2020 年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题及解析

一、选择题：**1−8** 小题，每小题 **4** 分，共 **32** 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小中最高阶的是（　　）

（A）$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$　　（B）$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$　　（C）$\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt$　　（D）$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}dt$

【答案】（D）

【解析】先对各个选项求导，再比较.

（A）导数为 $e^{x^2}-1\sim x^2$，因此（A）为 3 阶无穷小；

（B）导数为 $\ln(1+\sqrt{x^3})\sim x^{\frac{3}{2}}$，因此（B）为 $\frac{5}{2}$ 阶无穷小；

（C）导数为 $\sin(\sin x)^2\cos x\sim x^2$，因此（C）为 3 阶无穷小；

（D）导数为 $\sqrt{\sin^3(1-\cos x)}\sin x\sim\frac{1}{2\sqrt{2}}x^4$，因此（D）为 5 阶无穷小.故选（D）.

（2）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（C）

【解析】可能的间断点为 $-1,0,1,2$；当 $x\to -1$ 时，$f(x)\to\infty$；当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to -\frac{1}{2}e^{-1}$；当 $x\to 1^+$ 时，$f(x)\to\infty$；当 $x\to 2$ 时，$f(x)\to\infty$.故选（C）.

（3）$\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$（　　）

（A）$\frac{\pi^2}{4}$　　（B）$\frac{\pi^2}{8}$　　（C）$\frac{\pi}{4}$　　（D）$\frac{\pi}{8}$

【答案】（A）

【解析】令 $\sqrt{x}=\sin t$，则 $x=\sin^2 t$，$dx=2\sin t\cos tdt$，

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t\cos t}2\sin t\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2tdt=t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$.故选（C）.

（4）已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$，当 $n\geq 3$ 时，则 $f^{(n)}(0)=$（　　）

（A）$-\dfrac{n!}{n-2}$ （B）$\dfrac{n!}{n-2}$ （C）$-\dfrac{(n-2)!}{n}$ （D）$\dfrac{(n-2)!}{n}$

【答案】（A）

【解析】$f(x)=x^2\ln(1-x)=-x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，因此其泰勒展开中关于 x^n 的系数应为 $-\dfrac{1}{n-2}$，因此易得答案为 $-\dfrac{n!}{n-2}$.故选（A）.

（5）关于函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy, xy\neq 0\\ x, y=0\\ y, x=0\end{cases}$，给出下列结论：

①$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$；②$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$；③$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$；④$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$.

其中正确的个数为（ ）

（A）4 （B）3 （C）2 （D）1

【答案】（B）

【解析】对于①，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x-0}=1$，因此①正确；

对于②，$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}-\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}-1}{y-0}$，

其中 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy-y}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x}y$ 不存在，因此②错误；

对于③，$|xy-0|=|x||y|$，$|x-0|=|x|$，$|y-0|=|y|$，从而 $(x,y)\to(0,0)$ 时，

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，所以③ 正确.

对于④，$\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\begin{cases}0, xy\neq 0\text{或}y=0\\ y, x=0\end{cases}$，从而 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$，④正确.故选（B）.

（6）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$，则（ ）

（A）$\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$ （B）$\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$ （C）$\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$ （D）$\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

【答案】（B）

【解析】法一：令 $f(x)=e^{2x}$，可排除（A）、(C)、(D)；

法二：构造辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，$F'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

由题知，$F'(x)>0$，从而 $F(x)$ 单增，因此 $F(0)>F(-1)$，可得 $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$.故选（B）.

（7）设 4 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组，A^* 为 A 的伴随矩阵，则方程组 $A^*x=0$ 的通解为（　　）

（A）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

（B）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

（C）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

（D）$x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

【答案】（C）

【解析】因为 A 不可逆，且 a_{12} 代数余子式 $A_{12}\neq 0$，则 $r(A)=3$，故 $r(A^*)=1$，因为

$A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\neq 0$，故 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关（部分无关，整体无关）.故选（C）.

（8）设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的属于特征值为 1 的线性无关的特征向量，α_3 为 A 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为（　　）

（A）$(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$　　（B）$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

（C）$(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$　　（D）$(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

【答案】（D）

【解析】由已知可得 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，$A(-\alpha_3)=-A(\alpha_3)=-(-\alpha_3)$，$A\alpha_2=\alpha_2$

且 $\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2$ 线性无关，故选（D）.

二、填空题：9−14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________.

【答案】$-\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{1}{t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{t})\dfrac{1}{dx/dt}=-\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$，

因此$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

（10）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=$______.

【答案】$\dfrac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$

【解析】交换积分次序

$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{x^3+1}d(x^3+1)=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1).$$

（11）设$z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则$dz|_{(0,\pi)}=$______.

【答案】$(\pi-1)dx-dy$

【解析】$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\left.\dfrac{dz(x,\pi)}{dx}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{d\arctan[x\pi+\sin(x+\pi)]}{dx}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\pi+\cos(x+\pi)}{1+[x\pi+\sin(x+\pi)]^2}\right|_{x=0}=\pi-1$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=\left.\frac{dz(0,y)}{dy}\right|_{y=\pi}=\left.\frac{d\arctan[\sin y]}{dy}\right|_{y=\pi}=\left.\frac{\cos y}{1+[\sin y]^2}\right|_{y=\pi}=-1.$$

（12）斜边长为$2a$的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，设重力加速度为g，水的密度为ρ，则该平板一侧所受的水压力为______.

【答案】$\dfrac{1}{3}\rho g a^3$

【解析】以水平面向右为x轴，以垂直于三角板斜边向上为y轴建立直角坐标系，则此时，三角板右斜边所在的直线方程为$y=x-a$，取微元dy，则此时$dF=-2xy\rho gdy=-2\rho gy(y+a)dy$，

则一侧的压力$F=\int_{-a}^0-2\rho gy(y+a)dy=-2\rho g(\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{ay^2}{2})\Big|_{-a}^0=\dfrac{1}{3}\rho g a^3$.

（13）设$y=y(x)$满足$y''+2y'+y=0$，且$y(0)=0,y'(0)=1$，则$\int_0^{+\infty}y(x)dx=$______.

【答案】1

【解析】由方程可得特征方程为$\lambda^2+2\lambda+1=0$，则特征方程的根为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-1$，则微分方程的通解为$y=(c_1+c_2x)e^{-x}$，由$y(0)=0$，$y'(0)=1$可得$c_1=0,c_2=1$，则$y(x)=xe^{-x}$，

则$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$.

（14）行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

【答案】$a^2(a^2-4)$

【解析】$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ a & a & 1 & -1 \\ a & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$

$= a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$.

三、解答题：**15−23** 小题，共 **94** 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

【解析】$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{(1+x)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{1+x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{1+x})^{-(1+x)\cdot\frac{x}{-(1+x)}}=e^{-1}$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}]=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x}{(1+\frac{1}{x})^x}-\dfrac{x}{e}]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ex-x(1+\frac{1}{x})^x}{e(1+\frac{1}{x})^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ex-x(1+\frac{1}{x})^x}{e^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^2}[e-e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^2}[e-e^{1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e}[1-e^{-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}]=\dfrac{1}{2e}$，

故所求斜渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{2e}$.

（16）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1, g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【解析】由 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，可得 $f(0)=0$；易得 $x=0$ 时，$g(0)=0$，

当 $x\neq 0$ 时，令 $xt=u$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，所以

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，因此 $g(x)$ 连续，

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2},$$

所以 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, x=0\end{cases}$，

因此 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}]=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g'(0)$，

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（17）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

【解析】先计算驻点：$f_x'(x,y)=3x^2-y$，$f_y'(x,y)=24y^2-x$，

解得驻点 $x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{12}$ 和 $x=y=0$，

又因为 $A=f_{xy}''(x,y)=6x$，$B=f_{xy}''(x,y)=-1$，$C=f_{yy}''(x,y)=48y$，

①当 $x=y=0$ 时，$A=0,B=-1,C=0$，则 $AC-B^2<0$，所以 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点；

②当 $x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{12}$，$A=1,B=-1,C=4$，则 $AC-B^2>0,A>0$，所以 $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点，且 $f(x,y)$ 的极小值为 $f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$.

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且满足 $2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f(x)$，并求曲线 $y=f(x)$，$y=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

【解析】用 $\frac{1}{x}$ 去替换 $2f(x)+x^2 f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ 中的 x 有：

$$\begin{cases} 2f(x)+x^2 f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}} \\ 2f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{\frac{1}{x}+2}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}，得\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}，$$

$V_x=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\pi xydy=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\pi\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy$，令 $y=\sin t$，原式可化为

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\pi\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi^2}{6}$.

（19）（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=1$，$x=2$，$y=x$ 与 x 轴围成，计算 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy$.

【解析】令 $x=r\sin\theta, y=r\cos\theta$；$0<\theta<\frac{\pi}{4}$；$\sec\theta<r<2\sec\theta$，

因此：$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\frac{r}{r\cos\theta}rdr=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\cos\theta}d\theta$

$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta d\tan\theta=\frac{3}{2}\tan\theta\sec\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\sec\theta d\theta$

$=\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^3\theta-\sec\theta)d\theta=\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta d\theta$

$=\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{3}{4}\ln(\sqrt{2}+1)$.

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$.

（1）证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

（2）证明：存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$

【解析】（1）令 $F(x)=f(x)+(x-2)e^{x^2}$，则 $F(1)=-e<0$，$F(2)=\int_1^2 e^{t^2}dt>0$

由零点定理知，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

（2）令 $g(x)=\ln x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$，

由柯西中值定理知，存在$\eta \in (1,2)$，使得$\dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$，

即$\dfrac{f(2)}{\ln 2}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$，故$f(2)=\ln 2\cdot \eta e^{\eta^2}$.

（21）（本题满分 11 分）

设函数$f(x)$可导，且$f'(x)>0$，曲线$f(x)$（$x\ge 0$）经过坐标原点O，其上任意一点M处的切线与x轴交于T，又MP垂直于x轴于点P，已知由曲线$y=f(x)$，直线MP以及x轴所围图形的面积与ΔMTP面积之比恒为$3:2$，求满足上述条件的曲线的方程.

【解析】设切点$M(x,y)$，则经过M点的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$，

令$Y=0$，则$X=x-\dfrac{y}{y'}$，故$T(x-\dfrac{y}{y'},0)$，

曲线$y=f(x)$，直线MP以及x轴围成面积为$S_1=\int_0^x y(t)dt$，

ΔMTP的面积$S_2=\dfrac{1}{2}y[x-(x-\dfrac{y}{y'})]=\dfrac{y^2}{2y'}$，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{2}$，则$\int_0^x y(t)dt=\dfrac{3}{4}\dfrac{y^2}{y'}$，

两边同时求导，得：$3yy''=2(y')^2$，令$y'=p$，可得$y''=p\dfrac{dp}{dy}$，代入有$p=C_1y^{\frac{2}{3}}$，

即$\dfrac{dy}{dx}=C_1y^{\frac{2}{3}}$，从而解得$3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$.

因曲线$y=f(x)$过原点，即$f(0)=0$，即$C_2=0$，故$y=Cx^3(C>0)$.

（22）（本题满分 11 分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$经过可逆线性变换

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$得$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（1）求a的值；

（2）求可逆矩阵P.

【解析】（1）令$A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，则$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，$g(y_1,y_2,y_3)=y^TBy$，

由题意可得，A与B合同，故A与B的正负惯性指数相同，

由$|\lambda E-B|=0$，解得B的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=4$，

而 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -a\\ -a & \lambda-1 & -a\\ -a & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2a-1 & -a & -a\\ \lambda-2a-1 & \lambda-1 & -a\\ \lambda-2a-1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2a-1)\begin{vmatrix}1 & -a & -a\\ 1 & \lambda-1 & -a\\ 1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2a-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda+a-1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda+a-1\end{vmatrix}=(\lambda-2a-1)(\lambda+a-1)^2$，

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2a+1,\lambda_2=\lambda_3=1-a$，

故有 $2a+1=0$ 且 $1-a>0$，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$；

（2）配方法：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3=(x_1-\dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{1}{2}x_3)^2+\dfrac{3}{4}(x_2-x_3)^2$，

令 $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，二次型化为 $f(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+\dfrac{3}{4}z_2^2$，

而 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$，

令 $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，二次型化为 $f(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+\dfrac{3}{4}z_2^2$，

故 $P=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

（23）（本题满分 11 分）

设 A 为二阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量，

（1）证明 P 为可逆矩阵；

（2）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【解析】(1)因为 α 是非零向量且不是 A 的特征向量，所以 α 与 $A\alpha$ 线性无关(若线性相关，则 $A\alpha=\lambda\alpha$ 与已知矛盾)，故 P 的列向量线性无关，则 P 是可逆矩阵；

（2）由已知可得，$AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, -A\alpha + 6\alpha) = (\alpha, A\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，

所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，记 $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B$，则 A 与 B 相似，

$|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$，

故 A 与 B 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$，因为特征值互异，所以 A 相似于对角矩阵.