1)\neq0$， $(1,\ln 2)$ 与 $(-1,\ln 2)$ 为拐点，选 B

28．选 D。

29．选 C。

30．选 B。

【解析】 $dy=e^{\sin^2 x}d\sin^2 x$，故选 B

31．选 C。

【解析】 $\int\dfrac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^2-1+1}{1+x}\mathrm{d}x=\int(x-1+\dfrac{1}{1+x})\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|+C$．所以答案为 C.

32．选 A。

【解析】 $\int \mathrm{e}^x(1-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2})\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x^2})\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}+C$

33．选 D。

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin^2 t\,dt}{\int_0^x x^2dx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$，故选 D

34．选 B。

【解析】 $a=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t\,dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$，故选 B

35．选 A。

36．选 C。

【解析】 $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$,选 C

37．选 B。

【解析】因为 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}\Big|_1^{+\infty}=2$，故选 B

38．选 A。

【解析】因为 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{-2}x^{-2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$，故选 A

39．选 A。

【解析】$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1$，故选 A

40．选 A。

【解析】$\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx=-\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_0^{+\infty}$，所以积分 $\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx$ 收敛，必须 $k>0$ 故选 A

41．选 A。

【解析】$\int_{-\infty}^0 e^x dx=e^x\Big|_{-\infty}^0=1$,选 A

42．选 B。

【解析】$\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_e^{+\infty}$，发散，选 B

43．选 C。

【解析】因为 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1$，选 C

44．选 B。

45．选 B。

【解析】若 f（x）在区间[a,b]上连续，则 f（x）在区间[a,b]上可积。反之不一定成立．因此是充分条件。所以答案为 B.

46．选 A。

【解析】由于 $\frac{\sin x}{1+x^2}$ 在对称区间[-1，1]上为奇函数，因此积分值为 0．所以答案为 A.

47．选 B。

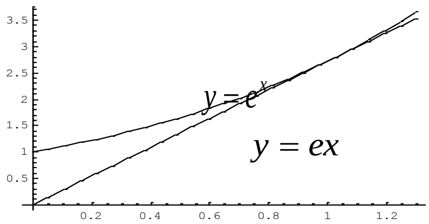
【解析】$\int_0^1(5x+1)e^{5x}dx=\int_0^1(5x+1)d\frac{e^{5x}}{5}=\frac{e^{5x}}{5}(5x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{e^{5x}}{5}d(5x+1)=\frac{6e^5-1}{5}-\frac{e^{5x}}{5}\Big|_0^1=e^5$．所以答案为 B.

48．选 D。

【解析】因为 $\frac{x^2\sin x}{1+x^2}$ 为奇函数，所以 $\int_{-2}^2\frac{x^2\sin x}{1+x^2}dx=0$，选 D

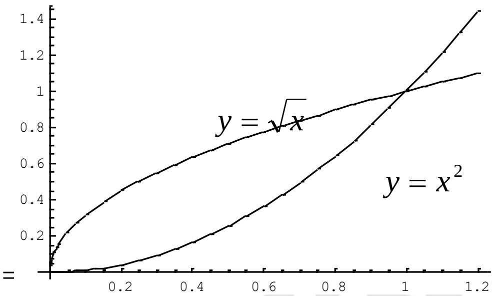
49．选 C。

【解析】$y=e^x$ 过原点的切线为 $y=ex$，作出函数的图形知选 C



50．选 A。

【解析】如图： 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 所围成平面图形的面积 $=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\dfrac{1}{3}$，选 A



51．选 D。

【解析】由 $y=$ ... $+(c-x)-(-1)=c+1\neq 1$，所以不是解．所以答案为 D.

52．选 B。

【解析】将 $y=3e^{2x}$，$y'=6e^{2x}$，$y''=12e^{2x}$，带入微分方程有．$y''-4y=12e^{2x}-12e^{2x}=0$，因此式方程的解．由于 $y=3e^{2x}$ 中无任意常数，所以为特解．答案选 B.

53．选 B。

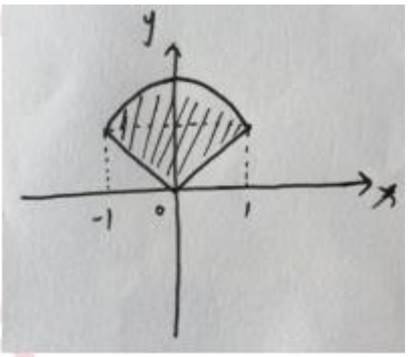
【解析】由微分方程阶的定义：常微分方程中导数出现的最高阶数知为二阶．由方程中出现 $(y'')^2$ 知，方程为非线性的．所以答案 B 正确．

54．选 C。

【解析】由 $y=C_1e^{-x}+C_2$，$y'=-C_1e^{-x}$，$y''=C_1e^{-x}$ 代入方程有 $y''+y'=-C_1e^{-x}+C_1e^{-x}=0$．且 $y=C_1e^{-x}+C_2$ 中有两个独立的任意常数，因此答案为 D.

55.选 C。

【解析】还原积分区域，如图所示：



积分区域D关于y轴对称，被积函数中xy关于x是奇函数，所以

$$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=\iint_D(1-xy)dxdy=\iint_D dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}dy=\frac{7}{3}$$

，

故选 C。

56. 选 C。

【解析】由分布函数的性质，知 $F_1(+\infty)=F_2(+\infty)=F(+\infty)=1$，则 $a-b=1$，经验证只有C满足，$\therefore$ 选C

57.选 B。

【解析】由概率密度的性质，有$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}A\cos xdx=1 \Rightarrow A=1$

58.选 B。

【解析】由概率密度的性质，有$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}=1$

59.选 B。

【解析】由密度函数的性质，有 $p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(2x+1)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-[2x-(-1)]^2}d(2x+1)=1$

60.选 C。

【解析】$\because$ $y=-x$是单减函数，其反函数为 $x=g(y)=-y$，求导数得 $g'(y)=-1$，

$\therefore$ 由公式，$Y=-X$的密度为$p_Y(y)=p[g(y)]|g'(y)|=p(-y)$

61.选 D。

【解析】由已知X服从二项分布$B(n,p)$，则$DX=np(1-p)$，又由方差的性质知,$D(2X-1)=4np(1-p)$

62.选 D。

【解析】$\because$ X服从$N(0, 4)$ $\therefore$ $EX=0$，$DX=4$ 于是$E[X(X-2)]=EX^2-2EX$

$=DX+(EX)^2-2EX=4$

63.选 A。

【解析】由正态分布密度的定义，有 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty)$，

由 $\varphi(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}(-\infty<x<+\infty)\Rightarrow\ 2\sigma^2=4\Rightarrow\sigma^2=2$

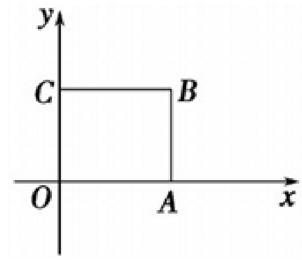
64. 选 D。

【解析】$\because X$若服从泊松分布,则 $EX=DX=\lambda$ $\therefore$如果 $EX\neq DX$ 时，只能选择泊松分布.

65. 选 D。

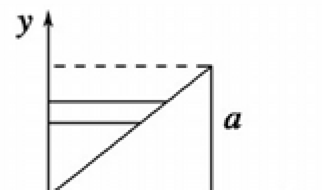
【解析】∵ X 为服从正态分布 N (-1，2)，EX = -1，∴ E(2X - 1) = -3

二、计算题



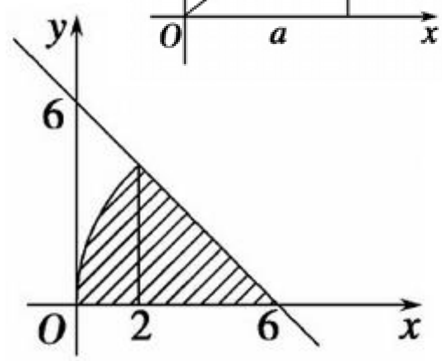
1.以正方形的一个顶点为原点，两边所在的直线为 x,y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，如图 $BC: y=a$ 。则该旋转体即为圆柱的体积为:

$$V=\int_0^a \pi\times a^2dx=\pi a^2x\,|_0^a=\pi a^3$$



2.形成的几何体的体积为一圆柱的体积减去一圆锥的体积。

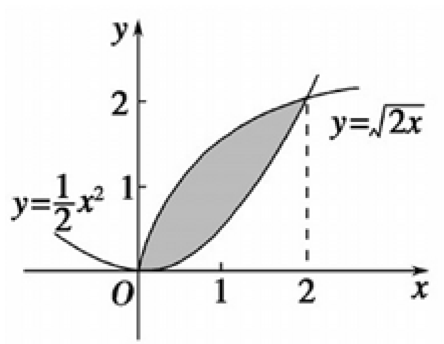
$$\therefore V=\pi a^2\bullet a-\int_0^a \pi y^2dy=\pi a^3-\frac{1}{3}\pi y^3\,|_0^a=\frac{2\pi}{3}a^3$$



3.解方程组 $\begin{cases}y^2=8x(y>0)\\x+y-6=0\end{cases}$ 得: $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

$\therefore y^2=8x$ 与直线 $x+y-6=0$ 的交点坐标为 $(2,4)$，所求几何体的体积为:

$$V=\int_0^2 \pi(\sqrt{8x})^2dx+\int_2^6 \pi(6-x)^2dx=16\pi+\frac{64\pi}{3}=\frac{112\pi}{3}$$



4.曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=\sqrt{2x}$ 所围成的平面图形如图所示:

设所求旋转体的体积为 V，根据图像可以看出 V 等于曲线 $y=\sqrt{2x}$，直线 $x=2$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积（设为 V_1）减去曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 直线 $x=2$ 与 x 轴围

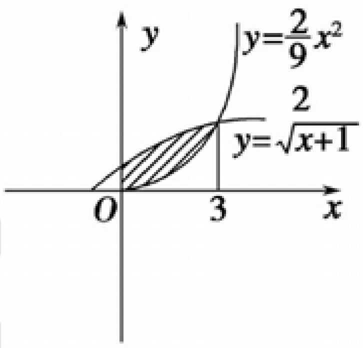
成的平面图形绕x轴旋转一周所得的旋转体的体积（设为V_2）

$$V_1=\int_0^2 \pi(\sqrt{2x})^2dx=2\pi\int_0^2 xdx=2\pi\bullet\frac{1}{2}x^2\big|_0^2=4\pi$$

$$V_2=\int_0^2 \pi\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2dx=\frac{\pi}{4}\int_0^2 x^4dx=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{5}x^5\big|_0^2=\frac{8\pi}{5}$$

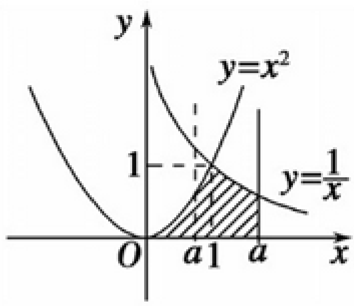
$$V=V_1-V_2=4\pi-\frac{8\pi}{5}=\frac{12\pi}{5}$$

5.由$\begin{cases} y=\sqrt{x+1} \\ y=\dfrac{2}{9}x^2 \end{cases}$ 得：$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$



$$V=\int_0^3 \pi(x+1)dx-\int_0^3 \pi\bullet\frac{4}{81}x^4dx=\frac{51}{10}\pi$$

6.由$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ 得$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$，由示意图可知：要对$a$与1的关系进行讨论：



当$0<a\le 1$时，$V=\int_0^a \pi(x^2)^2dx=\int_0^a \pi x^4dx=\dfrac{\pi}{5}a^5$

当$a>1$时，$V=\int_0^1 \pi(x^2)^2dx+\int_1^a \pi\left(\dfrac{1}{x}\right)^2dx=\dfrac{6\pi}{5}-\dfrac{\pi}{a}$

$\therefore$ 所得旋转体的体积为$V=\begin{cases} \dfrac{\pi a^5}{5}(0<a\le 1) \\ \dfrac{6\pi}{5}-\dfrac{\pi}{a}(a>1) \end{cases}$.

7. $\iint\limits_D x\sin y\mathrm{d}\sigma=\int_1^2 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin ydy=\int_1^2 xdx=\dfrac{3}{2}$

8.

$$\iint\limits_D (xy^2+\mathrm{e}^{x+2y})\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^1 dx\int_0^1 (xy^2+e^{x+2y})dy=\int_{-1}^1 dx\int_0^1 e^{x+2y}dy=\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(e^2-1)e^xdx=\frac{(e^2-1)^2}{2e}$$

9. $\iint\limits_D xye^{xy^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1 xye^{xy^2}dy=\int_0^1\frac{1}{2}(e^x-1)dx=\frac{e}{2}-1$

10. $\iint\limits_D x^2y\sin(xy^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^2 x^2y\sin(xy^2)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(x-x\cos 4x)dx=\frac{\pi^2}{16}$

11. $\iint\limits_D xd\sigma=\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} xdx=\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}dy=\frac{\pi}{2}$

12. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}$

13. $\iint\limits_D x\cos(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}dx\int_0^x x\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi}(-2x\sin x)dx=-2\pi$

14. $\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy=\int_0^1\frac{2}{3}(x^{\frac{7}{4}}-x^4)dx=\frac{6}{55}$

15. $\iint\limits_D xydxdy=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} xydx=\int_{-1}^2\frac{1}{2}y(y^2+4y+4-y^4)dx=\frac{45}{8}$

16. $\iint\limits_D \sin(\frac{x}{y})d\sigma=\int_1^2 dy\int_y^{y^3}\sin(\frac{x}{y})dx=\int_1^2(y\cos 1-y\cos y^2)dy=\frac{3\cos 1+\sin 1-\sin 4}{2}$

17.（1） $f(x)=-5(x^2-1)(x^2-9)$， $x=1$，-1，3，-3；

（2） $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(y+\sum_{i=1}^{n}x_i)y^{n-1}$ 。

18.(1) A 为实对称矩阵，所以相似于对角阵。

(2) 因为 $A\alpha=(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^T\alpha)=-2\alpha$，所以 $\lambda_1=-2$ 是 A 的特征值。又秩 $r(\alpha\alpha^T)=1$，$|E-A|=|\alpha\alpha^T|=0$，所以 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 是 A 的另两个特征值。

设 $\beta=(x_1,x_2,x_3)^T$ 为 A 对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ の 特 征 向 量 ， 则 由 $(\alpha,\beta)=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$，得 A 对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量

$\beta_1=(a_2,-a_1,0)^T$，$\beta_2=(a_3,0,-a_1)^T$，令 $P=(\alpha，\beta_1，\beta_2)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & -a_1 & 0\\ a_3 & 0 & -a_1\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

(3) $A+E$ 的特征值为－2＋1=－1，1+1=2，1+1=2，因此 $|A+E|=-4$

19.(1) $k=0$ 时， $r(A)=2\neq r(\overline{A})=3$，无解

(2) $k\neq 0$，$k\neq 2$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，唯一解 $(x_1, x_2, x_3)^T=(\frac{2-k}{k},1,0)^T$

(3) $k=2$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，无穷多解，通解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$。

20. 由 $|A^*|=|A|^{n-1}$，有 $|A|^3=8$，得 $|A|=2$。用 A^*，A 左右乘方程的两端，得 $(2E-A^*)B=6E$

$$B=6(2E-A^*)^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$$

21.（1）方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，所以 $r(A)=r(\overline{A})<3$，故 $a=-2$。

（2） 特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-3$，$\lambda_3=0$。

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad Q^TAQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

22. $[0,6)$

23. 原式为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n^2-1)}$ 的和函数在 $x=\frac{1}{2}$ 点的值．而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n^2-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，分别求出 $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}$ 和 $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数即可得：$\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.

24. $f(x)=\ln\left(1-x-2x^2\right)=\ln\left(1-2x\right)+\ln\left(1+x\right)$，

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{n+1}x^{n+1},\quad x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$f^{(n+1)}\left(0\right)=n!\cdot\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{n+1}$.

25. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$，而

$xe^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n$，$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}-1,\quad -\infty<x<+\infty$.

26.解一阶线性微分方程，求出特解为 $f_n(x)=\frac{x}{n}e^x 2$，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}e^x=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}$，记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}$，则可得 $S(x)=-\ln(1-x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)=-e^x\ln\left(1-x\right),\quad x\in\left[-1,1\right)$。

27.设 $f_n(x)=x^n+nx-1$,则 $f_n'(x)>0,\left(x>0\right)$,故 $f_n(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内最多有一个正根.而 $f_n(0)=-1<0,\quad f_n(1)=n>0$，所以有唯一正根 x_0．由方程 $x^n+nx-1=0$ 知, $0<x_0=\frac{1-x_0^n}{n}<\frac{1}{n}$,故当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛。

28.由于 $F\left(x\right)$ 要求右连续，故等号必须加在 $>$ 号上。又由于每一区间的 $F\left(x\right)$ 为常数，故 X 具有离散型特征。$F\left(x\right)$ 在 $x=-1,\ 1,\ 3$ 处有第一类跳跃间断点，即 X 在这些点的概率不为零，即正概率点存在。计算如下

$P\left\{X=-1\right\}=F\left(-1\right)-F\left(-1-0\right)=0.4-0=0.4$

$P\left\{X=1\right\}=F\left(1\right)-F\left(1-0\right)=0.8-0.4=0.4$

$P\left\{X=3\right\}=F\left(3\right)-F\left(3-0\right)=1-0.8=0.2$

X 的概率分布（即离散分布律）为

X	-1	1	3
p_i	0.4	0.4	0.2

29.依题意得 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 2<x<5\\ 0\end{cases}$，$P(X>3)=\int_3^5\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$，设 Y

表示三次独立观测中其测值大于 3 的次数，则 $P(Y\geq 2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$。

30. X 的概率密度为： $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in[0,\ \pi]\\ 0, & 其它\end{cases}$， 确定 Y 的值域为 $Y\in[0,\ 1]$。故 $y<0\Rightarrow F_Y(y)=0$; $y\geq 1\Rightarrow F_Y(y)=1$; 当 $0\leq y<1$ 时， x 的单调区域 D 有两个，即 $D=\{x\,|\,0\leq x\leq \arcsin y\}\cup\{x\,|\,\pi-\arcsin y\leq x\leq\pi\}$，根据反函数的定义，$D$ 的两个单调区域存在反函数。使用一般法，得

$$F(y)=P(\sin X\leq y)=\int_0^{\arcsin y}\frac{1}{\pi}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{1}{\pi}dx,\quad 0<y<1$$

当 $y\leq 0\Rightarrow F(y)=0$;

当 $y\geq 1\Rightarrow F(y)=1$;

当 $0<y<1\ \Rightarrow f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0\leq y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

31. ξ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\leq x\leq 2\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$，代入公式得

$$E(\sin\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\cdot f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin xdx=0.$$

32.设 X 为抽取的次数，∵ 只有3个旧球,所以 X 的可能取值为：1，2,3,4，由古典概型，有

∴ $P\{X=1\}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$，$P\{X=2\}=\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}=\frac{9}{44}$，$P\{X=3\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{220}$，$P\{X=4\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{9}=\frac{1}{220}$

则

X	1	2	3	4
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

33. 设 X 表示同一时刻需用小吊车的人数，则 X 是一随机变量，由题意有 X服从$B\left(6,\ \frac{1}{5}\right)$，

$P\{X=k\}=C_6^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{6-k}(k=0,1,\cdots,6)$，于是

（1）X 的最可能值为 $k_0=[(n+1)p]=\left[7\times\frac{1}{5}\right]=1$，即概率$P\{X=k\}$达到最大的$k_0$

（2）P {耽误工作} $=P\{X>2\}=1-P\{X\le 2\}=1-\sum_{i=0}^{2}p\{X=i\}$

$=1-\sum_{i=0}^{2}C_6^i\left(\frac{1}{5}\right)^i\left(\frac{4}{5}\right)^{6-i}=0.0989$

34.（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1 \quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{x^2}dx=1$ 可得 $C=100$

（2）串联线路正常工作的充要条件是每个元件都能正常工作，而这里三个元件的工作是相互独立的，因此，若用 A 表示“线路正常工作”，则 $P(A)=[P(X>150)]^3$，而 $P\{X>150\}=\int_{150}^{+\infty}\frac{100}{x^2}dx=\frac{2}{3}$，故 $P(A)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$。

35. $\mu=300,\ \sigma=35$，（1）$P\{X>250\}=1-P\{X\le 250\}=1-\Phi\left(\frac{250-300}{35}\right)$

$=1-\Phi\left(-\frac{50}{35}\right)$，$(\because\Phi(-X)=1-\Phi(X))$，$\therefore P\{X>250\}=1-(1-\Phi(1.428))$

$=\Phi(1.428)=0.9236$

（2）由题意 $P\{300-a<X<300+a\}=\Phi\left(\frac{300+a-300}{35}\right)-\Phi\left(\frac{300-a-300}{35}\right)$

$=\Phi\left(\frac{a}{35}\right)-\Phi\left(-\frac{a}{35}\right)$

$=2\Phi\left(\frac{a}{35}\right)-1=0.9$，即 $\Phi\left(\frac{a}{35}\right)=\frac{1+0.9}{2}=0.95$ 查表得 $a=57.75$。

36. $Y=e^{2X}$ 对应的函数 $y=e^{2x}$ 单调增加，其反函数为 $x=g(y)=\frac{1}{2}lny$，求导数得 $g'(y)=\frac{1}{2y}$，

又由题设知 $p_X(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$，故由公式知：

$$p_Y(y)=p_X\left[g(y)\right]\left|g'(y)\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & e^2\le y\le e^4\\ 0, & 其它\end{cases}$$

37. $\because$ X服从泊松分布$P(\lambda)$，则 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k=0,1,2,\cdots)$，而 $EX=DX=\lambda$，由题设知 $EX^2=2$，即 $DX+(EX)^2=\lambda+\lambda^2=2$，可得 $\lambda=1$，故 $P(X\ge 4)=1-P(X<4)=1-\sum\limits_{k=0}^{3}\dfrac{1}{k!}e^{-1}$，查泊松分布表得，$\sum\limits_{k=0}^{3}\dfrac{1}{k!}e^{-1}=0.981=1-0.981$ $=0.019$

38. 由数学期望的定义知，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}dx=0$ 而 $EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-|x|}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$，故 $DX=EX^2-(EX)^2=2$

39.（1）X 的可能取值为0，1，2，3且由题意,可得

$P\{X=0\}=\dfrac{1}{2}$

$P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

$P\{X=3\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

（2）由离散型随机变量函数的数学期望，有

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{1+0}\times P\{X=0\}+\frac{1}{1+1}\times P\{X=1\}+\frac{1}{1+2}\times P\{X=2\}+\frac{1}{1+3}\times P\{X=3\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{67}{96}$$

40.对原式进行变量分离得：

$\frac{1}{y}dy = 2xdx$，两边同时积分得：$\ln|y| = x^2 + c$，即$y = ce^{x^2}$把$x=0$，$y=1$代入得

$c=1$，故它的特解为 $y = e^{x^2}$。

41.对原式进行变量分离得：

$-\frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{y^2}dy$，当$y \neq 0$时，两边同时积分得；$\ln|x+1| = \frac{1}{y}+c$，即$y = \frac{1}{c+\ln|x+1|}$

当$y=0$时显然也是原方程的解 。当$x=0, y=1$时，代入式子得 $c=1$，故特解是

$y = \frac{1}{1+\ln|1+x|}$。

42.原式可化为：

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y}\cdot\frac{1}{x+x^3}$显然$\frac{1+y^2}{y} \neq 0$，故分离变量得$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{x+x^3}dx$

两边积分得$\frac{1}{2}\ln|1+y^2| = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{|x^2+1|} + \frac{1}{2}\ln|c|(c \neq 0)$，即$(1+y^2)(1+x^2) = cx^2$

故原方程的解为 $(1+y^2)(1+x^2) = cx^2$

43.y=$e^{\int dx}(\int \sin x\, e^{-\int dx}dx + c)$=$e^x[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+c]$=c $e^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

是原方程的解。

44.原方程可化为：$\frac{dx}{dt}$=-3x+e^{2t}，所以：x=$e^{\int -3dt}(\int e^{2t}e^{-\int -3dt}dt + c)$=$e^{-3t}$

$(\frac{1}{5}e^{5t}+c)$=c $e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}$是原方程的解。

45.s=$e^{\int -\cos t dt}(\int \frac{1}{2}\sin 2t\, e^{\int 3dt}dt + c)$=$e^{-\sin t}(\int \sin t\cos t e^{\sin t}dt + c)$=

$e^{-\sin t}(\sin t e^{\sin t} - e^{\sin t} + c)$=$ce^{-\sin t} + \sin t - 1$是原方程的解。

46.解：$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+x^3}{xy^2} = \frac{x^3}{y^2} + \frac{y}{x}$，令$\frac{y}{x} = u$，则$y = ux$，$\frac{dy}{dx}$=u$+x\frac{du}{dx}$，因此：

$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x}{u^2}$，即$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2}$，$u^2du = dx$，$\frac{1}{3}u^3 = x + c$，$u^3 - 3x = x + c$（*），将$\frac{y}{x} = u$

带入（*）中得：$y^3 - 3x^4 = cx^3$是原方程的解.

47.特征方程 $\lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3a^2\lambda - a^3 = 0$，有三重根 $\lambda = a$，故通解为

x=$c_1e^{at} + c_2te^{at} + c_3t^2e^{at}$

48.特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ 有复数根 λ_1 = -1+3i, λ_2 = -1-3i，故通解为

$x = c_1e^{-t}\cos 3t + c_2e^{-t}\sin 3t$

49. 特征方程 $\lambda^2+\lambda+1=0$ 有复数根 $\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，故通解为

$$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

50.特征方程 $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$ 有根 $\lambda_1=2$,两重根 $\lambda=1$，齐线性方程的通解为

x=$c_1e^{2t}+c_2e^t+c_3te^t$

又因为 $\lambda=0$ 不是特征根，故可以取特解行如 $\tilde{x}=A+Bt$ 代入原方程解得 A=-4，B=-1，故通解为 x=$c_1e^{2t}+c_2e^t+c_3te^t$ -4-t

51.特征方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$ 有根 $\lambda_1=$-2,$\lambda_2=1$，故齐线性方程的通解为 x=$c_1e^t+c_2e^{-2t}$，因为+-2i 不是特征根取特解行如 $\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$ 代入原方程解得 A=$-\frac{2}{5}$,$B=-\frac{6}{5}$，故通解为 x=$c_1e^t+c_2e^{-2t}-\frac{2}{5}\cos 2t-\frac{6}{5}\sin 2t$

52.特征方程 $\lambda^3-1=0$ 有复数根 $\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，$\lambda_3=1$ 故齐线性方程的通解为 $x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t$，$\lambda=1$ 是特征方程的根，故 $\tilde{x}=Ate^t$ 代入原方程解得 A=$\frac{1}{3}$，故通解为 $x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t+\frac{1}{3}te^t$.