2020年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题及解析

一、选择题：**1−8** 小题，每小题 **4** 分，共 **32** 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$（　　）

（A）$b\sin a$　　（B）$b\cos a$　　（C）$b\sin f(a)$　　（D）$b\cos f(a)$

【答案】（B）

【解析】$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\xi[f(x)-a]}{x-a}=b\cos a$，

其中 ξ 介于 $f(x)$ 与 a 之间（当 $x\to a$ 时 $f(x)\to a$）

（2）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（C）

【解析】可能的间断点为 $-1,0,1,2$；当 $x\to -1$ 时，$f(x)\to\infty$；当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to -\dfrac{1}{2}e^{-1}$；

当 $x\to 1^+$ 时，$f(x)\to\infty$；当 $x\to 2$ 时，$f(x)\to\infty$

（3）设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则（　　）

（A）$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是奇函数　　（B）$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是偶函数

（C）$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 是奇函数　　（D）$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 是偶函数

【答案】（A）

【解析】令 $f(x)=0$，则排除（B），（D）

令 $f(x)=x$，则 $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt=\int_0^x[\cos 1+t]dt=x\cos 1+\dfrac{x^2}{2}$，排除（C）

【法二】因为 $f(x)$ 是奇函数，故 $\cos f(t)+f'(t)$ 为偶函数，则 $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是奇函数.

（4）设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为（　　）

（A）$(-2,6)$　　（B）$(-3,1)$　　（C）$(-5,3)$　　（D）$(-17,15)$

【答案】（B）

【解析】由题意得 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛半径为 4，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛半径为 2，则 $|x+1|<2$，故 $x\in(-3,1)$

（5）设 4 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组，A^* 为 A 的伴随矩阵，则方程组 $A^*x=0$ 的通解为（　　）

（A）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

（B）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

（C）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

（D）$x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

【答案】（C）

【解析】因为 A 不可逆，且 a_{12} 代数余子式 $A_{12}\neq 0$，故 $r(A^*)=1$，因为 $A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\neq 0$，故 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关（部分无关，整体无关）

（6）设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 属于特征值为 1 的线性无关特征向量，α_3 为 A 的属于 -1 的特征向量，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为（　　）

（A）$(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$　　（B）$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

（C）$(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$　　（D）$(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

【答案】（D）

【解析】由已知可得 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，$A(-\alpha_3)=-A(\alpha_3)=-(-\alpha_3)$，$A\alpha_2=\alpha_2$

且 $\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2$ 线性无关

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，

$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为（　　）

（A）$\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{5}{12}$

【答案】（D）

【解析】由加法公式可得：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{7}{12}$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为

$$p=P(A\cup B\cup C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+2P(ABC)=\frac{7}{12}-\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$$

（8）设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$，则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是（　　）

（A）$\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$　（D）$\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

【答案】（C）

【解析】由已知可得，$\operatorname{cov}(X,Y)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot\sqrt{4}=-1$

而只有 $\operatorname{cov}(X,X+Y)=D(X)+\operatorname{cov}(X,Y)=0$，故与 X 独立的只有选项（A）（C）

又因为 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=3$

所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1)$，答案为（C）

二、填空题：9−14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $dz|_{(0,\pi)}=$________.

【答案】$(\pi-1)dx-dy$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=\frac{dz(x,\pi)}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{d\arctan[x\pi+\sin(x+\pi)]}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{\pi+\cos(x+\pi)}{1+[x\pi+\sin(x+\pi)]^2}\Big|_{x=0}=\pi-1$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}=\frac{dz(0,y)}{dy}\Big|_{y=\pi}=\frac{d\arctan[\sin y]}{dy}\Big|_{y=\pi}=\frac{\cos y}{1+[\sin y]^2}\Big|_{y=\pi}=-1$$

（10）曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为________.

【答案】$y=x-1$

【解析】原方程两边对 x 求导可得，$1+y'+2e^{2xy}(y+xy')=0$，带入 $(0,-1)$ 可得，$y'=1$

故切线方程为 $y=x-1$

（11）设某厂家某产品的产量为 Q，成本 $C(Q)=100+13Q$，设产品的单价为 p，需求量 $Q(p)=\frac{800}{p+3}-2$.则该厂家取得最大利润时的产量为________.

【答案】8

【解析】由需求函数$Q(p)=\dfrac{800}{p+3}-2$可得，$p=\dfrac{800}{Q+2}-3$

故利润函数为：$L(Q)=R(Q)-C(Q)=\left(\dfrac{800}{Q+2}-3\right)Q-\left(100+13Q\right)=-\dfrac{1600}{Q+2}-16Q+700$

令$L'(Q)=\dfrac{1600}{\left(Q+2\right)^2}-16=0$，解得$Q=8$

又因为$L''(Q)=-\dfrac{3200}{\left(Q+2\right)^3}=-\dfrac{16}{5}<0$，故当$Q=8$时，$L(Q)$最大

（12）设平面区域$D=\{(x,y)|\dfrac{x}{2}\le y\le\dfrac{1}{1+x^2},0\le x\le 1\}$，则$D$绕$y$轴旋转所成的旋转体的体积为________.

【答案】$\pi\ln 2-\dfrac{\pi}{3}$

【解析】$V_y=\int_0^1 2\pi x\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{x}{2}\right)dx=2\pi\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}dx-\pi\int_0^1 x^2dx$

$=\pi\ln(1+x^2)\big|_0^1-\dfrac{\pi}{3}x^3\big|_0^1=\pi\ln 2-\dfrac{\pi}{3}$

（13）行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$__________.

【答案】$a^2(a^2-4)$

【解析】$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ a & a & 1 & -1 \\ a & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$

$=a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}=a^2(a^2-4)$

（14）随机变量X的概率分布$P\{X=k\}=2^{\frac{1}{k}}$，$k=1,2,3,\cdots$，Y表示X被3整除的余数，则$E(Y)=$________.

【答案】$\dfrac{8}{7}$

【解析】由题意可得，Y 的所有可能取值为$0,1,2$，其取值概率如下：

$$P\{Y=0\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=3k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7};$$

$$P\{Y=1\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=3k+1\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7};$$

$$P\{Y=2\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=3k+2\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+2}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$$

所以$E(Y)=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$

三、解答题：15−23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知a,b为常数，若$(1+\frac{1}{n})^n-e$与$\frac{b}{n^a}$在$n\to\infty$时是等价无穷小，求a和b.

【解析】$(1+\frac{1}{n})^n-e=e^{\ln(1+\frac{1}{n})^n}-e=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-e=e[e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1]\sim e\left[n\ln(1+\frac{1}{n})-1\right]$

而$e\left[n\ln(1+\frac{1}{n})-1\right]=en[\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]\sim en(-\frac{1}{2n^2})=-\frac{e}{2n}$

所以$a=1$，$b=-\frac{e}{2}$.

（16）（本题满分 10 分）

求函数$f(x,y)=x^3+8y^3-xy$的极值.

【解析】先计算驻点：$f_x'(x,y)=3x^2-y$，$f_y'(x,y)=24y^2-x$，

解得驻点$x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{12}$和$x=y=0$

又因为$A=f_{xx}''(x,y)=6x$，$B=f_{xy}''(x,y)=-1$，$C=f_{yy}''(x,y)=48y$

①当$x=y=0$时，$A=0,B=-1,C=0$，则$AC-B^2<0$，所以$(0,0)$不是函数$f(x,y)$的极值点；

②当 $x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{12}$，$A=1,B=-1,C=4$，则 $AC-B^2>0,A>0$，所以 $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点，其 $f(x,y)$ 的极小值为 $f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$，且 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，

（1）求 $f(x)$ 是表达式；

（2）若 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)dx$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

【解析】（1）特征值方程为：$\lambda^2+2\lambda+5=0$，解得 $\lambda=-1\pm 2i$，

故齐次通解为 $f(x)=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

带入 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$ 可得：$C_1=1,C_2=0$，故 $f(x)=e^{-x}\cos 2x$

（2）$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)dx=\int_{n\pi}^{+\infty}e^{-x}\cos 2xdx=\frac{e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)}{5}\Big|_{n\pi}^{+\infty}$

$=-\frac{e^{-n\pi}(2\sin 2n\pi-\cos 2n\pi)}{5}=\frac{1}{5}e^{-n\pi}$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}e^{-n\pi}=\frac{1}{5}\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{5}\frac{1}{e^{\pi}-1}$

（18）（本题满分 10 分）

设 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,y\ge 0\}$，连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint_D f(x,y)dxdy$，

求 $\iint_D xf(x,y)dxdy$.

【解析】设 $\iint_D f(x,y)dxdy=A$，则 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+Ax$

$$A=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D[y\sqrt{1-x^2}+Ax]dxdy=\iint_D y\sqrt{1-x^2}dxdy+A\iint_D xdxdy$$

$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2}dxdy=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\int_0^1(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

所以 $\iint_D xf(x,y)d\sigma=\iint_D x[y\sqrt{1-x^2}+Ax]d\sigma=\iint_D xy\sqrt{1-x^2}d\sigma+A\iint_D x^2d\sigma=A\iint_D x^2d\sigma$

$$=\frac{3\pi}{16}\iint_D x^2d\sigma=\frac{3\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta rdr=\frac{3\pi^2}{128}$$

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数， $f(0)=f(2)=0$， $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.

证明（1）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\ge M$；

（2）若对任意的 $x\in(0,2)$，有 $|f'(x)|\le M$，则 $M=0$.

【解析】（1）因为 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$，故有

①若 $M=0$，此时 $f(x)\equiv 0$，对任意的 $\xi\in(0,2)$， $f'(x)=0$，结论显然成立；

②若 $M>0$，不妨设 $|f(x_0)|=\max\{|f(x)|\}=M$，其中 $x_0\in(0,2)$

由拉格朗日中值定理可得： $\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=f'(\xi_1)$， $\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=f'(\xi_2)$，

其中 $\xi_1\in(0,x_0)$， $\xi_2\in(x_0,2)$

即： $|f'(\xi_1)|=\dfrac{|f(x_0)|}{x_0}=\dfrac{M}{x_0}$， $|f'(\xi_2)|=\dfrac{|f(x_0)|}{2-x_0}=\dfrac{M}{2-x_0}$

若 $x_0\in(0,1)$，则有 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{x_0}\ge M$ 成立

若 $x_0\in(1,2)$，则 $2-x_0\in(0,1)$，则有 $|f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-x_0}\ge M$ 成立

（2）反证：若 $M>0$，由（1）可得，至少存在一点 $\xi\in(0,2)$ 使得 $|f'(\xi)|\ge M$，此时必有 $x_0=1$；

则 $M=|f(1)|=\left|\int_0^1 f'(x)dx\right|\le\int_0^1|f'(x)|dx\le\int_0^1 M\,dx=M$

$M=|f(1)|=\left|\int_1^2 f'(x)dx\right|\le\int_1^2|f'(x)|dx\le\int_1^2 M\,dx=M$

所以在区间 $(0,1)$ 必有 $\int_0^1|f'(x)|dx=M$ 成立；在区间 $(1,2)$ 上必有 $\int_1^2|f'(x)|dx=M$ 上成立

即可得 $f'(x)=\pm M$，此时与 $f(0)=f(2)=0$ 矛盾；

或可得 $f'(x)=\begin{cases}\pm M & 0<x<1\\ \mp M & 1<x<2\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导，与已知矛盾，故 $M=0$

（20）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$，经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 变为

$f(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\ge b$。

求（1）求 a,b 的值；

（2）求正交矩阵 Q.

【解析】（1）由题意可得，$A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$ 相似且合同，所以 $a+b=5$，$ab=4$

解得 $a=4,b=1$

（2）$A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=0$

对于矩阵 A，属于 $\lambda_1=5$ 的特征向量为 $\xi_1=(1,-2)^T$

属于 $\lambda_2=0$ 的特征向量为 $\xi_2=(2,1)^T$

令 $Q_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$Q_1^TAQ_1=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}$

对于矩阵 $B=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$，属于 $\lambda_1=5$ 的特征向量为 $\eta_1=(2,1)^T$

属于 $\lambda_2=0$ 的特征向量为 $\eta_2=(1,-2)^T$

令 $Q_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$Q_2^TBQ_2=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}$

故有 $Q_1^TAQ_1=Q_2^TBQ_2$，即 $Q_2Q_1^TAQ_1Q_2^T=B$

所以 $Q=Q_1Q_2^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&-4\end{pmatrix}$

（21）（本题满分 11 分）

设 A 为二阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量，

（1）证明 P 是可逆矩阵；

（2）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【解析】（1）因为 α 是非零向量且不是 A 的特征向量，所以 α 与 $A\alpha$ 线性无关（若线性相关，则 $A\alpha=\lambda\alpha$ 与已知矛盾），故 P 的列向量线性无关，则 P 是可逆矩阵

（2）由已知可得，$AP=A(\alpha,A\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha)=(A\alpha,-A\alpha+6\alpha)=(\alpha,A\alpha)\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$

所以$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 6\\1 & -1\end{pmatrix}$，记$\begin{pmatrix}0 & 6\\1 & -1\end{pmatrix}=B$，则$A$与$B$相似

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\-1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda-2)(\lambda+3)$$

故A与B的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-3$，因为特征值互异，所以A与对角矩阵相似

（22）（本题满分 11 分）

已知二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\big|0<y<\sqrt{1-x^2}\}$上服从均匀分布，且

$$Z_1=\begin{cases}1, X-Y>0\\0, X-Y\le 0\end{cases},\quad Z_2=\begin{cases}1, X+Y>0\\0, X+Y\le 0\end{cases}$$

（1）求二维随机变量(Z_1,Z_2)的概率分布；

（2）求(Z_1,Z_2)的相关系数.

【解析】（1）由已知可得：$P\{Z_1=0,Z_2=0\}=P\{X+Y\le 0;X-Y\le 0\}=\frac{1}{4}$；

$$P\{Z_1=1,Z_2=0\}=P\{X+Y\le 0;X-Y>0\}=0$$

$$P\{Z_1=0,Z_2=1\}=P\{X+Y>0;X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$$

$$P\{Z_1=1,Z_2=1\}=P\{X+Y>0;X-Y>0\}=\frac{1}{4}$$

（2）

Z_1	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$EZ_1=\frac{1}{4}$，$DZ_1=\frac{3}{16}$

Z_2	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$EZ_2=\frac{3}{4}$，$DZ_2=\frac{3}{16}$

Z_1Z_2	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(Z_1Z_2)=\frac{1}{4}$，$COV(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-EZ_1EZ_2=\frac{1}{16}$

所以$\rho=\frac{\operatorname{cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\frac{1}{3}$

（23）（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命T的分布函数为$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，其中

θ,m为参数且大于 0

（1）求概率$P\{T>t\}$，$P\{T>t+s|T>s\}$，其中$S>0,T>0$；

（2）任取n个这种元件做寿命试验，测得他们的寿命分别为$t_1,\cdots,t_n$，若m已知，求θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

【解析】（1）$P\{T>t\}=1-P\{T\leq t\}=1-F(t)=1-[1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}]=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$；

$$P\{T>t+s|T>s\}=\frac{P\{T>s,T>t+s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>t+s\}}{P\{T>s\}}=\frac{e^{-\left(\frac{t+s}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=e^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{t+s}{\theta}\right)^m}$$

（2）先求密度函数$f(t)=F'(t)=\begin{cases}\frac{m}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{m-1}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{mt^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

故似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(\theta,t_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{mt_i^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m} & t_i\geq 0\\ 0, & t_i<0\end{cases}$

当$t_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n)$时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{mt_i^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m}=\frac{m^n(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}}{\theta^{mn}}e^{-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$

$$\ln L(\theta)=n\ln m+(m-1)(t_1t_2\cdots t_n)-mn\ln\theta-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+\frac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}t_i^m=0$$

解得$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$