2020 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题及解析

一、选择题：**1−8** 小题，每小题 **4** 分，共 **32** 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）$x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶是（　　）

（A）$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$　　（B）$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$　　（C）$\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$　　（D）$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$

【答案】（D）

【解析】本题采用统一求导法，当 $x \to 0^+$ 时，有

选项（A）$\frac{d}{dx}\int_0^x (e^{t^2}-1)dt = e^{x^2}-1 \sim x^2$；

选项（B）$\frac{d}{dx}\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt = \ln(1+\sqrt{x^3}) \sim \sqrt{x^3}$；

选项（C）$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt = \cos x \sin(\sin x)^2 \sim x^2$；

选项（D）$\frac{d}{dx}\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt = \sin x\sqrt{\sin^3(1-\cos x)} \sim \frac{x^4}{2\sqrt{2}}$；

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则（　　）

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（B）当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（C）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

（D）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$

【答案】（C）

【解析】当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}，\text{而}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{|x|}}=0$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\cdot 0=0$，故选（C）

3）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微， $f(0,0)=0$， $\vec{n}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1)\Big|_{(0,0)}$ 非零向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{n}$ 垂直，则（　　）

（A） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在　　（B） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

（C） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在　　（D） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

【答案】（A）

【解析】由可微的等价定义可知， $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}x-\frac{\partial f}{\partial y}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，选（A）

（4）设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径， r 是实数，则（　　）

（A）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时， $|r|\geq R$　　（B）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛时， $|r|\leq R$

（C）当 $|r|\geq R$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散　　（D）当 $|r|\leq R$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛

【答案】（A）

【解析】由已知可得，当 $|r|<R$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，所以当 $|r|<R$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛，故其逆否命题也成立，所以当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时， $|r|\geq R$，选（A）

（5）若矩阵 A 经初等列变换化成 B，则（　　）

（A）存在矩阵 P，使得 $PA=B$　　（B）存在矩阵 P，使得 $BP=A$

（C）存在矩阵 P，使得 $PB=A$　　（D）方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

【答案】（B）

【解析】对 A 经初等列变换，相当于右乘一系列初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots Q_m$，令 $Q=Q_1,Q_2,\cdots Q_m$

由题意可得： $AQ=B$，故有 $A=BQ^{-1}$，令 $Q^{-1}=P$，从而 $BP=A$.

（6）已知直线 $l_1:\frac{x-a_2}{a_1}=\frac{y-b_2}{b_1}=\frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $l_2:\frac{x-a_3}{a_2}=\frac{y-b_3}{b_2}=\frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点，法向量

$\alpha_i=\begin{bmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{bmatrix}$，$i=1,2,3$，则（　　）

（A）α_1可由α_2,α_3线性表示　　（B）α_2可由α_1,α_3线性表示

（C）α_3可由α_1,α_2线性表示　　（D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

【答案】（C）

【解析】设交点为(x_0,y_0,z_0)，则$\dfrac{x_0-a_2}{a_1}=\dfrac{y_0-b_2}{b_1}=\dfrac{z_0-c_2}{c_1}=k$；$\dfrac{x_0-a_3}{a_2}=\dfrac{y_0-b_3}{b_2}=\dfrac{z_0-c_3}{c_2}=l$

故有$x_0=a_2+ka_1=a_3+la_2$；

$y_0=b_2+kb_1=b_3+lb_2$；

$z_0=c_2+kc_1=c_3+lc_2$

从而$\alpha_3=k\alpha_1+(1-l)\alpha_2$，即$\alpha_3$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示

（7）设A,B,C为三个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，

$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则$A,B,C$中恰有一个事件发生的概率为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{5}{12}$

【答案】（D）

【解析】由加法公式可得：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{7}{12}$$

则A,B,C中恰有一个事件发生的概率为

$$p=P(A\cup B\cup C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+2P(ABC)=\frac{7}{12}-\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$$

（8）设$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$为来自总体X的简单随机样本，其中$P(X=0)=P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，$\Phi(x)$表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得$P(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\le 55)$的近似值为（　　）

（A）$1-\Phi(1)$　　（B）$\Phi(1)$　　（C）$1-\Phi(0.2)$　　（D）$\Phi(0.2)$

【答案】（B）

【解析】根据列维-林德伯格中心极限定理可得：$\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$近似服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$；

其中 $\mu = E(\sum_{i=1}^{100} X_i) = 100E(X) = 50$，$\sigma^2 = D(\sum_{i=1}^{100} X_i) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$

所以 $P(\sum_{i=1}^{100} X_i \le 55) = P(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \le \frac{55-50}{\sqrt{25}}) = P(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \le 1) = \Phi(1)$，答案为 B

二、填空题：9−14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)}] =$________.

【答案】-1

【解析】$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)}] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(e^x-1)}{(e^x-1)\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(e^x-1)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)-x]+[x-(e^x-1)]}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{x-(e^x-1)}{x^2}$

$= (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}) = -1$

（10）设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} =$________.

【答案】$-\sqrt{2}$

【解析】$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{t}$，$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{t})\frac{1}{dx/dt} = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$

因此 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} = -\sqrt{2}$

（11）若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0\,(a>0)$，且 $f(0) = m$，$f'(0) = n$，则 $\int_0^{+\infty} f(x)dx =$________.

【答案】$n + am$

【解析】该微分方程的特征方程为：$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$，设 λ_1, λ_2 为其两个根

① 若 $a > 2$，则 λ_1, λ_2 为两个负实根，通解为 $f(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$，$f'(x) = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}$

故有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

②若 $a = 2$，则 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，通解为 $f(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}$，$f'(x) = (C_2 - C_1 - C_2x)e^{-x}$

故有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

③若 $0<a<2$，则 $\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm bi$，其中 $b=\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$

通解为 $f(x)=(C_1\cos bx+C_2\sin bx)e^{-\frac{a}{2}x}$，

$$f'(x)=(-C_1b\sin bx+C_2b\cos bx-\frac{a}{2}C_1\cos bx-\frac{a}{2}C_2\sin bx)e^{-\frac{a}{2}x}$$

故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

综上所述可得：$\int_0^{+\infty}f(x)dx=-\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]dx=-f'(x)\Big|_0^{+\infty}-af(x)\Big|_0^{+\infty}=n+am$

（12）设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________.

【答案】$4e$

【解析】$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xe^{x(xy)^2}=xe^{x^3y^2}$，$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\left(xe^{x^3y^2}\right)_x'=e^{x^3y^2}+3x^3y^2e^{x^3y^2}$

所以 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=4e$

（13）行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

【答案】$a^2(a^2-4)$

【解析】$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\a&a&1&-1\\a&1&a&0\\a&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\1&a&1&-1\\1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&0&-1&0\\1&a&1&0\\1&1&a&a\\1&-1&0&a\end{vmatrix}$

$=a^2\begin{vmatrix}1&0&-1&0\\1&a&1&0\\1&1&a&1\\1&-1&0&1\end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix}1&0&-1&0\\1&a&1&0\\0&2&a&0\\1&-1&0&1\end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&a&1\\0&2&a\end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&a&2\\0&2&a\end{vmatrix}=a^2(a^2-4)$

（14）设 X 服从区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y)=$________.

【答案】$\frac{2}{\pi}$

【解析】因为 $X\sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，所以 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & else\end{cases}$，且 $EX=0$

所以 $Cov(X,Y)=Cov(X,\sin X)=E(X\sin X)-EX\cdot E(\sin X)=E(X\sin X)$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}x\sin xdx=\frac{2}{\pi}$$

三、解答题：15−23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

【解析】先计算驻点：$f_x'(x,y)=3x^2-y$，$f_y'(x,y)=24y^2-x$，

解得驻点 $x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{12}$ 和 $x=y=0$

又因为 $A=f_{xx}''(x,y)=6x$，$B=f_{xy}''(x,y)=-1$，$C=f_{yy}''(x,y)=48y$

①当 $x=y=0$ 时，$A=0,B=-1,C=0$，则 $AC-B^2<0$，所以 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点；

②当 $x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{12}$，$A=1,B=-1,C=4$，则 $AC-B^2>0,A>0$，所以 $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点，其 $f(x,y)$ 的极小值为 $f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$

（16）（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中 L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

【解析】取封闭曲线 $L_\varepsilon:4x^2+y^2=\varepsilon^2$（其中 ε 为充分小），方向为顺时针

令 $P=\frac{4x-y}{4x^2+y^2},Q=\frac{x+y}{4x^2+y^2}$，且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

则由格林公式可得：

$$I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy=\oint_{L+L_\varepsilon}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy-\oint_{L_\varepsilon}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$$

$$=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_\varepsilon}(4x-y)dx+(x+y)dy$$

$$=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_\varepsilon^-}(4x-y)dx+(x+y)dy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\eta}[1-(-1)]d\sigma=\frac{2}{\varepsilon^2}S_{D_\varepsilon}=\frac{2}{\varepsilon^2}(\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon)=\pi$$

（17）（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})a_n$，证明：当$|x|<1$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛，并求其和函数.

【解析】$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\right|=1$，所以当$|x|<R=1$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛；

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_nx^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x)$$

则$S'(x)+\frac{1}{2(x-1)}S(x)=\frac{1}{1-x}$

解微分方程可得：$S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}-2$，带入初始条件$S(0)=0$，解得$C=2$

所以$S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2$

（18）（本题满分 10 分）

设Σ为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\le x^2+y^2\le 4)$的下侧，$f(x)$是连续函数，

计算$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy$.

【解析】由题意可得，$F(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}$，则$F_x'=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$F_y'=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$F_z'=1$

由转换投影法可得：

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy$$

$$=-\iint_{\Sigma}\left\{[xf(xy)+2x-y](-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})+[yf(xy)+2y+x](-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})+[zf(xy)+z]\right\}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2dr=\frac{14}{3}\pi$$

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数， $f(0)=f(2)=0$， $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.

证明（1）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$；

（2）若对任意的 $x\in(0,2)$，有 $|f'(x)|\leq M$，则 $M=0$.

【解析】（1）因为 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$，故有

①若 $M=0$，此时 $f(x)\equiv 0$，对任意的 $\xi\in(0,2)$， $f'(x)=0$，结论显然成立；

②若 $M>0$，不妨设 $|f(x_0)|=\max\{|f(x)|\}=M$，其中 $x_0\in(0,2)$

由拉格朗日中值定理可得： $\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=f'(\xi_1)$， $\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=f'(\xi_2)$，

其中 $\xi_1\in(0,x_0)$， $\xi_2\in(x_0,2)$

即： $|f'(\xi_1)|=\dfrac{|f(x_0)|}{x_0}=\dfrac{M}{x_0}$， $|f'(\xi_2)|=\dfrac{|f(x_0)|}{2-x_0}=\dfrac{M}{2-x_0}$

若 $x_0\in(0,1)$，则有 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{x_0}\geq M$ 成立

若 $x_0\in(1,2)$，则 $2-x_0\in(0,1)$，则有 $|f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-x_0}\geq M$ 成立

（2）反证：若 $M>0$，由（1）可得，至少存在一点 $\xi\in(0,2)$ 使得 $|f'(\xi)|\geq M$，此时必有 $x_0=1$；

则 $M=|f(1)|=\left|\int_0^1 f'(x)dx\right|\leq\int_0^1|f'(x)|dx\leq\int_0^1 M dx=M$

$M=|f(1)|=\left|\int_1^2 f'(x)dx\right|\leq\int_1^2|f'(x)|dx\leq\int_1^2 M dx=M$

所以在区间 $(0,1)$ 必有 $\int_0^1|f'(x)|dx=M$ 成立；在区间 $(1,2)$ 上必有 $\int_1^2|f'(x)|dx=M$ 上成立

即可得 $f'(x)=\pm M$，此时与 $f(0)=f(2)=0$ 矛盾；

或可得 $f'(x)=\begin{cases}\pm M & 0<x<1\\ \mp M & 1<x<2\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导，与已知矛盾，故 $M=0$

（20）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$，经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 变为

$f(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中$a\ge b$。

求（1）求a,b的值；

（2）求正交矩阵Q.

【解析】（1）由题意可得，$A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$相似且合同，所以$a+b=5$，$ab=4$

解得$a=4,b=1$

（2）$A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=5,\lambda_2=0$

对于矩阵A，属于$\lambda_1=5$的特征向量为$\xi_1=(1,-2)^T$

属于$\lambda_2=0$的特征向量为$\xi_2=(2,1)^T$

令$Q_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$Q_1^TAQ_1=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}$

对于矩阵$B=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$，属于$\lambda_1=5$的特征向量为$\eta_1=(2,1)^T$

属于$\lambda_2=0$的特征向量为$\eta_2=(1,-2)^T$

令$Q_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$Q_2^TBQ_2=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}$

故有$Q_1^TAQ_1=Q_2^TBQ_2$，即$Q_2Q_1^TAQ_1Q_2^T=B$

所以$Q=Q_1Q_2^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&-4\end{pmatrix}$

（21）（本题满分 11 分）

设A为二阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中α是非零向量且不是A的特征向量，

（1）证明P是可逆矩阵；

（2）若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求$P^{-1}AP$，并判断$A$是否相似于对角矩阵.

【解析】（1）因为α是非零向量且不是A的特征向量，所以α与$A\alpha$线性无关（若线性相关，则$A\alpha=\lambda\alpha$与已知矛盾），故P的列向量线性无关，则P是可逆矩阵

（2）由已知可得，$AP=A(\alpha,A\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha)=(A\alpha,-A\alpha+6\alpha)=(\alpha,A\alpha)\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$

$=P\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$

所以$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$，记$\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}=B$，则$A$与$B$相似

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&-6\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda-2)(\lambda+3)$

故A与B的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-3$，因为特征值互异，所以A与对角矩阵相似

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量X_1,X_2,X_3相互独立，其中X_1和X_2均服从标准正态分布，X_3的概率分布为

$P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量(X_1,Y)的分布函数，结果用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示；

（2）证明随机变量Y服从标准正态分布.

【解析】（1）(X_1,Y)的分布函数为$F(x,y)=P\{X_1\le x,Y\le y\}$

$=P\{X_1\le x,Y\le y,X_3=0\}+P\{X_1\le x,Y\le y,X_3=1\}$

$=\dfrac{1}{2}P\{X_1\le x,X_2\le y\}+\dfrac{1}{2}P\{X_1\le x,X_1\le y\}$

①当$x\le y$时，$F(x,y)=\dfrac{1}{2}P\{X_1\le x,X_2\le y\}+\dfrac{1}{2}P\{X_1\le x\}=\dfrac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(x)$；

①当$x>y$时，$F(x,y)=\dfrac{1}{2}P\{X_1\le x,X_2\le y\}+\dfrac{1}{2}P\{X_1\le y\}=\dfrac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(y)$；

所以$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(x), & x\le y\\ \dfrac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(y), & x>y\end{cases}$

（2）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y,X_3=0\}+P\{Y\le y,X_3=1\}$

$=P\{X_2\le y,X_3=0\}+P\{X_1\le y,X_3=1\}$

$=\dfrac{1}{2}P\{X_2\le y\}+\dfrac{1}{2}P\{X_1\le y\}=\Phi(y)$

所以$Y\sim N(0,1)$服从标准正态分布.

（23）（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命T 的分布函数为$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，其中

θ,m 为参数且大于 0

（1）求概率$P\{T>t\}$，$P\{T>t+s|T>s\}$，其中$S>0,T>0$；

（2）任取n 个这种元件做寿命试验，测得他们的寿命分别为$t_1,\cdots,t_n$，若m已知，求θ 的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

【解析】（1）$P\{T>t\}=1-P\{T\le t\}=1-F(t)=1-[1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}]=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$；

$$P\{T>t+s|T>s\}=\frac{P\{T>s,T>t+s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>t+s\}}{P\{T>s\}}=\frac{e^{-\left(\frac{t+s}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=e^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{t+s}{\theta}\right)^m}$$

（2）先求密度函数 $f(t)=F'(t)=\begin{cases}\frac{m}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{m-1}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{mt^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

故似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(\theta,t_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{mt_i^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m} & t_i\ge 0\\ 0, & t_i<0\end{cases}$

当$t_i\ge 0(i=1,2,\cdots,n)$时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{mt_i^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m}=\frac{m^n(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}}{\theta^{mn}}e^{-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$

$$\ln L(\theta)=n\ln m+(m-1)(t_1t_2\cdots t_n)-mn\ln\theta-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+\frac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}t_i^m=0$$

解得$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$